Ueber lineare Differentialgleichungen mit einem veränderlichen Parameter.

Von

J. Horn in Charlottenburg.

In einem Aufsatz, welcher im gegenwärtigen 52. Band der Math. Ann. unter dem Titel „Ueber eine lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung mit einem willkürlichen Parameter" erschienen ist, habe ich das Verhalten der Integrale einer in der mathematischen Physik vorkommenden linearen Differentialgleichung zweiter Ordnung für grosse Werthe eines darin enthaltenen Parameters vermittelst einer asymptotischen Darstellung untersucht.

In der vorliegenden Arbeit werden zunächst die früheren Untersuchungen auf eine allgemeinere Classe von linearen Differentialgleichungen zweiter Ordnung ausgedehnt. Es handelt sich dabei darum, das Verhalten von Integralen, welche ganze transcendente Functionen eines Parameters k sind oder sich in der Umgebung der Stelle $k=\infty$ nach positiven und negativen Potenzen von k entwickeln lassen, bei der Annäherung an die wesentlich singuläre Stelle (Unbestimmtheitsstelle) $k=\infty$ vermittelst asymptotischer Darstellungen zu untersuchen, in welchen Producte aus Exponentialausdrücken und Potenzreihen von $\frac{1}{k}$ auftreten*).

Daran knüpfe ich einige Beispiele (die Bessel'sche Function $J_n(x)$ als Function von n, die Gauss'sche Reihe als Function eines der drei ersten Elemente α, β, γ), wo derartige asymptotische Darstellungen in Verbindung stehen mit convergenten Entwicklungen bestehend aus Producten von Exponentialausdrücken und Reihen, welche nach rationalen Functionen des Parameters fortschreiten**).

---

*) Vgl. meinen Aufsatz im 49. Band der Math. Ann.

**) Vgl. die Facultätenreihen für $\int_x^\infty \frac{e^{-x}\,dx}{x}$ und $\log \Gamma(x)$ (Schlömilch's Compendium der Analysis Bd. 2).

§ 1.

Die Coefficienten der Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+F\frac{dy}{dx}+Gy=0 \tag{1}$$

seien rationale Functionen eines Parameters k:

$$F=\frac{B_0k^\beta+B_1k^{\beta-1}+\cdots}{A_0k^\alpha+A_1k^{\alpha-1}+\cdots},$$

$$G=\frac{C_0k^\beta+C_1k^{\beta-1}+\cdots}{A_0k^\alpha+A_1k^{\alpha-1}+\cdots},$$

die reelle Veränderliche x wird im Folgenden stets auf das Intervall $a\leqq x\leqq b$ beschränkt, welches wir mit $\mathfrak{J}$ bezeichnen;

$$A_0,A_1,\ldots.,B_0,B_1,\ldots,C_0,C_1,.,.$$

seien im Intervalle $\mathfrak{J}$ stetige Functionen von x, und zwar sei A_0 in diesem Intervall von Null verschieden, so dass $A_0=1$ angenommen werden kann. Ein Integral y der Differentialgleichung (1) nehme für $x=a$ ebenso wie seine Ableitung $\frac{dy}{dx}$ einen von k unabhängigen Werth an. Wir betrachten dieses Integral als Function der complexen Veränderlichen k und untersuchen sein Verhalten für grosse Werthe von k.

Durch die Substitution

$$y=e^{-\frac{1}{2}\int\limits_a^x F\,dx}\cdot z$$

geht die Differentialgleichung (1) über in

$$\frac{d^2z}{dx^2}+\left(G-\frac{1}{4}F^2-\frac{1}{2}\frac{dF}{dx}\right)z=0.$$

Die Functionen y und z nehmen für $x=a$ denselben Werth an, während die Gleichung

$$\frac{dy}{dx}=e^{-\frac{1}{2}\int\limits_a^x F\,dx}\left(\frac{dz}{dx}-\frac{1}{2}Fz\right)$$

den Zusammenhang zwischen den Anfangswerthen von $\frac{dy}{dx}$ und $\frac{dz}{dx}$ liefert.

Wir können daher die weitere Untersuchung an die Differentialgleichung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+Hy=0 \tag{2}$$

anknüpfen, wo H eine rationale Function von k bezeichnet, deren Coefficienten im Intervall $\mathfrak{J}$ stetige Functionen von x sind:

$$H = \frac{B_0 k^\beta + B_1 k^{\beta-1} + \cdots}{A_0 k^\alpha + A_1 k^{\alpha-1} + \cdots},$$

A_0 ist im Intervall $\mathfrak{J}$ von Null verschieden und kann gleich 1 angenommen werden. Ist $\beta - \alpha = \mu$, so haben wir die Reihenentwicklung

$$H = k^\mu \left(H_0 + \frac{H_1}{k} + \frac{H_2}{k^2} + \cdots\right),$$

welche für $|h| > R$ convergent ist. Es sind positive Grössen

$$h_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

so vorhanden, dass im Intervall $\mathfrak{J}$

$$|H_\nu| < h_\nu$$

ist und dass die Reihe

$$h_0 + \frac{h_1}{k} + \frac{h_2}{k^2} + \cdots$$

für $|k| > R$ convergirt. Wir betrachten das Integral y von (2), welches dadurch fixirt ist, dass für $x = a$

$$y = k^\lambda \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots\right),$$
$$\frac{dy}{dx} = k^\lambda \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right)$$

sein soll, wo λ eine ganze Zahl ist und die Reihen für $|k| > R$ convergiren.

Wir integriren die Differentialgleichung (2) vermittelst fortschreitender Annäherung, indem wir setzen:

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} = 0,$$
$$\frac{d^2 u_m}{dx^2} + H u_{m-1} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots);$$

für $x = a$ sei

$$u_0 = k^\lambda \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots\right), \quad \frac{du_0}{dx} = k^\lambda \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right),$$
$$u_m = 0, \quad \frac{du_m}{dx} = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Dann ist

$$u_0 = k^\lambda \left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots\right) + k^\lambda \left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right)(x - a),$$
$$u_m = -\int_a^x (x - z)\, H(z)\, u_{m-1}(z)\, dz \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Es seien $R' > R$ und $R'' > R'$ beliebige positive Grössen; für $a \leqq x \leqq b$ und für $R' < |k| < R''$ sei

$$|u_0| < N, \quad |H| < M.$$

Ist dann

$$|u_{m-1}| \leqq (b-a)^{m-1} M^{m-1} N \frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!},$$

so folgt aus der Formel für u_m

$$|u_m| \leqq (b-a)^m M^m N \frac{(x-a)^m}{m!} \leqq M^m N \frac{(b-a)^{2m}}{m!}.$$

Demnach ist die Reihe

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

für $a \leqq x \leqq b$ und für $|R'| < |k| < R''$ unbedingt und gleichmässig convergent. Dasselbe gilt für die Reihen

$$\sum_{m=0}^{\infty} \frac{d u_m}{dx}, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} \frac{d^2 u_m}{dx^2},$$

welche demnach die Functionen $\frac{dy}{dx}$, $\frac{d^2y}{dx^2}$ darstellen. Aus

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} + \frac{d^2 u_1}{dx^2} + \cdots + \frac{d^2 u_n}{dx^2} + H(u_0 + u_1 + \cdots + u_{n-1}) = 0$$

folgt für $n = \infty$

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + Hy = 0,$$

d. h. die berechnete Reihe genügt der Differentialgleichung (1).

