

XII. Ueber die durch einseitigen Druck hervorgerufene Doppelbrechung regulärer Krystalle, speciell von Steinsalz und Sylvin, von F. Pockels.

I. Allgemeine Bemerkungen über reguläre Krystalle.

In einer früheren Arbeit¹⁾ habe ich gezeigt, dass die durch elastische Deformationen bewirkten Aenderungen der Lichtgeschwindigkeit in regulären Krystallen von drei der Substanz eigenthümlichen Constanten abhängen. Werden diese Constanten mit a_{11} , a_{12} , a_{44} bezeichnet, so drücken sich diejenigen Grössen (B_{11} , B_{22} , B_{33} , B_{23} , B_{31} , B_{12}), welche das „Fresnel'sche Ovaloid“ im deformirten Krystall bestimmen, folgendermaassen durch die Deformationsgrössen $x_x, \dots y_z, \dots$ aus²⁾:

$$(1) \quad \left\{ \begin{array}{l} B_{11} - \omega^0^2 = (a_{11} - a_{12})x_x + a_{12} \Delta, \\ B_{22} - \omega^0^2 = (a_{11} - a_{12})y_y + a_{12} \Delta, \\ B_{33} - \omega^0^2 = (a_{11} - a_{12})z_z + a_{12} \Delta, \\ B_{23} = a_{44}y_z, B_{31} = a_{44}z_x, B_{12} = a_{44}x_y, \end{array} \right.$$

wo $\Delta = x_x + y_y + z_z$ ist und ω^0 die Lichtgeschwindigkeit im undeformirten Krystall bezeichnet.

Die Gleichung des Ovaloids, bezogen auf drei den Würfelnormalen parallele Coordinatenaxen x^0 , y^0 , z^0 , ist diese:

$$\rho^2 = B_{11} \mu^0^2 + B_{22} \nu^0^2 + B_{33} \pi^0^2 + 2B_{23} \nu^0 \pi^0 + 2B_{31} \pi^0 \mu^0 + 2B_{12} \mu^0 \nu^0,$$

wenn ρ den Radiusvector, μ^0 , ν^0 , π^0 dessen Richtungscosinus bezeichnen. Formeln zur Berechnung der Grösse und Richtung der Hauptaxen des Ovaloids sind l. c. p. 153—157 entwickelt.

Im Folgenden soll nun nur die in regulären Krystallen durch elastische Deformationen erzeugte Doppelbrechung

1) F. Pockels, Wied. Ann. 37, p. 151 ff. 1889.

2) F. Pockels, l. c. p. 160.

ohne Berücksichtigung der absoluten Aenderungen der Lichtgeschwindigkeiten näher untersucht werden, was besonderes Interesse hat, weil bei regulären Krystallen die hier zu betrachtenden Verhältnisse (das heisst die Lagen der optischen Axen im Krystall) von der Grösse des Druckes ganz unabhängig sind.

Man erkennt leicht, dass diese Erscheinungen nur von den zwei Constanten $(a_{11} - a_{12})$ und a_{44} abhängen; denn $a_{12} \mathcal{A}$ ist den drei Grössen $B_{11} - \omega^2$, $B_{22} - \omega^2$, $B_{33} - \omega^2$ gemeinsam, hat also nur Einfluss auf die absoluten Geschwindigkeiten (wie eine Aenderung von ω^0). Die Grössen $(a_{11} - a_{12})/2$ und a_{44} bestimmen die Stärke der Doppelbrechung für zwei Prismen, deren Längsaxen einer Würfel- bzw. einer Octaëdernormale parallel sind, und welche die gleiche Längs- und Querdilatation erlitten haben. Dies ergibt sich wie folgt.

Es sei erstens die Deformation symmetrisch in Bezug auf die z^0 -Axe, d. h. $z_x = \lambda_x$, $x_x = y_y = \lambda_x$, $y_z = z_x = x_y = 0$; dann ist klar, dass das optische Symmetrieaxensystem x, y, z mit dem kristallographischen x^0, y^0, z^0 zusammenfällt, und es wird:

$$\begin{aligned} \omega_x^2 &= B_{11} + \omega^2 = (a_{11} - a_{12}) z_x + (\omega^2 + a_{12} \mathcal{A}), \\ \omega_y^2 &= \omega_z^2 = B_{22} + \omega^2 = (a_{11} - a_{12}) x_x + (\omega^2 + a_{12} \mathcal{A}); \end{aligned}$$

folglich:

$$\omega_z^2 - \omega_x^2 = (a_{11} - a_{12})(\lambda_z - \lambda_x).$$

Ist zweitens dieselbe Deformation $\lambda_z, \lambda_x = \lambda_y$ vorhanden symmetrisch in Bezug auf eine Axe z , welche mit einer Octaëdernormale zusammenfällt, also bezogen auf das Coordinatensystem x^0, y^0, z^0 etwa die Richtungscosinus $\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}$ besitzt, so ist:

$$x_x = y_y = z_z = \frac{\lambda_z + 2\lambda_x}{3}, \quad y_z = z_x = x_y = \frac{2}{3}(\lambda_z - \lambda_x);$$

$$B_{11} - \omega'^2 = B_{22} - \omega'^2 = B_{33} - \omega'^2 = (a_{11} - a_{12}) \cdot \frac{\lambda_z + 2\lambda_x}{3},$$

$$B_{23} = B_{31} = B_{12} = a_{44} \cdot \frac{2(\lambda_z - \lambda_x)}{3},$$

worin $\omega'^2 = \omega^2 + a_{12} \mathcal{A}$ ist. Ferner findet man leicht:

$$\omega_x^2 = B_{11} + 2B_{23}, \quad \omega_z^2 = \omega_y^2 = B_{11} - B_{23},$$

folglich:

$$\omega_z^2 - \omega_x^2 = 3B_{23} = 2a_{44}(\lambda_z - \lambda_x).$$

Die demselben Werthe $\lambda_z - \lambda_x$ entsprechenden Differenzen $\omega_z^2 - \omega_x^2$ (oder $\omega_z - \omega_x$) verhalten sich also in den beiden betrachteten Fällen in der That wie $\frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})$ zu a_{44} . — Die auf diese Weise physikalisch gedeuteten Constanten $\frac{1}{2}(a_{11} - a_{12})$ und a_{44} sind natürlich bei isotropen Körpern einander gleich, bei regulär krystallisirenden aber können sie, wie die Erfahrung gezeigt hat, nicht nur sehr von einander verschieden sein, sondern sogar entgegengesetztes Vorzeichen haben. Von diesen Constanten hängen in einfacher Weise die Erscheinungen ab, welche man erhielte, wenn man verschieden orientirte Krystallprismen *in gleicher Weise deformiren* würde. Da man nun aber praktisch dies kaum realisiren, sondern nur diejenigen homogenen Deformationen bequem herstellen kann, welche durch einseitigen Druck erzeugt werden, so ist es zweckmässiger, die Discussion in der Weise durchzuführen, dass man die durch einen constanten einseitigen Druck, dessen Richtung man alle möglichen Lagen im Krystall annehmen lässt, erzeugte Doppelbrechung verfolgt. Diese Art der Discussion soll daher hier gewählt werden, obwohl die zuerst angedeutete vielleicht von grösserem theoretischen Interesse wäre.

Bekanntlich drücken sich für reguläre Krystalle die Deformationen $x_x, \dots y_z, \dots$ folgendermaassen durch die Druckkräfte $X_x, \dots Y_z, \dots$ aus:

$$\begin{aligned} -x_x &= (s_{11} - s_{12}) X_x + s_{12} (X_x + Y_y + Z_z), \\ -y_y &= (s_{11} - s_{12}) Y_y + s_{12} (X_x + Y_y + Z_z), \\ -z_z &= (s_{11} - s_{12}) Z_z + s_{12} (X_x + Y_y + Z_z), \\ -y_z &= s_{44} Y_z, \quad -z_x = s_{44} Z_x, \quad -x_y = s_{44} X_y. \end{aligned}$$

Durch Einsetzen dieser Werthe in die obigen Ausdrücke für $B_{11}, \dots B_{23}, \dots$ erhält man:

$$(2) \left\{ \begin{aligned} B_{11} - \omega^2 &= -(a_{11} - a_{12})(s_{11} - s_{12}) X_x - (a_{11} s_{12} + a_{12}(s_{11} + s_{12}))(X_x + Y_y + Z_z), \\ B_{22} - \omega^2 &= -(a_{11} - a_{12})(s_{11} - s_{12}) Y_y - (a_{11} s_{12} + a_{12}(s_{11} + s_{12}))(X_x + Y_y + Z_z), \\ B_{33} - \omega^2 &= -(a_{11} - a_{12})(s_{11} - s_{12}) Z_z - (a_{11} s_{12} + a_{12}(s_{11} + s_{12}))(X_x + Y_y + Z_z), \\ B_{23} &= -a_{44} s_{44} Y_z, \\ B_{31} &= -a_{44} s_{44} Z_x, \\ B_{12} &= -a_{44} s_{44} X_y. \end{aligned} \right.$$

Aus diesen Gleichungen ist ersichtlich, dass, wenn man $X_x, \dots Y_z, \dots$ als direct gegeben ansieht, die Erscheinungen der Doppelbrechung lediglich von den Producten aus den Constanten $a_{11} - a_{12}$ resp. a_{44} und den Elasticitätsconstanten $s_{11} - s_{12}$ resp. s_{44} abhängen. Es werde zur Abkürzung gesetzt:

$$(a_{11} - a_{12})(s_{11} - s_{12}) = a, \quad a_{44}s_{44} = b.$$

(Für isotrope Körper ist $s_{44} = 2(s_{11} - s_{12})$, also $a = b$).

