

zwei Unbekannten; arithmetische Reihen erster und höherer Ordnung im Zusammenhang mit den interpolierenden Funktionen (algebraisch und graphisch) einerseits, mit Summationsaufgaben der Geometrie (Pyramidenvolumen, Schwerpunkt) andererseits; geometrische Reihen im Zusammenhang mit Exponentialfunktionen und Logarithmen; komplexe Zahlen im Zusammenhang mit der algebraischen und graphischen Lösung reiner Gleichungen; Kegelschnitte in stereometrischer, analytischer und projektiver Behandlung. — An Erweiterungen des Unterrichtsstoffes seien folgende Kapitel genannt: Elemente der projektiven Geometrie, schwierigere planimetrische und trigonometrische Aufgaben, kubische Gleichungen, Wahrscheinlichkeits- und Versicherungsrechnung, sphärische Dreiecke, Elemente der Infinitesimalrechnung, einschließlich der Summation der wichtigsten unendlichen Reihen. — Besonders aber sei darauf hingewiesen, daß in diesen Wiederholungskurs des letzten Jahrganges die systematische Grundlegung der Arithmetik und der Stereometrie verlegt worden ist, ein Verfahren, das dem Sinn der modernen Lehrpläne sicherlich entspricht und sogar noch auf die axiomatische Grundlegung der Planimetrie auszudehnen wäre. Daß eine ausführliche theoretische Fundierung mathematischer Fächer auf der Mittelstufe der Schulen fruchtlos ist, wird jetzt wohl von den meisten anerkannt, auch in unseren neuen Lehrplänen betont, doch ist in den neuen Lehrbüchern und daher wohl auch im Unterricht die Konsequenz, jene Systematik der Prinzipien in die zusammenfassende Darstellung der obersten Stufe zu verlegen, nicht gezogen worden. — Die Darstellung des vorliegenden Buches ist sorgfältig redigiert, im allgemeinen präzise (gegen die Definition der Stetigkeit, Seite 7, unendlicher Zahlen, Seite 39, der augenblicklichen Geschwindigkeit, Seite 196 des 2. Bandes, könnte man Einwände machen), die Ausstattung in Druck und Figuren durchwegs gut (nur Fig. 119 e in Band 1 ist dem Referenten als unrichtig aufgefallen). F.

Arithmetik. Von Carl Färber. XV + 410 Seiten. Teubner, 1911.

Die „Geometrie“ von H. Thieme, die in dieser Zeitschrift besprochen worden ist, bildet den zuerst, das vorliegende Werk den nächsterschienenen Band der „Grundlehren der Mathematik“, welche von den beiden genannten Verfassern in Verbindung mit Netto und W. Fr. Meyer „für Studierende und Lehrer“ herausgegeben werden und ein dem gegenwärtigen Stande des Faches entsprechendes Handbuch der Elementarmathematik bilden sollen. — Die „Arithmetik“ dient einem wohldefinierten Zweck und füllt entschieden eine Lücke in der elementar-mathematischen Literatur aus: sie gibt eine in allen Details durchgeführte Begründung der (in den Elementen vorkommenden) Zahlensysteme und Rechnungsarten, streng in der Methode, vollständig genug, um für die Orientierung des Lehrers in diesem Gebiet auch ohne Verweis auf weitere Literatur auszureichen, dabei auf einem Niveau fußend, auf dem man ohne zu große Abänderung den Schulunterricht aufbauen kann. Daß der Verfasser seine Grenzen in verschiedener Weise gezogen hat, die Gebiete der allgemeinen Lehren von den algebraischen Gleichungen, Funktionen und graphischen Methoden nicht betritt, kommt dem Aufbau des Buches durchaus zu gute, das damit seinem Hauptzweck, die Grundlagen ausführlich und streng darzustellen, ohne Beschränkung dient. Fast wäre der Einheitlichkeit halber auch

