

Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen.

Nach Johann Rudolf Merian

bearbeitet von

KARL VONDERMÜHLL in Leipzig.

Die kleinen Bewegungen tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen von endlicher Tiefe sind meines Wissens zuerst von meinem Grossvater Johann Rudolf Merian behandelt worden*), im Anschluss an die Arbeiten von Poisson und Cauchy, welche sich auf den Fall beschränkt hatten, wo die Flüssigkeit unendlich tief und seitlich unbegrenzt ist. Die Resultate haben in neuerer Zeit besondern Werth erhalten durch die Anwendung auf eigenthümliche, Ebbe- und Fluthartige Bewegungen, periodische Hebungen und Senkungen, welche der Wasserspiegel von Landseen erleidet; am Genfer See, namentlich in Genf, wo die Schwankungen besonders merklich sind und an einzelnen Tagen einen, ja zwei Meter überstiegen haben, sind diese Bewegungen unter dem Namen der „Seiches“ bekannt; sie wurden schon im vorigen Jahrhundert beobachtet und beschrieben.

Herr F. A. Forel**), Professor in Lausanne, hat seit Anfang der siebziger Jahre an verschiedenen Stellen des Genfer Sees, ebenso an andern Schweizer Seen die Hebungen und Senkungen des Wasserspiegels genauer untersucht, namentlich die Schwingungszeiten gemessen; er hat dann gezeigt, dass diese Zeiten mit weit grösserer Annäherung als man vermuthen sollte, durch die Formel bestimmt werden, welche die Theorie für die Dauer der ersten einfachen Schwingung in einem Gefäss von constanter Tiefe liefert.

Bei diesem Anlass hat sich herausgestellt, dass die betreffenden Gleichungen, wenn auch den Mathematikern nicht unbekannt und an

*) Ueber die Bewegung tropfbarer Flüssigkeiten in Gefässen. Abhandlung von Dr. J. Rud. Merian. Basel, 1828. 53 pp.

**) F. A. Forel. — Sur les Seiches du lac Léman. — Bull. de la Soc. vaudoise des Sciences naturelles. XII, No. 70, 1873; XIII, No. 74, 1875. — Archives de Genève. Août 1876, Décembre 1876, Mai 1877, Septembre 1885.

verschiedenen Orten angegeben, seit dem Jahre 1828 wohl nirgends ausführlich abgeleitet sind*). Die kleine Schrift von J. R. Merian hat wenig Verbreitung gefunden und ist längst vergriffen; die Darstellung entspricht auch der heutigen Auffassung nicht mehr, nachdem in den verflossenen sechzig Jahren die analytische Behandlung von ähnlichen Problemen der mathematischen Physik eine so weit reichende Entwicklung und Umgestaltung erfahren hat. Ich glaube daher den Physikern einen Dienst zu leisten, wenn ich an dieser Stelle den wesentlichen Inhalt der genannten Abhandlung in völlig umgearbeiteter Form wieder zur Veröffentlichung bringe.

§ 1.

Die Differentialgleichungen des Problems.

Eine tropfbare Flüssigkeit der Dichtigkeit ρ sei enthalten in einem oben offenen Gefäss mit festen Wänden; von äussern Kräften wirke allein die Schwere; dann ist die Gleichgewichtsoberfläche der Flüssigkeit eine horizontale Ebene. Es sei dies die Ebene $z = 0$, indem wir die z -Axe mit der Richtung der Schwere zusammenfallen lassen.

Eine Bewegung der Flüssigkeit kann nur auf einem der beiden folgenden Wege hervorgerufen werden: Entweder erhält die Oberfläche eine von der Gleichgewichtsoberfläche abweichende Form, oder es werden auf die verschiedenen Stellen der Oberfläche Stösse ausgeübt, so dass die Theilchen der Flüssigkeit bestimmte Anfangsgeschwindigkeiten erhalten.

Wir versuchen eine Behandlung der Aufgabe auf Grund der Annahme, dass die Anfangsgeschwindigkeiten ein Potential besitzen; dann muss, weil auch die wirkenden Kräfte ein Potential besitzen, immer ein Geschwindigkeitspotential φ existiren, und es gelten die beiden Gleichungen:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0,$$

$$(2) \quad \frac{1}{\rho} p = gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\} + T$$

für jede Stelle (x, y, z) , wo sich zur Zeit t Flüssigkeit befindet. Hierin bezeichnet g die beschleunigende Kraft der Schwere und p den Druck, bezogen auf die Einheit der Fläche; T ist eine unbekannte Function der Zeit.

*) In den Vorlesungen über mathematische Physik von G. Kirchhoff sind nur die Hauptformeln ganz kurz entwickelt: 25. Vorlesung, § 3, p. 354–359.

Ferner muss an jeder Stelle der Gefässwand die Bedingung erfüllt sein:

$$(3) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0,$$

wo dn die Richtung der Normale an die Wand bedeutet; sie werde in das Innere des Gefässes positiv gerechnet.

Dagegen haben wir an der freien Oberfläche der Flüssigkeit, auf welche ein mit der Zeit veränderlicher äusserer Druck P wirken soll, zwei Bedingungen: Erstens muss der Druck der Flüssigkeit dem äusseren Druck gleich sein,

$$(4) \quad p = P, \quad \overline{p(x, y, z, t)} = P(t)$$

wo P eine gegebene Function von t sein soll; dann aber muss ein Flüssigkeitstheilchen, welches einmal der Oberfläche angehört, immer an der Oberfläche bleiben; dies führt auf die zweite Gleichung:

$$(5) \quad \frac{\partial p}{\partial t} + \frac{\partial p}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial p}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial p}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial P}{\partial t},$$

welche beiden Gleichungen für jede Stelle der Oberfläche zu jeder Zeit gelten.

Endlich haben wir noch Bedingungen für den Anfang der Bewegung, $t = 0$. Es muss die Gestalt der Oberfläche gegeben sein; sie werde bestimmt durch die Gleichung:

$$(6) \quad F(x, y, z) = 0.$$

Zweitens müssen die Anfangsgeschwindigkeiten der sämtlichen Flüssigkeitstheilchen gegeben sein, die Werthe von

$$\frac{\partial \varphi_0}{\partial x}, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi_0}{\partial z},$$

wenn φ_0 das Geschwindigkeitspotential zur Zeit $t = 0$ bedeutet, oder es muss φ_0 für alle Stellen der Flüssigkeit gegeben sein, abgesehen von einer Constante, die willkürlich bleibt. Allein die Werthe von φ_0 sind durchaus nicht beliebig; denn wie jedes φ , so muss auch φ_0 der Differentialgleichung (1) Genüge leisten, und an jeder Stelle der Gefässwand der Bedingung (3).

Nun ist leicht zu zeigen, dass φ_0 völlig bestimmt ist, sobald noch sein Werth an der Oberfläche vorgeschrieben wird, etwa

$$(7) \quad \varphi_0 = \Phi(x, y, z),$$

welche Gleichung nur für die Stellen (x, y, z) der Oberfläche (6) gelten soll, soweit diese Oberfläche die Grenze der Flüssigkeit bildet.

