Ueber eine Classe von Integralen mit geschlossener Integrationscurve.

Von

L. Pochhammer in Kiel.

Hat eine mehrdeutige Function $F(w)$ die Form

$$F(w) = (w - \alpha_\nu)^{\beta_\nu} f(w),$$

wo $f(w)$ in der Umgebung des Punktes $w = \alpha_\nu$ eindeutig ist, so besitzt das Integral

$$\int_{\alpha_\nu}^{x} (w - x)^\lambda F(w)\, dw,$$

in welchem x gleichzeitig als Parameter und als obere Grenze vorkommt, die Eigenschaft, den constanten Factor $e^{2\pi i(\beta_\nu + \lambda)}$ aufzunehmen, wenn x einen positiven Umlauf um den Punkt α_ν ausführt*). Dieser Satz gestattet eine Erweiterung, indem gewissen Integralen mit geschlossener Integrationscurve eine ähnliche Eigenschaft auch im Fall der Umkreisung mehrerer singulärer Punkte zukommt. Man betrachtet im Folgenden ein Integral $\omega(x)$ der Function $(w - x)^\lambda F(w)$, genommen nach w, dessen Integrationsweg S in dem Punkte x beginnt und endigt und eine beliebige Anzahl von singulären Punkten der Function $F(w)$ umschliesst. Die Curve S, die sich selbst nicht schneiden möge, begrenze ein Flächenstück, auf welchem die singulären Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ der Function $F(w)$ liegen, und $F(w)$ habe die Form

$$(1)\qquad F(w) = (w - \alpha_1)^{\beta_1} (w - \alpha_2)^{\beta_2} \ldots (w - \alpha_m)^{\beta_m} H(w),$$

wo $H(w)$ in der Umgebung der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ eindeutig bleibt. Beschreibt dann die Variable x einen positiven Umlauf um

---

*) Cfr. die Abh. des Herrn Hossenfelder „Ueber die Integration einer linearen Differentialgleichung n^{ter} Ordnung" im 4^{ten} Bande dieser Annalen, sowie die Abh. des Verfassers „Ueber eine Classe von Functionen einer complexen Variablen, welche die Form bestimmter Integrale haben" (§ 2) im 104^{ten} Bande des Crelle'schen Journals.

das ganze von der Curve S eingeschlossene Flächenstück, so dass die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, jedoch keine anderen singulären Punkte der Function $F(w)$, umkreist werden, so nimmt das Integral $\omega(x)$, wie in dem nachstehenden § 1 gezeigt wird, den Factor

$$e^{2\pi i(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m+\lambda)}$$

auf. Der Satz lässt sich auf mehrfache bestimmte Integrale von entsprechender Form ausdehnen. Der reelle Bestandtheil der Constante $\lambda + 1$ wird in § 1 als positiv vorausgesetzt, da das Integral $\omega(x)$ sonst divergent ist.

Genügt λ der letzteren Bedingung nicht, so bildet man in der Art, wie der Verfasser in dem Aufsatze „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf"*) angegeben hat, ein Integral $\Omega(x)$, dessen Integrationsweg aus zwei Umläufen (einem positiven und einem negativen) um den Punkt x und zwei Umläufen um die Gesammtheit der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ besteht. Dieses Integral, welches in § 2 behandelt wird, nimmt ebenfalls, wenn x einen positiven Umlauf um $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ macht, den Factor $e^{2\pi i(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m+\lambda)}$ auf. Ist der reelle Theil von $\lambda + 1$ positiv, so unterscheiden sich $\omega(x)$ und $\Omega(x)$ nur durch einen constanten Factor. Das Integral $\Omega(x)$ behält für jeden endlichen Werth von x, der nicht zu den singulären Werthen von $F(w)$ gehört, und für beliebige Werthe der in $F(w)$ vorkommenden Constanten einen bestimmten Sinn. Das in § 2 abgeleitete Resultat ist im Falle $m = 1$ zugleich eine Ergänzung des anfänglich genannten, auf das Integral $\int_{\alpha_\nu}^{x} (w - x)^\lambda F(w)\, dw$ bezüglichen Satzes, da auch das letztere durch ein Integral mit doppeltem Umlauf zu ersetzen ist, sobald die reellen Theile der Constanten $\beta_\nu + 1$ und $\lambda + 1$ negativ werden.

---

*) Diese Annalen, Band 35, pag. 470.

Ich darf nicht unterlassen, zu erwähnen, dass Herr C. Jordan in dem bereits im Jahre 1887 veröffentlichten 3ten Bande seines „Cours d'Analyse de l'École Polytechnique" (Paris, Gauthier-Villars), der mir bisher unbekannt geblieben war, neben anderen Integralen mit geschlossenem Integrationswege auch Integrale mit Doppelumlauf anwendet (§ 193 u. f.). Ferner wird in § 208 des genannten Bandes gezeigt, dass das Integral der Function $t^{p-1}(1-t)^{q-1}$, wenn man als Integrationsweg einen Doppelumlauf um die Punkte 0 und 1 wählt, gleich dem Producte aus $(1 - e^{2\pi i p})(1 - e^{2\pi i q})$ und dem Euler'schen Integrale erster Art ist. In Bezug auf einen Theil der in meinen Abhandlungen „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" und „Zur Theorie der Euler'schen Integrale" (Band 35 dieser Annalen, pag. 495) enthaltenen Sätze — die ich übrigens in druckfertiger Form schon im Frühjahr 1887 Fachgenossen vorgelegt habe — kommt also Herrn C. Jordan die Priorität zu.