Die Formeln zur successiven Berechnung von u_0, u_1, u_2, ... ergeben

$$u_m = k^{\lambda + m\mu} \mathfrak{P}_m\left(\frac{1}{k}\right) \quad (m = 0, 1, 2, \ldots),$$

wo $\mathfrak{P}_m\left(\frac{1}{k}\right)$ eine gewöhnliche Potenzreihe von $\frac{1}{k}$ bezeichnet, welche für $|k| > R$ convergirt und deren Coefficienten im Intervall $\mathfrak{J}$ stetige Functionen von x sind. Nach dem Weierstrass'schen Doppelreihensatz lässt sich y in eine nach positiven und negativen Potenzen von k fortschreitende Reihe entwickeln, welche für $R' < |k| < R''$ convergent ist:

$$y = \sum_{\nu=-\infty}^{\nu=+\infty} F_\nu k^\nu.$$

Da R' und R'' beliebige positive Grössen sind, welche die Bedingung $R'' > R' > R$ erfüllen, so convergirt die Reihe für jeden endlichen Werth von k, dessen absoluter Betrag grösser als R ist.

Wir können demnach den Satz aussprechen:

Ein Integral y der Differentialgleichung (1), *welches nebst seiner Ableitung $\frac{dy}{dx}$ für $x = a$ einen vom Parameter k unabhängigen Werth annimmt, lässt sich, wenn x auf das Intervall $a \leqq x \leqq b$ beschränkt* *wird, in eine nach positiven und negativen Potenzen von k fortschreitende Reihe entwickeln, welche für jeden endlichen Werth von k, dessen absoluter Betrag eine gewisse Grenze überschreitet, convergent ist.*

Es ist bekannt, dass ein solches Integral y eine ganze transcendente Function von k ist, wenn F und G ganze rationale Functionen von k sind.

§ 2.

Man kann der Differentialgleichung (1) die Form geben:

$$\frac{d^2y}{dx^2} + k^n P \frac{dy}{dx} + k^{2n} Q y = 0, \tag{3}$$

wo n eine ganze positive Zahl ist und P, Q rationale Functionen von k, welche die für $|k| > R$ convergenten Reihenentwicklungen zulassen:

$$P = P_0 + \frac{P_1}{k} + \frac{P_2}{k^2} + \cdots,$$

$$Q = Q_0 + \frac{Q_1}{k} + \frac{Q_2}{k^2} + \cdots.$$

Vom Fall $n = 0$ können wir absehen, da alsdann ein Integral y, welches nebst $\frac{dy}{dx}$ für $x = a$ einen von k unabhängigen Werth annimmt, in eine Potenzreihe von $\frac{1}{k}$ entwickelbar ist.

Durch die Substitution

$$\frac{d \log y}{dx} = z$$

geht die Differentialgleichung (3) über in

$$\frac{dz}{dx} + z^2 + k^n P z + k^{2n} Q = 0,$$

welche formell befriedigt wird durch die Reihe

$$z = k^n \left(z_0 + \frac{z_1}{k} + \frac{z_2}{k^2} + \cdots\right);$$

die Coefficienten $z_0, z_1, \ldots$ sind Functionen von x, welche man aus den Gleichungen berechnet:

$$z_0^2 + P_0 z_0 + Q_0 = 0,$$
$$(2z_0 + P_0) z_1 + (P_1 z_0 + Q_1) = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$(2z_0 + P_0) z_\nu + F_\nu(z_0, z_1, \ldots z_{\nu-1}) + \frac{dz_{\nu-n}}{dx} = 0;$$

für $\nu < n$ fällt das Glied $\frac{dz_{\nu-n}}{dx}$ fort.

Es ist

$$2z_0 + P_0 = \pm\sqrt{P_0^2 - 4Q_0};$$

wenn $P_0^2 - 4Q_0$ im Intervall $\mathfrak{J}$ stets dasselbe Vorzeichen besitzt, ist z_ν in diesem Intervall stetig. Da z_0 aus einer quadratischen Gleichung berechnet wird, so sind zwei Reihen von der angegebenen Form vorhanden. Die Differentialgleichung wird formell befriedigt durch zwei Reihen von der Form

$$y = e^{k^n \int^x \left(z_0 + \frac{z_1}{k} + \cdots\right) dx},$$

d. i. von der Form

$$y = e^{\omega_0 k^n + \omega_1 k^{n-1} + \cdots + \omega_{n-1} k} \left(\varphi_0 + \frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right),$$

wo $\omega_0, \omega_1, \ldots, \varphi_0, \varphi_1, \ldots$ Functionen von x sind, welche freilich nicht vollständig bestimmt sind, da die untere Grenze des Integrals im Exponenten von e willkürlich gewählt werden kann.

Im Folgenden soll die Bedeutung dieser Reihen nur im Fall $n = 1$ untersucht werden. Ein Specialfall wurde in der früheren Arbeit*) behandelt, nämlich die der mathematischen Physik entnommene Differentialgleichung

$$\frac{d}{dx}\left(A \frac{dy}{dx}\right) + (k^2 B + C) y = 0,$$

welche aus (3) hervorgeht, wenn man $n = 1$ und

$$P_0 = 0,\ P_2 = P_3 = \cdots = 0; \quad Q_1 = 0,\ Q_3 = Q_4 = \cdots = 0$$

annimmt.

§ 3.

In der Differentialgleichung (3) mit $n = 1$ sei durch die in § 1 benutzte Substitution das Glied mit $\frac{dy}{dx}$ beseitigt. Wir können somit der weiteren Betrachtung die Gleichung

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 Q y = 0 \tag{4}$$

zu Grund legen, wo

$$Q = Q_0 + \frac{Q_1}{k} + \frac{Q_2}{k^2} + \cdots$$

für $|k| > R$ convergent ist, wenn x im Intervall $\mathfrak{J}$ liegt; *in diesem Intervall sei Q_0 positiv.* Im Falle $Q_0 < 0$ würde man k durch ki ersetzen; denn dass die Functionen $Q_1, Q_2, \ldots$ reell sind, ist für das Folgende nicht nöthig. Wir betrachten das Integral y von (4), welches dadurch fixirt ist, dass für $x = a$

---

*) Die im Bd. 52, S. 271 erschienene Arbeit wird im Folgenden kurz mit A. bezeichnet.

$$y = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots,$$
$$\frac{dy}{dx} = k\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right)$$

sein soll; die gegebenen Potenzreihen seien für $|k| > R$ convergent.