Um diesen Beweis zu führen, nehmen wir an, es gebe zwei verschiedene Lösungen, φ_1 und φ_2 ; dann muss ihre Differenz:

$$\psi = \varphi_1 - \varphi_2$$

der Differentialgleichung (1) Genüge leisten, an der Gefässwand die Bedingung (3) erfüllen und in der Oberfläche verschwinden. Nun ist aber nach einem bekannten Satze:

$$\iiint \left(\frac{\partial^2 \psi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} \right) \psi \, dx \, dy \, dz \\ = - \iint \frac{\partial \psi}{\partial n} \psi \, d\omega - \iiint \left\{ \left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 \right\} dx \, dy \, dz,$$

wo die dreifachen Integrale über alle Elemente $dx \, dy \, dz$ der Flüssigkeit auszudehnen sind, das Doppelintegral über alle Elemente $d\omega$ der Grenze; dn bezeichnet die Normale an die Grenze, nach Innen positiv gerechnet. Für die Oberfläche ist $\psi = 0$, für die Gefässwand $\frac{\partial \psi}{\partial n} = 0$; folglich verschwindet das Flächenintegral. Da wegen der allgemeinen Differentialgleichung (1) das erste Raumintegral gleich Null ist, muss auch das zweite verschwinden; so folgt für jede Stelle der Flüssigkeit:

$$\left(\frac{\partial \psi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \psi}{\partial z} \right)^2 = 0,$$

d. h.

$$\psi = 0.$$

Folglich giebt es nur eine einzige Lösung.

Die Anfangsgeschwindigkeiten sind demnach vollständig bestimmt, wenn der Werth von φ_0 für die Oberfläche gegeben ist, und dem entspricht, dass die Anfangsgeschwindigkeiten den sämtlichen Flüssigkeitstheilchen durch Stösse auf die Oberfläche müssen ertheilt werden. Und zwar werden die Stösse durch den gegebenen Werth Φ sehr einfach bestimmt.

An der Stelle (x, y, z) der Oberfläche finde ein Stoss statt von der Stärke Q , bezogen auf die Einheit der Fläche; das soll heissen: Auf das Element $d\omega$ der Oberfläche werde senkrecht von Aussen her ein Stoss ausgeübt von der Stärke $Q d\omega$, so dass dieses Product einer Bewegungsgrösse äquivalent ist. Mithin verhält sich der stossende Druck Q zu einem stetigen Druck P , wie eine Stosskraft zu einer stetigen bewegendenden Kraft.

Nach unserer Auffassung wirken die auf die Oberfläche geführten Stösse instantan auf die ganze Flüssigkeit, und die den einzelnen Stellen mitgetheilten Geschwindigkeiten werden bedingt durch die Incompressibilität der Flüssigkeit und die Festigkeit der Wände. Für die Stelle (x, y, z) im Innern der Flüssigkeit sei der Stoss gleich q ; das soll folgende Bedeutung haben: Wir legen durch die Stelle irgend ein Flächenelement $d\omega$, errichten auf demselben einen geraden Cylinder und ersetzen die Flüssigkeit im Innern des Cylinders durch einen festen Stempel; auf diesen Stempel soll in der Richtung der Cylinderaxe

ein Stoss ausgeübt werden von der Stärke $q d\omega$. Demnach wirkt der Stoss nach allen Seiten in gleicher Stärke, ganz ähnlich einem stetigen Druck. Ist q für jede Stelle im Innern der Flüssigkeit gegeben, so ist die Geschwindigkeit eines jeden Flüssigkeitstheilchens bestimmt.

Wir denken uns an der Stelle ein unendlich kleines Parallelepipedum ausgeschnitten, mit den Kanten dx, dy, dz ; durch q sind die auf die sechs Seitenflächen geführten Stösse gegeben, und die Geschwindigkeit an der Stelle (x, y, z) ist gleich derjenigen, welche das Flüssigkeitselement durch die sechs Stösse erhält. Nun werden auf die beiden Seiten $dy dz$ in der Richtung der positiven x -Axe die Stösse ausgeführt

$$q dy dz$$

und

$$-\left(q + \frac{\partial q}{\partial x} dx\right) dy dz;$$

ihre Summe ist gleich der x -Componente von dem Stoss, welcher das Element trifft, also gleich dem Product aus der Masse in die x -Componente der Geschwindigkeit. So folgt die Gleichung:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} dx dy dz = \rho dx dy dz \frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

wo φ das Potential der ertheilten Geschwindigkeiten bedeutet. Wir erhalten schliesslich:

$$-\frac{\partial q}{\partial x} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad -\frac{\partial q}{\partial y} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad -\frac{\partial q}{\partial z} = \rho \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

oder einfach

$$q = -\rho \varphi.$$

Wir erkennen nun den Zusammenhang, der zwischen der Annahme, es existire ein Geschwindigkeitspotential, und den Voraussetzungen besteht, welche bei Ableitung der hydrodynamischen Gleichungen gemacht werden.

Wir können das Resultat folgendermaassen allgemein aussprechen: Die Geschwindigkeiten an den verschiedenen Stellen zu einer beliebigen Zeit t werden ertheilt durch einen Stoss auf die Oberfläche von der Stärke

$$-\rho \varphi,$$

wo φ der Werth des Geschwindigkeitspotentials an der Oberfläche ist. Dementsprechend werden die Anfangsgeschwindigkeiten der Flüssigkeit ertheilt durch den Stoss auf die Oberfläche

$$-\rho \Phi;$$

mit dem Werthe von Φ werden also die auf die verschiedenen Stellen der Oberfläche ausgeübten Stösse gegeben.

Wir können endlich die Gleichungen (1) bis (7) mit den beiden

Unbekannten φ und p so umformen, dass wir ein System von Gleichungen mit φ allein erhalten, durch dessen Lösung auch der Druck p bestimmt wird.

Wir setzen

$$\varphi = \varphi' + T',$$

wo T' eine Function von t sein soll; dann tritt in den sämtlichen Gleichungen einfach φ' an die Stelle von φ , mit Ausnahme von Gleichung (2), welche die Form annimmt:

$$\frac{1}{\varrho} p - T + \frac{dT'}{dt} = gz - \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right)^2 \right\}.$$

Setzen wir weiter

$$\frac{dT'}{dt} = T - \frac{1}{\varrho} P,$$

so folgt

$$\frac{p - P}{\varrho} = gz - \frac{\partial \varphi'}{\partial t} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right)^2 \right\},$$

und wenn wir diesen Ausdruck mit χ bezeichnen, so können wir die beiden Bedingungen an der Oberfläche schreiben:

$$\begin{aligned} \chi &= 0, \\ \frac{\partial \chi}{\partial t} + \frac{\partial \chi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \frac{\partial \chi}{\partial y} \frac{\partial \varphi}{\partial y} + \frac{\partial \chi}{\partial z} \frac{\partial \varphi}{\partial z} &= 0. \end{aligned}$$

Nun ist aber φ' ebensowohl Geschwindigkeitspotential, wie φ . Wir schreiben daher überall φ , verstehen unter χ die Function von φ :

$$\chi = gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t} - \frac{1}{2} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right\},$$

und haben zur Bestimmung von φ die allgemeine Differentialgleichung (1), die Bedingung (3) an der Gefässwand, die beiden oben stehenden Gleichungen mit χ an der Oberfläche, endlich die Anfangsbedingungen (6) und (7).

Ist φ gefunden, so folgt p aus der Gleichung

$$p = P + \varrho \chi.$$

Wir sehen, dass der auf die Oberfläche wirkende Druck P ohne Einfluss auf die Bewegung der Flüssigkeit ist, selbst wenn er sich mit der Zeit ändert. Das würde nicht mehr gelten, wenn zu derselben Zeit der Druck an verschiedenen Stellen der Oberfläche verschiedenen Werth hätte, P auch Function von x, y, z wäre.

§ 2.

Annahme sehr kleiner Geschwindigkeiten.

