Zur Theorie der konvexen Funktionen.

Von

F. Bernstein und G. Doetsch in Göttingen.

Einleitung.

Unter einer konvexen Funktion versteht man eine in einem Intervall (a, b) für jeden Wert definierte eindeutige reelle Funktion $f(x)$, die für je zwei Werte x_1 und x_2 im Intervall (a, b) der Bedingung

$$f\left(\frac{x_1+x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1)+f(x_2)}{2}$$

genügt.

J. L. W. V. Jensen*) hat gezeigt: *Ist die konvexe Funktion in dem Intervall (a, b) nach oben beschränkt, so ist sie dort stetig.* (Die Stetigkeit erstreckt sich übrigens nur auf die inneren Punkte des Intervalls, an den Enden braucht die Funktion nicht stetig zu sein, z. B.

$$\begin{aligned} f(x) &= x^2 \quad \text{für} \quad -1 < x < +1, \\ &= 2 \quad \;\;„ \quad\;\; x = -1 \text{ und } x = +1. \end{aligned}$$

F. Bernstein**) hat nun auf Grund der Theorie der konvexen Funktionen, in bezug auf eine, bei der Begründung des Gaußschen Fehlergesetzes auftretende Funktion, folgenden Satz bewiesen:

Erfüllt die eindeutige reelle Funktion $y = \varphi(x)$ die Funktionalbeziehung

$$\varphi(x_1) + \cdots + \varphi(x_n) < \varphi(x_1+\varepsilon) + \cdots + \varphi(x_n+\varepsilon)$$

für $\varepsilon \gtrless 0$ *unter der Nebenbedingung*

$$x_1 + \cdots + x_n = 0,$$

so liegen ihre Werte entweder auf einer Parabel der Form

$$y = h^2x^2 + \varphi(0),$$

oder sie füllen den ebenen Raum oberhalb einer solchen Parabel überall dicht aus.

*) J. L. W. V. Jensen, Sur les fonctions convexes et les inégalités entre leurs valeurs moyennes. Acta Math. 30, S. 175—201.

**) F. Bernstein, Über das Gaußsche Fehlergesetz, Math. Ann. 64 (1907), S. 417—447.

In der gegenwärtigen Arbeit zeigen wir, daß alle konvexen Funktionen ein ähnliches Verhalten wie diese spezielle Funktion aufweisen. Es gilt nämlich der Satz:

Eine konvexe Funktion ist entweder im Inneren ihres Definitionsintervalls stetig, oder ihre Werte füllen den ebenen Raum oberhalb einer stetigen konvexen Funktion, bzw. den ganzen zum Definitionsintervall gehörigen Streifen überall dicht aus.

Der Jensensche Satz wird in dieser Arbeit nicht benutzt, sondern von Neuem bewiesen. Überhaupt kann die Arbeit ohne Kenntnis der erwähnten Abhandlungen von Bernstein und Jensen gelesen werden.

1.
Hilfssätze.

Hilfssatz 1.*) *Ist $f(x)$ eine im Intervall (a, b) konvexe Funktion, so ist für alle Punkte r, die das Intervall (a, b) in rationalem Verhältnis teilen:*

$$f(r) \leqq g = \operatorname{Max}\,(f(a), f(b)).$$

Sind x_1, x_2, x_3, x_4 irgendwelche Argumente im Intervall (a, b), so ist

$$f\left(\frac{x_1 + x_2 + x_3 + x_4}{4}\right) \leqq \frac{1}{2} f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) + \frac{1}{2} f\left(\frac{x_3 + x_4}{2}\right)$$
$$\leqq \frac{1}{4} f(x_1) + \frac{1}{4} f(x_2) + \frac{1}{4} f(x_3) + \frac{1}{4} f(x_4).$$

Durch den Schluß von $m - 1$ auf m ergibt sich allgemein:

$$2^m f\left(\frac{1}{2^m}\sum_{\nu=1}^{2^m} x_\nu\right) \leqq \sum_{\nu=1}^{2^m} f(x_\nu).$$

Es sei n eine positive ganze Zahl $< 2^m$. Dann wählen wir

$$x_{n+1} = x_{n+2} = \cdots = x_{2^m} = \frac{x_1 + x_2 + \cdots + x_n}{n}$$

und erhalten

$$2^m \cdot f\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \leqq \sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu) + (2^m - n) f\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right)$$

oder

$$f\left(\frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} x_\nu\right) \leqq \frac{1}{n}\sum_{\nu=1}^{n} f(x_\nu). \tag{1}$$