§ 1.

Man verbinde die singulären Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ der in (1) angegebenen Function $F(w)$ durch eine gebrochene, sich selbst nicht schneidende Linie $\mathfrak{A}$ (Fig. 1), so dass eine Umkreisung der Linie $\mathfrak{A}$ mit der Umkreisung der m Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ identisch ist. Dann kann das in der Einleitung definirte Integral $\omega(x)$ — nach § 1 des erwähnten Aufsatzes „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf" (Bd. 35 dieser Ann.) — kurz durch

$$(2) \qquad \omega(x) = \overline{\int_x^{(\mathfrak{A})}} (w - x)^\lambda F(w)\, dw,$$

oder, was dasselbe ist, durch

$$\omega(x) = \overline{\int_x^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}} (w - x)^\lambda F(w)\, dw$$

bezeichnet werden.

Da der reelle Theil der Constante $\lambda + 1$ als positiv vorausgesetzt wird, so tragen die dem Punkte x unmittelbar benachbarten Theile des Integrationsweges nur unendlich wenig zum Werthe des Integrals $\omega(x)$ bei. Man darf also ein unendlich kleines Stück der Curve S nahe dem Punkte x fortlassen und auf diese Weise die geschlossene Integrationscurve in eine offene verwandeln. An der unteren Integralgrenze werde ein bestimmter Werth der Potenz $(w - x)^\lambda$ und ein bestimmter Werth der Function $F(w)$ fixirt. Derjenige Ausdruck, in welchen der gewählte Zweig der Function $F(w)$ übergeht, wenn w längs S den Umlauf um $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ausgeführt hat, soll durch $F_1(w)$ bezeichnet werden.

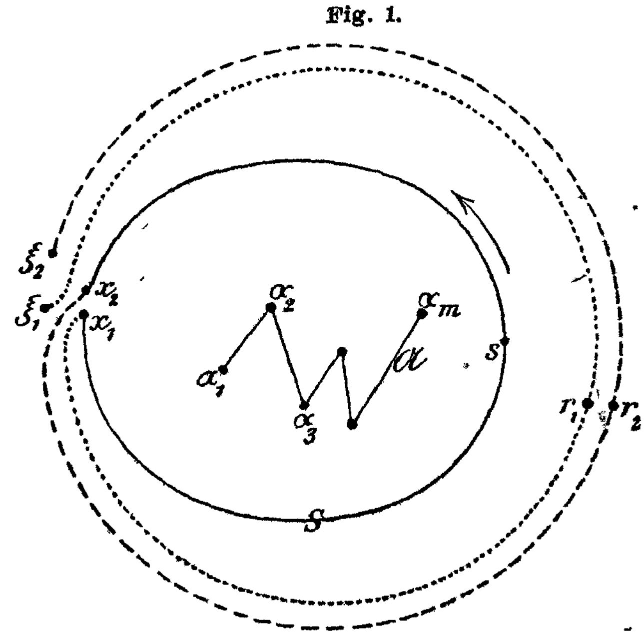
Es sei x_1 ein beliebiger Werth von x, ferner x_2 ein von x_1 unendlich wenig verschiedener Werth. Eine Curve $x_1 s x_2$ (Fig. 1), die unter Umkreisung der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ vom Punkte x_1 in positiver Drehungsrichtung zum Punkte x_2 führt, wird wiederum kurz durch S bezeichnet. Die Function $\omega(x_1)$ ist (abgesehen von dem unendlich kleinen Betrag, welcher dem kurzen Bogenstück $x_2 x_1$ entspricht) gleich dem längs dieser Curve S genommenen Integral

$$\omega(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} (w - x_1)^\lambda F(w)\, dw.$$

Es handelt sich darum, die stetigen Aenderungen von $\omega(x)$ in dem Falle zu ermitteln, dass die Grösse x vom Punkte x_1 aus einen positiven Umlauf um die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ macht. Da x sowohl untere als obere Integralgrenze in $\omega(x)$ ist, so tritt der Weg, den x durchläuft, doppelt zu dem anfänglichen Integrationswege von (3) hinzu; ausserdem ändert sich, wenn x variirt, die zu integrirende Function, da sie x als Parameter enthält.

Von x_1 aus werde (im positiven Sinne) eine ausserhalb S bleibende Curve $x_1 r_1 \xi_1$ bis zu einem dicht bei x_1 liegenden Punkte ξ_1, und ebenso von x_2 aus eine der letzteren benachbarte Curve $x_2 r_2 \xi_2$ gezogen (Fig. 1). Die vier Punkte x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 sollen einander unendlich nahe sein. Die Curven $x_1 r_1 \xi_1$ und $x_2 r_2 \xi_2$, die man schliesslich zusammenfallen lässt, geben den Weg der Variable x an. Es wird vorausgesetzt, dass auf dem Flächenstück zwischen $x_1 s x_2$ und $x_2 r_2 \xi_2$ keine singulären Punkte der Function $F(w)$ liegen. Betrachtet man für irgend einen der Curve $x_1 s x_2$ angehörigen Punkt w die Potenz $(w - x)^\lambda$, während x die Curve $x_1 r_1 \xi_1$ durchläuft, so besteht, von einem unendlich kleinen Unterschied abgesehen, die Gleichung

Fig. 1.