Ist die Richtung des einseitigen Druckes (oder Zuges) gegeben, so sind $X_x, \dots Y_z, \dots$ bis auf einen constanten gemeinsamen Factor p bekannt; die vorhergehenden Formeln zeigen daher, dass dann die Lage der Hauptaxen des Ovaloids und das Verhältniss ihrer Grössen zu einander, *mithin auch die Lage der optischen Axen im Krystall, allein von dem Verhältniss $b:a$ abhängt*. Um also die eigenthümlichen Verhältnisse, welche bei regulären, durch einseitigen Druck oder Zug doppelbrechend gemachten Krystallen auftreten können, vollständig zu übersehen, braucht man nur den Quotienten b/a als variabel zu betrachten; denn alle Unterschiede, welche durch verschiedene absolute Grösse oder verschiedenes Vorzeichen der entsprechenden Constanten a und b bei verschiedenen Substanzen bedingt sind, lassen sich durch geeignete Aenderung der Grösse des einseitigen Druckes, resp. durch Ersetzung desselben durch Zug aufheben. (Damit soll natürlich nicht gesagt sein, dass die absoluten Werthe von a und b nicht auch von erheblichem physikalischem Interesse sind.) Hinsichtlich des Werthes von b/a sind nun 4 Fälle zu unterscheiden:

$$\text{I.} \quad +1 < \frac{b}{a} < +\infty, \quad \text{II.} \quad 0 < \frac{b}{a} < +1,$$

$$\text{III.} \quad -1 < \frac{b}{a} < 0, \quad \text{IV.} \quad -\infty < \frac{b}{a} < -1.$$

Es ist merkwürdig, dass die bisher untersuchten regulär krystallisirten Substanzen 3 verschiedene von diesen Fällen repräsentiren, nämlich Steinsalz (und NaClO_3) den II., Sylvin den IV., Flussspath den III.; nur für den Fall I ist noch kein Vertreter gefunden.

Es sei hier noch bemerkt, dass das Vorzeichen von b/a stets dasselbe ist, wie dasjenige des Quotienten $2a_{44}/(a_{11} - a_{12})$,

durch welchen sich bei gegebener Dilatation in einer Richtung die Lage der optischen Axen ganz ebenso bestimmt, wie durch b/a bei gegebenem einseitigem Druck.

Der Uebersichtlichkeit wegen soll bei der Discussion die Druckrichtung auf die Symmetrieebenen des regulären Krystalls, also auf eine Würfel- und eine Rhombendodekaëderfläche, beschränkt werden. Die im ersten Octanten des $X^0 Y^0 Z^0$ -Coordinatensystems liegende Octaëdernormale werde mit O , die im ersten Quadranten der $X^0 Y^0$ -Ebene liegende Dodekaëdernormale mit D bezeichnet. Dann handelt es sich um die Bestimmung der Lage der optischen Axen A_1, A_2 , wenn die Druckrichtung P sich bewegt

1. in der $X^0 Y^0$ -Ebene zwischen $+ X^0$ und D ,
2. „ „ Ebene $Z^0 D$ „ $+ Z^0$ und O ,
3. „ „ „ „ „ O und D .

Zur Veranschaulichung kann man die in Betracht kommenden Richtungen durch Punkte auf der Kugeloberfläche darstellen und letztere in stereographischer Projection zeichnen. In dieser Weise sind die beigegebenen Figuren p. 449, 450, 452 für Steinsalz, Sylvin und Flussspath entworfen.

Erläuterungen zu den Figuren. — Als Projectionspunkt auf der Kugel ist der Endpunkt einer Rhombendodekaëdernormale gewählt; der die Figuren begrenzende Kreis (Aequator der Kugel) entspricht demnach einer Dodekaëderfläche. Wo der Projectionspunkt einer Richtung aus dem Inneren des Kreises (welches der einen Halbkugel entspricht) hinausgefallen wäre, ist die betreffende Richtung durch ihre entgegengesetzte ersetzt (so z. B. in Fig. 3 die eine Axe (1)). — Dargestellt sind die optischen Axen und Mittellinien für Druckrichtungen, welche auf den Geraden $X_0 Y_0$ (Würfelfläche) und $Z^0 D$ (Dodekaëderfläche) liegen; wo jedoch für letztere die optischen Axen in die Symmetrieebene ($Z^0 D$) fallen, sind der Uebersichtlichkeit halber alle Punkte auf dem Aequatorkreise gezeichnet, welcher ja auch einer Dodekaëderfläche entspricht. Dies gilt für Druckrichtungen zwischen D und O bei Fig. 1, zwischen Z^0 und O bei Fig. 2 und 3. Die Druckrichtungen sind durch Kreuze (\times), die optischen Axen durch Kreise (\circ), die Mittellinien

durch einfache Querstriche (1) bezeichnet. Die beigeschriebenen Zahlen bedeuten, mit 10 multiplicirt, den die Druckrichtung bestimmenden Winkel φ bezw. χ in Graden; für Druckrichtungen in Z^0D sind sie mit einem Index ' versehen. Die gestrichelten Kreisbögen stellen die optische Axenebene dar, wo dieselbe senkrecht zur Symmetrieebene ist; die punktierten geraden Linien sollen in diesen Fällen nur die Zusammengehörigkeit der Druckrichtung und der entsprechenden Axenrichtungen deutlicher machen. Die dick ausgezogenen Curven sind diejenigen Curven, welche von den Axenpunkten durchlaufen werden, wenn sich die Druckrichtung in den bezeichneten Intervallen bewegt (bei Fig. 1 von X_0 bis Y_0 und von Z_0 bis O , bei Fig. 2 von X_0 bis D und O bis D , bei Fig. 3 von O bis D). Die Axenpunkte, welche der Druckrichtung D entsprechen, sind durch den Buchstaben \mathfrak{D} ausgezeichnet.

Discussion.— Es sind nun die Formeln zur Berechnung der Lage der optischen Axen für die soeben angegebenen Lagen der Druckrichtung aufzustellen. Es handelt sich, da in jenen 3 Fällen eine optische Symmetrieaxe aus Symmetrierücksichten von vornherein bekannt ist, nur um die Bestimmung eines Winkels zur Festlegung der 2 anderen Symmetrieaxen und um diejenige des optischen Axenwinkels.

1. Die im ersten Quadranten der X^0Y^0 -Ebene liegende Druckrichtung P bilde mit $+X^0$ den Winkel φ , welcher auf das Intervall von 0 bis $\pi/4$ beschränkt werden kann; gesucht ist zunächst der Winkel ($X^0\widehat{X}$) = ψ , zu dessen Berechnung die Formel dient¹⁾:

$$\operatorname{tg} 2\psi = \frac{2 B_{12}}{B_{11} - B_{22}}.$$

Es ergibt sich leicht²⁾:

$$\begin{aligned} X_z &= p \cos^2 \varphi, & Y_z &= p \sin^2 \varphi, & X_y &= \frac{1}{2} p \sin 2\varphi, \\ Z_x &= Z_y = Y_x = 0, \end{aligned}$$

wo p den ausgeübten Druck bezeichnet.

Folglich wird nach (2), wenn $a_{11}s_{12} + a_{12}(s_{11} + s_{12}) = c$ gesetzt wird:

1) F. Pockels, l. c. p. 156, Formel (14), wo $\Phi_z = \psi$.

2) F. Pockels, l. c. p. 270 unten.

$$\begin{aligned} B_{11} - \omega^2 &= -p \{ a \cos^2 \varphi + c \}, \\ B_{22} - \omega^2 &= -p \{ a \sin^2 \varphi + c \}, \\ B_{33} - \omega^2 &= -p c, \\ B_{23} = B_{31} &= 0, \quad B_{12} = -\frac{1}{2} p b \sin 2\varphi. \end{aligned}$$

Demnach wird:

$$(3) \quad \operatorname{tg} 2\psi = \frac{b}{a} \operatorname{tg} 2\varphi,$$

$$\text{ferner}^1): \quad \omega_x^2 = B_{11} \cos^2 \psi + B_{22} \sin^2 \psi + B_{12} \sin 2\psi,$$

$$\omega_y^2 = B_{11} \sin^2 \psi + B_{22} \cos^2 \psi - B_{12} \sin 2\psi,$$

$$\omega_z^2 = B_{33},$$

$$(4) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_y^2 - \omega_x^2 &= (B_{22} - B_{11}) \cos 2\psi - 2B_{12} \sin 2\psi = (B_{22} - B_{11}) \sqrt{1 + \operatorname{tg}^2 2\psi} \\ &= +p \sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi}, \\ \omega_y^2 - \omega_z^2 &= -\frac{1}{2} p \{ a - \sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi} \}, \\ \omega_x^2 - \omega_z^2 &= -\frac{1}{2} p \{ a + \sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi} \}; \end{aligned} \right.$$

hierin ist der Quadratwurzel immer das Vorzeichen von a beizulegen.

2. und 3. Der Winkel $\widehat{Z^0P}$ werde mit χ bezeichnet; χ liegt im Falle 2) zwischen 0° und $54^\circ 44'$, im Falle 3) zwischen $54^\circ 44'$ und 90° . Diejenige optische Symmetrieaxe, welche in der Ebene Z^0D liegt und im normalen Falle, d. h. bei positivem b/a , für $\chi=0$ in die Z^0 -Axe, bei negativem in die Y^0 -Axe fällt, werde mit Z und ihr Winkel gegen Z^0 mit ϑ bezeichnet²⁾; letzterer kann alle Werthe zwischen 0 und 180° (oder $+90^\circ$ und -90°) annehmen. Die zu der die Richtungen Z^0, O, D, P enthaltenden Ebene senkrechte optische Symmetrieaxe, welche also eine Dodekaëdernormale ist, sei die X -Axe.

Es ist zunächst:

$$X_x = Y_y = X_y = p \cdot \frac{1}{2} \sin^2 \chi, \quad Y_z = Z_x = p \cdot \sqrt{\frac{1}{2}} \sin \chi \cos \chi,$$

$$Z_x = p \cos^2 \chi;$$

$$\text{folglich: } B_{11} - \omega^2 = B_{22} - \omega^2 = -p \{ \frac{1}{2} a \sin^2 \chi + c \},$$

$$B_{33} - \omega^2 = -p \{ a \cos^2 \chi + c \},$$

$$B_{23} = B_{31} = -p \sqrt{\frac{1}{2}} b \sin \chi \cos \chi, \quad B_{12} = -p \cdot \frac{1}{2} b \sin^2 \chi.$$

1) Nach den Gl. (11), l. c. p. 154.

2) Diese Festsetzung hat den Zweck, dass man dieselben Formeln für ϑ etc. in allen Fällen anwenden kann; die frühere Festsetzung, nach welcher die X, Y, Z -Axe bei Aufhebung des Druckes stetig in die gleichnamigen Axen mit Index 0 übergehen sollten, kann natürlich bei regulären Krystallen nicht aufrecht erhalten werden.