Erhält die Flüssigkeit in dem Gefäss eine beliebige Bewegung, so wird die Oberfläche und damit auch der Raum, den die Flüssigkeit einnimmt, endliche Aenderungen erleiden. Dann lässt sich das Problem im Allgemeinen auf Grund der oben abgeleiteten Gleichungen nicht behandeln, weil das Gebiet der Variablen x, y, z veränderlich ist. Nehmen wir aber an, es seien die Geschwindigkeiten der sämtlichen Stellen immer sehr klein, so muss auch die Aenderung, welche die Oberfläche erleidet, sehr klein bleiben; folglich wird die Oberfläche von der horizontalen Gleichgewichtsfläche nur sehr wenig abweichen, und wir begehen einen sehr geringen Fehler, wenn wir für die Geschwindigkeiten an der Oberfläche diejenigen Werthe einsetzen, welche an der nächstgelegenen Stelle der Gleichgewichtsfläche $z = 0$ gelten. Dann wird das Gebiet der Variablen x, y, z ein bestimmtes und unveränderliches, begrenzt von der Gefässwand und der Gleichgewichtsfläche $z = 0$, und es soll das Geschwindigkeitspotential φ als Function der Zeit t und der nun als unabhängig zu betrachtenden Variablen x, y, z bestimmt werden.

Wir vernachlässigen die Quadrate und Producte der Geschwindigkeiten $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$, $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ und $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$. Dann muss φ der allgemeinen Differentialgleichung Genüge leisten:

$$(1) \quad \frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0;$$

ferner an der Gefässwand, soweit diese von der Flüssigkeit im Gleichgewichtszustand benetzt wird, die Bedingung erfüllen:

$$(2) \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = 0.$$

An der Oberfläche haben wir nun, da

$$\chi = gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

die beiden Gleichungen:

$$gz = \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

$$g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Die erstere Gleichung bestimmt im Allgemeinen die Ordinate der Oberfläche; wir wollen sie zur Unterscheidung mit \bar{z} bezeichnen; dann wird \bar{z} bestimmt als Function von x, y und t , indem in $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ $z = 0$ zu

setzen ist. Zur Zeit $t = 0$ soll die Gestalt der Oberfläche gegeben sein, also auch der Werth von \bar{z} ; folglich ist der Werth von $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ zur Zeit $t = 0$ für $z = 0$ gegeben.

Die letztere Gleichung liefert die Bedingung an der Grenze $z = 0$:

$$(3) \quad g \frac{\partial \varphi}{\partial z} = \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2}.$$

Nehmen wir endlich an, es seien die Ordinate der Oberfläche und der Werth von φ an der Oberfläche zur Zeit $t = 0$ bestimmt durch die Functionen F und Φ von x und y , so haben wir noch die beiden Anfangsbedingungen für $z = 0$:

$$(4) \quad \varphi_0 = \Phi(x, y),$$

$$(5) \quad \left(\frac{\partial \varphi}{\partial t}\right)_0 = g F(x, y).$$

Ist φ als Lösung dieser sämtlichen fünf Gleichungen bestimmt, so folgt die Ordinate \bar{z} der Oberfläche aus der Gleichung:

$$(6) \quad \bar{z} = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

wo rechts der Werth von $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ für $z = 0$ zu nehmen ist, und der Druck p an der Stelle x, y, z zur Zeit t :

$$(7) \quad p = P + gz - \frac{\partial \varphi}{\partial t},$$

wo der Einfachheit wegen die oben mit ρ bezeichnete Dichtigkeit gleich Eins gesetzt ist und P wieder den zur Zeit t auf die Oberfläche ausgeübten Druck bedeutet. —

Es könnten Zweifel entstehen, ob der nach Gleichung (6) bestimmte Werth von \bar{z} der Bedingung genüge, dass das Volumen der Flüssigkeit ungeändert bleibe. Danach soll sein

$$\iint \bar{z} dx dy = 0,$$

wo das Integral über alle Elemente der Gleichgewichtsfläche auszudehnen ist. Nach Gleichung (6) ist diese Bedingung erfüllt, wenn

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dy = 0,$$

wo in $\frac{\partial \varphi}{\partial t}$ wieder $z = 0$ zu setzen ist.

Nun haben wir mit Rücksicht auf die Gleichung (3):

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dy = \iint \frac{\partial^2 \varphi}{\partial t^2} dx dy = g \iint \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx dy,$$

und das letzte Integral ist gleich Null. Denn nach einem bekannten Satze gilt die Formel:

$$\iiint \left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} \right) dx dy dz = - \iint \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\omega,$$

wenn das dreifache Integral über den ganzen von der Flüssigkeit erfüllten Raum, das Flächenintegral über alle Elemente $d\omega$ der Grenze ausgedehnt wird und dn die Normale an die Grenze bezeichnet, nach Innen positiv gerechnet. Ferner verschwindet das dreifache Integral wegen der Gleichung (1); für jede Stelle der Gefässwand aber gilt die Gleichung (2); folglich ist das Flächenintegral, ausgedehnt über die Gleichgewichtsfläche, gleich Null:

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial z} dx dy = 0.$$

Wir finden demnach, dass das Integral

$$\iint \frac{\partial \varphi}{\partial t} dx dy$$

einen constanten, von der Zeit unabhängigen Werth haben muss, und da dieser Werth für die Zeit $t = 0$ Null ist, weil selbstverständlich der gegebene Werth von \bar{z} der Bedingung genügen muss:

$$\iint F(x, y) dx dy = 0,$$

bleibt das Volumen der Flüssigkeit in der That ungeändert. —

Ganz ähnlich können wir den Beweis führen, dass durch die Gleichungen (1) bis (5) das Geschwindigkeitspotential völlig bestimmt ist, dass also nur eine einzige Lösung des Problems existirt.

Wir nehmen an, es gebe deren zwei, φ_1 und φ_2 , und betrachten die Differenz:

$$\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2.$$

φ' muss dann den Gleichungen (1), (2) und (3) Genüge leisten; wegen (4) und (5) aber müssen φ' und $\frac{\partial \varphi'}{\partial t}$ verschwinden für $t = 0$ und $z = 0$.

Jetzt betrachten wir das vierfache Integral, das wegen der Gleichung (1) verschwindet:

$$0 = \int_0^t \iiint \left(\frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z^2} \right) \frac{\partial \varphi'}{\partial t} dx dy dz dt.$$

Das dreifache Integral ist über alle Elemente $dx dy dz$ der Flüssigkeit auszudehnen, das Zeitintegral von 0 bis t .

Durch partielle Integration folgt:

$$0 = - \int_0^t \iiint \frac{\partial \varphi'}{\partial n} \frac{\partial \varphi'}{\partial t} d\omega dt \\ - \int_0^t \iiint \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial x \partial t} + \frac{\partial \varphi'}{\partial y} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial y \partial t} + \frac{\partial \varphi'}{\partial z} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial z \partial t} \right) dx dy dz dt.$$

Hier ist wieder das Flächenintegral über alle Elemente $d\omega$ der Grenze auszudehnen. Für die Gefässwand ist aber

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = 0,$$

für die Oberfläche nach Gleichung (3)

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial n} = \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = \frac{1}{g} \frac{\partial^2 \varphi'}{\partial t^2};$$

folglich können wir die Gleichung in der Form schreiben:

$$0 = \frac{1}{g} \int_0^t \iiint \frac{\partial}{\partial t} \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right)^2 dx dy dz \\ + \int_0^t \iiint \frac{\partial}{\partial t} \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz dt,$$

und dann die Integration nach der Zeit ausführen. Hierbei ist zu beachten, dass, wie wir oben gezeigt haben, die Grössen φ' und $\frac{\partial \varphi'}{\partial t}$ für die Zeit $t=0$ überhaupt verschwinden, da sie für $z=0$ Null sein sollen und die Gleichungen (1) und (2) gelten. So erhalten wir für jede Zeit t :

$$0 = \frac{1}{g} \iint \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial t} \right)^2 dx dy + \iiint \left\{ \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi'}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz.$$

Diese Gleichung ist nur erfüllt, wenn für jede Stelle im Innern der Flüssigkeit

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \varphi'}{\partial z} = 0$$

und für die Oberfläche $z=0$ auch

$$\frac{\partial \varphi'}{\partial t} = 0.$$

Nach den ersten drei Gleichungen ist φ' nur Function der Zeit, nach der letzten gleich einer Constante, und diese Constante ist wegen der Bedingungen für $t=0$ gleich Null. Wir finden also:

$$\varphi' = \varphi_1 - \varphi_2 = 0,$$

d. h. es giebt keine zwei von einander verschiedenen Lösungen des Problems. —

Zum Schlusse wollen wir noch bemerken, dass unter den gemachten Voraussetzungen die Bewegungen der einzelnen Flüssigkeitstheilchen können angegeben werden, sobald das Geschwindigkeitspotential φ bekannt ist.

