

# Sulla rappresentazione geografica di una superficie su di un'altra.

(Nota del prof. ULISSE DINI, a Pisa.)

---

1. Siano  $S$  e  $S'$  due superficie i cui punti, almeno per certe porzioni, si corrispondano uno ad uno in modo che si abbia fra esse la similitudine nelle parti infinitesime, o come si dice, si abbia su  $S'$  una rappresentazione conforme di una parte di  $S$ .

Prendendo per coordinate sulle due superficie due sistemi di linee corrispondenti  $u$  e  $v$ , e indicando con  $ds$  e  $ds'$  gli elementi lineari corrispondenti delle due superficie, si avrà:

$$ds' = m ds,$$

ove  $m$  è il modulo di similitudine; e se le linee  $u$  e  $v$  su  $S$  e quindi anche su  $S'$  costituiscono un doppio sistema di linee ortogonali e isoterme, sarà:

$$ds^2 = \lambda^2 (U du^2 + V dv^2),$$

$$ds'^2 = m^2 \lambda^2 (U du^2 + V dv^2),$$

essendo  $U$  e  $V$  funzioni di  $u$  e  $v$  soltanto rispettivamente.

S'indichino ora con  $K_s$  e  $K_{s'}$  le curvature delle superficie  $S$  e  $S'$  nei punti corrispondenti  $(u, v)$ , e s'indichi in generale con  $\Delta_2 \varphi$  la quantità detta dal prof. BELTRAMI parametro differenziale del second'ordine della funzione  $\varphi$ , quantità che, come è noto, quando:

$$ds^2 = E du^2 + 2F du dv + G dv^2$$

è il quadrato dell'elemento lineare della superficie che si considera, è data dalla formola:

$$\Delta_2 \varphi = \frac{1}{\sqrt{EG - F^2}} \left\{ \frac{d}{du} \left( \frac{G \frac{d\varphi}{du} - F \frac{d\varphi}{dv}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) + \frac{d}{dv} \left( \frac{E \frac{d\varphi}{dv} - F \frac{d\varphi}{du}}{\sqrt{EG - F^2}} \right) \right\},$$

ove il radicale s'intende preso positivamente, ed è una di quelle funzioni che lo stesso prof. BELTRAMI chiamò funzioni invariabili, cioè tali che cambiando le variabili coordinate conservano la stessa composizione coi coefficienti del nuovo elemento lineare della superficie e colle derivate della funzione (\*).

Per una formola dello stesso prof. BELTRAMI, sulla superficie  $S$  si avrà:

$$-\Delta_2 \log \lambda = K_s;$$

e similmente, indicando con  $\Delta'_2$  i parametri differenziali di second'ordine sulla superficie  $S'$ , si avrà:

$$-\Delta'_2 \log m \lambda = K_{s'};$$

ovvero:

$$-\Delta'_2 \log m - \Delta'_2 \log \lambda = K_{s'},$$

e siccome  $\Delta'_2 = \frac{1}{m^2} \Delta_2$ , sarà:

$$\Delta'_2 \log m = \frac{1}{m^2} K_s - K_{s'}, \quad \Delta_2 \log m = K_s - m^2 K_{s'},$$

donde si conclude in particolare che, quando la superficie  $S'$  su cui si fa la rappresentazione è un piano, il parametro differenziale del second'ordine del logaritmo del modulo di similitudine  $m$  calcolato sulla superficie  $S$  è uguale alla curvatura  $K_s$  di questa superficie, e il parametro differenziale del second'ordine del logaritmo del prodotto  $m\lambda$  tanto calcolato sulla superficie  $S$  quanto sul piano  $S'$  è sempre uguale a zero.

2. Supponiamo ora in generale che sulla superficie  $S'$  (qualunque essa sia) sia dato un sistema di coordinate isoterme  $(u', v')$  per modo che si abbia:

$$ds'^2 = \lambda_1^2 (U_1 du'^2 + V_1 dv'^2);$$

e sia:

$$\int \sqrt{U_1} du' + i \int \sqrt{V_1} dv' = f \left[ \int \sqrt{U} du \pm i \int \sqrt{V} dv \right],$$

la formola che stabilisce la corrispondenza fra i punti delle due superficie.

Si avrà:

$$m^2 \lambda^2 = \lambda_1^2 f' f'_1,$$

essendo  $f_1$  la funzione coniugata di  $f$ , e  $f'$  e  $f'_1$  le derivate di  $f$  e  $f_1$  rispetto

---

(\*) V. BELTRAMI: *Ricerche di analisi applicata alla Geometria*. Giorn. di Mat. di Napoli, vol. III.

alle quantità:

$$\int \sqrt{U} du \pm i \int \sqrt{V} dv, \quad \int \sqrt{U} du \mp i \int \sqrt{V} dv,$$

e perciò sarà:

$$\log m + \log \lambda - \log \lambda_1 = \log \sqrt{f' f'_1},$$

e si avrà pure:

$$\Delta'_2 \log \frac{m\lambda}{\lambda_1} = 0, \quad \text{e} \quad \Delta_2 \log \frac{m\lambda}{\lambda_1} = 0,$$

come risulterebbe anche dalle formole date sopra; talchè di qui si vede che in ogni caso le quantità  $\Delta_2 \log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  e  $\Delta'_2 \log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  sono sempre zero, e se è data la superficie  $S$ , qualunque sia la funzione  $f$  che stabilisce la rappresentazione di  $S$  su  $S'$ , il valore di  $\Delta_2 \log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  sarà sempre conosciuto in ogni punto e sarà uguale a  $-\Delta_2 \log \lambda$  o a  $K_s$ .

3. Quando poi dalla conoscenza di questi valori di  $\Delta_2 \log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  o  $\Delta'_2 \log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ , servendosi di altre condizioni al contorno o nell'interno della porzione di superficie  $S$  che si vuole rappresentare su  $S'$ , si giunga a conoscere anche il valore di  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  sulla porzione di superficie  $S$  che si considera, allora ponendo:

$$\log \frac{m\lambda}{\lambda_1} = \log \sqrt{f' f'_1} = P, \quad (1)$$

$P$  sarà una funzione conosciuta di  $u$  e  $v$  che soddisfarà alla condizione  $\Delta_2 P = 0$ ; e conoscendo  $P$  potremo con sole quadrature determinare  $f$ , e quindi anche tutte le formole della rappresentazione conforme di  $S$  su  $S'$  che soddisfa alle condizioni che saranno state poste.