Zur Bestimmung des Winkels ϑ erhält man aus der ersten der Gl. (6) meiner früheren Arbeit¹⁾ folgende Gleichung:

$$(5) \quad \operatorname{tg} 2 \vartheta = \frac{2 \sqrt{2} B_{23}}{B_{33} - B_{11} - B_{12}} = \frac{4 b \sin 2 \chi}{a - b + (3 a + b) \cos 2 \chi}.$$

Für $\chi = 54^{\circ} 44'$ ergibt dies unabhängig von dem Werthe von b/a $\operatorname{tg} 2 \vartheta = -2 \sqrt{2}$, d. h. $\vartheta = \chi = 54^{\circ} 44'$, wie es sein muss.

Weiter erhält man (aus den Gl. 11 a. a. O.):

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} \omega_y^2 - \omega_z^2 &= (B_{11} - B_{33} + B_{12}) \cos 2 \vartheta - 2 \sqrt{2} B_{23} \sin 2 \vartheta \\ &= p b \frac{\sin 2 \chi}{\sin 2 \vartheta}, \\ \omega_x^2 - \omega_z^2 &= (B_{11} - B_{33}) \cos^2 \vartheta - B_{23} \sqrt{2} \sin 2 \vartheta - B_{12} (1 + \cos^2 \vartheta) \\ &= \frac{1}{2} p \left\{ b \frac{\sin 2 \chi}{\sin 2 \vartheta} + \frac{a + 3b}{4} + \frac{3(a-b)}{4} \cos 2 \chi \right\} = p b \frac{\sin \chi}{\sin \vartheta} \cos (\chi - \vartheta), \\ \omega_y^2 - \omega_x^2 &= p b \frac{\sin \chi}{\cos \vartheta} \sin (\vartheta - \chi). \end{aligned} \right.$$

Nunmehr soll zur gesonderten Discussion der Fälle I—IV übergegangen werden.

I. $\frac{b}{a} > +1$.

1. Liegt die Druckrichtung P in der $X^0 Y^0$ -Ebene (Würfelfläche), so ist nach Gl. (3) $\operatorname{tg} 2 \psi > \operatorname{tg} 2 \varphi$, also liegt die X -Axe zwischen P und der Dodekaëdernormale D , mit welcher letzteren sie für $\varphi = \frac{1}{4} \pi$ zusammenfällt. Ferner geht aus den Formeln (4) hervor, dass dem absoluten Betrage nach

$$|\omega_y^2 - \omega_x^2| > |\omega_x^2 - \omega_z^2| > |\omega_y^2 - \omega_z^2|$$

ist, dass also die Ebene der optischen Axen in die $X^0 Y^0$ -Ebene fällt und die X -Axe die erste Mittellinie ist; der Winkel zwischen letzterer und den optischen Axen ist bestimmt durch:

$$\sin^2 \Omega = \frac{\sqrt{a^2 \cos^2 2 \varphi + b^2 \sin^2 2 \varphi} - a}{2 \sqrt{a^2 \cos^2 2 \varphi + b^2 \sin^2 2 \varphi}} = \frac{\cos 2 \varphi - \cos 2 \psi}{2 \cos 2 \varphi}.$$

Das Maximum von $\sin^2 \Omega$ tritt ein für $\varphi = 45^{\circ}$ und ist $= (b - a) / 2b$.

2. Für $0 < \chi < 54^{\circ} 44'$ durchläuft ϑ denselben Winkelraum und ist dabei immer $> \chi$, ausser in den Grenzen; es ist zufolge der Formeln (6):

1) F. Pockels, l. c. p. 153.

$\omega_y^2 > \omega_x^2 > \omega_z^2$, wenn pb positiv angenommen wird; folglich liegen die optischen Axen in der Symmetrieebene und ihre Winkel gegen die Z -Axe (erste Mittellinie) sind gegeben durch $\sin^2 \Omega = (\sin \vartheta \sin(\vartheta - \chi)) / \cos \chi$. Der Axenwinkel erreicht ein gewisses Maximum und wird für $\chi = 54^\circ 44'$ wieder gleich Null.

3. Für $54^\circ 44' < \chi < 90^\circ$ ist $\vartheta < \chi$, $\omega_x^2 > \omega_y^2 > \omega_z^2$, die Axenebene ist senkrecht zur Symmetrieebene, und der Axenwinkel um die Z -Axe gegeben durch:

$$\sin^2 \Omega = \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg}(\chi - \vartheta);$$

derselbe nimmt zu bis zu dem oben bestimmten Maximalwerth für $\chi = 90^\circ$. (Vorstehende Formel liefert dafür den unbestimmten Ausdruck $\frac{\infty}{\infty}$).

II. $0 < \frac{b}{a} < +1$.

1. Es ist $\psi = 0$ für $\varphi = 0$, $\psi = 45^\circ$ für $\varphi = 45^\circ$, sonst immer $\psi < \varphi$; die X -Axe liegt also zwischen der Druckrichtung und der nächstliegenden Würfelnormale. Ferner ist, wenn pa positiv angenommen wird:

$$\omega_z^2 > \omega_y^2 > \omega_x^2,$$

folglich ist die optische Axenebene senkrecht zur Ebene X^0Y^0 , und der Axenwinkel 2Ω um die X -Axe ist gegeben durch:

$$\begin{aligned} \sin^2 \Omega &= \frac{a - \sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi}}{a + \sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi}} = \frac{\cos 2\psi - \cos 2\varphi}{\cos 2\psi + \cos 2\varphi} \\ &= \operatorname{tg}(\varphi + \psi) \operatorname{tg}(\varphi - \psi). \end{aligned}$$

Lässt man φ von 0 bis 45° wachsen, so wächst der Axenwinkel ebenfalls beständig und erreicht für $\varphi = 45^\circ$ seinen grössten Werth, welcher bestimmt ist durch

$$\sin^2 \Omega' = \frac{a-b}{a+b}$$

und $\leq 90^\circ$ ist, je nachdem $a \leq 3b$ ist.

ψ wächst erst langsamer, dann rascher als φ , und es erreicht daher die Abweichung $\varphi - \psi = \Phi$ der Mittellinie X von der Druckrichtung P ein Maximum Φ' für einen bestimmten Winkel φ' , welcher der Gleichung $\operatorname{tg} 2\varphi' = \sqrt{a/b}$ genügt; der zugehörige Werth von ψ folgt aus $\operatorname{tg} 2\psi' = \sqrt{b/a}$, somit ist:

$$\Phi' = 2\varphi' - 45^\circ = \operatorname{arctg} \left(\sqrt{\frac{a}{b}} \right) - 45^\circ.$$

Für Steinsalz ist nach den unten mitgetheilten Beobachtungen $b/a = +0,704$, und es ergibt sich daher $\Omega' = 24^\circ 40'$, $\varphi' = 25^\circ 0'$, $\Phi' = 5^\circ 0'$. Für sehr kleine Werthe von φ ist, da b/a nahe $= \sqrt{1/2}$, sehr annähernd $\Omega = \psi$, wie dies in Fig. 1 ersichtlich ist.

2. Für $0 < \chi < 54^\circ 44'$ ist $\vartheta < \chi$, also, pb positiv vorausgesetzt, $\omega_x^2 > \omega_y^2 > \omega_z^2$. Demnach ist die optische Axenebene senkrecht zur Ebene Z^0D und der Axenwinkel um die Z -Axe, welche zwischen P und Z^0 liegt, zu berechnen nach der Formel:

$$\sin^2 \Omega = \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} (\chi - \vartheta).$$

Der letztere erreicht ein Maximum $2\Omega''$ für den durch

$$\cos 2\chi'' = \frac{3b - a}{3b + a}$$

bestimmten Werth von χ ; für Steinsalz findet sich:

$$\chi'' = 38^\circ 43', \quad \Omega'' = 14^\circ 0'.$$

Die Abweichung $\chi - \vartheta = \Phi$ ist am grössten für:

$$\cos 2\chi = \frac{b - 3a - \sqrt{(14b)^2 + 96ab}}{3(5b + 3a)},$$

woraus sich für Steinsalz der Werth $\chi = \chi_1''' = 28^\circ 39'$ ergibt; der zugehörige Maximalwerth von Φ ist $\Phi_1''' = 5^\circ 43'$. Zu erwähnen ist endlich noch, dass $\partial \sin \Omega / \partial \chi$ für $\chi = \vartheta = 54^\circ 44'$ unendlich gross wird, sodass die Curve, welche die optischen Axen auf der Kugel durchlaufen, im Punkte O die Symmetrieebene Z^0D senkrecht trifft.

3. Für die Lagen von P zwischen O und D ist:

$$\vartheta > \chi, \quad \omega_y^2 > \omega_x^2 > \omega_z^2, \quad \sin^2 \Omega = \frac{\sin \vartheta \sin (\vartheta - \chi)}{\cos \chi},$$

und die optischen Axen liegen in der Ebene Z^0D ; Ω wächst bis zu dem schon oben berechneten Maximum, welches eintritt, wenn P mit D zusammenfällt. Anfangs, d. h. wenn

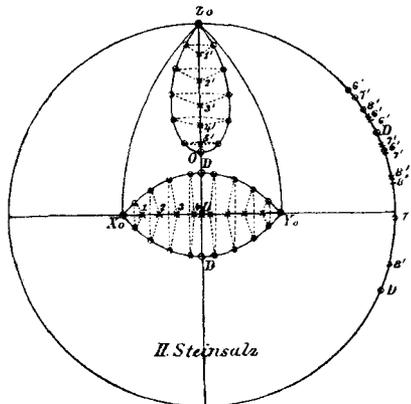


Fig. 1.

sich P von O entfernt, wächst Ω ausserordentlich schnell, da wieder $\partial \sin \Omega / \partial \chi$ unendlich gross wird. Dies gilt übrigens für alle vier Fälle; man würde daher in Praxi einen regulären Krystall durch Compression in der Richtung einer Octaëdernormale niemals vollkommen optisch einaxig machen können.

Die Differenz $\vartheta - \chi = \Phi$ erreicht ihren grössten Betrag Φ_2''' für den durch

$$\cos 2\chi = \frac{b - 3a + \sqrt{(14b)^2 + 96ab}}{3(5b + 3a)}$$

gegebenen Winkel χ_2''' . Für Steinsalz wird $\chi_2''' = 70^\circ 24'$, $\Phi_2''' = 2^\circ 17'$.