Die Gleichung (4) wird formell befriedigt durch eine Reihe von der Form

$$y = e^{ik\omega}\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right).$$

Setzt man diese Reihe in (4) ein, so erhält man nach Division mit $e^{ik\omega}$ durch Vergleichung der Coefficienten von $k^2, k, k^{-(\nu-1)}$:

$$\omega'^2 = Q_0,$$
$$2\omega'\varphi_0' + (\omega'' - iQ_1)\varphi_0 = 0,$$
$$2\omega'\varphi_\nu' + (\omega'' - iQ_1)\varphi_\nu = \cdots,$$

wo die rechte Seite von den Functionen $\varphi_0, \varphi_1, \ldots \varphi_{\nu-1}$ und ihren Ableitungen abhängt. Wir nehmen

$$\omega' = \sqrt{Q_0}$$

im Intervall $\mathfrak{J}$ positiv und setzen

$$\omega = \int_a^x \sqrt{Q_0}\, dx.$$

Aendert man in den obigen Formeln das Vorzeichen von i, so erhält man eine zweite der Gleichung (4) genügende Reihe

$$y = e^{-ik\omega}\left(\psi_0 + \frac{\psi_1}{k} + \frac{\psi_2}{k^2} + \cdots\right).$$

Wir integriren die zur Bestimmung der Functionen φ_ν, ψ_ν dienenden Differentialgleichungen so, dass die Reihe

$$y = e^{ik\omega}\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_1}{k} + \cdots\right) + e^{-ik\omega}\left(\psi_0 + \frac{\psi_1}{k} + \cdots\right)$$

die Anfangsbedingungen des oben definirten Integrals y formell erfüllt. Unter Anwendung der Bezeichnung $\overline{\varphi} = \varphi(a)$ haben wir die Bedingungen

$$\overline{\varphi}_0 + \overline{\psi}_0 = \overline{\alpha}_0, \quad i\sqrt{\overline{Q}_0}\,(\overline{\varphi}_0 - \overline{\psi}_0) = \beta_0,$$
$$\overline{\varphi}_\nu + \overline{\psi}_\nu = \overline{\alpha}_\nu, \quad i\sqrt{\overline{Q}_0}(\overline{\varphi}_\nu - \overline{\psi}_\nu) + \overline{\varphi}'_{\nu-1} + \overline{\psi}'_{\nu-1} = \beta_\nu \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Die Functionen φ_ν, ψ_ν werden mit diesen Anfangswerthen durch die obigen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung im Intervall $\mathfrak{J}$ als eindeutige und stetige Functionen definirt und können durch Quadraturen dargestellt werden.

Wir integriren nun die Gleichung (4) vermittelst successiver Annäherung. Setzt man

$$v_1 = e^{ik\omega}\varphi_0, \qquad v_2 = e^{-ik\omega}\psi_0$$

und

$$D(u) = \frac{\begin{vmatrix} u & u' & u'' \\ v_1 & v_1' & v_2'' \\ v_2 & v_2' & v_2'' \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} v_1 & v_1' \\ v_2 & v_2' \end{vmatrix}},$$

so besitzt die lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung $D(u) = 0$ die Integrale v_1 und v_2. Der Ausdruck

$$D(u) = \frac{d^2u}{dx^2} + k\left(p_0 + \frac{p_1}{k} + \cdots\right)\frac{du}{dx}$$
$$+ k^2\left(q_0 + \frac{q_1}{k} + \cdots\right)u$$

ist unabhängig von den in φ_0, ψ_0 enthaltenen Integrationsconstanten, da er nur von

$$\frac{\varphi_0'}{\varphi_0} = -\frac{\omega'' - iQ_1}{2\omega'}, \quad \frac{\psi_0'}{\psi_0} = -\frac{\omega'' + iQ_1}{2\omega'}$$

abhängt. Aus $D(v_1) = 0$ erhält man durch Division mit $e^{ik\omega}$ und Vergleichung der Coefficienten von k^2 und k

$$-\omega'^2 + ip_0\omega' + q_0 = 0,$$
$$2\omega'\varphi_0' + (\omega'' + p_1\omega' - iq_1)\varphi_0 = 0;$$

entsprechend erhält man aus $D(v_2) = 0$

$$-\omega'^2 - ip_0\omega' + q_0 = 0,$$
$$2\omega'\psi_0' + (\omega'' + p_1\omega' + iq_1)\psi_0 = 0.$$

Daraus folgt

$$p_0 = 0,\ p_1 = 0; \quad q_0 = Q_0,\ q_1 = Q_1,$$

so dass, wenn man

$$\frac{d^2u}{dx^2} + k^2Qu = D(u) + E(u)$$

setzt,

$$E(u) = \frac{S}{k}\,\frac{du}{dx} + Tu$$

wird, wo S und T Functionen von x und k sind, welche sich in convergente Potenzreihen von $\frac{1}{k}$ entwickeln lassen.

Wir integriren die Gleichungen

$$D(u_0) = 0,$$
$$D(u_m) + E(u_{m-1}) = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$\bar{u}_0 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots, \qquad \bar{u}_0' = k\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right),$$
$$\bar{u}_m = 0, \quad \bar{u}_m' = 0 \qquad (m = 1, 2, \ldots).$$

Zunächst haben wir

$$u_0 = c_1 e^{ik\omega}\varphi_0 + c_2 e^{-ik\omega}\psi_0,$$

wo

$$c_1 = 1 + \frac{\gamma_1'}{k} + \frac{\gamma_1''}{k^2} + \cdots,$$
$$c_2 = 1 + \frac{\gamma_2'}{k} + \frac{\gamma_2''}{k^2} + \cdots$$

aus den Gleichungen

$$c_1\overline{\varphi}_0 + c_2\overline{\psi}_0 = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots$$
$$c_1(ik\overline{\omega}'\,\overline{\varphi}_0 + \overline{\varphi}_0') + c_2(-ik\overline{\omega}'\,\overline{\psi}_0 + \overline{\psi}_0') = k\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right)$$

berechnet werden. Ferner ist für $m = 1, 2, \ldots$

$$u_m = -\frac{e^{ik\omega}\varphi_0}{2ik}\int_a^x \frac{e^{-ik\omega}\psi_0 E(u_{m-1})\,dx}{\omega'\varphi_0\psi_0 - \dfrac{\varphi_0\psi_0' - \psi_0\varphi_0'}{2ik}}$$
$$+ \frac{e^{-ik\omega}\psi_0}{2ik}\int_a^x \frac{e^{ik\omega}\varphi_0 E(u_{m-1})\,dx}{\omega'\varphi_0\psi_0 - \dfrac{\varphi_0\psi_0' - \psi_0\varphi_0'}{2ik}}.$$

Aus diesem Ausdruck für u_m geht $E(u_m)$ dadurch hervor, dass man vor den Integralzeichen φ_0, ψ_0 bezw. durch

$$\Phi_0 = S\left(\ \ i\omega'\varphi_0 + \frac{\varphi_0'}{k}\right) + T\varphi_0,$$
$$\Psi_0 = S\left(-i\omega'\psi_0 + \frac{\psi_0'}{k}\right) + T\psi_0$$

ersetzt.