Supponendo infatti per semplicità  $U = V = 1$ , e ponendo:

$$\log \sqrt{f'} = \varphi(u \pm iv),$$

con che sarà:

$$\log \sqrt{f'_1} = \varphi_1(u \mp iv),$$

essendo  $\varphi_1$  la funzione coniugata di  $\varphi$ , si avrà:

$$\varphi(u \pm iv) + \varphi_1(u \mp iv) = P, \quad (2)$$

e quindi, se  $P$  si potrà porre facilmente sotto la forma  $\psi(u \pm iv) + \psi_1(u \mp iv)$

con  $\psi_1$  funzione coniugata di  $\psi$ , si avrà subito:

$$\varphi(u \pm iv) = \psi(u \pm iv) + ic \quad (c \text{ cost. reale}),$$

e si troverà allora senz'altro:

$$f' = e^{2ic + 2\psi(u \pm iv)}, \quad \text{e} \quad f = e^{2ic} \int e^{2\psi(u \pm iv)} d(u \pm iv) + p + iq,$$

con  $p$  e  $q$  costanti reali arbitrarie.

In generale poi, siccome dalla (2) si vede che  $P$  è la parte reale di  $2\varphi(u \pm iv)$  o di  $\log f'$ , ponendo:

$$\log f' = P + iQ, \quad (3)$$

$P + iQ$  sarà funzione della variabile complessa  $u \pm iv$ , e si avrà:

$$\frac{dQ}{dv} = \pm \frac{dP}{du}, \quad \frac{dQ}{du} = \mp \frac{dP}{dv},$$

e l'espressione:

$$\mp \left( \frac{dP}{dv} du - \frac{dP}{du} dv \right)$$

sarà un differenziale esatto, e si avrà:

$$Q = \mp \int \left( \frac{dP}{dv} du - \frac{dP}{du} dv \right) = \mp \int \frac{dP}{dv} du \mp \int \left( -\frac{dP}{du} - \frac{d}{dv} \int \frac{dP}{dv} du \right) dv + c_1,$$

con  $c_1$  costante reale; o anche, limitando gli integrali fra  $(u_0, v_0)$  e  $(u, v)$  e indicando con  $P'_u$  e  $P'_v$  le derivate di  $P$ , e osservando che  $P''_v = -P''_u$ :

$$Q = \mp \int_{u_0, v_0}^{u, v} (P'_v du - P'_u dv) + c_1 = \mp \int_{u_0}^u P'_v du \pm \int_{v_0}^v P'_u(u_0, v) dv + c_1,$$

e perciò, avendosi  $f' = e^{P+iQ}$ , sarà infine:

$$\left. \begin{aligned} \int \sqrt{U_1} du' + i \int \sqrt{V_1} dv' &= f = e^{ic_1} \int_{u_0, v_0}^{u, v} \left\{ e^{P \mp i \int_{u_0, v_0}^{u, v} (P'_v du - P'_u dv)} \right\} d(u \pm iv) + p + iq = \\ &= e^{ic_1} \int_{u_0, v_0}^{u, v} \left\{ e^{P \mp i \int_{u_0}^u P'_v(u, v) du \pm i \int_{v_0}^v P'_u(u_0, v) dv} \right\} d(u \pm iv) + p + iq, \end{aligned} \right\} (4)$$

con  $p$  e  $q$  nuove costanti reali, talchè le formole della nostra rappresentazione resteranno così pienamente determinate.

È da notarsi però che, dipendentemente dalla natura di  $P$  e dalla forma del campo che si considera su  $S$ , l'espressione trovata per  $f$  potrà non essere a un sol valore.

4. Se poi fosse conosciuto in qualche modo, per mezzo della equazione  $\Delta'_2 \log \frac{m\lambda}{\lambda_1} = 0$  e di altre condizioni date, il valore di  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  sulla porzione di  $S'$ , che in qualche modo si sapesse che deve corrispondere alla porzione data di  $S$ , allora  $P$  sarebbe ancora conosciuto ma in funzione di  $u'$  e  $v'$ ; e quando si avesse anche  $U_1 = V_1 = 1$ , invece di giungere a trovare la relazione:

$$u' + iv' = f(u \pm iv),$$

si giungerebbe collo stesso metodo a trovare la relazione inversa:

$$u \pm iv = \psi(u' + iv').$$

Essendo infatti:

$$u' + iv' = f[\psi(u' + iv')],$$

si avrebbe:

$$f' \psi' = 1, \quad f'_1 \psi'_1 = 1,$$

e quindi  $f' f'_1 = \frac{1}{\psi' \psi'_1}$ , e  $\log \sqrt{\psi' \psi'_1} = -P$ , e si troverebbe con calcoli simili:

$$\left. \begin{aligned} u \pm iv = \psi &= e^{ic' \int_{u'_0, v'_0}^{u', v'} \left\{ e^{-P+i \int_{u'_0, v'_0}^{u', v'} (P'_{v'} du' - P'_{u'} dv')} \right\} d(u' + iv')} + p_1 + iq_1 = \\ &= e^{ic' \int_{u'_0, v'_0}^{u', v'} \left\{ e^{-P+i \int_{u'_0}^{u'} P'_{v'}(u', v') du' - i \int_{v'_0}^{v'} P'_{u'}(u'_0, v') dv'} \right\} d(u' + iv')} + p_1 + iq_1, \end{aligned} \right\} \quad (5)$$

ove  $c_1$ ,  $p_1$ ,  $q_1$  sono costanti reali, talchè il problema potrebbe ancora riguardarsi come risoluto.

5. Dietro questi risultati si può dunque asserire che quando si dia il rapporto  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$  sul contorno della porzione  $\omega$  di superficie  $S$  che si vuole rappresentare su  $S'$ , o sul contorno della porzione  $\omega'$  di  $S'$  che in qualche modo si sappia che deve corrispondere ad  $\omega$ , e che questo rapporto debba essere sempre finito e continuo e diverso da zero e avere le derivate prime e seconde finite e continue esse pure, allora, siccome risulterà almeno in generale, completamente determinato il valore di  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  entro  $\omega$  o entro  $\omega'$ , la rappresentazione corrispondente di  $\omega$  su  $\omega'$  (quando sia possibile) sarà poi determinata colle formole del paragrafo precedente all'infuori di qualche costante; e lo stesso pure accadrà quando sul contorno di  $\omega$  o di  $\omega'$  si dia invece il valore della derivata rispetto

alla normale interna agli stessi contorni riducendosi così in sostanza il problema alla determinazione di una funzione  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  che, in un campo dato oltre alle solite condizioni ora indicate di continuità ecc., soddisfa alla equazione  $\Delta_2 = 0$  o  $\Delta'_2 = 0$ , e per la quale sono dati i suoi valori al contorno, o quelli della sua derivata rispetto alla normale interna al contorno stesso.