Es sei (a, b, c) der Ort eines Flüssigkeitstheilchens zur Zeit $t=0$, ferner u, v, w die Componenten der Geschwindigkeit, welche dieses Theilchen zur Zeit t besitzt, gegeben als Functionen von a, b, c und t . Dann wird der Ort des Theilchens zur Zeit t bestimmt durch die Gleichungen:

$$x = a + \int_0^t u \, dt,$$

$$y = b + \int_0^t v \, dt,$$

$$z = c + \int_0^t w \, dt.$$

Nun sind einmal nach der Annahme die Geschwindigkeiten u, v, w immer sehr klein; ferner verändern die Flüssigkeitstheilchen ihren Ort nur sehr wenig; dann sind aber die Werthe u, v, w nur sehr wenig verschieden von den Geschwindigkeiten, welche an der Stelle a, b, c zur Zeit t statthaben, und der Unterschied ist von der zweiten Ordnung, also zu vernachlässigen. Endlich erhalten wir die Geschwindigkeiten an der Stelle a, b, c zur Zeit t , indem wir in den Ausdrücken $\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \frac{\partial \varphi}{\partial z}$ die Variablen x, y, z durch a, b, c ersetzen. Mithin haben wir:

$$x = a + \int_0^t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right) dt,$$

$$y = b + \int_0^t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right) dt,$$

$$z = c + \int_0^t \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right) dt,$$

wo die Klammern um $\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)$ u. s. w. bedeuten sollen, dass a, b, c statt x, y, z gesetzt werde.

§ 3.

Integration der Differentialgleichungen.

Wir suchen zunächst eine particuläre Lösung der Differentialgleichung (1) und der Grenzgleichungen (2) und (3) von der Form:

$$\varphi = TU,$$

wo T nur Function der Zeit t und U nur Function von x, y, z sein soll. Setzen wir den Werth ein in die zweite Grenzgleichung (3), so folgt

$$\frac{1}{T} \frac{d^2 T}{dt^2} = g \frac{1}{U} \frac{\partial U}{\partial z},$$

wo rechts $z = 0$ zu setzen ist, d. h. es soll eine Function von t einer Function von x und y gleich sein. Dieser Bedingung genügt nur eine Constante; wir bezeichnen dieselbe mit $-\kappa^2$.

Dann folgt für T die Differentialgleichung:

$$\frac{d^2 T}{dt^2} + \kappa^2 T = 0,$$

deren vollständige Lösung ist:

$$T = A \cos \kappa t + B \frac{g}{\kappa} \sin \kappa t,$$

mit den beiden willkürlichen Constanten A und B . Wir wählen diese Form, damit auch für den Fall $\kappa = 0$ die vollständige Lösung $A + Bgt$ erhalten werde; der Factor g im zweiten Gliede ist wegen der Anfangsbedingungen bequem.

Die Function U von x, y, z muss dagegen den folgenden Gleichungen genügen:

1) Der allgemeinen Differentialgleichung:

$$(A) \quad \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = 0;$$

2) Der Grenzgleichung an der Gefässwand:

$$(B) \quad \frac{\partial U}{\partial n} = 0;$$

3) Der Bedingung an der Oberfläche $z = 0$:

$$(C) \quad g \frac{\partial U}{\partial z} + \kappa^2 U = 0.$$

Durch Umformung des Integrales

$$\iiint \left(\frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} \right) U dx dy dz$$

ergibt sich die Gleichung:

$$\kappa^2 \iiint U^2 dx dy dz = \iiint \left\{ \left(\frac{\partial U}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial U}{\partial z} \right)^2 \right\} dx dy dz,$$

wo das Flächenintegral auf der linken Seite wieder über alle Elemente der Gleichgewichtsoberfläche zu nehmen ist. Folglich muss die Constante κ^2 reell und positiv sein, so dass wir auch κ positiv setzen können. Das sagt aus: Die einfachen Schwingungen der Flüssigkeit in dem Gefäss, welche durch einen Ausdruck von der Form TU dargestellt werden, sind periodisch um $\frac{2\pi}{\kappa}$.

Schliesslich wird den Anfangsbedingungen (4) und (5) genügt, wenn es gelingt, eine auf der Gleichgewichtsoberfläche gegebene Function von x und y darzustellen durch eine Reihe von Lösungen der Gleichungen (A), (B), (C) für verschiedene Werthe von κ :

$$\sum C_{\kappa} U_{\kappa}.$$

Hierin bedeutet U_{κ} den Werth einer Lösung U für $z = 0$, und die Reihe ist nach steigenden Werthen von κ zu ordnen. Setzen wir dementsprechend:

$$T_{\kappa} = A_{\kappa} \cos \kappa t + B_{\kappa} \frac{g}{\kappa} \sin \kappa t,$$

so geben die Gleichungen (4) und (5):

$$\Phi(x, y) = \sum A_{\kappa} U_{\kappa},$$

$$F(x, y) = \sum B_{\kappa} U_{\kappa}.$$

Was die Bestimmung der Coefficienten A und B betrifft, ist leicht zu zeigen, dass

$$(\kappa_2^2 - \kappa_1^2) \iint U_1 U_2 dx dy = 0,$$

wenn U_1 und U_2 die Werthe von U_{κ} für κ_1 und κ_2 bedeuten. Daraus folgt, dass

$$\iint U_1 U_2 dx dy = 0,$$

sobald

$$\kappa_1^2 \neq \kappa_2^2.$$

Die Berechnung der Coefficienten macht also keine Schwierigkeit, wenn die Darstellbarkeit der Function durch eine solche Reihe angenommen wird.

Die weitere Behandlung der Aufgabe hängt von der Form des Gefässes ab. *)

*) Den Fall, wo der Boden des Gefässes aus einer schiefen Ebene oder aus zwei schiefen Ebenen gebildet ist, hat G. Kirchhoff behandelt: Wied. Ann. 10, pag. 34–36.

§ 4.

Betrachtung eines Gefäßes von constanter Tiefe.

Das Gefäß habe die Form eines geraden Prismas oder Cylinders mit horizontalem Boden und verticalen Seitenwänden. Die Tiefe der Flüssigkeit betrage c .

Dann suchen wir eine Lösung der Gleichungen (A), (B), (C) von der Form

$$U = ZW,$$

wo Z nur Function von z und W nur Function von x und y sein soll. Durch Einsetzen in die Differentialgleichung (A) folgt:

$$Z \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} \right) + W \frac{d^2 Z}{dz^2} = 0,$$

und diese Gleichung kann nur bestehen, wenn

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} = \gamma^2 Z$$

und

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \gamma^2 W = 0,$$

wo γ^2 eine Constante bedeutet.

Z muss ferner den Bedingungen Genüge leisten:

$$\frac{dZ}{dz} = 0 \quad \text{für} \quad z = c,$$

wegen der Gleichung (B) für den Boden des Gefäßes;

$$g \frac{dZ}{dz} + \kappa^2 Z = 0 \quad \text{für} \quad z = 0,$$

wegen der Bedingung (C) an der Oberfläche.