III. $-1 < b/a < 0$. Repräsentant Flusspath, für den nach meinen früheren Beobachtungen¹⁾ $b/a = -0,482$ ist.

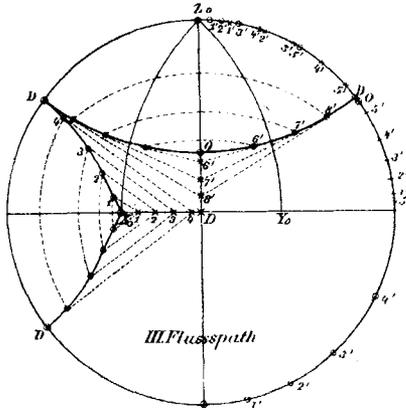


Fig. 2.

1. Während φ die Werthe 0 bis $+45^\circ$ durchläuft, nimmt ψ diejenigen von 0 bis -45° an, und zwar ist dabei $-\psi \leq \varphi$. Für $\varphi = 0$ fällt die X -Axe, für $\varphi = 45^\circ$ aber die Y -Axe mit der Druckrichtung zusammen; die Auslöschungsschiefe in einem parallel seiner Längsaxe comprimierten Prisma kann je nach der Lage der letzteren zwischen X^0 und D alle möglichen

Grössen haben. (Dasselbe gilt für den Typus IV).

Da in den Formeln (4) nur das Quadrat von b/a vorkommt, so ist ebenso wie beim Typus II die Axenebene senkrecht zur $X^0 Y^0$ -Ebene und der Axenwinkel gegeben durch $\sin^2 \Omega = \text{tg}(\varphi + \psi) \text{tg}(\varphi - \psi)$.

Aus dem soeben beschriebenen Verhalten von ψ geht aber hervor, dass, wenn P in die Dodekaëdernormale D fällt, die Ebene der optischen Axen senkrecht zur Druckrichtung ist. Der Axenwinkel um die X -Axe ist für diesen Fall ge-

1) F. Pockels, l. c. p. 385.

geben durch $\sin^2 \Omega' = (a + b)/(a - b)$, was aus dem unter II. 1. angegebenen Ausdrucke für $\sin^2 \Omega$ folgt, wenn man berücksichtigt, dass der Quadratwurzel stets das Vorzeichen von a beizulegen ist, und dass jetzt b das entgegengesetzte Vorzeichen hat.

Ω' kann sowohl $< 45^\circ$ als $> 45^\circ$ sein; für Flussspath findet man den Werth $36^\circ 12'$. Es ist ferner $-\partial \sin \Omega / \partial \psi = 1,69$ für $\varphi = 0$, $= 0$ für $\varphi = 45^\circ$; die der Druckrichtung und den optischen Axen entsprechenden Punkte der Kugel fläche bilden für sehr kleine Winkel φ nahezu ein gleichseitiges Dreieck mit X^0 als Mittelpunkt.

2. Die Formel (5) lehrt, dass ϑ von 90° bis $54^\circ 44'$ abnimmt, während χ von 0 bis zu letzterem Werthe wächst; demzufolge ist Z anfangs senkrecht zu Z^0 (fällt also mit D zusammen) und bewegt sich in entgegengesetzter Richtung wie P und zwar langsamer, sodass $90^\circ - \vartheta$ stets $< \chi$ ist. Die drei Ausdrücke (6) haben gleiches Vorzeichen, folglich ist ω_x die mittlere Hauptlichtgeschwindigkeit, und die optischen Axen liegen in der Symmetrieebene. Der halbe Axenwinkel um die Z -Axe ist

$$\Omega = \arcsin \sqrt{\frac{\sin \vartheta \cdot \sin (\vartheta - \chi)}{\cos \chi}}$$

und nimmt von 90° bis 0° ab, während χ von 0 bis $54^\circ 44'$ wächst. Dies bedeutet, dass der Krystall für $\chi = 0$ negativ, für $\chi = 54^\circ 44'$ positiv einaxig wird, oder umgekehrt.

3. Wenn χ weiter wächst bis 90° , nimmt ϑ von $54^\circ 44'$ bis 0 ab, ändert sich jetzt also schneller als χ . Die mittlere Geschwindigkeit ist jetzt ω_y , folglich die Axenebene senkrecht zur $Z^0 D$ -Ebene und, unter 2Ω den Axenwinkel um Z verstanden, $\sin^2 \Omega = \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg} (\chi - \vartheta)$; Ω nimmt also zu von 0 bis zu dem Werthe $\arcsin \sqrt{2b/(b - a)}$, welcher das Complement von Ω' ist. $\partial \sin \Omega / \partial \vartheta$ ist $= -\infty$ für $\chi = 54^\circ 44'$ $= 0$ für $\chi = 90^\circ$. Die beiden Curvenäste, welche auf der Kugel den geometrischen Ort der optischen Axen vorstellen, treffen also den grössten Kreis, dessen Pol D ist, beide senkrecht in einem Punkte mit gemeinsamer Tangente.

IV. $b/a < -1$. Repräsentant dieses Typus ist Sylvin; denn für diese Substanz ist nach den unten angeführten Beobachtungen $b/a = -2,525$.

1. Hinsichtlich des Winkels ψ gilt dasselbe, wie im Falle III. 1, nur ist jetzt $90^\circ - \psi < \varphi$. Von den drei Grössen $\omega_x, \omega_y, \omega_z$ ist hier ω_z die mittlere, es ist also, wie im Falle I. 1., die Axenebene die X^0Y^0 -Ebene und

$$\sin^2 \Omega = \frac{\cos 2\varphi - \cos 2\psi}{2 \cos 2\varphi} \quad \text{oder} \quad \cos 2 \Omega = \frac{\cos 2\psi}{\cos 2\varphi};$$

der für $\varphi = 45^\circ$ erreichte Maximalwerth von Ω ist gegeben durch:

$$\sin^2 \Omega' = \frac{b+a}{2b}, \quad (\text{woraus für Sylvin folgt } \Omega' = 33^\circ 23').$$

$$\frac{\partial \sin \Omega}{\partial \psi} \text{ ist } = 0 \text{ für } \varphi = 45^\circ, \text{ endlich für } \varphi = 0.$$

2. und 3. Wie in III 2. nimmt ϑ zunächst von 90° aus ab, während χ von 0° an wächst. Hier geht diese Abnahme

von ϑ aber nicht, wie im vorigen Falle, bis zu 0 ; denn für $\chi = 90^\circ$ wird wegen des negativen Vorzeichens von $-b/(a+b)$ wieder $\vartheta = 90^\circ$; demnach muss ϑ ein Minimum erreichen und dann wieder zunehmen. Der Winkel χ'' , für welchen dieses Minimum eintritt, bestimmt sich aus

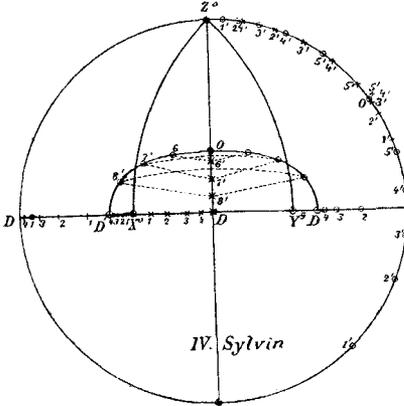


Fig. 3.

$$\cos 2\chi'' = \frac{b+3a}{b-a}$$

und ist $\leq 45^\circ$, je nachdem $-b/a \geq 3$ ist, und $\leq 54^\circ 44'$, je nachdem $-b/a \geq 2$ ist; der kleinste Werth von ϑ selbst ist

$$\vartheta'' = \frac{1}{2} \arctg \left\{ \frac{-b\sqrt{2}}{\sqrt{-a(a+b)}} \right\}.$$

In dem speciellen Falle $b = -2a$ würde der Umkehrpunkt von Z gerade in O fallen; in jedem anderen Falle geht Z über O hinaus, da $\vartheta'' < 54^\circ 44'$ ist.

Für Sylvin findet sich $\chi'' = 48^\circ 48'$, $\vartheta'' = 54^\circ 32'$.

Es ist stets

$$\vartheta > \chi \text{ für } 0 < \chi < 54^\circ 44', \quad \vartheta < \chi \text{ für } 54^\circ 44' < \chi < 90^\circ;$$

daher gilt in Bezug auf die Lage der optischen Axen dasselbe, wie beim Typus I, d. h. es ist

für $0 < \chi < 54^{\circ} 44'$ die Axenebene $\parallel Z^0 D$ und

$$\sin^2 \Omega = \frac{\sin \vartheta \sin(\vartheta - \chi)}{\cos \chi},$$

für $54^{\circ} 44' < \chi < 90^{\circ}$ die Axenebene $\perp Z^0 D$ und

$$\sin^2 \Omega = \operatorname{tg} \vartheta \operatorname{tg}(\chi - \vartheta),$$

wo Ω den halben Axenwinkel um die Z -Axe bedeutet; derselbe ergibt sich für $\chi = 0$ gleich 90° aus demselben Grunde wie im Falle III. Der Maximalwerth von Ω für $\chi = 90^{\circ}$ ist das Complement von $\Omega' = \arcsin \sqrt{(b+a)/2b}$ und somit stets $> 45^{\circ}$. Ein in der Richtung D ausgeübter Druck macht also einen Krystall dieses Typus in der Weise optisch zweiaxig, dass die Axen in der durch D gehenden Würfelfläche liegen und D die zweite Mittellinie wird. In dem Grenzfalle $b = -a$ würde dabei der Axenwinkel $= 0$, also der Krystall einaxig mit zur Druckrichtung senkrechter optischer Axe werden.

Es sei noch einmal hervorgehoben, dass hier, wie beim Typus III, ein Druck parallel der Würfelnormale und ein gleicher parallel der Octaëdernormale ausgeübt Doppelbrechung von entgegengesetztem Sinne erzeugen, und dass dasselbe gilt, wenn in jenen beiden Richtungen nicht ein gleicher Druck, sondern eine gleiche Dilatation hervor gebracht wird.

II. Beobachtungen an Steinsalz und Sylvin.

Die Beobachtungen wurden mit demselben Apparat und genau in derselben Weise angestellt, wie die früheren an Quarz und Flussspath.¹⁾ Nur mussten hier wegen der Zerbrechlichkeit und Weichheit des Materials erheblich kleinere Drucke angewandt und zur Ausgleichung des Druckes statt der Zinnplatten solche von Blei bzw. beim Sylvin von Gummi benutzt werden. Ferner wurde, da meistens mehrere Prismen von jeder Gattung vorhanden waren, an jedem Prisma nur bei einer Aufstellung, beim Steinsalz auch nur bei einer

1) F. Pockels, l. c. p. 164 ff.