(4) $$(w - \xi_1)^\lambda = e^{2\pi i \lambda}(w - x_1)^\lambda,$$

da x den Punkt w im positiven Sinne umkreist hat.

Man bezeichnet durch $\omega(\xi_1)$ das Integral

$$\omega(\xi_1) = \int_{\xi_1}^{\xi_2} (w - \xi_1)^\lambda F(w)\, dw,$$

dessen Integrationsweg die Linie $\xi_1 r_1 x_1 s x_2 r_2 \xi_2$ ist. Die Grösse $\omega(\xi_1)$ stellt denjenigen Werth von $\omega(x)$ dar, welcher aus $\omega(x_1)$ schliesslich erhalten wird, wenn x die Curve $x_1 r_1 \xi_1$ durchläuft. Der Integrationsweg von $\omega(\xi_1)$ zerfällt in die drei Abschnitte $\xi_1 r_1 x_1$, $x_1 s x_2$ und $x_2 r_2 \xi_2$. Für die Punkte w des mittleren Abschnittes $x_1 s x_2$, welcher den Integrationsweg von $\omega(x_1)$ angiebt, ist die Gleichung (4) anzuwenden; die Werthe der Function $F(w)$ sind in diesen Punkten die nämlichen, wie bei dem Integral $\omega(x_1)$. Das in $\omega(\xi_1)$ enthaltene Integral längs der Curve $x_1 s x_2$ hat also den Werth $e^{2\pi i\lambda}\omega(x_1)$. Jedoch hebt sich dieser Bestandtheil von $\omega(\xi_1)$, wie eine einfache Ueberlegung zeigt, gegen das Integral längs der Curve $\xi_1 r_1 x_1$ fort.

Da in $\omega(\xi_1)$ der Punkt x_1 kein singulärer Punkt der zu integrirenden Function ist, so kann der Integrationsweg von $\omega(\xi_1)$ in der Art vereinfacht werden, dass statt der zwei ersten Abschnitte $\xi_1 r_1 x_1$ und $x_1 s x_2$ der geradlinige, unendlich kleine Weg $\xi_1 x_2$ gewählt wird. Letzterer liefert aber (da $\lambda + 1 > 0$ ist) nur einen zu vernachlässigenden

Beitrag zu dem Werthe von $\omega(\xi_1)$. Mithin ist $\omega(\xi_1)$ gleich dem längs $x_2 r_2 \xi_2$ genommenen Integral.

Im Punkte $w = x_2$ und in den folgenden Punkten w der Curve $x_2 r_2 \xi_2$ hat die zu integrirende Function den Werth

$$(w - \xi_1)^\lambda F_1(w), \quad = e^{2\pi i\lambda}(w - x_1)^\lambda F_1(w).$$

Denn der jetzt anzuwendende Zweig der Function $F(w)$ wird durch $F_1(w)$ bezeichnet, und die Gleichung (4) bleibt gültig, da die Werthe der Potenz $(w - \xi_1)^\lambda$ für die Punkte w der Curve $x_2 r_2 \xi_2$ sich stetig an die Werthe anschliessen, die zur Curve $x_1 s x_2$ gehören. Demnach wird für $\omega(\xi_1)$ die Gleichung

(5) $$\omega(\xi_1) = e^{2\pi i\lambda} \int_{x_2}^{\xi_2} (w - x_1)^\lambda F_1(w)\, dw$$

erhalten.

Es soll nun die speciellere Voraussetzung gemacht werden, dass $F(w)$ eine Function sei, welche den constanten Factor $e^{2\pi i\sigma}$ aufnimmt, wenn w einen positiven Umlauf um die singulären Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ macht. Man setzt also

(6) $$F_1(w) = e^{2\pi i\sigma} F(w).$$

Dann ergiebt sich für $\omega(\xi_1)$ der Ausdruck

$$\omega(\xi_1) = e^{2\pi i(\sigma+\lambda)} \int_{x_2}^{\xi_2} (w - x_1)^\lambda F(w)\, dw.$$

In dem rechts stehenden Integral kann der Integrationsweg $x_2 r_2 \xi_2$ durch den ursprünglichen Integrationsweg S ersetzt werden, da auf dem Flächenstück zwischen den beiden Wegen keine singulären Punkte liegen. Auf diese Weise entsteht, wenn man die vier Punkte x_1, x_2, ξ_1, ξ_2 schliesslich in einen Punkt zusammenfallen lässt, die Gleichung

(7) $$\omega(\xi_1) = e^{2\pi i(\sigma+\lambda)} \omega(x_1).$$

Die Function $F(w)$ genügt der Bedingung (6) zunächst, wenn sie die Form

(8) $$F(w) = (w - \alpha_1)^{\beta_1} (w - \alpha_2)^{\beta_2} \ldots (w - \alpha_m)^{\beta_m} H(w)$$

hat, woselbst $H(w)$ eine in der Umgebung der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ eindeutige Function von w bedeutet. In diesem Falle ist

(9) $$\omega(x) = \int_x^{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)} (w - x)^\lambda (w - \alpha_1)^{\beta_1} (w - \alpha_2)^{\beta_2} \ldots (w - \alpha_m)^{\beta_m} H(w)\, dw,$$

und

$$\sigma = \beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m,$$

wodurch die Gleichung (7) in

(10) $$\omega(\xi_1) = e^{2\pi i(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m+\lambda)} \omega(x_1)$$

übergeht. Es ist hiermit der in der Einleitung angegebene Satz bewiesen, dass das Integral (9) den constanten Factor $e^{2\pi i(\beta_1+\beta_2+\cdots+\beta_m+\lambda)}$

aufnimmt, wenn x die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ im positiven Sinne umkreist. Die Constanten $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_m$ sind keinen Beschränkungen unterworfen, und die Constante λ nur derjenigen, dass der reelle Theil von $\lambda + 1$ positiv sei.