Wir können nun annehmen, daß das Definitionsintervall von $f(x)$ das Intervall $(0, 1)$ ist, indem wir $f(a + x(b-a))$ statt $f(x)$ betrachten. Die

*) Dieser Satz ist von F. Bernstein l. c. S. 430 bewiesen worden.

rationalen Teilpunkte des Intervalls sind dann die Punkte mit rationaler Koordinate $x = r$. Es sei

$$r = \frac{m}{n},$$

wo m und n ganze Zahlen sind und $0 \leqq m \leqq n$ ist. Dann setzen wir in Formel (1)

$$x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-m} = 0, \quad x_{n-m+1} = \cdots = x_n = 1$$

und erhalten:

$$f\left(\frac{m}{n}\right) \leqq \frac{1}{n} \cdot ng = g.$$

Hilfssatz 2. *Ist $f(x)$ im Intervall (a, b) eine konvexe Funktion, so ist $f(x)$ in dem Teilintervall $a + \eta \leqq r \leqq b - \eta$ bei beliebig kleinem positivem $\eta < \frac{b-a}{2}$ eine auf der Menge der rationalen Teilpunkte r des Intervalls (a, b) gleichmäßig stetige Funktion, d. h. zu vorgegebenem $\delta > 0$ gibt es ein $\varepsilon = \varepsilon(\delta, \eta) > 0$, so daß für je zwei rationale Teilpunkte r_1 und r_2 des Intervalls (a, b), die der Bedingung $|r_1 - r_2| < \varepsilon$ genügen und noch dem Intervall $a + \eta \leqq r \leqq b - \eta$ angehören, die Ungleichung erfüllt ist:*

$$|f(r_1) - f(r_2)| < \delta.$$

Die auf einer überall dichten Menge definierte Funktion $f(r)$ nennen wir eine Teillösung von $f(x)$. Zu ihr gehört eine für das Innere des Intervalls (a, b) definierte stetige konvexe Funktion, die mit $f(x)$ in den Punkten $a < r < b$ übereinstimmt.

Der Hilfssatz 2, der für die späteren Beweise grundlegend ist, ist von F. Bernstein*) bewiesen worden. Wir geben hier einen neuen Beweis, der die dort gemachten Fallunterscheidungen nicht benötigt.

Wir nehmen wieder an, daß $a = 0$, $b = 1$ ist. Zunächst zeigt man leicht, daß $f(r)$ auf der Menge der inneren rationalen Teilpunkte von $(0, 1)$ stetig ist. Es sei r rational und $0 < r < 1$, ferner n eine positive ganze Zahl $\geqq 2$. Dann wählen wir eine rationale Zahl h so, daß $r \pm nh$ noch dem Intervall $(0, 1)$ angehören und setzen in der Relation (1)

$$x_1 = r + n \cdot h, \quad x_2 = \cdots = x_n = r.$$

Dann ergibt sich

$$f(r \pm h) \leqq \frac{1}{n} f(r \pm nh) + \frac{n-1}{n} f(r)$$

oder

$$f(r + h) - f(r) \leqq \frac{f(r + nh) - f(r)}{n},$$

und

$$f(r) - f(r - h) \geqq \frac{f(r) - f(r - nh)}{n}.$$

*) F. Bernstein, l. c. S. 430—432.

Wegen der Konvexität von $f(x)$ ist

$$f(r+h)-f(r)\geqq f(r)-f(r-h),$$

also

$$(2)\quad \frac{f(r)-f(r-nh)}{n}\leqq f(r)-f(r-h)\leqq f(r+h)-f(r)\leqq\frac{f(r+nh)-f(r)}{n}.$$

Da r und h, also auch $r\pm nh$ rational sind, so ist nach Hilfssatz 1

$$f(r-nh)\quad\text{und}\quad f(r+nh)\leqq g=\operatorname{Max}(f(0),f(1)),$$

so daß aus (2) folgt:

$$(3)\qquad \frac{f(r)-g}{n}\leqq f(r)-f(r-h)\leqq f(r+h)-f(r)\leqq\frac{g-f(r)}{n},$$

Läßt man n bei festem r unbegrenzt wachsen und h entsprechend gegen 0 abnehmen, so folgt:

$$\lim\{f(r\pm h)-f(r)\}=0,$$

wenn h durch die rationalen Werte gegen 0 läuft.