noch die Ausscheidung der Kapitel über Kombinatorik, Zinseszins- und Wahrscheinlichkeitsrechnung zu wünschen, die ohnehin nicht in zweckentsprechender Vollständigkeit zu fassen waren. — Das System der natürlichen Zahlen wird der Reihe nach zum System der positiven rationalen, der positiven und negativen rationalen, der reellen, der komplexen Zahlen erweitert. Nach jedem Schritt wird der Sinn, der auf Grund der letzten Erweiterung den einzelnen elementaren Operationen zukommt, festgestellt und die Permanenz der Gesetze untersucht. Hier sei besonders darauf hingewiesen, daß schon im System der natürlichen Zahlen (und dann ebenso in jedem der folgenden durch Erweiterung entstehenden Systeme) alle elementaren Rechnungsarten, von der Addition bis zum Logarithmieren, definiert und analysiert werden — unbeschadet der Frage nach ihrer Ausführbarkeit, deren Beantwortung dann eben die Notwendigkeit, das Zahlensystem zu erweitern, ergibt. In andern Büchern wird meist der umgekehrte Weg eingehalten; man führt in jedem Zahlensystem nur die Operationen aus, die darin unbeschränkt möglich sind, doch scheint dem Referenten der Gang des Verfassers vorzuziehen. Die Definition neuer Zahlarten sucht der Verfasser stets durch die Möglichkeit ihrer Zuordnung zu passenden realen Objekten der Zählung und Messung oder, wie er es faßt, durch den Nachweis ihrer „transienten Realität“ zu rechtfertigen — im Gegensatz zur axiomatischen Definition. Das eingeschlagene Verfahren hat den Vorteil, sich im Unterricht unverändert anwenden zu lassen und überdies gewissen Operationen, z. B. der Addition und deren Gesetzen unmittelbare Evidenz zu verleihen, sodaß derartige Operationsgesetze nur im Hinblick auf künftige Erweiterungen des Zahlbereichs bewiesen werden müssen. Die Kritik des Verfassers gegen die formalen Definitionen, daß durch sie die Arithmetik zu „einem bloßen Zeichenspiel“ werde (S. 76), dürfte aber nicht zutreffend sein; die Willkür der axiomatischen Festsetzungen läßt sich aus der Arithmetik nicht beseitigen. Denn, wenn auch die reale Definition, z. B. der relativen Zahlen, die Festsetzungen über Addition und Subtraktion einleuchtend macht, so kommt doch der Verfasser über ihre nähere formale Bestimmung, wie sie durch die Forderung nach Gültigkeit des distributiven Gesetzes gegeben wird, nur durch die ebenfalls willkürliche Annahme herum, daß die positiven vor den negativen Zahlen den Vorzug völliger Gleichartigkeit mit den absoluten Zahlen haben sollen (S. 160). — Zu den wertvollsten Teilen des Buches gehören die ausführlichen Abschnitte über das Rechnen mit systematischen, z. B. dezimalen Zahlen, ein Objekt, das in den meisten derartigen Büchern zu wenig eingehend behandelt ist. Die Approximationsrechnung ist hier konsequent als Operation im rationalen System dargestellt. Die irrationalen Zahlen werden durch je zwei monoton und unbegrenzt gegeneinander konvergierende Folgen rationaler Zahlen definiert und dadurch mit der näherungsweise Rechnung in Zusammenhang erhalten. Die aus zwei Haupteinheiten gebildeten komplexen Zahlen werden soweit wie möglich in voller Allgemeinheit untersucht und nur schrittweise, soweit die Ausführbarkeit und Gesetzlichkeit der Operationen es verlangt, bis zu ihrer gewöhnlichen Bedeutung spezialisiert. — Weiteres Eingehen wäre in dem Kapitel erwünscht, das sich mit dem erreichbaren Genauigkeitsgrad der Resultate von Rechnungen mit unvollständig gegebenen Zahlen beschäftigt. — Ohne auf weitere Einzelheiten einzugehen, möchte der Referent das Buch als zum wesentlichen Bestande jeder Lehrerbibliothek gehörig bezeichnen.