Notiamo però che, come già abbiamo accennato, specialmente quando sia dato a priori il campo  $\omega'$  su cui deve cadere la rappresentazione della superficie data  $\omega$ , e siano date delle condizioni lungo il contorno di  $\omega'$ , non sempre il problema sarà possibile, e l'impossibilità verrà messa in luce dalla circostanza che colle formole finali (4) o (5) il contorno di  $\omega'$  non verrà effettivamente a corrispondere al contorno di  $\omega$ . Però in ogni caso il metodo suggerito da queste considerazioni sarà sempre da seguirsi, poichè se non altro esso porrà in chiaro la impossibilità di soddisfare alle condizioni poste, di rappresentare cioè in modo conforme il campo dato  $\omega$  sul campo parimente dato  $\omega'$ , ecc.

Inoltre notiamo che talvolta invece di cominciare col determinare per mezzo delle condizioni date, entro  $\omega$  o entro  $\omega'$ , il valore di  $\log \frac{\lambda m}{\lambda_1}$ , potrà convenire d'incominciare a determinare la funzione che nel § 3 abbiamo indicato con  $Q$ , vale a dire quella funzione  $Q$  per la quale la espressione  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1} + iQ$  è una funzione di  $u \pm iv$  (§ 3), ecc.

6. Indichiamo ora con  $i$  l'angolo che una curva  $s$  su  $S$  fa colle linee  $v = \text{cost.}$ ; con  $i'$  l'angolo che la linea corrispondente  $s'$  su  $S'$  fa colla linea  $v' = \text{cost.}$ ; e con  $dn$  e  $dn'$  gli elementi delle curve normali corrispondenti, fissando che la direzione positiva di  $dn$  e quella di  $ds$  siano disposte la prima rispetto alla seconda come la tangente positiva di una curva  $u = \text{cost.}$  (cioè la direzione secondo cui cresce  $v$ ) lo è rispetto alla tangente positiva della curva  $v = \text{cost.}$

Inoltre indichiamo con  $\frac{1}{\rho_s}$  e  $\frac{1}{\rho_{s'}}$  le curvature geodetiche delle linee  $s$  e  $s'$ , intendendo che ogni raggio geodetico  $\rho_s$  abbia un segno positivo o un segno negativo secondochè è diretto nel senso di  $dn$  o in senso contrario, e ricordiamo che si ha (V. per es.: BELTRAMI, Mem. cit.):

$$\frac{1}{\rho_s} = \frac{di}{ds} - \frac{d \log \lambda}{dn}, \quad \frac{1}{\rho_{s'}} = \frac{di'}{ds'} - \frac{d \log \lambda_1}{dn'}. \quad (6)$$

Osserviamo ora che si ha  $ds' = m ds$ , e differenziamo i due membri di questa

equazione nel senso della normale ad  $s$  su  $S$ , indicando a scanso di equivoci questa differenziazione colla caratteristica  $\partial$ . Si troverà:

$$\partial ds' = m \partial ds + ds \partial m$$

e, dividendo per  $ds' \partial n'$  e osservando che  $ds' = m ds$ ,  $\partial n' = m \partial n$ , si avrà:

$$\frac{\partial \log ds'}{\partial n'} = \frac{1}{m} \frac{\partial \log ds}{\partial n} + \frac{1}{m} \frac{\partial \log m}{\partial n},$$

talchè, osservando che con considerazioni semplici si trova che:

$$\frac{\partial \log ds}{\partial n} = \frac{\partial \log \lambda}{\partial n} - \frac{di}{ds} = -\frac{1}{\rho_s}, \quad \frac{\partial \log ds'}{\partial n'} = \frac{\partial \log \lambda_1}{\partial n'} - \frac{di'}{ds'} = -\frac{1}{\rho_{s'}},$$

si avrà subito la formola nota:

$$\frac{1}{\rho_{s'}} = \frac{1}{m} \frac{1}{\rho_s} - \frac{d \log m}{m dn}, \quad (7)$$

nella quale alla caratteristica  $\partial$  siamo tornati a sostituire la caratteristica  $d$ ; e insieme a questa si avrà l'altra:

$$\frac{d \log \frac{m \lambda}{\lambda_1}}{m dn} = \frac{1}{m} \frac{di}{ds} - \frac{di'}{ds'},$$

la quale dà luogo alle due:

$$\frac{d \log \frac{m \lambda}{\lambda_1}}{dn} = \frac{di}{ds} - m \frac{di'}{ds'}, \quad \frac{d \log \frac{m \lambda}{\lambda_1}}{dn'} = \frac{di}{m ds} - \frac{di'}{ds'}, \quad (8)$$

o anche:

$$\frac{d \log \frac{m \lambda}{\lambda_1}}{dn} = \frac{di - di'}{ds} = \frac{d(i - i')}{ds}, \quad \frac{d \log \frac{m \lambda}{\lambda_1}}{dn'} = \frac{di - di'}{ds'} = \frac{d(i - i')}{ds'}; \quad (9)$$

e queste quando si abbia  $di' = 0$  o  $di = 0$  si trasformano nelle altre più semplici:

$$\frac{d \log \frac{m \lambda}{\lambda_1}}{dn} = \frac{di}{ds} = \frac{1}{\rho_s} + \frac{d \log \lambda}{d'n}, \quad \frac{d \log \frac{m \lambda}{\lambda_1}}{dn'} = -\frac{di'}{ds'} = -\frac{1}{\rho_{s'}} - \frac{d \log \lambda_1}{d'n'}. \quad (10)$$

Applicando dunque questa formola ai contorni  $s$  e  $s'$  di  $\omega$  e di  $\omega'$ , coll'ammettere dapprima che sui contorni stessi e nell'interno non debbano aversi singolarità, nè rispetto alla rappresentazione che si fa di  $\omega$  su  $\omega'$ , nè, più gene-

ralmente, rispetto al rapporto  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ , noi possiamo dire intanto che quando i dati del problema portino alla conoscenza della quantità  $\frac{d(i-i')}{ds}$  sul contorno  $s$  del campo  $\omega$ ,  $\sigma$  a quella della quantità  $\frac{d(i-i')}{ds'}$  sul contorno  $s'$  del campo  $\omega'$  che in qualche modo si sappia che deve corrispondere ad  $\omega$ , si conoscerà appunto il valore della derivata di  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  rispetto alla normale interna al contorno di  $\omega$  o di  $\omega'$ , e il problema, per quanto si è detto nel paragrafo precedente, ove sia possibile, potrà ritenersi come risoluto.