Um zu zeigen, daß die Stetigkeit von $f(r)$ im Intervall $\eta\leqq r\leqq 1-\eta$ gleichmäßig ist, beweisen wir zunächst die Existenz einer unteren Schranke für $f(r)$ im Intervall (0, 1). In der Formel (1) setzen wir

$$x_1=r,\ x_2=\cdots=x_n=\frac{1}{2}$$

und erhalten:

$$nf\left(\frac{r+(n-1)\frac{1}{2}}{n}\right)\leqq f(r)+(n-1)f\left(\frac{1}{2}\right)$$

oder

$$f(r)\geqq n\left\{f\left(\frac{1}{2}+\frac{r-\frac{1}{2}}{n}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right\}+f\left(\frac{1}{2}\right).$$

Hieraus folgt:

$$f(r)\geqq -n\left|f\left(\frac{1}{2}+\frac{r-\frac{1}{2}}{n}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|+f\left(\frac{1}{2}\right).$$

$f(x)$ ist für $x=\frac{1}{2}$ in bezug auf die rationalen Argumente stetig. Es gibt also eine positive Zahl ε, so daß, wenn ϱ rational und $|\varrho|\leqq\varepsilon$ ist, die Ungleichung besteht:

$$\left|f\left(\frac{1}{2}+\varrho\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right|<1.$$

Wir setzen nun speziell:

$$n=\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1.$$

Dann ist für alle r zwischen 0 und 1

$$\left|\frac{r-\frac{1}{2}}{n}\right| < \frac{1}{\left[\frac{1}{\varepsilon}\right]+1} < \varepsilon,$$

also

$$\left|f\left(\frac{1}{2}+\frac{r-\frac{1}{2}}{n}\right)-f\left(\frac{1}{2}\right)\right| < 1.$$

Mithin gilt für alle r zwischen 0 und 1:

$$f(r) \geqq -\left[\frac{1}{\varepsilon}\right] - 1 + f\left(\frac{1}{2}\right) = u.$$

Nachdem die Existenz einer unteren Schranke für $f(r)$ bewiesen ist, folgt aus (3):

$$\frac{u-g}{n} \leqq f(r) - f(r-h) \leqq f(r+h) - f(r) \leqq \frac{g-u}{n}$$

und hieraus

$$|f(r+h) - f(r)| \leqq \frac{g-u}{n}. \tag{4}$$

Hierbei war vorausgesetzt, daß $r \pm nh$ noch im Intervall $(0, 1)$ liegen. Wir wählen nun $n \geqq 2$ so, daß

$$\frac{g-u}{n} < \delta$$

ist.

r_1 und r_2 seien je zwei rationale Argumente im Intervall $\eta \leqq r \leqq 1-\eta$, die die Bedingung

$$|r_2 - r_1| < \frac{\eta}{n} = \varepsilon$$

erfüllen. Weil

$$\eta + n(r_2 - r_1) \leqq r_1 + n(r_2 - r_1) \leqq 1 - \eta + n\,(r_2 - r_1)$$

ist, so ist dann

$$\eta - n\varepsilon \leqq r_1 + n(r_2 - r_1) \leqq 1 - \eta + n \cdot \varepsilon,$$

d. h.

$$0 \leqq r_1 + n(r_2 - r_1) \leqq 1.$$

Die Formel (4) ist also auf $r = r_1$, $h = r_2 - r_1$ anwendbar und liefert:

$$|f(r_2) - f(r_1)| < \delta.$$

Hilfssatz 3. *Eine in einem Intervall (a, b) nicht nach oben beschränkte konvexe Funktion ist in keinem Teilintervall nach oben beschränkt.*

Angenommen, in dem Teilintervall

$$a \leqq \alpha \leqq x \leqq \beta \leqq b$$

sei

$$f(x) < g.$$

Wir setzen

$$\operatorname{Max}(g, f(a), f(b)) = G.$$

Zu jedem Werte x im Intervall (a, b) gibt es einen Wert x' im Intervall (α, β) derart, daß x ein rationaler Teilpunkt des Intervalls (a, x'), bzw. (x', b) ist. Nach Hilfssatz 1 ist dann

$$f(x) \leqq \operatorname{Max}(f(a), f(x')), \quad \text{bzw.} \quad f(x) \leqq \operatorname{Max}(f(x'), f(b)),$$

also stets

$$f(x) \leqq G.$$

$f(x)$ wäre mithin im ganzen Intervall (a, b) beschränkt.