Wir setzen

$$k = r(\cos\vartheta + i\sin\vartheta)$$

und beschränken uns vorläufig auf das Gebiet

$$r > R, \quad 0 \leqq \vartheta \leqq \pi,$$

wo R hinreichend gross anzunehmen ist. In diesem Gebiet seien, wenn x auf das Intervall $\mathfrak{J}$ beschränkt wird, die absoluten Beträge der Grössen

$$\varphi_0, \psi_0, c_1\varphi_0, c_2\psi_0, \Phi_0, \Psi_0, c_1\Phi_0, c_2\Psi_0,$$

sowie

$$\frac{\psi_0}{\omega'\varphi_0\psi_0 - \dfrac{\varphi_0\psi_0' - \psi_0\varphi_0'}{2ik}}, \qquad \frac{\varphi_0}{\omega'\varphi_0\psi_0 - \dfrac{\varphi_0\psi_0' - \psi_0\varphi_0'}{2ik}}$$

kleiner als M. Dann sind die absoluten Beträge von u_0 und $E(u_0)$ höchstens gleich

$$M(e^{-r\omega\sin\vartheta}+e^{r\omega\sin\vartheta}).$$

Angenommen, es sei $|u_{m-1}|$ sowohl wie $|E(u_{m-1})|$ höchstens gleich

$$\frac{M^{2m-1}}{(2r)^{m-1}}\,\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}\,(e^{-r\omega\sin\vartheta}+3^{m-1}e^{r\omega\sin\vartheta}).$$

Dann sind $|u_m|$ und $|E(u_m)|$ höchstens gleich

$$\frac{e^{-r\omega\sin\vartheta}M}{2r}\int_a^x Me^{r\omega\sin\vartheta}\,\frac{M^{2m-1}}{(2r)^{m-1}}(e^{-r\omega\sin\vartheta}+3^{m-1}e^{r\omega\sin\vartheta})\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}dx$$

$$+\frac{e^{r\omega\sin\vartheta}M}{2r}\int_a^x Me^{-r\omega\sin\vartheta}\,\frac{M^{2m-1}}{(2r)^{m-1}}(e^{-r\omega\sin\vartheta}+3^{m-1}e^{r\omega\sin\vartheta})\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}dx$$

$$\leqq\frac{M^{2m+1}}{(2r)^m}e^{-r\omega\sin\vartheta}\left[\int_a^x\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}dx+3^{m-1}e^{r\omega\sin\vartheta}\int_a^x\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}dx\right]$$

$$+\frac{M^{2m+1}}{(2r)^m}e^{r\omega\sin\vartheta}(1+3^{m-1})\int_a^x\frac{(x-a)^{m-1}}{(m-1)!}dx$$

$$\leqq\frac{M^{2m+1}}{(2r)^m}\,\frac{(x-a)^m}{m!}\,(e^{-r\omega\sin\vartheta}+3^m e^{r\omega\sin\vartheta}),$$

da $1+2\,.\,3^{m-1}\leqq 3^m$ ist. Demnach ist

$$|e^{ik\omega}u_m|\leqq\frac{M^{2m+1}}{(2r)^m}\,\frac{(x-a)^m}{m!}\,(1+3^m),$$

d. h. die Reihe

$$e^{ik\omega}\sum_{m=0}^{\infty}u_m$$

ist für

$$|k|>R,\quad 0\leqq\arg k\leqq\pi,\quad a\leqq x\leqq b$$

unbedingt und gleichmässig convergent; dasselbe gilt für die Reihe

$$e^{ik\omega}k^n\sum_{m=n}^{\infty}u_m\qquad(n=1,2,\ldots).$$

Der Fall

$$\pi\leqq\arg k\leqq 2\pi$$

kann durch die Substitution $k=-k'$ auf den soeben behandelten zurückgeführt werden. Man erkennt, das die Reihe

$$e^{-ik\omega}\sum_{m=0}^{\infty} u_m$$

für

$$|k| > R, \quad \pi \leqq \arg k \leqq 2\pi, \quad a \leqq x \leqq b$$

unbedingt und gleichmässig convergent ist, ebenso die Reihe

$$e^{-ik\omega}k^n\sum_{m=n}^{\infty} u_m \quad (n=1,2,\ldots).$$

Die Reihe

$$y = u_0 + u_1 + u_2 + \cdots$$

ist demnach im ganzen Gebiet $|k| > R$ convergent, wenn auch nicht gleichmässig. Dass diese Reihe der Differentialgleichung (4) genügt, wird wie in A. § 2 gezeigt; sie stellt also das durch die Anfangsbedingungen

$$\bar{y} = \alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots, \qquad \bar{y}' = k\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right)$$

definirte Integral von (4) dar.

Nun wird der in A. § 3 aufgestellte Hilfssatz ebenso wie früher benutzt. Indem man die Schlussweise in A. § 4 und § 5 mit den erforderlichen Abänderungen anwendet, findet man folgenden Satz:

Wenn man

$$y = e^{ik\omega}\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_1}{k} + \cdots + \frac{\varphi_n}{k^n}\right) + e^{-ik\omega}\left(\psi_0 + \frac{\psi_1}{k} + \cdots + \frac{\psi_n}{k^n}\right) + \frac{R_n}{k^n}$$

setzt, so nähert sich $e^{ik\omega}R_n$ gleichmässig der Grenze Null, wenn k mit $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ ins Unendliche geht, während sich $e^{-ik\omega}R_n$ gleichmässig der Grenze Null nähert, wenn k mit $\pi \leqq \arg k \leqq 2\pi$ unendlich wird.

Im Gebiet $\delta < \arg k < \pi - \delta$, wo δ eine beliebig kleine positive Grösse bezeichnet, wird die Functiom y durch die Reihe

$$e^{-ik\omega}\left(\psi_0 + \frac{\psi_1}{k} + \cdots\right),$$

im Gebiet $\pi + \delta < \arg k < 2\pi - \delta$ durch die Reihe

$$e^{ik\omega}\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_1}{k} + \cdots\right)$$

gleichmässig asymptotisch dargestellt, wenn $x > a$, also $\omega > 0$ ist.

§ 4.

Der Hilfssatz A. § 3 kann in folgender Form dargestellt werden.

Die Function

$$y = e^{ik\omega}\int_a^x e^{-ik\omega} f(x)\,dx$$

genügt der linearen Differentialgleichung erster Ordnung

$$(5)\qquad \frac{dy}{dx} + ik\omega' y = f.$$

Setzt man

$$f_0 = f,\ \ f_1 = \frac{d}{dx}\frac{f}{\omega'},\ \ f_2 = \frac{d}{dx}\frac{f_1}{\omega'}, \ldots,$$

so ist

$$y = -\frac{1}{ik\omega'}\left[f_0 + \frac{f_1}{ik} + \cdots + \frac{f_{n-1}}{(ik)^{n-1}}\right]$$
$$+ \frac{e^{ik\omega}}{ik\omega'(a)}\left[f_0(a) + \frac{f_1(a)}{ik} + \cdots + \frac{f_{n-1}(a)}{(ik)^{n-1}}\right] + \frac{\varrho_n}{(ik)^n};$$

ϱ_n nähert sich gleichmässig der Grenze Null, wenn k mit

$$0 \leqq \arg k \leqq \pi$$

ins Unendliche geht, während sich $e^{-ik\omega}\varrho_n$ gleichmässig der Null nähert, wenn k mit $\pi \leqq \arg k \leqq 2\pi$ unendlich gross wird.