Setzen wir die vollständige Lösung der Differentialgleichung:

$$Z = Ae^{\gamma z} + Be^{-\gamma z}$$

in die erste Grenzbedingung ein, so folgt

$$\gamma(Ae^{\gamma c} - Be^{-\gamma c}) = 0.$$

Dieser Gleichung wird genügt durch

$$Z = C \{ e^{\gamma(c-z)} + e^{-\gamma(c-z)} \},$$

und die zweite Bedingung giebt:

$$\kappa^2 = g\gamma \frac{e^{\gamma c} - e^{-\gamma c}}{e^{\gamma c} + e^{-\gamma c}}.$$

Da κ reell sein soll, können wir γ reell und positiv annehmen; die Formeln gelten auch für $\gamma = 0$. Wir betrachten nun κ als bestimmt

durch γ , und verfügen über den Factor von Z so, dass $Z = 1$ für $z = 0$. Demgemäss wird:

$$Z_\gamma = \frac{e^{\gamma(c-z)} + e^{-\gamma(c-z)}}{e^{\gamma c} + e^{-\gamma c}}.$$

Entsprechend sei W_γ für einen bestimmten Werth von γ die Lösung der Gleichungen:

$$(a) \quad \frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \gamma^2 W = 0,$$

$$(b) \quad \frac{\partial W}{\partial n} = 0.$$

Die Differentialgleichung (a) gilt für jede Stelle (x, y) der Gleichgewichtsfläche oder des Bodens, die Gleichung (b) für die Grenzlinie, deren Normale nach Innen dn ist. Dann kommt es noch darauf an, eine gegebene Function von x und y darzustellen durch eine Reihe von der Form:

$$\sum C_\gamma W_\gamma.$$

Diese Aufgabe ist von Heinrich Weber sehr ausführlich behandelt worden.*) Es ergibt sich, dass der Differentialgleichung und der Grenzbedingung für einen beliebigen Werth von γ nicht kann genügt werden, dass dagegen unendlich viele, von einander verschiedene Lösungen existiren, worin die Constante γ zwar unendlich viele, aber nur ganz bestimmte, von der Natur der Begrenzung abhängige Werthe haben kann.

Indem wir auf diese Untersuchung verweisen, wollen wir hier nur zeigen, wie die Coefficienten der Reihen bestimmt werden, die Entwickelbarkeit der Functionen vorausgesetzt. Dem Obigen entsprechend ergibt sich leicht, dass

$$(\gamma_2^2 - \gamma_1^2) \iint W_1 W_2 dx dy = 0,$$

wenn W_1 und W_2 die Lösungen der Gleichungen (a) und (b) für die Werthe γ_1 und γ_2 bedeuten; folglich ist:

$$\iint W_1 W_2 dx dy = 0,$$

wenn

$$\gamma_1^2 \geq \gamma_2^2.$$

Setzen wir also:

$$\varphi = \sum (A_\gamma \cos \pi t + B_\gamma \frac{g}{\gamma} \sin \pi t) Z_\gamma W_\gamma,$$

*) H. Weber. — Ueber die Integration der partiellen Differentialgleichung.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + k^2 u = 0.$$

so folgt auf bekanntem Wege:

$$A_\gamma = \frac{\iint \Phi(x, y) W_\gamma dx dy}{\iint W_\gamma^2 dx dy},$$

$$B_\gamma = \frac{\iint F(x, y) W_\gamma dx dy}{\iint W_\gamma^2 dx dy}.$$

§ 5.

Bewegungen nach zwei Dimensionen.

Wir betrachten den Fall, wo der Boden des Gefäßes ein Rechteck ist mit den Seiten a und b . Lassen wir die Axen x und y mit zweien dieser Seiten zusammenfallen, so werden die Seitenwände des Gefäßes bestimmt durch die Gleichungen:

$$x = 0, \quad x = a;$$

$$y = 0, \quad y = b.$$

Wir betrachten zuerst den einfachen Fall, wo das Geschwindigkeitspotential φ von y unabhängig ist, wo also die Flüssigkeitstheilchen sich parallel der (x, z) -Ebene bewegen. Wir erhalten diesen Fall, wenn die Functionen F und Φ von y unabhängig sind. Der Bedingung an den Seitenwänden $y = 0$ und $y = b$ ist dann genügt, weil $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ überhaupt Null ist, und W wird als Function von x bestimmt durch die Gleichungen:

$$\frac{d^2 W}{dx^2} + \gamma^2 W = 0 \quad \text{für } 0 < x < a,$$

$$\frac{dW}{dx} = 0 \quad \text{für } x = 0 \quad \text{und für } x = a.$$

Durch Integration finden wir:

$$W = A \cos \gamma x + B \frac{1}{\gamma} \sin \gamma x;$$

weiter aus den Grenzbedingungen:

$$B = 0, \quad A \sin \gamma a = 0.$$

Folglich wird, wenn n eine ganze positive Zahl bezeichnet,

$$\gamma = \frac{n\pi}{a}$$

und

$$W = \cos \frac{n\pi x}{a}.$$

Wir können somit die Lösung in der Form schreiben:

$$\varphi = \sum_0^{\infty} \left(A_n \cos \kappa_n t + B_n \frac{g}{\kappa_n} \sin \kappa_n t \right) Z_n \cos \frac{n\pi x}{a},$$

wo

$$(1) \quad \kappa_n^2 = \frac{n\pi g}{a} \frac{e^{\frac{n\pi c}{a}} - e^{-\frac{n\pi c}{a}}}{e^{\frac{n\pi c}{a}} + e^{-\frac{n\pi c}{a}}},$$

$$(2) \quad Z_n = \frac{e^{\frac{n\pi(c-z)}{a}} + e^{-\frac{n\pi(c-z)}{a}}}{e^{\frac{n\pi c}{a}} + e^{-\frac{n\pi c}{a}}},$$

und wo die Constanten A und B durch die Gleichungen bestimmt werden:

$$A_0 = \frac{1}{a} \int_0^a \Phi(x) dx,$$

$$A_n = \frac{2}{a} \int_0^a \Phi(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx;$$

$$B_0 = \frac{1}{a} \int_0^a F(x) dx,$$

$$B_n = \frac{2}{a} \int_0^a F(x) \cos \frac{n\pi x}{a} dx.$$

Wir können aber das Glied mit $n = 0$ fortlassen; die Constante A_0 ist ohne Bedeutung, weil φ überhaupt nur bis auf eine Constante bestimmt ist, und B_0 wird Null, wenn wir die (x, y) -Ebene mit der Gleichgewichtsoberfläche zusammenfallen lassen. Wir setzen daher, indem wir die Integrationsvariable mit ξ bezeichnen:

$$\varphi = \frac{2}{a} \sum_1^{\infty} \int_0^a \left\{ \cos \kappa_n t \cdot \Phi(\xi) + \frac{g}{\kappa_n} \sin \kappa_n t \cdot F(\xi) \right\} Z_n \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi \xi}{a} d\xi.$$

Die Oberfläche der Flüssigkeit wird bestimmt durch die Gleichung (6), § 2:

$$\bar{z} = \frac{1}{g} \frac{\partial \varphi}{\partial t} \quad \text{für } z = 0;$$

wir erhalten somit für unsern Fall:

$$\bar{z} = \frac{2}{a} \sum_1^{\infty} \int_0^a \left\{ \cos \kappa_n t \cdot F(\xi) - \frac{\kappa_n}{g} \sin \kappa_n t \cdot \Phi(\xi) \right\} \cos \frac{n\pi x}{a} \cos \frac{n\pi \xi}{a} d\xi. —$$

Um die Untersuchung der durch unsre Formeln dargestellten Bewegung zu vereinfachen, wollen wir annehmen, es sei $\Phi(x) = 0$. Die Bewegung soll also dadurch hervorgebracht werden, dass der Oberfläche eine von der Gleichgewichtsfläche abweichende Form ertheilt wird. Durch Stösse auf die Oberfläche entsteht eine ganz ähnliche Bewegung; der allgemeine Fall wird durch Addition der beiden Bewegungen erhalten, und es genügt somit, den Fall zu betrachten, wo $F(x)$ von Null verschiedene Werthe hat.