Hilfssatz 4. *Eine in einem Intervall (a, b) nicht nach unten beschränkte konvexe Funktion ist in keinem Intervall nach unten beschränkt.*

Angenommen, in dem Teilintervall (α, β) sei

$$f(x) > u.$$

Wir können $f(\alpha) = 0$ voraussetzen, indem wir statt $f(x)$ die konvexe Funktion $f(x) - f(\alpha)$ betrachten.

In einem anstoßenden Teilintervall sei $f(x)$ nicht nach unten beschränkt. Wir können annehmen, daß dieses Intervall rechts von (α, β) liegt. (Anderenfalls braucht man nur die konvexe Funktion $f(-x)$ zu betrachten.) Wir nennen es (β, γ). Eine positive ganze Zahl $n \geqq 2$ sei so gewählt, daß

$$\gamma - \alpha < n(\beta - \alpha)$$

ist. In dem Intervall (β, γ) gibt es einen Punkt ξ, wo

$$f(\xi) < nu$$

ist. Wir wenden die Relation (1) auf

$$x_1 = \cdots = x_{n-1} = \alpha, \quad x_n = \xi$$

an und erhalten:

$$f\left(\frac{(n-1)\alpha + \xi}{n}\right) \leqq \frac{1}{n}\left((n-1)f(\alpha) + f(\xi)\right) = \frac{1}{n} f(\xi) < u.$$

Nun ist aber

$$\xi - \alpha \leqq \gamma - \alpha < n(\beta - \alpha),$$

also

$$\frac{(n-1)\alpha + \xi}{n} < \beta.$$

Ferner ist

$$\frac{(n-1)\alpha + \xi}{n} = \alpha + \frac{\xi - \alpha}{n} > \alpha.$$

Die Ungleichung

$$f\left(\frac{(n-1)\alpha + \xi}{n}\right) < u$$

steht also in Widerspruch mit der Annahme, daß $f(x) > u$ im Intervall (α, β) ist.

Hilfssatz 5. *Eine im Intervall (a, b) nach oben beschränkte konvexe Funktion ist dort auch nach unten beschränkt.*

Im Intervall (a, b) sei

$$f(x) < g.$$

Angenommen, $f(x)$ wäre dort nicht nach unten beschränkt, so gäbe es in (a, b) ein Argument $x = \frac{a+b}{2} + h$, $h > 0$, derart, daß

$$f\left(\frac{a+b}{2} + h\right) < 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - g$$

wäre. Nun ist aber

$$2f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leqq f\left(\frac{a+b}{2} + h\right) + f\left(\frac{a+b}{2} - h\right),$$

also

$$f\left(\frac{a+b}{2} - h\right) \geqq 2f\left(\frac{a+b}{2}\right) - f\left(\frac{a+b}{2} + h\right) > g.$$

Dies widerspricht der Voraussetzung $f(x) < g$.

2.

Das Verhalten der konvexen Funktionen.

Es sei $f(x)$ eine in dem Intervall (a, b) *nach unten beschränkte Funktion:*

$$f(x) \geqq u \quad \text{für} \quad a \leqq x \leqq b.$$

Ist ξ ein Punkt des Intervalls und δ eine positive Zahl, so gibt es eine untere Grenze $m = m(\xi, \delta)$ von $f(x)$ in dem Intervall

$$\xi - \delta \leqq x \leqq \xi + \delta,$$

soweit es zu (a, b) gehört, derart daß dort

$$f(x) \geqq m(\xi, \delta)$$

ist, daß es aber mindestens ein x in demselben Intervall gibt, wo bei beliebig kleinem $\varepsilon > 0$

$$f(x) < m(\xi, \delta) + \varepsilon$$

ist. Läßt man nun δ bei festem ξ gegen 0 wandern, so durchläuft $m(\xi, \delta)$ eine monoton wachsende, nach oben beschränkte Wertfolge*), konvergiert also gegen eine Zahl $m(\xi)$. Wir nennen diese für jedes Argument ξ des Intervalls (a, b) definierte Zahl $m(\xi)$ *die untere Grenze von $f(x)$ in der Nähe der Stelle ξ.* Die Funktion $m(\xi)$ nennen wir kurz *die untere Grenze von $f(x)$.*

Satz 1. *Die untere Grenze $m(x)$ einer nach unten beschränkten konvexen Funktion $f(x)$ ist eine stetige konvexe Funktion.*

Zunächst zeigen wir, daß $m(x)$ konvex ist. Ist ε eine beliebige positive Zahl und sind ξ_1, ξ_2 zwei beliebige verschiedene Argumente im

---

*) Denn es ist stets $m(\xi, \delta) \leqq f(\xi)$.