Der erste Theil der Behauptung erhellt daraus, dass die Function y, wenn man darin k durch $2k$ ersetzt, gleich $e^{ik\omega}J_2$ ist (Bezeichnung von A. § 3); multiplicirt man J_1 mit $e^{-ik\omega}$ und ersetzt man $2k$ durch $-k$, so ergiebt sich der zweite Theil des Satzes.

Das Integral der Differentialgleichung (5), welches für $x = a$ den constanten Werth C annimmt, ist

$$\bar{y} = y + Ce^{2ik\omega};$$

nimmt man $x > a$ an und setzt man

$$\bar{y} = -\frac{1}{ik\omega'}\left[f_0 + \frac{f_1}{ik} + \cdots + \frac{f_{n-1}}{(ik)^{n-1}}\right] + \frac{\sigma_n}{(ik)^n},$$

so nähert sich σ_n gleichmässig der Grenze Null, wenn k mit

$$\delta < \arg k < \pi - \delta$$

ins Unendliche geht, wobei δ eine beliebig kleine positive Grösse bezeichnet. Die von a unabhängige Reihe

$$-\frac{1}{ik\omega'}\left(f_0 + \frac{f_1}{ik} + \frac{f_2}{(ik)^2} + \cdots\right),$$

welche der Gleichung (5) formell genügt, aber im allgemeinen divergent*) ist, stellt also unendlich viele Integrale $\bar{y}$ von (5) asymptotisch dar, wenn k in der oberen Halbebene mit Ausschluss der reellen Axe ins Unendliche geht.

Wir betrachten noch die nicht homogene lineare Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\frac{d^2y}{dx^2}+k^2y=f, \tag{6}$$

wo f eine im Intervall $0\leqq x\leqq l$ nebst ihren Ableitungen stetige Function von x darstellt. Wir verstehen unter y dasjenige Integral von (6), welches nebst seiner Ableitung $\frac{dy}{dx}$ für $x=0$ verschwindet:

$$y=\frac{e^{ikx}}{2ik}\int_0^x e^{-ikx}f\,dx-\frac{e^{-ikx}}{2ik}\int_0^x e^{ikx}f\,dx.$$

Nach A. § 3 ist**)

$$e^{ikx}\int_0^x e^{-ikx}f\,dx=-\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{f^{(\nu-1)}(x)}{(ik)^\nu}+e^{ikx}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{f^{(\nu-1)}(0)}{(ik)^\nu}$$
$$+\frac{e^{ikx}}{(ik)^{n-1}}\int_0^x e^{-ikx}f^{(n-1)}\,dx,$$

$$e^{-ikx}\int_0^x e^{ikx}\,f\,dx=\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(-1)^{\nu-1}f^{(\nu-1)}(x)}{(ik)^\nu}-e^{-ikx}\sum_{\nu=1}^{n-1}\frac{(-1)^{\nu-1}f^{(\nu-1)}(0)}{(ik)^\nu}$$
$$+\frac{(-1)^{n-1}e^{-ikx}}{(ik)^{n-1}}\int_0^x e^{ikx}f^{(n-1)}\,dx,$$

also

$$y=\frac{f(x)}{k^2}-\frac{f''(x)}{k^4}+-\cdots-\cos kx\left(\frac{f(0)}{k^2}-\frac{f''(0)}{k^4}+\cdots\right)$$
$$-\sin kx\left(\frac{f'(0)}{k}-\frac{f'''(0)}{k^3}+-\cdots\right)+\frac{R_n}{k^n},$$

dabei brechen die Reihen mit k^{-n} oder $k^{-(n-1)}$ ab, und es ist

---

*) Im Falle $\omega'=1$, $f=\frac{1}{x}$ hat man die für jeden Werth von k divergente Reihe

$$-\frac{1}{ikx}+\frac{1!}{(ikx)^2}-\frac{2!}{(ikx)^3}+\cdots.$$

***) Dabei ist $f^{(m)}(x)=\frac{d^mf}{dx^m}$ gesetzt.

$$R_n = \frac{e^{ikx}}{2i^n} \int_0^x e^{-ikx} f^{(n-1)} dx$$
$$+ \frac{e^{-ikx}}{2(-i)^n} \int_0^x e^{ikx} f^{(n-1)} dx.$$

Hieraus schliesst man, dass sich $e^{ikx} R_n$ gleichmässig der Grenze Null nähert, wenn k mit $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ unendlich gross wird. Wir können uns auf die obere Halbebene beschränken, da y eine eindeutige Function von k^2 ist.

Das Integral von (6), welches für $x = 0$ und für $x = l$ verschwindet, ist

$$Y = y - \frac{\sin kx}{\sin kl} y(l).$$

Man findet

$$Y = \frac{f(x)}{k^2} - \frac{f''(x)}{k^4} + - \cdots$$
$$- \frac{\sin kx}{\sin kl}\left(\frac{f(l)}{k^2} - \frac{f''(l)}{k^4} + - \cdots\right)$$
$$- \frac{\sin k(l-x)}{\sin kl}\left(\frac{f(0)}{k^2} - \frac{f''(0)}{k^4} + - \cdots\right) + \frac{\mathfrak{R}_n}{k^n};$$

die Reihen brechen wieder mit k^{-n} oder mit $k^{-(n-1)}$ ab; es ist

$$\mathfrak{R}_n = R_n - \frac{\sin kx}{\sin kl} R_n(l).$$

Bei Beschränkung auf das Gebiet $\delta < \arg k < \pi - \delta$ können wir das erste Glied von R_n neben dem zweiten vernachlässigen und $\sin kx$, $\sin kl$ durch $\frac{e^{-ikx}}{-2i}$, $\frac{e^{-ikl}}{-2i}$, also $\frac{\sin kx}{\sin kl}$ durch $e^{ik(l-x)}$ ersetzen. Demnach ist $\mathfrak{R}_n$ bis auf Glieder, welche für $\lim k = \infty$ verschwinden, gleich

$$\frac{(-1)^n e^{-ikx}}{2i^n} \int_0^x e^{ikx} f^{(n-1)} dx - \frac{(-1)^n e^{-ikx}}{2i^n} \int_0^l e^{ikx} f^{(n-1)} dx$$
$$= \frac{(-1)^n e^{-ikx}}{2i^n} \int_x^l e^{ikx} f^{(n-1)} dx$$

oder, wenn $x = l - \xi$ gesetzt wird, gleich

$$\frac{(-1)^n e^{ik\xi}}{2i^n} \int^{\xi} e^{-ik\xi} f^{(n-1)} d\xi.$$

Da der Grenzwerth dieses Ausdrucks ebenfalls gleich Null ist, so hat man

$$\lim \mathfrak{R}_n = 0.$$

Ersetzt man $\frac{\sin kx}{\sin kl}$ durch $e^{ik(l-x)}$ und $\frac{\sin k(l-x)}{\sin kl}$ durch e^{ikx}, so sieht man, dass man schreiben kann:

$$Y = \frac{f(x)}{k^2} - \frac{f''(x)}{k^4} + - \cdots + \frac{\varrho_n}{k^n};$$

die Reihe bricht mit k^{-n} oder $k^{-(n-1)}$ ab, und ϱ_n nähert sich gleichmässig der Grenze Null, wenn k mit $\delta < \arg k < \pi - \delta$ ins Unendliche geht. Demnach ist insbesondere

$$\lim k^2 Y = f^{*)}.$$

§ 5.