Die Formeln (6) und (7) finden sodann auch auf den Fall Anwendung, wo die Function $F(w)$ selbst ein Integral von der Form (9) ist oder ein solches als Factor enthält. Es sei $\chi(w)$ ein zu (9) analoges Integral

$$(11) \quad \chi(w) = \int_w^{\overline{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}} (v - w)^\mu (v - \alpha_1)^{\gamma_1} (v - \alpha_2)^{\gamma_2} \ldots (v - \alpha_m)^{\gamma_m} h(v)\, dv$$

und $F(w)$ die Function

$$(12) \quad F(w) = (w - \alpha_1)^{\beta_1} (w - \alpha_2)^{\beta_2} \ldots (w - \alpha_m)^{\beta_m} H(w)\, \chi(w),$$

wo $H(w)$ und $h(v)$ in der Umgebung der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ als eindeutig vorausgesetzt werden. Dann nimmt in (6) die Constante σ den Werth

$$\beta_1 + \beta_2 + \cdots + \beta_m + \gamma_1 + \gamma_2 + \cdots + \gamma_m + \mu$$

an. Folglich hat das Doppelintegral

$$\omega(x) = \int_x^{\overline{(\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m)}} (w - x)^\lambda F(w)\, dw,$$

in welchem $F(w)$ den Ausdruck (12) bedeutet, die Eigenschaft, den Factor

$$e^{2\pi i(\beta_1 + \gamma_1 + \beta_2 + \gamma_2 + \cdots + \beta_m + \gamma_m + \lambda + \mu)}$$

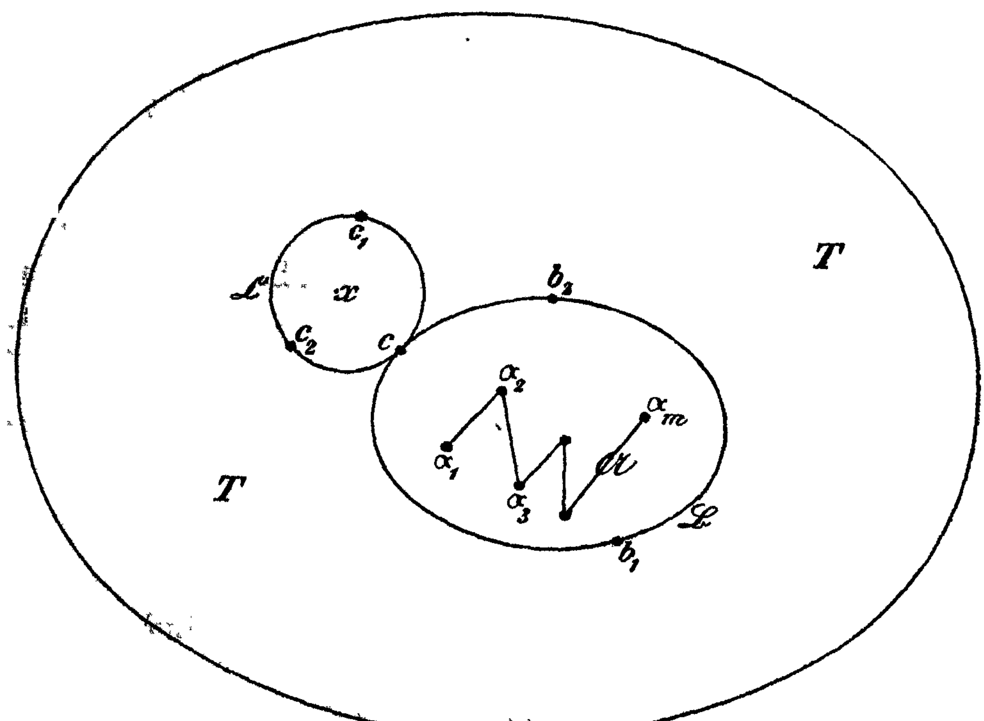
aufzunehmen, wenn x einen positiven Umlauf um die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ ausführt. In der nämlichen Art lässt sich der Satz auf vielfache Integrale von beliebiger Ordnung ausdehnen.

§ 2.

In den vorstehenden Rechnungen ist vorausgesetzt worden, dass der reelle Bestandtheil von $\lambda + 1$ positiv sei. Genügt die Constante λ dieser Bedingung nicht, so wird, weil das Integral (2) divergirt, der in § 1 bewiesene Satz illusorisch. Derselbe kann indessen, wie gezeigt werden soll, als ein specieller Fall eines Satzes, der für jeden Werth von λ einen Sinn behält, aufgefasst werden. Statt des in (2) angegebenen Integrals $\omega(x)$ wird ein anderes Integral $\Omega(x)$ betrachtet, dessen Integrationsweg aus einem Doppelumlauf um x und um $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ besteht, und für das ebenfalls eine Gleichung von der Form (7) gilt.