Così in particolare, quando si abbia per dato che la differenza  $i-i'$  debba avere valori costanti sulle varie linee o pezzi di linee che costituiscono il contorno di  $\omega$ , si trae subito di qui che, nella ipotesi ammessa della continuità ecc. rispetto a  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ , dovrà essere  $\frac{m\lambda}{\lambda_1} = \text{cost.}$  in tutto  $\omega$ , e con ciò la rappresentazione conforme della porzione  $\omega$  di  $S$  su una porzione  $\omega'$  di  $S'$  in modo che al contorno si abbia  $i-i' = \text{cost.}$  rimarrà determinata dalla formola  $u' + iv' = A(u + iv) + B$  con  $A$  e  $B$  costanti arbitrarie (§ 3), e non resteranno a farsi che le verificazioni che dai dati del problema fossero rese necessarie; e in questa rappresentazione non solo pei contorni ma per le linee corrispondenti sarà soddisfatta in ogni punto la condizione  $i-i' = \text{cost.}$

7. In particolare ancora, quando per dato si abbia che il contorno di  $\omega'$  sulla superficie  $S'$  deve essere formato da uno o più pezzi di linee che taglino sotto angoli costanti le linee  $v'$  (per le quali, cioè, sia  $di' = 0$ ), riducendosi allora la espressione  $\frac{di-di'}{ds}$  a  $\frac{di}{ds}$  che è conosciuta, si verrà a conoscere il valore  $\frac{di}{ds}$  o  $\frac{1}{\xi s} + \frac{d \log \lambda}{dn}$  della derivata di  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  rispetto alla normale interna a  $s$  sulla superficie  $S$ , e la rappresentazione conforme di  $\omega$  su  $\omega'$  (quando sia possibile farla in modo che  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$  soddisfi alle solite condizioni di continuità ecc.) resterà determinata (§ 5); e similmente quando il contorno  $s$  di  $\omega$  sia formato da linee o pezzi di linee che taglino sotto angoli costanti le linee  $v$  (per le quali, cioè, si abbia  $di = 0$ ), scegliendo a piacere il campo  $\omega'$  che deve venire a corrispondere ad  $\omega$  (salvo a soddisfare alle condizioni che verranno più sotto indicate), si potrà riguardare come conosciuto su  $S'$  il valore  $-\frac{di'}{ds'}$  o  $-\frac{1}{\xi s'} - \frac{d \log \lambda_1}{dn'}$  della derivata di  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  rispetto alla normale interna al contorno  $s'$  di  $\omega'$ , e



la rappresentazione di  $\omega$  su  $\omega'$  (quando sia possibile) rimarrà ancora determinata; talchè si può evidentemente asserire che in questi casi, in cui le condizioni date portano che il contorno di  $\omega$  o quello di  $\omega'$  siano formati da linee o pezzi di linee che tagliano sotto angoli costanti un sistema di linee isoterme  $v$  o  $v'$ , il problema della rappresentazione conforme di un campo dato  $\omega$  su un altro parimente dato  $\omega'$  (quando sia possibile) è senz'altro ridotto alla determinazione di una funzione  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  che in uno degli stessi campi, oltre alle solite condizioni di continuità ecc., soddisfa alla equazione  $\Delta_2 \log \frac{m\lambda}{\lambda_1} = 0$ , o  $\Delta'_2 \log \frac{m\lambda}{\lambda_1} = 0$ , e di cui sono dati i valori della derivata rispetto alla normale interna al contorno.

8. Fermiamoci in particolare sulle questioni di possibilità o no delle rappresentazioni conformi di un campo  $\omega$  su un altro dato o nò  $\omega'$ , quando, come nei casi considerati nei due paragrafi precedenti, sono date alcune condizioni che determinano il valore di  $\frac{d(i-i')}{ds}$ , o  $\frac{d(i-i')}{ds'}$  sul contorno  $s$  o  $s'$  di  $\omega$  o di  $\omega'$ , facendo per ora astrazione dai casi di impossibilità che possono presentarsi per non essere soddisfatte le condizioni di continuità ecc. pel rapporto  $\frac{\lambda m}{\lambda_1}$ . Si potrà osservare allora che nel primo caso, se il campo  $\omega'$  non è completamente definito a priori, ma per esso è data soltanto la condizione che il rapporto  $\frac{d(i-i')}{ds}$  nei punti del contorno  $s$  di  $\omega$  abbia valori dati, veri casi di impossibilità non vi saranno perchè le formole finali condurranno a una rappresentazione conforme di  $\omega$  su una porzione di  $S'$  per la quale al contorno di  $\omega$  il rapporto  $\frac{d(i-i')}{ds}$  a causa della prima delle (9) prenderà appunto il valore dato; e se il campo  $\omega'$  sarà dato perfettamente a priori, allora potrà avvenire che le formole finali non corrispondano effettivamente alla rappresentazione di  $\omega$  su  $\omega'$ , però esse daranno sempre una rappresentazione di  $\omega$  su una porzione  $\Omega'$  di  $S'$  il cui contorno se non sarà precisamente quello di  $\omega'$  soddisfarà però ad una condizione comune, quella cioè che lungo di esso il rapporto  $\frac{d(i-i')}{ds}$  abbia i valori dati.

Nel secondo caso poi, dovendo esser dato perfettamente il campo  $\omega'$ , perchè è su esso che si fa la determinazione del rapporto  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ , potrà avvenire che

le formole finali non corrispondano effettivamente a una rappresentazione conforme del campo dato  $\omega$  sul campo parimenti dato  $\omega'$ ; però queste formole daranno sempre una rappresentazione conforme per la quale il campo  $\omega'$  se non corrisponderà precisamente al campo dato  $\omega$  di  $S$ , corrisponderà però ad un campo  $\Omega$  limitato come  $\omega$  da linee tali che il rapporto  $\frac{d(i-i')}{ds'}$  prenda su  $s'$  i valori dati.