Die Differentialgleichung

$$(7) \qquad \frac{d^2y}{dx^2} + (k^2 - k_1 \cos 2x)y = 0^{**)},$$

welche in der Störungstheorie und als Differentialgleichung der Functionen des elliptischen Cylinders in der mathematischen Physik vorkommt, gehört in die in A. behandelte Classe. Wir bezeichnen mit $F(x)$ das Integral von (7) mit den Anfangsbedingungen

$$F(0) = 1, \; F'(0) = 0.$$

Für grosse k besteht die asymptotische Gleichung

$$F(x) \sim \cos kx\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right)$$
$$+ \sin kx\left(\frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_3}{k^3} + \cdots\right),$$

---

*) Man vergleiche damit den von Herrn Poincaré (Sur les équations de la Physique mathématique, Rendiconti del Circolo matematico di Palermo 1894) als wahrscheinlich hingestellten, aber nur theilweise bewiesenen Satz: Ist u das Integral der partiellen Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u = f,$$

welches auf der Begrenzung eines Gebietes verschwindet, so hat man

$$\lim \xi u = f,$$

wenn die complexe Veränderliche ξ in irgend einer Richtung mit Ausschluss der positiven reellen Axe ins Unendliche geht. Vgl. Zaremba, Comptes rendus, Juli 1898.

**) Vgl. Poincaré, Les méthodes nouvelles de la Mécanique céleste, Bd. II, S. 228 ff.

und zwar ist nach A. § 1

$$\varphi_0 = 1,$$

$$\varphi_1 = \frac{1}{4} k_1 \sin 2x,$$

$$\varphi_{2\nu} = \frac{1}{2}\int_0^x (\varphi''_{2\nu-1} - k_1 \cos 2x \,.\, \varphi_{2\nu-1})\, dx \qquad (\nu = 1, 2, \ldots),$$

$$\varphi_{2\nu+1} = -\frac{1}{2}\int_0^x (\varphi''_{2\nu} - k_1 \cos 2x \,.\, \varphi_{2\nu})\, dx - \varphi'_{2\nu}(0) \quad (\nu = 1, 2, \ldots).$$

Um die Differentialgleichung (7) vermittelst successiver Annäherung zu integriren, setzt man

$$\frac{d^2 u_0}{dx^2} + k^2 u_0 = 0$$

$$\frac{d^2 u_m}{dx^2} + k^2 u_m = k_1 \cos 2x \,.\, u_{m-1} \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

und nimmt für $x = 0$

$$u_0 = 1,\ \ u_0' = 0;\ \ u_m = 0,\ \ u_m' = 0 \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

an. Man findet hieraus

$$u_m = k_1^m F_m(x),$$

wo $F_m(x)$ von k_1 unabhängig ist. Bei Poincaré (a. a. O.) ist

$$F(x) = F_0 + k_1 F_1 + k_1^2 F_2 + \ldots$$

gesetzt; man hat dann

$$\frac{d^2 F_0}{dx^2} + k^2 F_0 = 0,$$

$$\frac{d^2 F_m}{dx^2} + k^2 F_m = F_{m-1} \cos 2x \quad (m = 1, 2, \ldots)$$

mit den Anfangsbedingungen

$$F_0(0) = 1, \quad F_0'(0) = 0,$$

$$F_m(0) = 0, \quad F_m'(0) = 0, \quad (m = 1, 2, \ldots).$$

Hieraus berechnet man

$$F_0(x) = \cos kx,$$

$$F_1(x) = -\frac{\cos(k+2)x - \cos kx}{8(k+1)} + \frac{\cos(k-2)x - \cos kx}{8(k-1)},$$

$$F_2(x) = -\frac{\cos(k+4)x - \cos kx}{128(k+1)(k+2)} + \frac{\cos(k-4)x - \cos kx}{128(k-1)(k-2)}$$
$$-\frac{\cos(k+2)x - \cos kx}{64(k+1)^2} + \frac{\cos(k+2)x - \cos kx}{64(k-1)^2}$$
$$+\frac{\cos(k+2)x - \cos kx}{64(k+1)(k-1)} + \frac{\cos(k-2)x - \cos kx}{64(k+1)(k-1)}$$
$$-\frac{x\sin kx}{16k(k+1)} + \frac{x\sin kx}{16k(k-1)}.$$

Allgemein erhält man

$$F_m(x) = A_m \cos kx + B_m \sin kx;$$

A_m und B_m sind rationale Functionen von k mit den singulären Stellen $k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$.

Wenn man A_m, B_m in Potenzreihen von $\frac{1}{k}$ entwickelt und

$$\sum_{m=0}^{\infty} k_1^m A_m, \qquad \sum_{m=0}^{\infty} k_1^m B_m$$

nach Potenzen von $\frac{1}{k}$ ordnet, erhält man wieder die oben A. § 1 angeschriebene Entwicklung. Denn auch in A. § 4 wurde $u_m = k_1^m F_m(x)$ als Summe von mit $\cos kx$ und $\sin kx$ multiplicirten Potenzreihen von $\frac{1}{k}$ dargestellt und $\sum\limits_{m=0}^{\infty} u_m$ durch formale Addition gebildet. Jetzt sind allerdings die Potenzreihen für A_m, B_m convergent, wenn $|k|$ eine gewisse Grenze überschreitet, aber diese Grenze wächst ins Unendliche, wenn m unendlich gross wird. Es braucht nur gezeigt zu werden, dass, wenn eine Function u die für hinreichend grosse Werthe von $|k|$ convergente Entwicklung

$$u = e^{ikx}\left(a_0 + \frac{a_1}{k} + \cdots\right) + e^{-ikx}\left(b_0 + \frac{b_1}{k} + \cdots\right)$$

zulässt und wenn gleichzeitig im Sinn von § 3 die asymptotische Gleichung

$$u = e^{ikx}\left(\alpha_0 + \frac{\alpha_1}{k} + \cdots\right) + e^{-ikx}\left(\beta_0 + \frac{\beta_1}{k} + \cdots\right)$$

besteht,

$$a_\nu = \alpha_\nu, \quad b_\nu = \beta_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \ldots)$$

sein muss. Angenommen, es sei $a_\nu = \alpha_\nu$, $b_\nu = \beta_\nu$ für $\nu = 0, 1, \ldots n-1$, so ist

$$e^{ikx}(a_n - \alpha_n) + e^{-ikx}(b_n - \beta_n)$$
$$+ e^{ikx}\left(\frac{a_{n+1}}{k} + \cdots\right) + e^{-ikx}\left(\frac{b_{n+1}}{k} + \cdots\right) = R_n,$$

wo $\lim e^{ikx} R_n$ oder $\lim e^{-ikx} R_n$ gleich Null ist, je nachdem k mit $0 \leqq \arg k \leqq \pi$ oder mit $\pi \leqq \arg k \leqq 2\pi$ ins Unendliche geht. Wenn man k in der einen oder in der anderen Art unendlich werden lässt, erhält man $b_n = \beta_n$ und $a_n = \alpha_n$.