Man verbinde wiederum die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, welche m beliebige singuläre Argumente der Function $F(w)$ darstellen, durch eine gebrochene, sich nicht schneidende Linie $\mathfrak{A}$ und nenne T ein Flächenstück, welches die ganze Linie $\mathfrak{A}$, jedoch keine anderen singulären Punkte von $F(w)$ als $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ enthält. Auf T befinde sich auch der Punkt x; ferner sei c ein beliebiger Punkt dieser Fläche, welcher keinem der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m, x$ unendlich nahe liegt und der Linie $\mathfrak{A}$ nicht angehört. Von c aus werde innerhalb T eine geschlossene Linie cc_1c_2c gezogen, die man kurz $\mathfrak{C}$ nennt, und die den Punkt x, jedoch keinen der Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ umschliesst. Ausser-

Fig. 2.



dem legt man eine geschlossene Curve cb_1b_2c, welche $\mathfrak{B}$ heissen möge, um die Linie $\mathfrak{A}$; der Punkt x befindet sich ausserhalb $\mathfrak{B}$. Es wird vorausgesetzt, dass die Punkte c_1, c_2, b_1, b_2 derartig liegen, dass der Weg cc_1c_2c den positiven Umlauf um x, der Weg cb_1b_2c den positiven Umlauf um $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ bedeutet (Fig. 2).

Es sei nun $\Omega(x)$ dasjenige nach w genommene Integral der Function

$$(w-x)^\lambda F(w),$$

dessen Integrationscurve sich aus den 4 auf einander folgenden Theilen

$$cc_1c_2c, \quad cb_1b_2c, \quad cc_2c_1c, \quad cb_2b_1c$$

zusammensetzt. Die Curven $\mathfrak{C}$ und $\mathfrak{B}$ werden auf diese Weise zweimal durchlaufen, zuerst beide in positiver, dann beide in negativer Drehungsrichtung. Nach der obengenannten Abhandlung „Ueber ein Integral mit doppeltem Umlauf“ wendet man für $\Omega(x)$ die abgekürzte Bezeichnung

$$(13) \qquad \Omega(x) = \int_c^{(x,\, \mathfrak{A},\, x-,\, \mathfrak{A}-)} (w-x)^\lambda F(w)\, dw$$

an.

Es werde vorausgesetzt, dass die Function $F(w)$ die (in (6) angegebene) Eigenschaft habe, den Factor $e^{2\pi i\sigma}$ aufzunehmen, wenn die Variable w die Linie $\mathfrak{A}$ im positiven Sinne umkreist. Man nennt $\Phi(w)$ die zu integrirende Function in $\Omega(x)$, so dass

$$\Phi(w) = (w-x)^\lambda F(w) \tag{14}$$

ist. An der unteren Grenze $w = c$ des Integrals $\Omega(x)$ wird ein bestimmter Werth $\Phi(c)$ gewählt, der Φ_0 heissen möge. Man bezeichnet ferner durch $N(x)$ das längs cc_1c_2c, sowie durch $M(x)$ das längs cb_1b_2c erstreckte Integral von $\Phi(w)$, falls an der unteren Grenze c dieser Integrale der Werth Φ_0 als Anfangswerth von $\Phi(w)$ genommen wird. Analog zu (2) schreibt man abgekürzt

$$\begin{cases} N(x) = \displaystyle\int_c^{\overline{(x)}} (w-x)^\lambda F(w)\, dw, \\ M(x) = \displaystyle\int_c^{\overline{(\mathfrak{A})}} (w-x)^\lambda F(w)\, dw. \end{cases} \tag{15}$$

Das Integral $\Omega(x)$ lässt sich linear durch $N(x)$ und $M(x)$ ausdrücken. Bildet man die Gleichung

$$\Omega(x) = \Omega_1(x) + \Omega_2(x) + \Omega_3(x) + \Omega_4(x),$$

wo $\Omega_1(x)$, $\Omega_2(x)$, $\Omega_3(x)$, $\Omega_4(x)$ die Integrale längs je eines der 4 Abschnitte des gegebenen Weges

$$cc_1c_2c,\quad cb_1b_2c,\quad cc_2c_1c,\quad cb_2b_1c$$

bedeuten sollen, so ist

$$\Omega_1(x) = N(x), \qquad \Omega_2(x) = e^{2\pi i\lambda} M(x).$$

Denn bei $N(x)$, $M(x)$, $\Omega_1(x)$ hat die Function $\Phi(w)$ an der unteren Integralgrenze den Werth Φ_0, während man an der unteren Grenze von $\Omega_2(x)$, wegen der vorhergehenden Umkreisung des Punktes x, den Werth $e^{2\pi i\lambda}\Phi_0$ für $\Phi(w)$ zu setzen hat. In $\Omega_3(x)$ gehört zur unteren Grenze der Werth $e^{2\pi i(\lambda+\sigma)}\Phi_0$, zur oberen der Werth $e^{2\pi i\sigma}\Phi_0$; am Endpunkte des Integrationsweges von $\Omega_4(x)$ nimmt die Function $\Phi(w)$ wieder den Werth Φ_0 an. Indem man, unter Multiplication mit -1, bei $\Omega_3(x)$ und $\Omega_4(x)$ die Integrationscurve umkehrt, ergiebt sich