Definitionsintervall von $f(x)$, so gibt es wegen der Definition der unteren Grenze eine positive Zahl $\delta = \delta(\xi_1, \xi_2\ \varepsilon)$ derart, daß für

$$\left| x - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \right| < \delta$$

$$f(x) > m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} \tag{5}$$

ist. Wir wählen nun irgend zwei Werte x_1 und x_2 so, daß

$$|x_1 - \xi_1| < \delta \quad \text{und} \quad f(x_1) < m(\xi_1) + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|x_2 - \xi_2| < \delta \quad \text{und} \quad f(x_2) < m(\xi_2) + \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Dann folgt:

$$\left| \frac{x_1 + x_2}{2} - \frac{\xi_1 + \xi_2}{2} \right| < \delta$$

und

$$\frac{f(x_1) + f(x_2)}{2} < \frac{m(\xi_1) + m(\xi_2)}{2} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Die Ungleichung (5) kann auf $x = \frac{x_1 + x_2}{2}$ angewandt werden und liefert:

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) > m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2}.$$

Da nun

$$f\left(\frac{x_1 + x_2}{2}\right) \leqq \frac{f(x_1) + f(x_2)}{2}$$

ist, so ergibt sich:

$$m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) - \frac{\varepsilon}{2} < \frac{m(\xi_1) + m(\xi_2)}{2} + \frac{\varepsilon}{2},$$

oder

$$m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) < \frac{m(\xi_1) + m(\xi_2)}{2} + \varepsilon.$$

Dies gilt für jedes $\varepsilon > 0$, also folgt:

$$m\left(\frac{\xi_1 + \xi_2}{2}\right) \leqq \frac{m(\xi_1) + m(\xi_2)}{2},$$

d. h. $m(x)$ ist eine konvexe Funktion.

Um die Stetigkeit von $m(x)$ zu beweisen, betrachten wir zunächst nur die inneren Punkte des Intervalls. Um einen inneren Punkt ξ kann man ein Intervall (x_1, x_2) abgrenzen, von dem ξ ein rationaler Teilpunkt ist. Da $m(x)$ konvex ist, so existiert nach Hilfssatz 2 eine Teillösung von $m(x)$, die in den inneren rationalen Teilpunkten r von (x_1, x_2) stetig ist. Es gibt also ein $\varepsilon > 0$, so daß $\xi - \varepsilon$ und $\xi + \varepsilon$ noch dem Intervall (x_1, x_2) angehören und für $|r - \xi| < \varepsilon$

$$|m(r) - m(\xi)| < \frac{\delta}{2},$$

also

$$m(r) < m(\xi) + \frac{\delta}{2}$$

ist. Wir behaupten, daß in dem Intervall $|x - \xi| < \varepsilon$

$$m(x) < m(\xi) + \delta$$

ist.

Es sei x ein beliebiger Punkt des Intervalls $|x - \xi| < \varepsilon$. Wir brauchen nur zu zeigen: In jedem Intervall um x liegt ein Punkt $\bar{x}$, wo

$$f(\bar{x}) < m(\xi) + \delta$$

ist. Denn dann muß auch

$$m(x) < m(\xi) + \delta$$

sein. Nun liegt aber in der Tat, weil x dem Intervall $|x - \xi| < \varepsilon$ angehört, in jeder Umgebung von x ein rationaler Teilpunkt r des Intervalls (x_1, x_2), der auch noch im Intervall $|r - \xi| < \varepsilon$ liegt und wo also

$$m(r) < m(\xi) + \frac{\delta}{2}$$

ist. In beliebiger Nähe von r, also auch noch in der angegebenen Umgebung von x, aber gibt es einen Punkt $\bar{x}$, wo

$$f(\bar{x}) < m(r) + \frac{\delta}{2}$$

ist. Dann ist

$$f(\bar{x}) < m(\xi) + \delta.$$

Damit ist gezeigt, daß in einer gewissen Umgebung von ξ

$$m(x) < m(\xi) + \delta$$

ist. Es gibt aber auch ein Intervall um ξ, wo wegen der Definition der unteren Grenze

$$f(x) > m(\xi) - \frac{\delta}{2}$$

ist, so daß dort

$$m(x) \geqq m(\xi) - \frac{\delta}{\varepsilon} > m(\xi) - \delta$$

sein muß. Folglich ist die Funktion $f(x)$ in jedem inneren Punkte ξ des Definitionsintervalls (a, b) von $f(x)$ stetig.