E in particolare nel primo caso, quando il contorno del campo dato  $\omega'$  taglia sotto angoli costanti le linee  $v'$ , si può dire che se il campo  $\Omega'$  che colle formole finali verrà a corrispondere ad  $\omega$  non sarà precisamente  $\omega'$ , avrà però il contorno formato, come quello di  $\omega'$ , da linee che tagliano sotto angoli costanti le linee  $v'$ ; e nel secondo caso, se il contorno del campo dato  $\omega$  taglia sotto angoli costanti le linee  $v$ , il campo  $\Omega$  che colle formole finali verrà a corrispondere al campo preso a piacere  $\omega'$ , se non sarà precisamente  $\omega$ , avrà però, come questo, il suo contorno formato da linee che tagliano sotto angoli costanti le linee  $v$ .

9. Veniamo ora a occuparci in modo speciale delle condizioni di continuità ecc. che abbiamo sempre supposto nel rapporto  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ , e osserviamo dapprima che se  $\varphi$  è una funzione che nei punti di un campo  $C$  il cui contorno è  $\sigma$  è sempre finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde, e in questo campo esiste soltanto tutt'al più un numero finito di punti nei quali le coordinate  $u$  e  $v$ , o  $u'$  e  $v'$  (secondochè esso è su  $S$  o su  $S'$ ) non si comportano come le ordinarie coordinate cartesiane, o, più generalmente, esiste soltanto un numero finito di punti nei quali  $\lambda$  o  $\lambda_1$  presentano qualche singolarità, si ha:

$$\iint_C \Delta_2 \varphi dC + \int_{\sigma} \frac{d\varphi}{dn} d\sigma = 0, \quad (10)$$

essendo  $n$  la normale interna a  $\sigma$  (\*); si concluderà da ciò che onde il rap-

---

(\*) V. BELTRAMI: *Sulle funzioni di variabili complesse su una superficie qualunque*, Annali di Mat. di Milano, t. 1. Il BELTRAMI dimostra la formola (10) pei campi  $C$  nei quali i soliti coefficienti  $E$  e  $G$  dei due quadrati nell'elemento lineare, e il determinante dell'area  $EG - F^2$  sono finiti e diversi da zero, ciò che nel caso nostro porterebbe sempre la restrizione che  $\lambda$  o  $\lambda_1$ , secondochè  $C$  è su  $S$  o su  $S'$ , in tutto  $C$  fossero finiti e diversi da zero; però se vi è un numero finito di punti entro  $C$  nei quali  $\lambda$  o  $\lambda_1$  presentano qualche singolarità, escludendo questi punti con circonferenze geodetiche arbitrariamente piccole, si vede che basta ammettere che coll'avvicinarsi ad essi indefinitamente  $\Delta_2 \varphi$  e le derivate prime di  $\varphi$  si mantengano finite per poter dire che la formola (10) continua ancora a sussistere

porto  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$  sia a un sol valore finito e continuo e diverso da zero, e abbia finite e continue anche le sue derivate prime e seconde in tutto un campo dato  $\omega$ , o in tutto il campo  $\omega'$  che forma la rappresentazione di  $\omega$ , bisognerà che le curve corrispondenti  $s$  e  $s'$  che formano i contorni di  $\omega$  e  $\omega'$  siano tali che si abbia:

$$\int d(i-i')=0, \quad o: \quad \int_s di - \int_{s'} di' = 0. \quad (11)$$

Avendo poi riguardo alle formole (6) questa condizione potrà anche trasformarsi nell'altra:

$$\int_s \left( \frac{d \log \lambda}{dn} + \frac{1}{\rho_s} \right) ds = \int_{s'} \left( \frac{d \log \lambda_1}{dn'} + \frac{1}{\rho_{s'}} \right) ds',$$

la quale, quando  $\lambda$  e  $\lambda_1$  entro  $\omega$  e  $\omega'$  soddisfino alle solite condizioni di continuità ecc., si può anche scrivere:

$$\int_s \frac{ds}{\rho_s} - \iint_{\omega} \Delta_2 \log \lambda d\omega = \int_{s'} \frac{ds'}{\rho_{s'}} - \iint_{\omega'} \Delta'_2 \log \lambda_1 d\omega',$$

ovvero:

$$T - T' = \Gamma' - \Gamma,$$

essendo  $T$  e  $T'$  le somme degli angoli di contingenza geodetica dei contorni  $s$  e  $s'$  rispettivamente, e  $\Gamma$  e  $\Gamma'$  le curvature integre o totali:

$$\iint_{\omega} K_s d\omega, \quad \iint_{\omega'} K_{s'} d\omega'$$

delle aree  $\omega$  e  $\omega'$ ; ciò che evidentemente somministra un teorema sulle rappresentazioni conformi di una superficie su di un'altra facile ad enunciarsi.

Nel caso particolare poi in cui sia  $di'=0$  queste condizioni divengono:

$$\int_s di = 0, \quad o: \quad T = -\Gamma,$$

e nel caso di  $di=0$  esse divengono invece:

$$\int_{s'} di' = 0, \quad o: \quad T' = -\Gamma'.$$

In ciò che segue la differenza  $\int_s di - \int_{s'} di'$  verrà da noi indicata con  $\omega$  quando

sia espressa per  $u$  e  $v$  (cioè quando si consideri su  $S$ ), e verrà invece indicata con  $\varpi_1$  quando sia espressa per  $u'$  e  $v'$ . Queste quantità dunque  $\varpi$  e  $\varpi_1$  dovranno essere zero quando siano soddisfatte le indicate condizioni di continuità ecc. rispetto a  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ .

10. Se poi non sono soddisfatte le condizioni  $\varpi=0$  o  $\varpi_1=0$ , o anche se, essendolo, deve mancare in alcuni punti della rappresentazione di  $\omega$  su  $\omega'$  la similitudine nelle parti infinitesime, allora saremo nel caso in cui il rapporto  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$  ha qualche singolarità in qualche punto, linea o porzione della superficie che si considera.

Ci limiteremo a considerare il caso di quelle singolarità speciali per le quali il rapporto  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$  diviene zero o infinito in uno o più punti staccati  $p_1, p_2, \dots, p_n$  del campo  $\omega$  o  $\omega'$  su cui si considera, e questi zeri o infiniti sono tali che la funzione  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  divenga infinita come i logaritmi delle distanze geodetiche da questi punti ai punti vicini, per modo che si abbia per es.: sulla superficie  $\omega$ :

$$\log \frac{m\lambda}{\lambda_1} = A_1 \log \frac{1}{r_1} + A_2 \log \frac{1}{r_2} + \dots + A_n \log \frac{1}{r_n} + \varphi \quad (12)$$

essendo  $r_1, r_2, \dots, r_n$  le distanze geodetiche ora indicate,  $A_1, A_2, \dots, A_n$  delle costanti convenienti, e  $\varphi$  una funzione di  $u$  e  $v$  che è finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde, ciò che equivale ad ammettere che  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  non abbia altre singolarità che quelle che provengono dai termini logaritmici scritti sopra.