$$\Omega_3(x) = -e^{2\pi i\sigma} N(x), \qquad \Omega_4(x) = -M(x),$$

so dass für $\Omega(x)$ die Gleichung

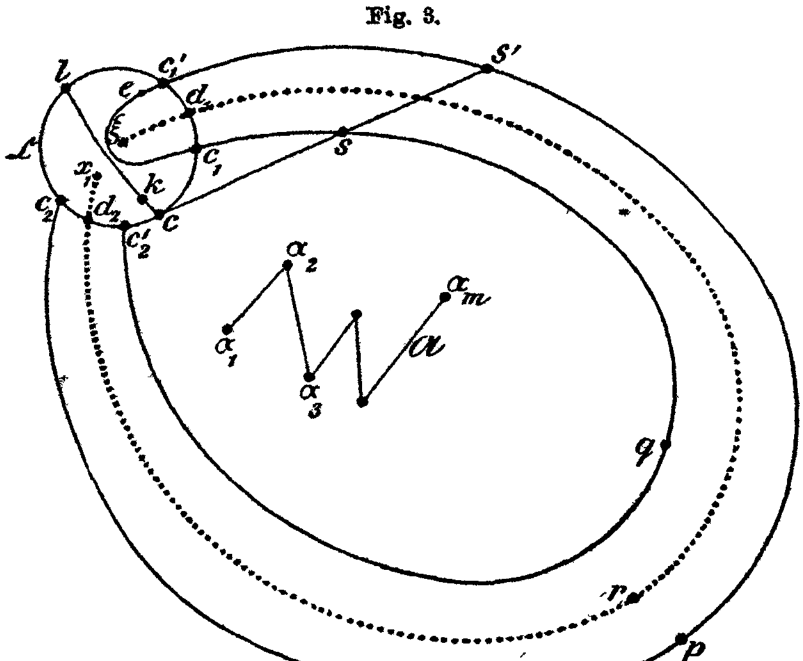
$$\Omega(x) = (1 - e^{2\pi i\sigma}) N(x) + (e^{2\pi i\lambda} - 1) M(x) \tag{16}$$

erhalten wird.

Um zu untersuchen, in welcher Weise die Grösse $\Omega(x)$ sich ändert, wenn die Variable x einen positiven Umlauf um die Linie $\mathfrak{A}$ ausführt, reicht es wegen der Gleichung (16) aus, das Verhalten der Grössen $M(x)$ und $N(x)$ im gedachten Falle festzustellen. Man darf voraussetzen, dass die Curve, auf welcher x bei Umkreisung der Linie $\mathfrak{A}$ fortschreitet, den Integrationsweg von $M(x)$ vollständig umschliesst, da letzterer auf eine der Linie $\mathfrak{A}$ beliebig nahe kommende Curve zusammengezogen werden kann. Dann wird, indem die Variable x ihre Curve durchläuft, in jedem Element des Integrals $M(x)$ die Grösse w von x umkreist, woraus folgt, dass der schliessliche Werth von $M(x)$ gleich dem Product aus dem anfänglichen Werthe und der Constante $e^{2\pi i\lambda}$ ist. Bei $N(x)$ modificirt sich, wenn x in der angegebenen Weise variirt, auch der Integrationsweg, da derselbe der x-Curve ausweichen muss*). Um diese Aenderung zu verfolgen, soll zunächst die x-Curve näher bezeichnet werden.

Es sei, wie im vorigen Paragraphen, x_1 der anfängliche Werth von x, und ξ ein unendlich nahe bei x_1 liegender Punkt; x durchlaufe die Curve $x_1 r \xi$ (die punktirte Linie in Fig. 3), welche den gegebenen Integrationsweg $\mathfrak{C}$ des Integrals $N(x)$ in den Punkten d_2 und d_1 schneiden möge. Nan nennt c_1 und c_1' zwei Punkte von $\mathfrak{C}$, welche nicht weit von d_1 entfernt sind, und zwischen denen d_1 liegt; ebenso

Fig. 3.



befinde sich d_2 zwischen den benachbarten Punkten c_2 und c_2' der Linie $\mathfrak{C}$. Es sei ferner l ein Punkt von $\mathfrak{C}$, welcher c gegenüber liegt, in dem Sinne, dass er von c durch d_1 und durch d_2 getrennt ist. In genauerer Bezeichnung ist $\mathfrak{C}$ hiernach die Curve $c c_1 d_1 c_1' l c_2 d_2 c_2' c$. Wenn x auf der Curve $x_1 r \xi$ bis zum ersten Schnittpunkte d_2 gelangt ist, so muss im Integral $N(x)$ die Variable w den Punkt d_2 umgehen,

*) Cfr. § 1 der obenerwähnten Abhandlung des Verfassers „Ueber eine Classe von Functionen einer complexen Variablen, welche die Form bestimmter Integrale haben“, Crelle's Journal, Bd. 104.