Belastung beobachtet. Dass auch bei letzterem die relative Verzögerung dem Drucke sehr annähernd proportional war, wurde durch einige besondere Versuche constatirt. Die Beobachtungen wurden auch diesmal, wo nichts anderes bemerkt ist, mit Natriumlicht ausgeführt. Die Bezeichnungen und die Einrichtung der Tabellen, welche die relative Verzögerung in Umdrehungen der Compensatorschraube ausgedrückt angeben, sind ebenfalls dieselben, wie in meiner früheren Arbeit, abgesehen davon, dass die beiden Stellungen des Polarisators im Nachstehenden mit α_1 und α_2 statt mit φ_1 und φ_2 bezeichnet sind. Als Material hatte mir Hr. Prof. Voigt freundlichst Stücke derselben Krystalle zur Verfügung gestellt, für welche er kürzlich die Elasticitätsconstanten bestimmt hat.¹⁾ Die zu meiner Untersuchung benutzten rechtwinkligen Parallelepipeda wurden von Hrn. Dr. Steeg und Reuter in Homburg v. d. H. hergestellt. Die Beobachtungen habe ich im physikalischen Institut zu Göttingen ausgeführt.

Steinsalz.

Dimensionen und Orientirungen der benutzten Prismen.

Es waren, wie auch beim Sylvin, drei Gattungen von Prismen hergestellt worden; bei allen war eine der kurzen Kanten (D)²⁾ parallel einer Würfelnormale (der Z -Axe), die Längsrichtung L (die Druckrichtung) also parallel einer Würfelfläche. Der Winkel zwischen der Richtung L und der nächstliegenden Würfelnormale (X^0 -Axe), also der im I. Theile mit φ bezeichnete Winkel, sollte betragen: 0° für die Gattung (1), 45° für die Gattung (2), $22\frac{1}{2}^\circ$ für die Gattung (3). Nach Beendigung der Versuche wurden die Orientirungen der Prismen (2) und (3) durch Messung der Neigung kleiner Spaltflächen mit dem Reflexionsgoniometer geprüft und erwiesen sich als beträchtlich von obigen Werthen verschieden. Bei der Gattung (2) betragen die Abweichungen ca. 1° und

1) W. Voigt, Wied. Ann. 35. p. 651 u. 655. 1888.

2) Die hier mit D bezeichnete Richtung ist nicht mit der im I. Theile ebenso benannten, welche eine Dodekaëdernormale war, zu verwechseln.

konnten bei der Berechnung vernachlässigt werden, da für $\varphi = 45^\circ$ die relative Verzögerung ein Minimum (bezw. Maximum) erreicht; dagegen waren bei der Gattung (3) die Abweichungen zum Theil noch grösser und mussten bei der Berechnung berücksichtigt werden, weshalb nachstehend die Werthe von φ für die einzelnen Prismen angegeben sind. Von den drei Gattungen waren bezw. 3, 6 und 4 Prismen vorhanden.

Gattung 1. Prisma I	II	III				
$B = 4,06$	3,98	3,96 mm				
$D = 3,85$	3,85	3,82 mm.				
Gattung 2. Pr. I	II	III	IV	V	VI	
$B = 3,84$	3,82	3,84	3,96	3,97	3,84	mm
$D = 3,96$	3,95	3,94	3,83	3,84	3,96	mm.
Gattung 3. Pr. I	II	III	IV			
$B = 3,96$	3,84	3,83	3,96			
$D = 3,84$	3,96	3,96	3,83			
$\varphi = 20^\circ 53'$	$24^\circ 37'$	$21^\circ 51'$	$25^\circ 33'$			

Beobachtungen der relativen Verzögerungen.

Die Belastung Q des Hebels betrug immer 1440 g. Die Grössen \bar{A} sind die relativen Verzögerungen in Wellenlängen bezogen auf den Druck von 1 g. Der Brechungscoefficient n für Natriumlicht wurde nach den nahe übereinstimmenden Bestimmungen verschiedener Beobachter = 1,5445 angenommen.

Gattung (1).

Beobachtungsrichtung $\parallel D$.

	$\alpha = \alpha_1$		R. Rd.	$\alpha = \alpha_2$			Mittel \bar{A}'	$\bar{A} \cdot 10^4$
	L. Rd.	M.		L. Rd.	M.	R. Rd.		
Prisma I.	1,142	1,259	1,361	1,136	1,251	1,333	1,247	0,364
„ II.	1,384	1,308	1,229	1,379	1,327	1,199	1,309	0,374
„ III.	1,356	1,311	1,286	1,366	1,296	1,305	1,320	0,375

Beobachtungsrichtung $\parallel B$.

	α_1		R. Rd.	α_2		R. Rd.	Mittel \bar{A}'	$\bar{A} \cdot 10^4$
	L. Rd.	M.		L. Rd.	M.			
Prisma I.	1,331	1,354	1,361	1,325	1,394	1,349	1,352	0,374
„ II.	1,333	1,393	1,359	1,347	1,386	1,375	1,365	0,377
„ III.	1,310	1,357	1,420	1,287	1,339	1,466	1,363	0,374

Da bei der Gattung (1) die Verzögerung \bar{A} für die Richtungen B und D theoretisch dieselbe sein muss, ist sie

aus allen sechs Beobachtungsreihen zusammen zu berechnen. Man findet so im Mittel:

$$\bar{A}_1 = 0,373 \cdot 10^{-4},$$

$$C_1 = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{p v^2} = \frac{2\lambda}{n^3} \bar{A}_1 = + 1,185 \cdot 10^{-8}.$$

(λ bedeutet die Wellenlänge des Natriumlichts, v die Lichtgeschwindigkeit in Luft).

Gattung 2.

Beobachtungsrichtung $\parallel D$ (Z-Axe).

	L. Rd.	α_1 M.	R. Rd.	L. Rd.	α_2 M.	R. Rd.	Mittel Δ'	$\bar{A} \cdot 10^4$
Prisma I.	1,081	0,921	0,800	1,089	0,975	0,801	0,945	0,260
" II.	1,038	0,963	0,901	1,007	0,957	0,894	0,959	0,2625
" III.	0,957	0,962	0,939	0,968	0,971	0,954		
" IV.	0,940	0,953	0,992	0,924	0,959	1,014	0,964	0,2655
" V.	0,915	0,934	0,944	0,892	0,943	0,955	0,931	0,264
" VI.	0,989	0,953	0,847	0,963	0,939	0,855	0,923	0,263
	1,019	0,939	0,873	1,025	0,933	0,865	0,942	0,260

$$\bar{A}_2 = 0,2625 \cdot 10^{-4}.$$

$$C_2 = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{p v^2} = \frac{2\lambda}{n^3} \bar{A}_2 = + 0,835 \cdot 10^{-8}.$$

Beobachtungsrichtung $\parallel B$ (Y-Axe).

	L. Rd.	α_1 M.	R. Rd.	L. Rd.	α_2 M.	R. Rd.	Mittel Δ'	$\bar{A} \cdot 10^4$
Prisma I.	1,199	1,130	1,043	1,169	1,115	1,058	1,119	0,318
" II.	1,161	1,098	1,075	1,154	1,101	1,070	1,119	0,317
" III.	1,039	1,151	1,204	1,038	1,168	1,169		
" IV.	1,163	1,098	1,085	1,153	1,080	1,110	1,115	0,316
" V.	1,090	1,124	1,185	1,086	1,113	1,180	1,130	0,310
" VI.	1,075	1,175	1,190	1,096	1,142	1,194	1,145	0,315
	1,035	1,111	1,235	1,038	1,098	1,229	1,124	0,320

$$\bar{A}_3 = 0,316 \cdot 10^{-4}.$$

$$C_3 = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{p v^2} = \frac{2\lambda}{n^3} \bar{A}_3 = + 1,005 \cdot 10^{-8}.$$

Gattung 3.

Beobachtungsrichtung $\parallel D$ (Z-Axe).

	L. Rd.	α_1 M.	R. Rd.	L. Rd.	α_2 M.	R. Rd.	Δ'	$\bar{A}_4 \cdot 10^4$	$C_4 \cdot 10^8$
Prisma I.	1,140	1,165	1,151	1,147	1,152	1,142	1,150	0,326	1,037
" II.	1,158	1,134	1,174	1,129	1,125	1,150	1,145	0,316	1,003
" III.	1,092	1,179	1,223	1,112	1,150	1,225	1,163	0,320	1,015
" IV.	1,087	1,150	1,145	1,098	1,133	1,156	1,128	0,321	1,020

Beobachtungsrichtung $\parallel B$.

	α_1		α_2			D'	$D_5 \cdot 10^4$	$C_5 \cdot 10^3$	
	L.Rd.	M.	R.Rd.	L.Rd.	M.				R.Rd.
Prisma I.	1,314	1,280	1,163	1,314	1,250	1,155	1,238	0,341	1,081
„ II.	1,242	1,237	1,215	1,220	(1,255?)	1,234	1,229	0,350	1,110
„ III.	1,207	1,210	1,218	1,208	1,223	1,197	1,212	0,344	1,094
„ IV.	1,220	1,238	1,309	1,207	1,235	1,272	1,247	0,343	1,089

Hier kann wegen der Abweichung in den Orientirungen aus den an den vier Prismen bestimmten Grössen

$$C_4 = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{p v^2} \text{ und } C_5 = \frac{\omega_L^2 - \omega_D^2}{p v^2}$$

nicht das arithmetische Mittel genommen werden, sondern sie müssen jede besonders berechnet werden.

Die Schwingungsrichtungen der in der Richtung von D (Z -Axe) durch die Prismen (3) hindurchgehenden Wellen fallen nicht genau mit der Druckrichtung (L) und der zu ihr senkrechten zusammen, aber diese Abweichung ist so klein, dass sie die Compensatorbeobachtungen nicht beeinträchtigte. Die genannte Abweichung der Schwingungsrichtungen wurde auch (durch Einstellung der Nicols auf das Maximum der Dunkelheit) gemessen; die Resultate folgen hier.

Beobachtungen der Schwingungsrichtungen
an den Prismen (3).

Die erste und zweite Columne geben die mittleren beobachteten Stellungen α' und α'' des Polarisators bei zwei Stellungen des comprimierten Prismas, deren eine durch eine Drehung von 180° um die Verticalaxe (L) aus der anderen hervorging; die letzte Columne enthält die daraus im Mittel sich ergebende Abweichung der einen Schwingungsrichtung (X -Axe) von der Druckrichtung gegen die nächstliegende Würfelnormale hin, also den im I. Theile mit Φ bezeichneten Winkel.