Allora, fuori dei punti singolari  $\varphi$  dovrà soddisfare alle condizioni:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \sum_1^n A_h \frac{d \log r_h}{dn} + \frac{d \log \frac{m\lambda}{\lambda_1}}{dn} = \sum_1^n A_h \frac{d \log r_h}{dn} + \frac{di - di'}{ds},$$

$$\Delta_2 \varphi = \sum_1^n A_h \Delta_2 \log r_h,$$

$$\iint_{\omega} \Delta_2 \varphi d\omega + \int_s \frac{d\varphi}{dn} ds = 0;$$

quindi, poichè la seconda di queste richiede che le quantità  $\Delta_2 \log r_h$  restino finite

anche coll'avvicinarsi indefinitamente ai punti  $p_h$ , converrà ammettere (BELTRAMI, Mem. cit.) che la curvatura della superficie  $\omega$  nei punti  $p_1, p_2, \dots, p_n$  sia finita (\*).

Ora si ha (BELTRAMI, Mem. cit.):

$$\int_{\omega} \Delta_2 \log r_h d\omega + \int_s \frac{d \log r_h}{dn} ds = -\varepsilon_h,$$

ove  $\varepsilon_h$  è uguale a  $2\pi$  se il punto  $r_h$  è interno ad  $\omega$ , ed è uguale all'angolo interno che fanno i due elementi del contorno che partono da  $p_h$ , quando questo punto appartiene al contorno; quindi poichè dalla prima delle formole precedenti si ha:

$$\varpi = -\sum_1^n A_h \int_s \frac{d \log r_h}{dn} ds + \int_s \frac{d\varphi}{dn} ds,$$

avendo riguardo alle altre delle stesse formole e alla precedente, si vede che dovrà essere:

$$\sum_1^n A_h \varepsilon_h = \varpi,$$

ciò che ci permette di dire che quando i dati del problema siano tali che le determinazioni debbano farsi sulla superficie  $\omega$ , e che debbano aversi alcune singolarità come quelle portate dai termini logaritmici che compariscono nella (12), allora, per risolvere il problema, invece di cercare la funzione  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$

colla condizione che al contorno si abbia  $\frac{d \log \frac{m\lambda}{\lambda_1}}{dn} = \frac{d(i-i')}{ds}$ , e sia finita, continua, ecc., come si disse ai §§ 6 e 7, si cercherà una funzione  $\varphi$  che, oltre

---

(\*) Con questa ipotesi, quand'anche si fosse ammesso che in  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  oltre ai termini logaritmici si potessero trovare dei termini della forma  $r_h^{\nu_h} Q_h$ , con  $Q_h$  funzione finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde, e  $\nu_h$  soltanto positivo, la condizione che allora avremmo avuto al posto della seconda delle precedenti avrebbe portato che  $\nu_h$  dovesse essere maggiore o eguale a 2, e quindi le derivate prime e seconde di  $r_h^{\nu_h} Q_h$  sarebbero state finite e continue, e non si sarebbe perciò ottenuto nulla di più generale, poichè le condizioni poste per  $\varphi$  non escludono che in  $\varphi$  possano trovarsi inclusi anche dei termini della forma  $r_h^{\nu_h} Q_h$  con  $\nu_h \geq 2$ .

essere finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutto  $\omega$ , soddisfi alla condizione:

$$\Delta_2 \varphi = \sum_1^n A_h \Delta_2 \log r_h \quad (13)$$

in tutti i punti di  $\omega$ , e la cui derivata  $\frac{d\varphi}{dn}$  rispetto alla normale al contorno sia data dalla formola:

$$\frac{d\varphi}{dn} = \frac{d(i-i')}{ds} + \sum_1^n A_h \frac{d \log r_h}{dn}, \quad (14)$$

essendo le  $A_h$  costanti reali legate fra loro dalla relazione:

$$\sum_1^n A_h \varepsilon_h = \varpi = \int_s di - \int_{s'} di', \quad (15)$$

e essendo le  $r_h$  le distanze geodetiche dai punti  $p_h$  nei quali  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$  deve divenire zero o infinito agli altri punti della superficie, e  $\varepsilon_h$  essendo uguale a  $2\pi$  pei punti  $p_h$  interni ad  $\omega$  e uguale all'angolo interno che fanno i due elementi del contorno che partono da  $p_h$  quando questo punto appartiene al contorno; e trovata questa funzione  $\varphi$ , si prenderà:

$$\log \frac{m\lambda}{\lambda_1} = - \sum_1^n A_h \log r_h + \varphi, \quad (16)$$

e si procederà poi, come si disse al § 3, per trovare le formole della rappresentazione richiesta.

Similmente nel caso in cui i dati del problema siano tali che tutte le determinazioni debbano farsi su  $\omega'$ , e il rapporto  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$  debba ancora avere delle singolarità come quelle sopra indicate nei punti  $p'_1, p'_2, \dots p'_n$  di  $\omega'$ , si potrà ottenere una soluzione del problema prendendo:

$$\log \frac{m\lambda}{\lambda_1} = - \sum_1^n A'_h \log r'_h + \psi, \quad (17)$$

con  $\psi$  funzione di  $u'$  e  $v'$  finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutto  $\omega'$ , e obbligata a soddisfare alle condizioni

$$\Delta'_2 \psi = \sum_1^n A'_h \Delta'_2 \log r'_h, \quad \frac{d\psi}{dn'} = \frac{di - di'}{ds'} + \sum_1^n A'_h \frac{d \log r'_h}{dn'} \quad (18)$$

nell'interno e al contorno di  $\omega'$  rispettivamente, essendo ora le  $A'_h$  legate fra loro dalla condizione:

$$\sum_1^n A'_h \varepsilon'_h = \varpi_1 = \int_s di - \int_{s'} di', \quad (19)$$

e le  $r'_h$  e  $\varepsilon'_h$  avendo pei punti  $p'_1, p'_2, \dots, p'_n$  di  $\omega'$  gli stessi significati delle  $r_h$  e  $\varepsilon_h$  del caso precedente.

Non si deve però tralasciare di notare che le costanti  $A_h, A'_h$  nei casi speciali non potranno esser costanti arbitrarie legate fra loro soltanto dalla condizione (15) o dalla (19), ma dovranno avere valori particolari che soddisfino a queste condizioni, se si vuole che il problema sia possibile; come del resto avremo occasione di notare anche fra breve.