Die Reihen reduciren sich auf ein Glied, wenn die ursprüngliche Ordinate der Oberfläche dem Cosinus eines Vielfachen von $\frac{\pi x}{a}$ proportional ist; setzen wir:

$$F(x) = K \cos \frac{n\pi x}{a},$$

wo K nach der Annahme immer sehr klein sein soll, so wird:

$$\varphi = \frac{gK}{\kappa_n} \sin \kappa_n t \cdot Z_n \cos \frac{n\pi x}{a},$$

$$\bar{z} = K \cos \kappa_n t \cdot \cos \frac{n\pi x}{a}.$$

Dies ist eine *einfache Schwingung*. Jede Bewegung kann aufgefasst werden als eine Summe solcher einfacher Schwingungen.

Betrachten wir zunächst die Oberfläche, so besteht diese aus n Theilen; von zwei an einander grenzenden Theilen ist der eine das Spiegelbild des andern in Bezug auf die Grenze. Dasselbe gilt von φ . Denken wir uns also das Gefäss durch $(n-1)$ parallele Zwischenwände in n gleiche Theile getheilt, so ist die Bewegung in zwei an einander stossenden Theilen symmetrisch gegen die Grenze. Demnach können die Flüssigkeitstheilchen, welche in einer solchen Grenze liegen, sich nur in der Grenze auf- und abbewegen, und in einem der Theile findet genau dieselbe Bewegung statt, wie in einem festen Gefäss von der Länge

$$l = \frac{a}{n},$$

wenn die Ordinate der Oberfläche zur Zeit $t=0$ bestimmt ist durch

$$\pm K \cos \frac{\pi x}{l}.$$

Dies ist aber die erste einfache Schwingung in einem Gefäss von der Länge l .

Wir untersuchen daher diese erste einfache Schwingung in einem Gefäss von der Länge l , welche dargestellt wird durch die Gleichungen:

$$\bar{z} = K \cos \kappa t \cdot \cos \frac{\pi x}{l},$$

$$u = -\frac{\pi}{l} K g \frac{\sin \kappa t}{\kappa} \sin \frac{\pi x}{l} \frac{e^{\frac{\pi}{l}(c-z)} + e^{-\frac{\pi}{l}(c-z)}}{e^{\frac{\pi}{l}c} - e^{-\frac{\pi}{l}c}},$$

$$w = -\frac{\pi}{l} K g \frac{\sin \kappa t}{\kappa} \cos \frac{\pi x}{l} \frac{e^{\frac{\pi}{l}(c-z)} + e^{-\frac{\pi}{l}(c-z)}}{e^{\frac{\pi}{l}c} + e^{-\frac{\pi}{l}c}},$$

wo u und w die Componenten der Geschwindigkeit bedeuten und

$$\kappa^2 = \frac{\pi g}{l} \frac{e^{\frac{\pi}{l}c} - e^{-\frac{\pi}{l}c}}{\frac{\pi}{l}c - e^{-\frac{\pi}{l}c}}.$$

Sämmtliche Werthe bleiben ungeändert, wenn man die Zeit t um ein ganzes Vielfaches von $\frac{2\pi}{\kappa}$ ändert; die Bewegung ist also periodisch um $\frac{2\pi}{\kappa}$. Betrachten wir die Bewegung der Oberfläche während einer solchen Periode, von $t = 0$ bis $t = \frac{2\pi}{\kappa}$, so haben die Ordinaten am Ende der Periode ihre ursprünglichen Werthe, in der Mitte aber, zur Zeit $t = \frac{\pi}{\kappa}$, dieselben Werthe mit entgegengesetztem Vorzeichen; diese Werthe sind die Maxima und Minima der Ordinaten. Jede Stelle der Oberfläche vollführt also während einer Periode zwei Schwingungen, und die Dauer einer solchen Schwingung ist $\frac{\pi}{\kappa}$,

$$T = \sqrt{\frac{\pi l}{g}} \left\{ \frac{e^{\frac{\pi}{l}c} + e^{-\frac{\pi}{l}c}}{\frac{\pi}{l}c - e^{-\frac{\pi}{l}c}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Folglich ist die Schwingungsdauer von K , d. h. von der Amplitude der Schwingungen ganz unabhängig; sie wird um so grösser, je länger das Gefäss und je kleiner die Tiefe desselben ist. Wäre das Gefäss unendlich tief, so hätten wir:

$$T = \sqrt{\frac{\pi l}{g}}.$$

Demnach verhält sich die Schwingungsdauer in einem Gefäss von der Länge l und von unendlicher Tiefe zu der Schwingungsdauer eines einfachen Pendels von der Länge l , wie $1 : \sqrt{\pi}$. Durch den Einfluss des Bodens wird die Schwingungsdauer vergrössert, und zwar nimmt mit abnehmender Tiefe des Gefässes die Schwingungsdauer fortwährend zu.

Ist $\frac{c}{l}$ eine kleine Grösse, so erhalten wir bei Vernachlässigung von $\left(\frac{c}{l}\right)^4$:

$$T = \frac{l}{\sqrt{gc}} \left\{ 1 + \frac{1}{4} \left(\frac{\pi c}{l} \right)^2 \right\};$$

dürfen wir schon die zweite Potenz vernachlässigen, so wird die Schwingungsdauer der Länge l direct, der Quadratwurzel aus der Tiefe c umgekehrt proportional:

$$T = \frac{l}{\sqrt{gc}} \cdot *)$$

Der Unterschied zwischen der grösten Hebung und Senkung der Oberfläche an der Stelle x ist:

$$2 K \cos \frac{\pi x}{l},$$

gleich der doppelten Länge der ursprünglichen Ordinate; die Amplitude der Schwingungen ist also unabhängig von der Tiefe. Wir erhalten ferner die Geschwindigkeit der Hebung oder Senkung, indem wir $\frac{\partial z}{\partial t}$ bilden oder in $w \ z = 0$ setzen; dies giebt:

$$- K \sqrt{\frac{\pi g}{l}} \left\{ \frac{e^{\frac{\pi c}{l}} - e^{-\frac{\pi c}{l}}}{e^{\frac{\pi c}{l}} + e^{-\frac{\pi c}{l}}} \right\}^{\frac{1}{2}} \sin \kappa t \cdot \cos \frac{\pi x}{l}.$$

Demnach nimmt die Geschwindigkeit der Hebung und Senkung mit der Tiefe des Gefässes ab. Sie ist am Ende jeder Schwingung Null, indem die Ordinate ein Maximum oder Minimum wird, in der Mitte der Schwingung dagegen ein Maximum, wo die Ordinate Null ist, die Oberfläche also mit der Gleichgewichtsebene zusammenfällt. Ferner ist die Geschwindigkeit der ursprünglichen Ordinate proportional; in der Mitte des Gefässes bleibt die Oberfläche in Ruhe; nach beiden Seiten wachsen die Ordinaten und die Geschwindigkeiten, aber in entgegengesetzter Richtung. Wird die Tiefe unendlich, so ist die Geschwindigkeit:

$$- K \sqrt{\frac{\pi g}{l}} \sin \kappa t \cdot \cos \frac{\pi x}{l},$$

und in ihrem Maximum, wenn die Oberfläche durch die Gleichgewichtsebene hindurchgeht:

$$\pm K \sqrt{\frac{\pi g}{l}} \cos \frac{\pi x}{l} = f \sqrt{\frac{\pi g}{l}},$$

wo f den Weg bezeichnet, welchen die Stelle vom Anfang der Schwingung an durchlaufen hat. Ein Körper, der von der Höhe f gefallen