damit die x-Curve und der Integrationsweg sich nicht schneiden, und bei dem weiteren Fortschreiten von x wiederholt sich (wegen der vorausgesetzten Stetigkeit der Aenderung) fortwährend dieses Zurückweichen des Integrationsweges vor der x-Curve. Statt des directen Weges von c_2 zu c_2' (auf der Curve $\mathfrak{C}$) erhält man daher (Fig. 3) für die Variable w einen Weg

$$c_2 p c_1' e c_1 q c_2',$$

welcher den Curvenbogen $d_2 r d_1 \xi$ von beiden Seiten umgiebt. In ähnlicher Weise weicht auch der Theil $c c_1 d_1 c_1' l$ des Integrationsweges $\mathfrak{C}$ dem Wege von x aus. Man ziehe vom Punkte c eine Linie ckl, welche zwischen x_1 und ξ hindurchgeht; dieselbe tritt an Stelle des Weges $c c_1 d_1 c_1' l$, da die x-Curve den Integrationsweg gewissermassen vor sich herschiebt. Also ist, nachdem x die Curve $x d_2 r d_1 \xi$ durchlaufen hat, der ursprüngliche Integrationsweg $c c_1 d_1 c_1' l c_2 d_2 c_2' c$ des betrachteten Integrals durch den Integrationsweg

$$c k l c_2 p c_1' e c_1 q c_2' c$$

zu ersetzen. Die anfänglichen Werthe der Integrale $M(x)$ und $N(x)$ sollen kurz durch $M(x_1)$ und $N(x_1)$, die schliesslichen Werthe derselben durch $M(\xi)$ und $N(\xi)$ bezeichnet werden. Bei $M(x_1)$ und $N(x_1)$ sei wiederum Φ_0 der Werth der Function $\Phi(w)$ an der unteren Integralgrenze $w = c$.

Die Elemente des Integrals $N(x)$, welche der unteren Grenze $w = c$ benachbart sind, nehmen den Factor $e^{2\pi i\lambda}$ auf, wenn x die Curve $x_1 r \xi$ durchläuft. Denn letztere umschliesst die betreffenden Punkte w, so dass (abgesehen von einem unendlich kleinen Unterschiede) die Potenz $(w-\xi)^\lambda$ gleich $e^{2\pi i\lambda}(w-x_1)^\lambda$ zu setzen ist. Wegen der Stetigkeit von $\Phi(w)$ innerhalb des bestimmten Integrals überträgt sich dieser Factor $e^{2\pi i\lambda}$ auf sämmtliche Elemente desselben.

Da im Integral $N(\xi)$ der Punkt x_1 kein singulärer ist, so kann man statt des Abschnitts $c k l c_2 p$ des Integrationsweges einen kürzeren Weg von c nach p wählen. Andererseits sollen gewisse Strecken zum Integrationswege hinzugefügt werden. Es sei s' ein beliebiger Punkt des Integrationsweges zwischen p und c_1' (Fig. 3); man verbindet c und s' durch eine Linie css', welche zwischen $\mathfrak{A}$ und ξ hindurchgeht und den Bogen $c_1 q$ des Integrationsweges in einem Punkte s schneiden möge. Die Einschaltung der zwei Strecken $s'sc$ und css' in den Integrationsweg ändert, da die Integrale längs $s'sc$ und css' sich gegenseitig aufheben, den Werth von $N(\xi)$ nicht. Ebenso darf man zu dem letzten Theil des Integrationswegs noch einmal die Strecken sc und cs (welche unmittelbar auf einander folgen sollen) hinzufügen. Mit Rücksicht hierauf kann der Integrationsweg von $N(\xi)$ aus folgenden 3 Theilen zusammengesetzt werden

$$c k l c_2 p s' s c, \quad c s s' c_1' e c_1 s c, \quad c s q c_2' c.$$

Der erste Theil stellt einen Umlauf um die Linie $\mathfrak{A}$ dar; das Integral längs desselben ist (bis auf eine unendlich kleine Differenz) gleich dem Ausdruck

$$e^{2\pi i\lambda} M(x_1),$$

da es sich von dem oben definirten Integral $M(x_1)$ nur dadurch unterscheidet, dass an der unteren Integralgrenze der Werth der zu integrirenden Function nicht Φ_0, sondern $e^{2\pi i\lambda}\Phi_0$ ist. Das Integral längs $ess'c_1'ec_1sc$ stimmt mit dem Producte

$$e^{2\pi i(\sigma+\lambda)} N(x_1)$$

überein. Denn einerseits ist der singuläre Punkt ξ, der vom Integrationswege umkreist wird, von x_1 nur unendlich wenig verschieden, andererseits ist an der unteren Integralgrenze der Werth $e^{2\pi i(\sigma+\lambda)}\Phi_0$ anzuwenden, weil $F(w)$ in Folge des Umlaufs um die Linie $\mathfrak{A}$ den Factor $e^{2\pi i\sigma}$ aufgenommen hat. Am Anfangspunkte der Strecke $csqc_2'c$ hat $\Phi(w)$ den Werth $e^{2\pi i(\sigma+2\lambda)}\Phi_0$, am Endpunkte derselben den Werth $e^{4\pi i\lambda}\Phi_0$, wie sich aus den Drehungsrichtungen des Umlaufs um ξ und des zweiten Umlaufs um $\mathfrak{A}$ unmittelbar ergiebt. Indem man bei dem Integral längs $csqc_2'c$ unter Aenderung des Vorzeichens den Integrationsweg umkehrt, findet man dasselbe gleich dem Producte

$$-e^{4\pi i\lambda} M(x_1).$$

Auf diese Weise entstehen für $M(\xi)$ und $N(\xi)$ die Gleichungen

$$(17)\qquad \begin{cases} M(\xi) = e^{2\pi i\lambda} M(x_1), \\ N(\xi) = e^{2\pi i\lambda}(1-e^{2\pi i\lambda})M(x_1) + e^{2\pi i(\sigma+\lambda)} N(x_1). \end{cases}$$