È poi da osservare che questi risultati comprendono anche quelli dei casi considerati nei §§ 6, 7 e 8 pei quali oltre essere  $\varpi=0$  o  $\varpi_1=0$ , non si ha alcuna singolarità nella funzione  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ , bastando allora supporre che le costanti  $A_h$  o  $A'_h$  siano tutte eguali a zero.

11. Inoltre si può osservare che, restando gli stessi i punti singolari  $p_h$  e  $p'_h$  e la natura delle singolarità, per uno stesso sistema di valori delle costanti  $A_h$  o  $A'_h$  e per uno stesso campo  $\omega$  o  $\omega'$ , la rappresentazione di  $\omega$  su  $\omega'$  (se è possibile) resta perfettamente determinata all'infuori della arbitrarietà che proviene dall'essere in  $\varphi$  o in  $\psi$  una costante arbitraria additiva.

Ricordiamo infatti che quando  $F$  è una funzione che in  $\omega$  o in  $\omega'$ , per es. in  $\omega$ , soddisfa alle solite condizioni di continuità ecc., si ha (BELTRAMI, Mem. cit.) la formola seguente:

$$-\int_{\omega} \Delta_1 F d\omega = \int_{\omega} F \Delta_2 F d\omega + \int_s F \frac{dF}{dn} ds,$$

nella quale  $\Delta_1 F$  è il parametro differenziale di prim'ordine, cioè:

$$\Delta_1 F = \frac{1}{\lambda^2} \left\{ \left( \frac{dF}{du} \right)^2 + \left( \frac{dF}{dv} \right)^2 \right\};$$

si vedrà subito che quando esistessero due funzioni  $\varphi$  e  $\varphi_0$  che soddisfacessero alle condizioni poste sopra per  $\varphi$ , la loro differenza  $F = \varphi - \varphi_0$  sarebbe una funzione che oltre alle solite condizioni di continuità ecc., nell'interno e al contorno di  $\omega$  soddisferebbe alla condizione  $\Delta_2 F = 0$ , e al contorno sarebbe  $\frac{dF}{dn} = 0$ , e quindi si avrebbe  $F = \text{cost.}$  e  $\varphi_0 = \varphi + \text{cost.}$  in tutto il campo.

12. La determinazione poi delle costanti  $A_h$  e  $A'_h$  che, come già abbiamo accennato, non sono legate dalla sola condizione (15) o (19), può farsi facilmente colle considerazioni seguenti.

Si supponga dapprima che il punto che ora indicheremo con  $p_c$  in cui  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  presenta una delle singolarità sopra indicate sia sul contorno  $s$  di  $\omega$  e non sia in esso una cuspidale, e si indichi con  $\varepsilon_c$  l'angolo interno (che sarà diverso da zero) dei due elementi del contorno stesso che escono da quel punto, e con  $\varepsilon'_c$  quello degli elementi corrispondenti del contorno  $s'$  di  $\omega'$ . Si conduca poi su  $\omega$  una circonferenza geodetica  $\sigma_c$  col centro in  $p_c$ , talmente piccola che nello spazio racchiuso fra essa e il contorno non cadano altri punti singolari di  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ , e s'indichi con  $\sigma'_c$  la curva che le corrisponde nella rappresentazione su  $\omega'$ .

Su  $\sigma_c$  si avrà, a causa della prima delle (9):

$$\frac{d \log \frac{m\lambda}{\lambda_1}}{dn_c} = \frac{di - di'}{d\sigma_c}$$

e quindi:

$$\int_{\sigma_c} \frac{d \log \frac{m\lambda}{\lambda_1}}{dn_c} d\sigma_c = \int_{\sigma_c} di - \int_{\sigma'_c} di';$$

e a causa del valore (16) di  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  si avrà anche:

$$- \sum_{(c)} A_h \int_{\sigma_c} \frac{d \log r_h}{dn_c} d\sigma_c - A_c \int_{\sigma_c} \frac{d \log r_c}{dn_c} d\sigma_c + \int_{\sigma_c} \frac{d\phi}{dn_c} d\sigma_c = \int_{\sigma_c} di - \int_{\sigma'_c} di',$$

ove la somma  $\sum_{(c)}$  è estesa a tutti i punti singolari  $p_h$  escluso  $p_c$ .

Ma su  $\sigma_c$  la quantità  $\frac{d\phi}{dn_c}$ , e così anche le altre  $\frac{d \log r_h}{dn_c}$  quando  $r_h$  è diverso da  $r_c$ , si mantengono finite mentre  $\sigma_c$  impiccolisce oltre ogni limite; quindi poichè  $dn_c = -dr_c$ , e al successivo impiccolirsi di  $\sigma_c$ , se in  $p_c$  la curvatura della superficie  $\omega$  è finita, si può prendere  $d\sigma_c = r_c d\varepsilon$ , essendo  $\varepsilon$  l'angolo che i raggi geodetici  $r_c$  fanno con uno fra essi che si considera come fisso, si conclude che al limite il primo membro della formola precedente si riduce a  $A_c \varepsilon_c$ , e si ha perciò:

$$A_c \varepsilon_c = \lim \left[ \int_{\sigma_c} di - \int_{\sigma'_c} di' \right].$$



Ma evidentemente se  $p_c$  e il punto che gli corrisponde su  $\omega'$  non sono punti nei quali le linee coordinate  $u$  e  $v$ , o  $u'$  e  $v'$  abbiano qualche singolarità, i limiti degli integrali  $\int_{\varepsilon_c} di, \int_{\varepsilon'_c} di'$  non sono altro che gli angoli  $\varepsilon_c$  e  $\varepsilon'_c$  rispettivamente; quindi si può asserire che si avrà:

$$A_c = 1 - \frac{\varepsilon'_c}{\varepsilon_c}, \quad (20)$$

per tutti i punti singolari  $p_c$  del contorno di  $\omega$ , quando in essi l'angolo  $\varepsilon_c$  sia diverso da zero, cioè in essi non si abbiano delle cuspidi del contorno.

Similmente si troverebbe colle notazioni precedenti:

$$A'_c = \frac{\varepsilon_c}{\varepsilon'_c} - 1, \quad (21)$$

per ogni punto singolare  $p'_c$  del contorno di  $\omega'$  che non sia una cuspidi.