Für die Intervallenden, z. B. für b, ergibt sich die Stetigkeit auf Grund folgender Überlegungen: In einem Intervall $b - x < \varepsilon$ ist

$$f(x) > m(b) - \frac{\delta}{2},$$

also

$$m(x) > m(b) - \delta.$$

In diesem Intervall gibt es auch einen Punkt x_1, wo

$$f(x_1) < m(b) + \frac{\delta}{2},$$

also auch

$$m(x_1) < m(b) + \frac{\delta}{2}$$

ist. In dem Punkte x_1 ist $m(x)$ stetig, also ist in einem gewissen Intervall J um x_1

$$|m(x) - m(x_1)| < \frac{\delta}{2},$$

d. h.

$$m(x) < m(x_1) + \frac{\delta}{2} < m(b) + \delta.$$

Zu jedem Punkt x zwischen x_1 und b gibt es nun einen Wert x' im Intervall J derart, daß x ein rationaler Teilpunkt des Intervalls (x', b) ist. Nach Hilfssatz 1 ist dann

$$m(x) < \operatorname{Max}(m(x'), m(b)) < m(b) + \delta.$$

Im Intervall (a, b) ist also sowohl

$$m(x) > m(b) - \delta$$

als auch

$$m(x) < m(b) + \delta.$$

Mithin ist $m(x)$ in b stetig.

Satz 2. *Stimmt eine nach unten beschränkte konvexe Funktion mit ihrer unteren Grenze an wenigstens einem inneren Punkt des Definitionsintervalles nicht überein, so ist sie nicht nach oben beschränkt.*

Es sei ξ ein innerer Punkt des Intervalls (a, b), wo $f(x)$ von $m(x)$ verschieden ist. Dann ist

$$f(\xi) - m(\xi) = p > 0.$$

Wir werden nun zeigen, daß es eine Stelle im Intervall gibt, wo $f(x)$ größer als eine beliebig vorgegebene Zahl g ist.

Wir wählen eine ganze Zahl n so, daß

$$(n-1)\frac{p}{2} + m(\xi) > g$$

ist. Man kann im Intervall (a, b) ein Argument $x = \xi - h$ so finden, daß $\xi + (n-1)h$ noch im Intervall (a, b) liegt und zugleich

$$|f(x) - m(\xi)| < \frac{p}{2},$$

also

$$f(x) < m(\xi) + \frac{p}{2}$$

ist. Da

$$m(\xi) = f(\xi) - p$$

ist, so folgt

$$f(x) < f(\xi) - \frac{p}{2}$$

oder

$$f(\xi) - f(\xi - h) > \frac{p}{2} \cdot$$

Wir setzen nun in Formel (1)

$$x_1 = \cdots = x_{n-1} = \xi - h, \quad x_n = \xi + (n-1)h$$

und erhalten:

$$nf(\xi) \leqq (n-1)f(\xi - h) + f(\xi + (n-1)h),$$

also

$$f(\xi + (n-1)h) \geqq n(f(\xi) - f(\xi - h)) + f(\xi - h),$$

Nun ist aber

$$|f(\xi - h) - m(\xi)| < \frac{p}{2},$$

also

$$f(\xi - h) > m(\xi) - \frac{p}{2},$$

ferner

$$f(\xi) - f(\xi - h) > \frac{p}{2} \cdot$$

Daraus folgt:

$$f(\xi + (n-1)h) > n \cdot \frac{p}{2} + m(\xi) - \frac{p}{2} = (n-1)\frac{p}{2} + m(\xi) > g.$$

Aus den Sätzen 1 und 2 folgt der *Jensensche Satz.* Ist nämlich die Funktion $f(x)$ nach oben beschränkt, so ist sie nach Hilfssatz 5 nach unten beschränkt, besitzt also eine untere Grenze. Nach Satz 2 ist $f(x)$ im Innern des Definitionsintervalls mit $m(x)$ identisch, also nach Satz 1 dort stetig.