Von Interesse ist das Vorhandensein dreier Entwicklungen der Function $F(x)$. Man hat eine beständig convergente Potenzreihe von k^2, die asymptotische Reihe

$$\cos kx\left(\varphi_0 + \frac{\varphi_2}{k^2} + \cdots\right) + \sin kx\left(\frac{\varphi_1}{k} + \frac{\varphi_3}{k^3} + \cdots\right)$$

und die Reihe

$$\sum_{m=0}^{\infty} k_1^m (A_m \cos kx + B_m \sin kx),$$

deren Coefficienten A_m, B_m rationale Functionen von k sind und welche für jeden endlichen Werth von k convergirt.

§ 6.

Die Bessel'sche Function $J_n(x)$ sei definirt durch die Reihe

$$J_n(x) = \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^n}{\Gamma(n+1)}\left[1 - \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^2}{1.(n+1)} + \frac{\left(\frac{x}{2}\right)^4}{1.2.(n+1)(n+2)} + - \cdots\right],$$

welche für jeden Werth von x und für jeden Werth von n convergirt (mit Ausschluss der negativen ganzen Zahlen, wenn der Factor $\frac{1}{\Gamma(n+1)}$ weggelassen wird). Wir setzen für x einen festen Werth und betrachten $J_n(x)$ als Function der complexen Veränderlichen n.

Die Reihe

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu,$$

wo

$$u_\nu = \frac{\left(-\frac{x}{2}\right)^{2\nu}}{1.2\ldots\nu.(n+1)\ldots(n+\nu)}$$

gesetzt ist, ist, wenn δ eine beliebig kleine positive Grösse bedeutet, für

$$-\pi + \delta < \arg n < \pi - \delta$$

unbedingt und gleichmässig convergent. Denn ist μ eine ganze positive Zahl, so ist $|n+\mu|$, die Entfernung des Punktes n vom Punkte $-\mu$, kleiner als die von $-\mu$ auf die Gerade $\arg n = \delta$ gefällte Senkrechte $\mu \sin\delta$, wo auch n in dem bezeichneten Gebiet liegen mag. Demnach ist

$$|u_\nu| < \frac{\left(\frac{|x^2|}{4\sin\delta}\right)^\nu}{\nu!},$$

woraus das Behauptete folgt. In demselben Gebiet ist die Reihe

$$n^\mu \sum_{\nu=\mu}^{\infty} u_\nu \qquad (\mu = 1, 2, \ldots)$$

gleichmässig convergent.

Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ ist in der Umgebung einer jeden Stelle n, mit Ausschluss der negativen ganzen Zahlen, die Reihe $(n+\mu)\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$, wo μ eine positive ganze Zahl ist, auch in der Umgebung von $n = -\mu$ gleichmässig convergent. $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ ist eine analytische Function von n, welche keine anderen singulären Stellen besitzt als $n = -1, -2, -3, \ldots$. Nun ist

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)} = e^{Cn} \prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 + \frac{n}{\nu}\right) e^{-\frac{n}{\nu}}$$

eine ganze transcendente Function von n mit den Nullstellen $n = -1, -2, \ldots$. Setzt man

$$J_n = \left(\frac{x}{2}\right)^n \cdot \frac{1}{(n+\mu)\Gamma(n+1)} \cdot (n+\mu) \sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu,$$

so sieht man, dass sich die Function J_n auch bei $n = -\mu$ regulär verhält. Demnach ist J_n *eine ganze transcendente Function von* n.

Um deren Verhalten bei der Annäherung an die wesentlich singuläre Stelle $n = \infty$ zu untersuchen, kann man eine asymptotische Darstellung benutzen. Man hat

$$u_\nu = \frac{1}{n^\nu}\, \mathfrak{P}_\nu\left(\frac{1}{n}\right),$$

wo $\mathfrak{P}_\nu\left(\frac{1}{n}\right)$ eine für $|n| > \nu$ convergente Potenzreihe bezeichnet; wir schreiben

$$u_\nu = \frac{c_{\nu\nu}}{n^\nu} + \frac{c_{\nu,\nu+1}}{n^{\nu+1}} + \cdots + \frac{c_{\nu\mu}}{n^\mu} + \frac{\varepsilon_\nu}{n^\mu},$$

wenn $\nu \leqq \mu$ ist; für $\nu > \mu$ setzen wir

$$u_\nu = \frac{\varepsilon_\nu}{n^\mu}.$$

Wegen der gleichmässigen Convergenz der Reihe

$$\varepsilon_\mu + \varepsilon_{\mu+1} + \varepsilon_{\mu+2} + \cdots$$

im Gebiet $-\pi + \delta < \arg n < \pi - \delta$ kann man ϱ so gross annehmen, dass in diesem Gebiet, wenn ε eine beliebig kleine positive Zahl darstellt,

$$|\varepsilon_{\varrho+1} + \varepsilon_{\varrho+2} + \cdots| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist; ferner lässt sich R so gross wählen, dass für

$$|n| > R, \; -\pi + \delta < \arg n < \pi - \delta$$

$$|\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \cdots + \varepsilon_\varrho| < \frac{\varepsilon}{2}$$

ist. Setzt man

$$\varepsilon_0 + \varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \cdots = \gamma_\mu,$$

so wird

$$\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu = 1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots + \frac{c_\mu}{n^\mu} + \frac{\gamma_\mu}{n^\mu},$$

und zwar ist

$$|\gamma_\mu| < \varepsilon$$

für

$$|n| > R, \; -\pi + \delta < \arg n < \pi - \delta.$$

Die Reihe $\sum_{\nu=0}^{\infty} u_\nu$ wird also durch die Reihe

$$1 + \frac{c_1}{n} + \frac{c_2}{n^2} + \cdots$$

gleichmässig asymptotisch dargestellt, wenn n mit

$$-\pi + \delta < \arg n < \pi - \delta$$

ins Unendliche geht. In demselben Sinn*) gilt die asymptotische Gleichung

$$\log \frac{1}{\Gamma(n+1)} = -\log n - \log \Gamma(n)$$

$$\sim -\left(n + \frac{1}{2}\right) \log n + n - \log \sqrt{2\pi} - \frac{B_1}{1.2.n} + \frac{B_2}{3.4.n^3} - \cdots$$

oder

$$\frac{1}{\Gamma(n+1)} \sim e^{-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n + n} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{B_1}{1\cdot 2\cdot n} + \frac{B_2}{3\cdot 4\cdot n^3} - \cdots}.$$

Demnach besteht eine asymptotische Gleichung von der Form

$$J_n \sim e^{n\left(1+\log\frac{x}{2}\right) - \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n}\left(C_0 + \frac{C_1}{n} + \frac{C_2}{n^2} + \cdots\right),$$

worin

$$C_0 = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$$

ist; d. h. setzt man, unter μ eine ganze positive Zahl verstehend,

---

*) Vgl. Stieltjes, Liouv. Journ. 1889.

$$J_n = e^{n\left(1+\log\frac{x}{2}\right)-\left(n+\frac{1}{2}\right)\log n}\left(C_0+\frac{C_1}{n}+\cdots+\frac{C_\mu}{n^\mu}+\frac{\Gamma_\mu}{n^\mu}\right),$$

so nähert sich Γ_μ gleichmässig der Grenze Null, wenn n mit einem Argument zwischen $-\pi+\delta$ und $\pi-\delta$ ins Unendliche geht.