*) Forel hat diese Formel auf die „Seiches“ zur Anwendung gebracht und nachgewiesen, dass sie mit den Messungen sehr gut übereinstimmt.

wäre, hätte die Geschwindigkeit $\sqrt{2gf}$ erlangt; die Geschwindigkeiten verhalten sich also, wie

$$\sqrt{\frac{\pi f}{l}} : \sqrt{2}.$$

Wir untersuchen zweitens die Bewegung der einzelnen Flüssigkeitstheilchen während der einfachen Schwingung. Da wir die zweiten Potenzen und die Producte der Geschwindigkeiten vernachlässigen, können wir annehmen, das Flüssigkeitstheilchen, welches sich zur Zeit $t = 0$ an der Stelle x, z befindet, habe zur Zeit t die Geschwindigkeiten, die an derselben Stelle zur Zeit t statthaben. Diese Geschwindigkeiten sind:

$$u = -K \frac{\pi g}{\kappa l} \sin \kappa t \cdot \sin \frac{\pi x}{l} \frac{e^{\frac{\pi(c-z)}{l}} + e^{-\frac{\pi(c-z)}{l}}}{e^{\frac{\pi c}{l}} + e^{-\frac{\pi c}{l}}},$$

$$w = -K \frac{\pi g}{\kappa l} \sin \kappa t \cdot \cos \frac{\pi x}{l} \frac{e^{\frac{\pi(c-z)}{l}} - e^{-\frac{\pi(c-z)}{l}}}{e^{\frac{\pi c}{l}} + e^{-\frac{\pi c}{l}}}.$$

Folglich kann das Verhältniss $\frac{u}{w}$ und damit die Richtung der Geschwindigkeit als von der Zeit unabhängig betrachtet werden: Die Theilchen bewegen sich auf sehr kurzen Strecken von krummen Linien, die sich mit der Zeit nicht ändern, hin und her. Wir erhalten die Gleichungen dieser Linien, indem wir setzen:

$$\frac{dx}{dt} = \frac{u}{w}$$

und integrieren. Demnach ist die Differentialgleichung der Curven:

$$\left\{ e^{\frac{\pi(c-z)}{l}} + e^{-\frac{\pi(c-z)}{l}} \right\} \sin \frac{\pi x}{l} dz - \left\{ e^{\frac{\pi(c-z)}{l}} - e^{-\frac{\pi(c-z)}{l}} \right\} \cos \frac{\pi x}{l} dx = 0,$$

und durch Integration folgt:

$$\left\{ e^{\frac{\pi(c-z)}{l}} - e^{-\frac{\pi(c-z)}{l}} \right\} \sin \frac{\pi x}{l} = \text{Const.}$$

Die Curven haben in der Mitte, $x = \frac{1}{2} l$, ihren tiefsten Punkt und steigen nach beiden Seiten symmetrisch; nennen wir die Ordinate ihres tiefsten Punktes h , so wird die Gleichung einer solchen Curve:

$$\left\{ e^{\frac{\pi(c-z)}{l}} - e^{-\frac{\pi(c-z)}{l}} \right\} \sin \frac{\pi x}{l} = e^{\frac{\pi(c-h)}{l}} - e^{-\frac{\pi(c-h)}{l}}.$$

Die Curven schneiden also die x -Axe, d. h. die Oberfläche in zwei

Punkten, deren Abstände x_1 von den Seitenwänden bestimmt werden durch die Gleichung:

$$\sin \frac{\pi x_1}{l} = \frac{e^{\frac{\pi(c-h)}{l}} - e^{-\frac{\pi(c-h)}{l}}}{e^{\frac{\pi c}{l}} - e^{-\frac{\pi c}{l}}};$$

da $0 < h < c$, ist immer $0 < x_1 < l$.

Für die oberste der krummen Linien ist $h = 0$; sie berührt nur die Flüssigkeit in der Mitte der Oberfläche:

$$x = \frac{1}{2} l, \quad z = 0.$$

Mit wachsendem h nähert sich die Curve mehr und mehr der Gefässwand, bis sie für $h = c$ mit derselben zusammenfällt:

$$x = 0, \quad z = c, \quad x = l.$$

Wird die Tiefe des Gefässes c gegen seine Länge l sehr gross, so kann für mässige Tiefen z die Gleichung geschrieben werden:

$$\sin \frac{\pi x}{l} = e^{\frac{\pi(z-h)}{l}}$$

oder

$$z = h + \frac{l}{\pi} \log. \sin \frac{\pi x}{l}.$$

Die Curven haben demnach alle dieselbe Form und unterscheiden sich nur dadurch, dass ihr tiefster Punkt in verschiedenem Abstand unter der Oberfläche liegt; die beiden Senkrechten $x = 0$ und $x = \frac{1}{2} l$ sind Asymptoten dieser Linien.

Der Werth der Geschwindigkeit v an der Stelle (x, z) im Innern der Flüssigkeit zur Zeit t ist, abgesehen vom Vorzeichen:

$$v = K \sqrt{\frac{\pi g}{l}} \sin \pi z \cdot e^{-\frac{\pi z}{l}} \left\{ \frac{1 - 2 \cos \frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{2\pi(c-z)}{l}} + e^{-\frac{4\pi(c-z)}{l}}}{1 - e^{-\frac{2\pi c}{l}}} \right\}^{\frac{1}{2}}.$$

Wir erhalten ferner die Länge s der Oscillation für das betreffende Flüssigkeitstheilchen, wenn wir diesen Ausdruck mit dt multipliciren und in Bezug auf t von 0 bis $T = \frac{\pi}{\pi}$ integriren; somit folgt:

$$s = 2 K e^{-\frac{\pi z}{l}} \frac{\left\{ 1 - 2 \cos \frac{2\pi x}{l} e^{-\frac{2\pi(c-z)}{l}} + e^{-\frac{4\pi(c-z)}{l}} \right\}^{\frac{1}{2}}}{1 - e^{-\frac{2\pi c}{l}}}.$$

Für ein sehr tiefes Gefäss aber, haben wir die Geschwindigkeit:

$$v = K \sqrt{\frac{\pi g}{l}} \sin \kappa t \cdot e^{-\frac{\pi z}{l}},$$

und die Länge der Oscillation:

$$s = 2 K e^{-\frac{\pi z}{l}}.$$

In diesem Falle sind also Geschwindigkeit und Länge der Oscillation gleich für alle Stellen einer Horizontalen; beide nehmen mit wachsender Tiefe sehr rasch ab.

Durch den Einfluss des Bodens werden die Werthe in der Mitte des Gefässes vergrößert; wir erhalten für $x = \frac{1}{2} l$:

$$v = K \sqrt{\frac{\pi g}{l}} \sin \kappa t e^{-\frac{\pi z}{l}} \frac{1 + e^{-\frac{2\pi(c-z)}{l}}}{(1 - e^{-\frac{4\pi c}{l}})^{\frac{1}{2}}},$$

$$s = 2 K e^{-\frac{\pi z}{l}} \frac{1 + e^{-\frac{2\pi(c-z)}{l}}}{1 - e^{-\frac{2\pi c}{l}}};$$

beide Werthe wachsen mit abnehmender Tiefe c .