Satz 3. *Die Werte einer im Intervall* (a, b) *nach unten beschränkten konvexen Funktion füllen den ebenen Raum oberhalb ihrer unteren Grenze überall dicht aus, wenn die Funktion im Innern von* (a, b) *nicht mit ihrer unteren Grenze identisch ist.*

Es sei

$$a \leqq \xi \leqq b \quad \text{und} \quad \eta > m(\xi).$$

Dann werden wir zeigen: Zu jedem $\delta > 0$ gibt es ein x, so daß

$$|x - \xi| < \delta$$

und

$$|f(x) - \eta| < \delta$$

ist.

Wegen der Stetigkeit von $m(x)$ gibt es eine Zahl $\Delta > 0$, so daß für

$$|x - \xi| < \Delta$$

$$\eta - \frac{\eta - m(\xi)}{2} > m(x)$$

ist. Wir können uns auf die δ beschränken, die kleiner als

$$\operatorname{Min}\left(\Delta, \frac{\eta - m(\xi)}{2}\right)$$

sind. Dann ist für

$$|x - \xi| < \delta,$$

$$\eta - \delta > m(x).$$

Da die Funktion $f(x)$ im Innern von (a, b) nicht mit $m(x)$ übereinstimmt, so ist sie nach Satz 2 in (a, b) nicht nach oben beschränkt; nach Hilfssatz 3 gilt dasselbe für das Intervall $|x - \xi| < \delta$. Es ist also möglich, x_1 so zu wählen, daß

$$|\xi - x_1| < \delta$$

und

$$f(x_1) > \eta + \delta$$

ist. Ferner kann man x_2 so wählen, daß

$$|\xi - x_2| < \delta$$

und

$$f(x_2) < \eta - \delta$$

ist, da für $|x - \xi| < \delta$ die untere Grenze der Ungleichung genügt:

$$m(x) < \eta - \delta$$

und in beliebiger Nähe der unteren Grenze Funktionswerte liegen. Man kann nun zwei Werte x' und x'' im Intervall (a, b) so wählen, daß x_1 und x_2 innere rationale Teilpunkte des Intervalls (x', x'') sind. Alsdann gibt es nach Hilfssatz 2 eine stetige Funktion $F(x)$, die mit $f(x)$ in den rationalen Teilpunkten von (x', x''), also insbesondere in x_1 und x_2 mit $f(x)$ übereinstimmt. Diese ist für x_1 größer als $\eta + \delta$, für x_2 kleiner als $\eta - \delta$. Sie nimmt also an einer Zwischenstelle $\bar{x}$ den Wert η und in einer hinreichend kleinen Umgebung von $\bar{x}$ solche Werte an, die sich von η um weniger als δ unterscheiden. In dieser Umgebung liegen auch rationale Teilpunkte des Intervalls (x', x''), wo $F(x) = f(x)$ ist. Also gibt es sicher zwischen x_1 und x_2, d. h. im Intervall $|x - \xi| < \delta$ Argumente, wo

$$|f(x) - \eta| < \delta$$

ist.

Satz 4. *Die Werte einer in einem Intervall (a, b) nicht nach unten beschränkten konvexen Funktion erfüllen den zum Intervall (a, b) gehörigen Streifen der Ebene überall dicht.*

Die Funktion ist auch nicht nach oben beschränkt. Denn wäre dies der Fall, so müßte sie nach Hilfssatz 5 nach unten beschränkt sein.

Ist also $a \leqq \xi \leqq b$ und η ein beliebiger Wert, so ist bei beliebigem $\delta > 0$ die Funktion $f(x)$ im Intervall $|x - \xi| < \delta$ nach den Hilfssätzen

3 und 4 weder nach oben noch nach unten beschränkt. Man kann also zwei Argumente x_1 und x_2 so bestimmen, daß einerseits

$$|\xi - x_1| < \delta$$

und

$$f(x_1) > \eta + \delta,$$

andererseits

$$|\xi - x_2| < \delta$$

und

$$f(x_2) < \eta - \delta$$

ist. Hieraus schließt man auf Grund von Hilfssatz 2 analog wie bei Satz 3, daß $f(x)$ zwischen x_1 und x_2, also im Intervall $|x - \xi| < \delta$ einen Wert zwischen $\eta - \delta$ und $\eta + \delta$ annehmen muß.