§ 7.

Wir betrachten die Gauss'sche Reihe

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) = 1 + \frac{\alpha\,.\,\beta}{1\,.\,\gamma}\,x + \frac{\alpha(\alpha+1)\,.\,\beta(\beta+1)}{1\,.\,2\,.\,\gamma(\gamma+1)}\,x^2 + \cdots$$

als Function eines der drei ersten Elemente α, β, γ, während wir den beiden anderen und x feste Werthe beilegen.

Zunächst fassen wir $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ als Function von γ auf ($|x|<1$). Diese Function wird unendlich von erster Ordnung für $\gamma=0,-1,-2,\ldots$, während sie sich im Endlichen sonst überall regulär verhält. Da die Function $\frac{1}{\Gamma(\gamma)}$ die Nullstellen erster Ordnung $\gamma=0,-1,-2,\ldots$ besitzt, so ist

$$\frac{F(\alpha, \beta, \gamma, x)}{\Gamma(\gamma)}$$

eine ganze transcendente Function von γ, also $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ der Quotient zweier ganzen transcendenten Functionen von γ. Durch Entwicklung der einzelnen Reihenglieder nach Potenzen von $\frac{1}{\gamma}$ erhält man (wie in § 6) *eine asymptotische Gleichung von der Form*

$$F(\alpha, \beta, \gamma, x) \sim 1 + \frac{c_1}{\gamma} + \frac{c_2}{\gamma^2} + \cdots,$$

welche gilt, wenn γ im Gebiet $-\pi < \arg\gamma < \pi$ ins Unendliche geht.

Wir betrachten weiter $F(\alpha, \beta, \gamma, x)$ als Function von α. Um das Verhalten dieser ganzen transcendenten Function bei der Annäherung an die wesentlich singuläre Stelle $\alpha=\infty$ zu untersuchen, benutzen wir die Formel*)

$$\begin{aligned} &F(\alpha, \beta, \gamma, x)\\ &= \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)\,\Gamma(\gamma-\beta)}\,x^{-\beta} F\left(\beta, \beta-\gamma+1, \alpha+\beta+1-\gamma, \frac{x-1}{x}\right)\\ &+ \frac{\Gamma(\gamma)\,\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)\,\Gamma(\beta)}\,x^{\beta-\gamma}(1-x)^{\gamma-\alpha-\beta} F\left(1-\beta, \gamma-\beta, \gamma-\alpha-\beta+1, \frac{x-1}{x}\right), \end{aligned}$$

und zwar nehmen wir, damit alle Reihen zugleich convergent sind, den reellen Theil von x grösser als $\frac{1}{2}$ und den absoluten Betrag von x kleiner als 1 an.

---

*) Schlesinger, lin. Diffgl. Bd. I.

Man hat

$$\log \Gamma(\alpha) \sim \left(\alpha - \frac{1}{2}\right) \log \alpha - \alpha + \log \sqrt{2\pi} + \frac{B_1}{1.2.\alpha} - \cdots$$

für

$$\lim \alpha = \infty, \ -\pi < \arg \alpha < \pi$$

und

$$\log \Gamma(\alpha+\beta-\gamma) \sim \left(\alpha+\beta-\gamma-\frac{1}{2}\right) \log(\alpha+\beta-\gamma) - \alpha - \beta + \gamma$$

$$+ \log \sqrt{2\pi} + \frac{B_1}{1.2.(\alpha+\beta-\gamma)} - \cdots$$

für

$$\lim (\alpha+\beta-\gamma) = \infty, \ -\pi < \arg(\alpha+\beta-\gamma) < \pi$$

oder

$$\log \Gamma(\alpha+\beta-\gamma) \sim \left(\alpha+\beta-\gamma-\frac{1}{2}\right) \log \alpha - \alpha + \cdots;$$

wo an Stelle der Punkte eine Potenzreihe von $\frac{1}{\alpha}$ steht, für

$$\lim \alpha = \infty, \ -\pi < \arg \alpha < \pi.$$

Es ist demnach

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta-\gamma)}{\Gamma(\alpha)} \sim e^{(\beta-\gamma)\log \alpha}\, \mathfrak{P}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

für

$$-\pi < \arg \alpha < \pi.$$

Man hat ferner

$$\log \Gamma(\gamma-\alpha) \sim \left(\gamma-\alpha-\frac{1}{2}\right) \log(\gamma-\alpha) - \gamma + \alpha$$

$$+ \log \sqrt{2\pi} + \frac{B_1}{1.2(\gamma-\alpha)} - \cdots$$

für

$$\lim (\gamma-\alpha) = \infty, \ -\pi < \arg(\gamma-\alpha) < \pi$$

und

$$\log \Gamma(\gamma-\alpha-\beta) \sim \left(\gamma-\alpha-\beta-\frac{1}{2}\right) \log(\gamma-\alpha-\beta) - \gamma + \alpha + \beta$$

$$+ \log \sqrt{2\pi} + \frac{B_1}{1.2(\gamma-\alpha-\beta)} - \cdots$$

für

$$\lim (\gamma-\alpha-\beta) = \infty, \ -\pi < \arg(\gamma-\alpha-\beta) < \pi.$$

Die beiden asymptotischen Gleichungen gelten bei festen Werthen von β und γ für $\lim \alpha = \infty$, $-\pi < \arg(-\alpha) < \pi$. Nimmt man $\arg(-1) = -\pi$, so hat man die asymptotische Gleichung

$$\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \sim e^{-\beta \log \alpha}\, \overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

für

$$0 < \arg \alpha < 2\pi$$

oder, was dasselbe ist

$$\frac{\Gamma(\gamma-\alpha-\beta)}{\Gamma(\gamma-\alpha)} \backsim e^{-\beta\log\alpha} e^{-2\pi i\beta}\overline{\mathfrak{P}}\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

für

$$-2\pi < \arg\alpha < 0.$$

Auf diese Weise erhält man *eine asymptotische Gleichung von der Form*

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) \backsim e^{(\beta-\gamma)\log\alpha-\alpha\log(1-x)}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + e^{-\beta\log\alpha}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

für den Fall, dass α *mit einem Argument zwischen* 0 *und* π *ins Unendliche geht, während*

$$F(\alpha,\beta,\gamma,x) \backsim e^{(\beta-\gamma)\log\alpha-\alpha\log(1-x)}\mathfrak{P}_1\left(\frac{1}{\alpha}\right) + e^{-\beta\log\alpha}e^{-2\pi i\beta}\mathfrak{P}_2\left(\frac{1}{\alpha}\right)$$

ist, wenn α *mit* $-\pi < \arg\alpha < 0$ *unendlich gross wird**).

Darmstadt, 30. Dezember 1898.

---

*) Vgl. die Untersuchung der Legendre'schen Polynome X_n sowie der Polynome $F(\alpha+n, -n, \gamma, x)$ für grosse n (Darboux, Mémoire sur l'approximation des fonctions de grands nombres, Liouv. Journ. 1878).