	α'	α''	Φ
Prisma I.	1,4°; 91,3°	351,2°; 81,5°	5° 0'
„ II.	1,3 91,2	351,1 81,2	5 4
„ III.	0,9 91,1	350,6 80,7	5 11
„ IV.	1,3 91,2	351,5 81,4	4 54

Die Unsicherheit der einzelnen Einstellungen betrug bis zu 1° und darüber, weil die Steinsalzprismen nicht völlig

homogen waren, sondern im undeformirten Zustande von doppeltbrechenden Streifen durchzogen erschienen (vgl. die Anmerkung).

Berechnung der Constanten a und b und Prüfung der Theorie.

Zur Berechnung der Constanten a , b sollen nur die oben gefundenen Grössen C_1 , C_2 , C_3 verwendet werden, weil deren Bestimmung am sichersten war. Dieselben sind aus gleich vielen Beobachtungen abgeleitet und also bei der Constantenberechnung (nach der Methode der kleinsten Quadrate) mit gleichem Gewicht in Rechnung zu bringen. Nach den Formeln (4) ist:

$$C_1 = -\frac{a}{v^2}, \quad C_2 = -\frac{b}{v^2}, \quad C_3 = -\frac{a+b}{2v^2};$$

daher findet man:

$$\frac{a}{v^2} = -\frac{5C_1 - C_2 + 2C_3}{6}, \quad \frac{b}{v^2} = -\frac{5C_2 - C_1 + 2C_3}{6}$$

und nach Einsetzung der oben angegebenen Werthe für C_1 , C_2 und C_3 :

$$\frac{a}{v^2} = \frac{1}{v^2} (a_{11} - a_{12}) (s_{11} - s_{12}) = -1,183 \cdot 10^{-8},$$

$$\frac{b}{v^2} = \frac{1}{v^2} a_{44} s_{44} = -0,833 \cdot 10^{-8}.$$

Hieraus ergeben sich unter Benutzung von $s_{11} - s_{12} = 28,98 \cdot 10^{-8}$ und $s_{44} = 77,29 \cdot 10^{-8}$ die Werthe:

$$\underline{a_{11} - a_{12} = -0,0408 \cdot v^2}, \quad \underline{a_{44} = -0,0108 \cdot v^2}.$$

Die Relation $a_{11} - a_{12} = 2a_{44}$, welche für isotrope Körper gilt, ist also auch nicht annähernd erfüllt. Wenn ein Steinsalzkrystall eine bestimmte Dehnung einmal in der Richtung einer Würfelnormale, zweitens in der Richtung einer Octaëdernormale erfährt, so ist die dadurch erzeugte Doppelbrechung im ersten Falle beinahe *doppelt so stark* als im zweiten. Dem absoluten Werthe nach ist $a_{11} - a_{12}$ nur etwa halb so gross wie bei Glas.

Die aus obigen Werthen von a und b rückwärts berechneten Grössen C_1 , C_2 , C_3 stimmen mit den direct aus

1) Nach W. Voigt, Wied. Ann. 35. p. 654. 1888.

den Beobachtungen erhaltenen sehr gut überein, wie die nachstehende Zusammenstellung zeigt:

	$C_1 \cdot 10^8$	$C_2 \cdot 10^8$	$C_3 \cdot 10^8$
Beobachtet	1,185	0,835	1,005
Berechnet	1,183	0,833	1,008

Die Beobachtungen an den Prismen der Gattung (3) können zur weiteren Prüfung der Theorie dienen. Es ist nach Gl. (4):

$$C_4 = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{p v^2} = -\frac{1}{v^2} \sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi};$$

ferner ist:

$$\begin{aligned} \omega_D^2 - \omega_L^2 &= \omega_z^2 - \omega_x^2 \cos^2(\varphi - \psi) - \omega_y^2 \sin^2(\varphi - \psi) \\ &= (\omega_z^2 - \omega_x^2) \cos^2(\varphi - \psi) + (\omega_z^2 - \omega_y^2) \sin^2(\varphi - \psi) \\ &= \frac{1}{2} p \{ a + \cos 2(\varphi - \psi) \cdot \sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi} \}, \end{aligned}$$

oder, da

$$\begin{aligned} \cos 2(\varphi - \psi) &= \frac{\cos 2\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} 2\varphi\right)^2}} + \frac{\sin 2\varphi \cdot \frac{b}{a} \operatorname{tg} 2\varphi}{\sqrt{1 + \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} 2\varphi\right)^2}} \\ &= \frac{a \cos^2 2\varphi + b \sin^2 2\varphi}{\sqrt{a^2 \cos^2 2\varphi + b^2 \sin^2 2\varphi}} \quad \text{ist,} \end{aligned}$$

$$\omega_D^2 - \omega_L^2 = \frac{1}{2} p \{ a + a \cos^2 2\varphi + b \sin^2 2\varphi \},$$

$$C_5 = -\frac{1}{v^2} \left\{ \frac{a}{2} + \frac{a \cos^2 2\varphi + b \sin^2 2\varphi}{2} \right\}.$$

Endlich ist nach Formel (3):

$$\Phi = \varphi - \psi = \varphi - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} 2\varphi \right).$$

Setzt man in diese Formeln die oben angegebenen für die 4 Prismen der Gattung (3) geltenden Winkel φ ein, so erhält man die in der folgenden Tabelle mit den beobachteten zusammengestellten Werthe von C_4 , C_5 und Φ .

	Pr. I.	II	III	IV
$C_4 \cdot 10^8$ {ber.	1,042	0,998	1,031	0,987
{beob.	1,037	1,003	1,015	1,020
$C_5 \cdot 10^8$ {ber.	1,106	1,034	1,100	1,078
{beob.	1,081	1,110	1,094	1,089
Φ {ber.	4° 49'	5° 0'	4° 54'	5° 0'
{beob.	5 0	5 4	5 11	4 54

Die Uebereinstimmung ist hier zum Theil weniger gut, was unter anderem darin seinen Grund haben mag, dass hier eine geringe Abweichung der Druckrichtung von der Richtung L schon beträchtlichen Einfluss auf die relativen Verzögerungen hat. Doch übersteigen die Abweichungen nicht die Grenzen der Beobachtungsfehler.

Um zu ermitteln, in welcher Weise die Constanten a und b von der Wellenlänge abhängen, wurden einige Reihen von Compensatorbeobachtungen an je einem Prisma der Gattung (1) und (2) in der Weise angestellt, dass mittelst eines Glasprismas mit horizontaler brechender Kante (— es wurde ein Prisma à vision directe mit sehr starker Dispersion benutzt —) ein Spectrum auf den verticalen Spalt des Compensators geworfen wurde. Die Verschiebung des Streifens wurde, wie gewöhnlich, an einer durch einen horizontalen feinen Draht fixirten Stelle des Spaltes gemessen und die entsprechende Wellenlänge dadurch ermittelt, dass die Compensatorschraube soweit gedreht wurde, bis der nächste dunkle Streifen an der fixirten Stelle erschien; denn die hierzu erforderliche Anzahl von Umdrehungen ist proportional der Wellenlänge. Das Spectrum konnte vertical verschoben werden, sodass nacheinander verschiedene Farben auf die bezeichnete Stelle fielen. Es ergab sich in beiden Fällen eine deutliche Zunahme der Streifenverschiebung Δ' nach dem brechbareren Ende des Spectrums hin; allein ein Theil dieser Zunahme rührt von der Dispersion her, da Δ' proportional mit n^3 ist. Bei Berücksichtigung der von Hrn. Stefan¹⁾ bestimmten Werthe von n fand sich nur eine geringe Zunahme der Constanten a und b mit abnehmender Wellenlänge, bei a etwa um 5 Proc., bei b um höchstens 3 Proc. für das Intervall von der Linie B bis F . Doch sind diese Zahlenwerthe unsicher wegen zu geringer Anzahl der Beobachtungen.

Messungen der absoluten Verzögerungen.

Die Steinsalzprismen, welche zu den im Vorhergehenden beschriebenen Versuchen dienten, hatten sämtlich nicht hinreichend genau parallele Flächen, um zur Beobachtung der absoluten Verzögerungen nach der bekannten auf der Ver-

1) Stefan, Sitzungsber. der Wien. Acad. 63. (2). p. 223. 1871.

schiebung von Beugungsstreifen beruhenden Methode brauchbar zu sein. Es wurden daher noch 6 Prismen der Gattung (1) bei Herren Dr. Steeg und Reuter nachbestellt, von denen wenigstens ein Paar recht gute Beugungsstreifen gab. An diesem wurden Beobachtungen nach der früher von mir beschriebenen Methode¹⁾ angestellt. Dabei wurde theils Sonnenlicht, theils das Licht eines Argandbrenners (welches hierbei als Natriumlicht betrachtet werden kann) benutzt, was zulässig ist, weil das Verhältniss der beiden absoluten Verzögerungen von der Wellenlänge unabhängig ist, sofern man die Dispersion und die Veränderlichkeit von a_{11} und a_{12} mit der Wellenlänge unberücksichtigt lässt; dass diese letztere Veränderlichkeit sehr gering ist, kann man nach den vorhergehenden Resultaten als sehr wahrscheinlich betrachten. Uebrigens ist ja auch die „mittlere Wellenlänge“ des Sonnenlichtes ($571 \cdot 10^{-6}$) nur wenig von derjenigen der D -Linie verschieden.

An demjenigen Prisma, welches die besten Beobachtungen gestattete, wurden bei einer Belastung von 1510 g folgende absolute Verzögerungen δ_h und δ_v der vertical, resp. horizontal polarisirten Welle, ausgedrückt in Wellenlängen, gemessen:

	L. Rd.	M.	R. Rd.	Mittel
δ_v	0,123	0,147	0,165	0,145
δ_h	0,166	0,217	0,226	0,203
$\delta_v : \delta_h$	0,740	0,728	0,675	0,714

Hierbei sind die mit Sonnenlicht gemessenen Verzögerungen schon auf Natriumlicht reducirt.