Für $\Omega(\xi)$ hat man nach (16) den Ausdruck

$$\Omega(\xi) = (1-e^{2\pi i\sigma})N(\xi) + (e^{2\pi i\lambda}-1)M(\xi).$$

Setzt man für $M(\xi)$ und $N(\xi)$ die in (17) erhaltenen Werthe ein, so entsteht die Gleichung

$$\begin{aligned} \Omega(\xi) = {} & e^{2\pi i(\sigma+\lambda)}(1-e^{2\pi i\sigma})N(x_1) \\ & + e^{2\pi i\lambda}[(1-e^{2\pi i\sigma})(1-e^{2\pi i\lambda}) + e^{2\pi i\lambda} - 1]M(x_1) \end{aligned}$$

oder

$$\Omega(\xi) = e^{2\pi i(\sigma+\lambda)}[(1-e^{2\pi i\sigma})N(x_1) + (e^{2\pi i\lambda}-1)M(x_1)].$$

Da aber nach (16)

$$\Omega(x_1) = (1-e^{2\pi i\sigma})N(x_1) + (e^{2\pi i\lambda}-1)M(x_1)$$

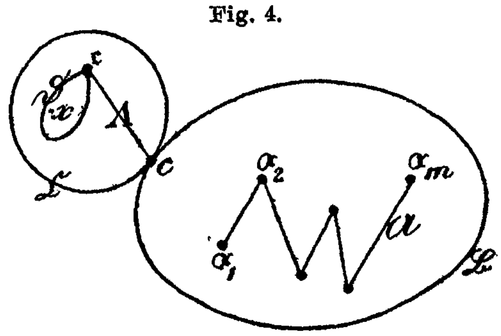
ist, so gelangt man zu der Formel:

$$(18)\qquad \Omega(\xi) = e^{2\pi i(\sigma+\lambda)}\Omega(x_1).$$

Die Function $\Omega(x)$ nimmt also, wie behauptet wurde, den Factor $e^{2\pi i(\sigma+\lambda)}$ auf, wenn die Variable x einen positiven Umlauf um die Punkte $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$ macht.

Der Werth des Integrals $\Omega(x)$ ist von der Wahl des Punktes c, in welchem der Integrationsweg beginnt und endigt, unabhängig. Man beweist dies, indem man der Curve $\mathfrak{C}$ eine besondere Gestalt giebt. Wird der Punkt c mit einem beliebigen anderen Punkte $\mathfrak{c}$ des Flächenstücks T durch eine Linie Λ, die innerhalb T bleibt und die Linie $\mathfrak{A}$ nicht schneidet, verbunden, und von $\mathfrak{c}$ eine geschlossene Curve $\mathfrak{D}$ um den Punkt x gezogen (Fig. 4), so kann man die zuvor angewendete Curve $\mathfrak{C}$ durch die Linie Λ, die Linie $\mathfrak{D}$ und die in umgekehrter Richtung zum zweiten Male durchlaufene Linie Λ ersetzen. Hierdurch wird das Integral $N(x)$ gleich dem Trinom

Fig. 4.



$$\int_c^{\mathfrak{c}} \Phi(w)\,dw + \overline{\int}_{\mathfrak{c}}^{(x)} \Phi(w)\,dw + \int_{\mathfrak{c}}^{c} \Phi(w)\,dw.$$

Wie oben gezeigt wurde, hat $\Phi(w)$ am Endpunkte des ganzen Integrationsweges von $\Omega(x)$ denselben Werth, wie am Ausgangspunkte, so dass das erste der Theilintegrale, in welche man $\Omega(x)$ zerlegt, sich wieder stetig an das letzte anschliesst. In Folge dessen darf man bei der genannten Zerlegung das Integral

$$\int_c^{\mathfrak{c}} \Phi(w)\,dw$$

zum letzten Summandus machen und erhält hierdurch für $\Omega(x)$ den Ausdruck

$$\Omega(x) = \overline{\int}_{\mathfrak{c}}^{(x)} \Phi(w)\,dw + \overline{\int}_{\mathfrak{c}}^{(\mathfrak{A})} \Phi(w)\,dw + \overline{\int}_{\mathfrak{c}}^{(x-)} \Phi(w)\,dw + \overline{\int}_{\mathfrak{c}}^{(\mathfrak{A}-)} \Phi(w)\,dw,$$

welcher sich von dem früheren Ausdruck der Grösse $\Phi(x)$ nur dadurch unterscheidet, dass der Punkt $\mathfrak{c}$ an die Stelle des Punktes c getreten ist.

Ist der reelle Bestandtheil der Constante $\lambda + 1$ positiv, so kann man (Fig. 2) den Punkt c unendlich nahe an den Punkt x heranrücken lassen und die Dimensionen der Curve $\mathfrak{C}$ verschwindend klein nehmen. Hierdurch wird $N(x)$ unendlich klein, und $M(x)$ mit dem in (2) bezeichneten Integral $\omega(x)$ identisch. Aus (16) ergiebt sich dann die Gleichung

$$\Omega(x) = (e^{2\pi i\lambda} - 1)\,\omega(x), \tag{19}$$

welche die Beziehung zwischen den Integralen $\Omega(x)$ und $\omega(x)$ in allen Fällen, wo $\omega(x)$ überhaupt einen bestimmten Sinn hat, ausdrückt.

Kiel, im Mai 1890.