Dagegen werden die Werthe am Rande des Gefässes durch den Einfluss des Bodens verkleinert; für $x = 0$ oder $x = l$ ergeben sich die Werthe:

$$v = K \sqrt{\frac{\pi g}{l}} \sin \kappa t \cdot e^{-\frac{\pi z}{l}} \frac{1 - e^{-\frac{2\pi(c-z)}{l}}}{(1 - e^{-\frac{4\pi c}{l}})^{\frac{1}{2}}},$$

$$s = 2 K e^{-\frac{\pi z}{l}} \frac{1 - e^{-\frac{2\pi(c-z)}{l}}}{1 - e^{-\frac{2\pi c}{l}}}.$$

Die Geschwindigkeit ist hier immer kleiner, als wenn die Tiefe unendlich gesetzt wird; an der Oberfläche wird sie in dem Verhältniss:

$$\left\{ \frac{1 - e^{-\frac{2\pi c}{l}}}{1 + e^{-\frac{2\pi c}{l}}} \right\}^{\frac{1}{2}}$$

verkleinert, und dieses Verhältniss nimmt ab, je mehr wir uns dem Boden nähern, wo die Geschwindigkeit Null wird. Die Länge der Oscillation dagegen ist an der Oberfläche dieselbe, welche Tiefe das Gefäss auch haben mag; je mehr wir uns aber dem Boden nähern, um so mehr wird die Länge s durch den Einfluss des Bodens vermindert, und für $z = c$ verschwindet auch s .

So viel über die einfachen Schwingungen. Ist die ursprüngliche Ordinate der Oberfläche durch mehrere Glieder ausgedrückt, von denen jedes dem Cosinus eines Vielfachen von $\frac{\pi x}{a}$ proportional ist, so finden ebenso viele einfache Schwingungen gleichzeitig statt. Die Bewegung hört dann auf periodisch zu sein; denn die Perioden der einzelnen einfachen Schwingungen stehen mit einander in keinen rationalen Verhältnissen. Doch kann der Fall eintreten, dass die Verhältnisse sich rationalen Werthen nähern; in diesem Falle wird die Bewegung eine Zeit lang nahe periodisch sein.

Zu ganz ähnlichen Resultaten wären wir gelangt, wenn wir, statt ursprünglich eine Abweichung der Oberfläche von der Gleichgewichtsebene anzunehmen, den Flüssigkeitstheilen durch auf die Oberfläche geführte Stösse Anfangsgeschwindigkeiten ertheilt hätten. Die Bewegung ist auch in diesem Falle aufzufassen als eine Summe einfacher Schwingungen. Der Unterschied besteht darin, dass die Bewegung in dem Moment beginnt, wo die Oberfläche sich in der Gleichgewichtslage befindet, die Flüssigkeitstheilen dagegen ihre grössten Geschwindigkeiten besitzen.

§ 6.

Bewegungen nach drei Dimensionen.

Wir behandeln noch kurz den Fall, wo in dem prismatischen Gefäss mit horizontalem Boden und verticalen Seitenwänden eine beliebige Bewegung stattfindet. Die Function W muss dann den folgenden Gleichungen genügen:

1) Der Differentialgleichung für $0 < x < a$ und $0 < y < b$:

$$\frac{\partial^2 W}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + \gamma^2 W = 0;$$

2) Den Grenzbedingungen:

$$\frac{\partial W}{\partial x} = 0 \quad \text{für} \quad x = 0 \quad \text{und} \quad x = a,$$

$$\frac{\partial W}{\partial y} = 0 \quad \text{für} \quad y = 0 \quad \text{und} \quad y = b.$$

Wir suchen zunächst eine Lösung der Differentialgleichung von der Form:

$$W = X Y.$$

wo X nur von x , Y nur von y abhängen soll. Durch Einsetzen folgt:

$$\frac{1}{X} \frac{d^2 X}{dx^2} + \frac{1}{Y} \frac{d^2 Y}{dy^2} + \gamma^2 = 0.$$

Diese Gleichung verlangt, dass die Functionen von x und von y constant seien; folglich:

$$\frac{d^2 X}{dx^2} + \alpha^2 X = 0,$$

$$\frac{d^2 Y}{dy^2} + \beta^2 Y = 0,$$

wo α und β beliebig sind. Die Gleichung giebt dann:

$$\gamma^2 = \alpha^2 + \beta^2.$$

Weiter folgt aus den Grenzgleichungen, gerade so wie oben, dass

$$\alpha = \frac{m\pi}{a}, \quad X = \cos \frac{m\pi y}{a};$$

$$\beta = \frac{n\pi}{b}, \quad Y = \cos \frac{n\pi x}{b}.$$

m und n sind positive ganze Zahlen.

Somit erhalten wir in diesem Falle:

$$\varphi = \sum_0^\infty \sum_0^\infty \left\{ A_{m,n} \cos \cdot x_{m,n} t + B_{m,n} \frac{g}{x_{m,n}} \sin \cdot x_{m,n} t \right\} Z_{m,n} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b},$$

wo

$$\gamma_{m,n}^2 = \pi^2 \left(\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2} \right),$$

$$x_{m,n}^2 = g \gamma_{m,n} \frac{e^{\gamma_{m,n} c} - e^{-\gamma_{m,n} c}}{e^{\gamma_{m,n} c} + e^{-\gamma_{m,n} c}},$$

$$Z_{m,n} = \frac{e^{\gamma_{m,n}(c-z)} + e^{-\gamma_{m,n}(c-z)}}{e^{\gamma_{m,n} c} + e^{-\gamma_{m,n} c}}.$$

Endlich muss noch den Anfangsbedingungen Genüge geleistet werden:

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty A_{m,n} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} = \Phi(x, y),$$

$$\sum_0^\infty \sum_0^\infty B_{m,n} \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} = F(x, y).$$

In bekannter Weise folgt:

$$A_{0,0} = \frac{1}{ab} \int_0^b \int_0^a \Phi(x, y) dx dy,$$

$$A_{m,0} = \frac{2}{ab} \int_0^b \int_0^a \Phi(x, y) \cos \frac{m\pi x}{a} dx dy,$$

$$A_{0,n} = \frac{2}{ab} \int_0^a \int_0^b \Phi(x, y) \cos \frac{n\pi y}{b} dx dy,$$

$$A_{m,n} = \frac{4}{ab} \int_0^a \int_0^b \Phi(x, y) \cos \frac{m\pi x}{a} \cos \frac{n\pi y}{b} dx dy;$$

ganz ähnlich werden die Coefficienten $B_{m,n}$ durch die Function $F(x, y)$ bestimmt.

Wir können das constante Glied $A_{0,0}$ fortlassen, und $E_{0,0}$ wird Null, wenn die (x, y) -Ebene mit der Gleichgewichtsoberfläche zusammenfällt. Die Reihe für φ beginnt dann mit den Gliedern $m = 1, n = 0$ und $m = 0, n = 1$, welche einfache Schwingungen der früher betrachteten Art darstellen.

Jedes Glied der Reihe stellt auch hier eine einfache Bewegung dar, welche ähnlichen Gesetzen folgt, wie die oben betrachteten einfachen Schwingungen. Wir wollen deren Gesetze nicht weiter ableiten, sondern uns auf die Bemerkung beschränken, dass hier mehrere einfache Bewegungen dieselbe Periode haben können. Dies tritt ein, wenn der Ausdruck:

$$\frac{m^2}{a^2} + \frac{n^2}{b^2}$$

für mehrere Werthensysteme m, n denselben Werth annimmt; a und b werden jedenfalls commensurabel sein müssen.

In dem Falle:

$$a = b$$

geben z. B. die folgenden drei Werthensysteme einfache Bewegungen gleicher Periode:

$$m = 1, \quad n = 18;$$

$$m = 6, \quad n = 17;$$

$$m = 10, \quad n = 15;$$

denn für alle ist

$$m^2 + n^2 = 325.$$

In einem letzten Abschnitt hat J. R. Merian noch den Fall behandelt, wo der Boden des Gefässes Kreisform hat. Hierbei handelt es sich um eine Entwicklung nach Cylinderfunctionen. Nachdem deren Theorie und Anwendung in den letzten Jahrzehnten so weit ist entwickelt worden, erscheint eine Wiedergabe von Formeln aus dem Jahre 1828 nicht am Platze. Für einige andere Begrenzungen hat H. Weber in der oben genannten Abhandlung*) den Weg zur Lösung des Problems angegeben.

*) Math. Ann. I, p. 27ff.