Zwischen den Grössen

$$C_v = \frac{\omega_0^2 - \omega_v^2}{p v^2} = \frac{c}{v^2}, \quad C_h = \frac{\omega_0^2 - \omega_h^2}{p v^2} = \frac{a + c}{v^2}$$

und den Verzögerungen δ_v , δ_h bestehen die Gleichungen:

$$C_v = \frac{2\lambda}{p D^0 n^3} \delta_v - \frac{2(D - D^0)}{p D^0 n^3} (n - 1),$$

$$C_h = \frac{2\lambda}{p D^0 n^3} \delta_h - \frac{2(D - D^0)}{p D^0 n^3} (n - 1),$$

1) F. Pockels, l. c. p. 168.

worin $(D - D^0)/D$ die Querdilatation in der Beobachtungsrichtung, also $= -p s_{12}$ ist. Aus diesen beiden Gleichungen findet sich bei Benutzung obiger Mittelwerthe von δ_v und δ_h :

$$C_v = 1,48 \cdot 10^{-8}, \quad C_h = 2,68 \cdot 10^{-8}.$$

Zuverlässigere Werthe erhält man aber jedenfalls, wenn man nur das Verhältniss $\delta_v : \delta_h = 0,714$ benutzt und die aus den Compensatorbeobachtungen abgeleitete Differenz $C_v - C_h = -1,183 \cdot 10^{-8}$ hinzunimmt; mit letzterer stimmt übrigens die Differenz der direct bestimmten Grössen C_v und C_h sehr nahe überein. Man findet auf die angegebene Weise:

$$C_v = 1,43 \cdot 10^{-8}, \quad C_h = 2,61 \cdot 10^{-8}.$$

Nun war:

$$C_v = \frac{c}{v^2} = \frac{1}{v^2} \{a_{11} s_{12} + a_{12} (s_{11} + s_{12})\} = \frac{1}{v^2} \{(a_{11} - a_{12}) s_{12} + a_{12} (s_{11} + 2s_{12})\};$$

setzt man hierin $s_{12} = -5,165 \cdot 10^{-8}$, $s_{11} + 2s_{12} = +13,49 \cdot 10^{-8}$, $a_{11} - a_{12} = -0,0408 \cdot v^2$ ein, so folgt:

$$\underline{a_{12} = +0,178 \cdot v^2}, \quad \underline{a_{11} = +0,137 \cdot v^2}.$$

Dazu kommt der schon oben gefundene Werth:

$$\underline{a_{44} = -0,0108 \cdot v^2}.$$

Es muss jedoch bemerkt werden, dass bei a_{11} und a_{12} die letzte Stelle völlig unsicher ist wegen der ungenauen Bestimmung der absoluten Verzögerungen.

Die Aenderung der Lichtgeschwindigkeit in Steinsalz bei allseitig gleichem Druck ist nach dem Vorhergehenden gegeben durch:

$$\frac{\omega^2 - \omega^0{}^2}{v^2} = \frac{1}{v^2} \frac{a_{11} + 2a_{12}}{3} \cdot \mathcal{A} = +0,164 \cdot \mathcal{A},$$

wo \mathcal{A} die cubische Dilatation bezeichnet; eine gleichförmige Compression bewirkt also eine Abnahme der Lichtgeschwindigkeit, wie zu erwarten war und wie es auch bei Quarz, Flusspath und Glas der Fall ist. Die Aenderung des Brechungscoefficienten für Na-Licht ist:

$$dn = \frac{n^3}{2} \frac{\omega^0{}^2 - \omega^2}{v^2} = -0,304 \cdot \mathcal{A}.$$

Man kann nun hieraus berechnen, wie sich der Brechungscoefficient mit der Temperatur (t) ändern würde, wenn die Annahme richtig wäre, dass die optische Wirkung einer

thermischen Dilatation dieselbe ist, wie diejenige der gleich grossen elastischen. Zu diesem Zwecke braucht man nur für Δ das Dreifache des linearen Ausdehnungscoefficienten γ einzusetzen, welcher für Steinsalz = $4,06 \cdot 10^{-5}$ ist¹⁾, und erhält:

$$\frac{dn}{dt} = -3,72 \cdot 10^{-5}.$$

Directe Bestimmungen von dn/dt liegen für Steinsalz von Hrn. Stefan²⁾ vor, welcher gefunden hat:

$$\frac{dn}{dt} = -3,73 \cdot 10^{-5}.$$

Hiernach erscheint obige Annahme für Steinsalz völlig zutreffend, wenn auch die Uebereinstimmung der beiden Werthe von dn/dt wohl nur zufällig eine so genaue ist; in der That hat N. Lagerborg³⁾ erheblich kleinere Werthe von dn/dt beobachtet, nämlich $-3,08 \cdot 10^{-5}$ für $14,5^{\circ}$ bis 47° , $-3,41 \cdot 10^{-5}$ für $14,5^{\circ}$ bis $90,5^{\circ}$, wobei jedoch zu bemerken ist, dass dieselbe auch einen viel kleineren und mit der Temperatur auffallend stark variablen Ausdehnungscoefficienten angibt.

Sylvin.

Dimensionen und Orientirungen der benutzten Prismen.

Von der Gattung (1) waren zwei, von den Gattungen (2) und (3) je ein Prisma hergestellt worden. Die Orientirung der Längsaxe L war bei dem Prisma (2) nur um 13° von der verlangten ($\varphi = 45^{\circ}$) verschieden; diese Abweichung konnte aus dem beim Steinsalz angeführten Grunde vernachlässigt werden. Für das Prisma (3) fand sich $\varphi = 22^{\circ} 24'$. Die Querdimensionen waren folgende:

Prisma (1) I	(1) II	(2)	(3)
$B = 3,85$	3,86	3,855	3,84
$D = 3,73$	3,73	3,74	3,72

1) W. Voigt, Wied. Ann. 35. p. 655. 1888.

2) Stefan, Sitzungsber. der Wien. Acad. 63. (2). p. 223. 1871. In dieser Arbeit, welche ich bei Veröffentlichung meiner ersten Abhandlung nicht kannte, ist ein um ca. $\frac{1}{11}$ kleinerer Werth von dn/dt für Flussspath angegeben, als der von mir dort angeführte, den Dufet gefunden hat.

3) Cf. Referat in der Zeitschr. f. Kryst. 15. p. 432. 1889.

Beobachtungen der relativen Verzögerungen.

Hier wurden wegen der geringen Anzahl der Prismen je zwei Belastungen $Q_1 = 470,59$, $Q_2 = 706$ g angewendet. Da dieselben wegen der Weichheit des Materials nur so klein sein durften, und da Gummipplatten als Zwischenlage dienen mussten, wodurch die Stellung der Prismen sich beim Belasten leicht etwas änderte, so konnte hier nur eine geringere Genauigkeit erreicht werden, als bei den früher untersuchten Substanzen. — Der Brechungscoefficient n für Na-Licht wurde nach Stefan = 1,490 gesetzt.

Gattung (1).

Prisma	Belast.	α_1			α_2			\bar{A}'	$\bar{A} \cdot 10^4$	\bar{A}' ber.
		L. Rd.	M.	R. Rd.	L. Rd.	M.	R. Rd.			
Beobachtungsrichtung $\parallel D$.										
I.	Q_1	-0,645	-0,580	-0,512	-0,662	-0,606	-0,508	-0,585	-0,483	-0,588
	Q_2	-0,986	-0,862	-0,779	-1,009	-0,872	-0,801	-0,885		-0,882
II.	Q_1	-0,545	-0,548	-0,565	-0,555	-0,566	-0,595	-0,562	-0,460	-0,561
	Q_2	-0,802	-0,838	-0,875	-0,810	-0,817	-0,905	-0,841		-0,841
Beobachtungsrichtung $\parallel B$.										
I.	Q_1	-0,536	-0,545	-0,553	-0,538	-0,542	-0,562	-0,546	-0,466	-0,551
	Q_2	-0,826	-0,853	-0,822	-0,822	-0,831	-0,827	-0,830		-0,826
II.	Q_1	-0,525	-0,585	-0,571	-0,536	-0,589	-0,548	-0,559	-0,474	-0,559
	Q_2	-0,807	-0,862	-0,854	-0,786	-0,886	-0,842	-0,840		-0,840

Die letzte Columne enthält die aus \bar{A} rückwärts berechneten Werthe von \bar{A}' für die Belastungen Q_1 und Q_2 . (\bar{A} ist aus den zwei beobachteten Mittelwerthen von \bar{A}' nach der Methode der kleinsten Quadrate berechnet). Man sieht aus denselben, dass die Annahme der Proportionalität mit dem Drucke auch hier sich vollkommen bestätigt. — Die Grössen \bar{A} sind in der obigen Tabelle alle mit dem negativen Vorzeichen versehen, weil im Gegensatz zu dem gewöhnlichen Verhalten die senkrecht zur Druckrichtung polarisirte Welle gegen die parallel zu derselben polarisirte verzögert wurde.¹⁾

Das Gesamtmittel für \bar{A} ist:

$$\bar{A}_1 = -0,471 \cdot 10^{-4}.$$

1) Diese Eigenthümlichkeit des Sylvins hat zuerst Hr. Brauns wahrgenommen; cf. Neues Jahrb. f. Min. 1886. 1. p. 232.

Hieraus folgt:

$$C_1 = \frac{\omega_x^2 - \omega_y^2}{pv^2} = -1,67 \cdot 10^{-8}.$$

Prisma (2).
Beobachtungsrichtung $\parallel D$.

Bel.	α_1			α_2			Mittel	$\bar{A}_2 \cdot 10^4$	A' ber.
	L. Rd.	M.	R. Rd.	L. Rd.	M.	R. Rd.	A'		
Q_1	1,460	1,400	1,458	1,446	1,471	1,473	1,451	+ 1,19	1,450
Q_2	2,182	2,130	2,185	2,185	2,175	2,188	2,174		2,175

$$C_2 = \frac{\omega_v^2 - \omega_h^2}{pv^2} = +4,22 \cdot 10^{-8}.$$

Aus den Erörterungen im I. Theile ist ersichtlich, dass in jedem Falle $C_1 = -a/v^2$, $C_2 = -b/v^2$ ist; hier liegt also der dort als vierter besprochene Fall vor. Demnach ist bei Gattung (2) $\omega_v = \omega_y$, $\omega_h = \omega_x$; die y -Axe ist immer die Schwingungs- (Polarisations-) Richtung der langsameren von den beiden parallel Z sich fortpflanzenden Wellen.

Beobachtungsrichtung $\parallel B$.

Bel.	α_1			α_2			Mittel	\bar{A}'	A' ber.
	L. Rd.	M.	R. Rd.	L. Rd.	M.	R. Rd.	A'		
Q_1	0,443	0,459	0,405	0,437	0,432	0,407	0,431	0,418	0,417
	0,373	0,402	0,425	0,388	0,392	0,453	0,405		
Q_2	0,659	0,638	0,655	0,632	0,658	0,622	0,644	0,626	0,626
	0,576	0,599	0,635	0,576	0,583	0,676	0,608		

$$\bar{A}_3 = +0,354 \cdot 10^{-4}, \quad C_3 = \frac{\omega_y^2 - \omega_z^2}{pv^2} = +1,254 \cdot 10^{-8}.$$

Der Streifen des Compensators war hier infolge unregelmässiger ziemlich stark doppeltbrechender Flecke im Prisma mehrfach stark gestört.

Prisma (3).
Beobachtungsrichtung $\parallel D$.

Bel.	α_1			α_2			Mittel	$\bar{A}_4 \cdot 10^4$	A' ber.
	L. Rd.	M.	R. Rd.	L. Rd.	M.	R. Rd.	A'		
Q_1	1,117	1,146	1,147	1,102	1,153	1,140	1,134	0,922	1,121
Q_2	1,677	1,707	1,713	1,607	1,653	1,692	1,675		

$$C_4 = \frac{\omega_y^2 - \omega_x^2}{pv^2} = +3,27 \cdot 10^{-8}.$$

Bei diesen Messungen musste, weil die Schwingungsrichtungen im comprimierten Prisma stark von der Druckrichtung und der zu ihr senkrechten abwichen, zwischen Prisma und Compensator eine senkrecht zur optischen Axe geschliffene Quarzplatte eingeschaltet werden, wie es schon bei einigen meiner früheren Beobachtungen geschah.¹⁾

Beobachtungsrichtung *B*.

Bel.	α_1			α_2			Δ'	$\Delta_5 \cdot 10^4$
	L. Rd.	M.	R. Rd.	L. Rd.	M.	R. Rd.		
Q_2	-0,073	-0,052	-0,068	-0,100	-0,074	-0,081	-0,076	-0,0427

$$C_5 = \frac{\omega_L^2 - \omega_D^2}{pv^2} = -0,152 \cdot 10^{-8}.$$

In dieser Richtung wurde wegen der sehr geringen Grösse der relativen Verzögerung nur bei der einen Belastung Q_2 beobachtet.

Der Sinn der Doppelbrechung war hier wieder anomal.

Bestimmung der Schwingungsrichtungen auf den
Würfelflächen des Prismas (3).

Der Winkel Φ zwischen der Druckrichtung und der Schwingungsrichtung der schnelleren Welle (d. i. der *X*-Axe) wurde im Mittel = $55^\circ 43'$ gefunden; die Einstellung auf grösste Dunkelheit liess sich nur bis auf ca. 1° genau ausführen.

Berechnung der Constanten *a* und *b* und Prüfung
der Theorie.

Da die Messungen am Prisma (2) in der Richtung *B* aus dem oben angegebenen Grunde und diejenigen an (3) aus demselben wie beim Steinsalz weniger sicher waren, als die übrigen, so sollen sie nicht zur Constantenberechnung benutzt werden. Für dieselben bleiben also nur C_1 und C_2 , welche direct die Constanten *a*, *b* liefern. Es wird also für Sylvin angenommen:

$$a = + 1,67 \cdot 10^{-8} v^2, \quad b = - 4,22 \cdot 10^{-8} v^2.$$

Sylvin wird also durch Druck parallel einer Würfelnormale positiv einaxig, durch Druck parallel einer Octaëder-

1) F. Pockels, l. c. p. 285. 330. 384.

normale negativ einaxig, gerade umgekehrt wie Flussspath. Ueber die weiteren Folgen dieses eigenthümlichen Verhältnisses von $a:b$ vergleiche man die Discussion des vierten Falles im I. Theile und die zugehörige Fig. 3. Dass eine Sylvinplatte, durch welche das Licht in der Richtung einer Würfelnormale hindurchgeht, entgegengesetzten Sinn der Doppelbrechung erhält, je nachdem sie parallel einer Würfelo- oder einer Rhombendodekaëdernormale gepresst wird, hat zuerst Hr. Brauns beobachtet.¹⁾

Unter Benutzung der Werthe der Elasticitätsconstanten²⁾

$$s_{11} - s_{12} = 28,1 \cdot 10^{-8}, \quad s_{44} = 153,0 \cdot 10^{-8}$$

erhält man für die optischen Constanten $a_{11} - a_{12}$ und a_{44} des Sylvins die Werthe:

$$\underline{a_{11} - a_{12} = + 0,0595 v^2}, \quad \underline{a_{44} = - 0,0276 \cdot v^2},$$

welche von denjenigen des Steinsalzes ganz und gar verschieden sind und noch viel weiter, als letztere, davon entfernt sind, die für isotrope Körper gültige Relation zu erfüllen, da sie entgegengesetztes Vorzeichen haben. Zum Vergleich seien hier noch einmal die von mir für Flussspath gefundenen Constanten angeführt; dieselben waren:

$$a_{11} - a_{12} = - 0,172 \cdot v^2, \quad a_{44} = + 0,0236 v^2.$$

Nun sind noch die Grössen C_3, C_4, C_5 und Φ aus den obigen Werthen von a und b zu berechnen und mit den beobachteten Werthen zu vergleichen. Es ist:

$$C_3 = - \frac{a+b}{2v^2}, \quad C_4 = - \sqrt{\left(\frac{a}{v^2}\right)^2 \cos^2 2\varphi + \left(\frac{b}{v^2}\right)^2 \sin^2 2\varphi},$$

$$C_5 = - \frac{1}{v^2} \left\{ \frac{a}{2} + \frac{a \cos^2 2\varphi + b \sin^2 2\varphi}{2} \right\}; \quad \Phi = \varphi - \frac{1}{2} \arctg \left(\frac{b}{a} \operatorname{tg} 2\varphi \right),$$

worin $\varphi = 22^\circ 24'$ zu setzen ist. Man erhält hieraus die in der ersten Zeile nachstehender Tabelle angegebenen Werthe.

	$C_3 \cdot 10^8$	$C_4 \cdot 10^8$	$C_5 \cdot 10^8$	Φ
Berechnet	+1,275	+3,205	-0,208	56° 32'
Beobachtet	+1,254	+3,27	-0,152	55 43

1) Brauns, Neues Jahrb. f. Min. 1887. 1. p. 53.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 35. p. 659. 1888.

Die Abweichungen der berechneten von den beobachteten Werthen liegen auch hier durchweg innerhalb der Grenzen der Beobachtungsfehler. — Hinsichtlich der Abhängigkeit der Constanten a und b von der Wellenlänge ergab sich, dass für das Intervall von der Linie C bis F mit wachsender Wellenlänge a beträchtlich (um ca. 9 Proc.) und $-b$ sehr wenig (um ca. $1\frac{1}{2}$ Proc.) abnimmt.

Zur Beobachtung der absoluten Verzögerungen waren die Prismen nicht genügend planparallel. — Nimmt man an, es sei beim Sylvin, ebenso wie beim Steinsalz, die Aenderung des Brechungscoefficienten bei Erwärmung identisch mit der durch die entsprechende elastische Dilatation erzeugten, so kann man mit Hülfe des von Hrn. Stefan¹⁾ bestimmten Werthes:

$$\frac{dn}{dt} = -3,5 \cdot 10^{-5}$$

und des Ausdehnungscoefficienten $\gamma = 3,71 \cdot 10^{-5}$ ²⁾ die Constanten a_{11} und a_{12} berechnen und findet:

$$a_{11} = +0,229 \cdot v^2, \quad a_{12} = +0,170 \cdot v^2;$$

diese Zahlen werden also den wahren vermuthlich ziemlich nahe kommen.

Anmerkung über die optischen Anomalieen der untersuchten Steinsalz- und Sylvinprismen.

Aehnlich wie beim Flussspath³⁾ zeigten sich auch hier von vornherein doppeltbrechende, parallel ihrer Längsrichtung auslöschende Streifen, nur mit dem Unterschiede, dass dieselben beim Steinsalz und Sylvin parallel den Rhombendodekaëderflächen verliefen und viel regelmässiger und schärfer ausgebildet waren. Am deutlichsten waren sie in den Prismen der Gattung (1), wo sie als zwei zu einander orthogonale, unter 45° gegen die Kanten geneigte Systeme von feinen Lamellen erschienen, von denen meistens das eine besonders stark ausgebildet war. Die Lamellen desselben Systems waren zu breiteren Streifen von abwechselndem

1) Stefan, l. c. p. 223.

2) W. Voigt, Wied. Ann. 35. p. 660. 1888.

3) F. Pockels, l. c. p. 373.

Sinne der Doppelbrechung gruppirt, die gewöhnlich nach der einen Seite hin allmählich in einander übergingen, nach der anderen scharf begrenzt waren. Wie beim Flussspath, so wurden auch hier durch diese Lamellen die Compensatormessungen nicht beeinträchtigt; störend wirkten aber ausgelebte verwaschene doppeltbrechende Flecken und Streifen, welche in den Prismen (2) und (3) besonders beim Sylvin vorhanden waren. Die beschriebenen Lamellen, welche am Steinsalz schon von Reusch¹⁾, am Sylvin von Brauns²⁾ beobachtet sind, waren meistens schon vor den Druckversuchen sichtbar, also vielleicht bei der Herstellung der Prismen entstanden; bisweilen wurden sie aber auch bei der ersten Compression zahlreicher und stärker, namentlich wenn zuerst eine Stelle des Querschnittes besonders starken Druck erhielt. Für ihren Zusammenhang mit den Gleitflächen spricht die Thatsache, dass sie sich sehr stark in einem Steinsalzprisma der Gattung (1) ausgebildet hatten, welches sich vor den Versuchen durch zu starke Pressung gleichsam aufgeblättert hatte (durch Spaltung parallel einer verticalen Würfelfläche und Gleiten nach einer Dodekaëderfläche). Jedenfalls hat die Bildung der doppeltbrechenden Lamellen nichts zu thun mit der gleichmässigen Doppelbrechung, welche mit dem Drucke entsteht und verschwindet.

Göttingen, im December 1889.

1) Reusch, Pogg. Ann. 132. p. 441. 1867.

2) Brauns, Neues Jahrb. für Min. 1886. I. p. 224.