Osservando ora che in forza di questi risultati, estendendo la somma  $\sum A_c \varepsilon_c$  a tutti i punti singolari  $p_c$  del contorno di  $\omega$ , si ha:

$$\sum A_c \varepsilon_c = \sum \varepsilon_c - \sum \varepsilon'_c,$$

mentre, se  $\sum A_i \varepsilon_i$  è quella relativa ai punti singolari  $p_i$  interni ad  $\omega$ , si ha in questi punti  $\varepsilon_i = 2\pi$ , e a causa della (15) si ha anche:

$$\sum A_c \varepsilon_c + \sum A_i \varepsilon_i = \varpi,$$

si conclude che sarà:

$$2\pi \sum A_i = \varpi + \sum \varepsilon'_c - \sum \varepsilon_c, \quad (22)$$

ciò che ci mostra che quando non sia

$$\varpi = \int_s di - \int_{s'} di' = \sum \varepsilon_c - \sum \varepsilon'_c,$$

la funzione  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  dovrà necessariamente avere delle singolarità nell'interno di  $\omega$ , almeno quando si suppone che le linee  $u$  e  $v$  entro  $\omega$ , dopo di avere esclusi tutt'al più un numero finito di punti singolari, si comportino come le ordinarie coordinate cartesiane; e se la singolarità nell'interno proviene dalla presenza di un solo termine logaritmico  $A_i \log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$ , si avrà

$$2\pi A_i = \varpi + \sum \varepsilon'_c - \sum \varepsilon_c. \quad (23)$$

13. Si osservi poi che se nell'interno di  $\omega$  esistono in  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  delle singo-

larità quali sono quelle portate dai termini logaritmici  $A_i \log \frac{1}{r_i}$ , e  $p_i$  è uno di questi punti singolari corrispondente al termine  $A_i \log \frac{1}{r_i}$ , con ragionamenti simili a quelli fatti sopra per  $p_c$  si trova che, se in  $p_i$  non si hanno singolarità nelle coordinate  $u$  e  $v$ , sarà  $2\pi A_i = 2\pi - \lim_{\sigma'_i} \int d i'$ , ove l'integrale è esteso a

una curva  $\sigma'_i$  su  $\omega'$  che nella rappresentazione corrisponde a una piccola circonferenza geodetica  $\sigma_i$  descritta su  $\omega$  col centro in  $p_i$ . Però se questa linea  $\sigma'_i$  si chiudesse senza che nel suo interno vi fossero singolarità nelle coordinate  $u'$  e  $v'$  e senza avere singolarità nel suo percorso, si vede facilmente (BELTRAMI, Mem. cit.) che dovrebbe essere  $\int_{\sigma'_i} d i' = 2\pi$  e  $A_i = 0$ ; quindi evidente-

mente se non si ha  $\varpi = \sum \epsilon_c - \sum \epsilon'_c$ , ove le somme sono estese ai punti singolari del contorno, necessariamente la singolarità di  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  che devono trovarsi nell'interno, almeno quando si ammette che debbano essere portate da termini logaritmici  $A_i \log \frac{1}{r_i}$  e che non corrispondano ai punti nei quali le coordinate presentano qualche singolarità, non possono essere in punti staccati, ma dovranno trovarsi su linee o su porzioni di superficie, o dovranno corrispondere a delle sovrapposizioni ecc., come avviene per es. nella rappresentazione data da HARDINGS della sfera su di un piano, quando essa non si riduce alla proiezione stereografica polare.

Però è da notare che, siccome abbiamo ammesso che in un numero finito di punti entro  $\omega$  o  $\omega'$  le coordinate  $u$  e  $v$  o  $u'$  e  $v'$  e quindi  $\lambda$  o  $\lambda_1$  possano presentare qualche singolarità, potrà avvenire talvolta che le singolarità che si presentano nel rapporto  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$  nell'interno di  $\omega$  o di  $\omega'$  provengano appunto da singolarità che si hanno nelle coordinate adottate, e non siano già vere e proprie singolarità della rappresentazione.

Le stesse considerazioni poi valgono anche pei punti singolari  $p'_i$  che fossero su  $\omega'$ ; solo in questo caso dovrà essere:

$$2\pi \sum A'_i = \varpi_1 + \sum \epsilon'_c - \sum \epsilon_c, \quad (24)$$

e onde manchino le singolarità nell'interno si dovrà avere, come è naturale,  $\varpi_1 = \sum \epsilon_c - \sum \epsilon'_c$ .

Quando poi sia  $\varpi = \sum \varepsilon_c - \sum \varepsilon'_c$ , o  $\varpi_1 = \sum \varepsilon_c - \sum \varepsilon'_c$ , potrà ancora avvenire che la funzione  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  abbia qualche singolarità corrispondente ai soliti termini logaritmici nell'interno di  $\omega$  o di  $\omega'$ , però, dovendo essere  $\sum A_i = 0$  o  $\sum A'_i = 0$ , si può asserire che i punti  $p_i$  o  $p'_i$  che portano i termini logaritmici dovranno essere almeno due.

Infine notiamo che se il contorno di  $\omega$  ha anche qualche cuspidi, e nel punto  $p_{c_1}$  corrispondente  $\log \frac{m\lambda}{\lambda_1}$  presenta ancora una singolarità corrispondente al termine  $A_{c_1} \log \frac{1}{r_{c_1}}$ , colle considerazioni stesse che abbiamo fatto precedentemente, si trova che anche nel punto che corrisponde a  $p_{c_1}$  sul contorno di  $\omega'$  si deve avere una cuspidi, ma non si giunge però a determinare il valore di  $A_{c_1}$ .

14. Facciamo ora alcune applicazioni dei risultati che precedono.

1.° Vogliasi rappresentare su un piano  $S'$  la porzione  $\omega$  di un altro piano  $S$  compreso fra due cerchi concentrici di raggi  $R_1$  e  $R_2$  ( $R_2 < R_1$ ) per modo che il modulo di similitudine  $m$  abbia su questi cerchi dati valori  $m_1$  e  $m_2$  (costanti o variabili).

Prendendo sul piano  $S$  un sistema di coordinate polari  $(\rho, \theta)$  col polo nel centro comune dei due cerchi, si avrà

$$ds^2 = \rho^2 \left( \frac{d\theta^2}{\rho^2} + d\theta^2 \right), \quad \lambda^2 = \rho^2,$$

e prendendo su  $S'$  un sistema di coordinate cartesiane si avrà:

$$ds'^2 = dx^2 + dy^2, \quad \lambda_1^2 = 1,$$

talchè il rapporto  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$  in questo caso sarà  $m\rho$ .

Applicando quindi la formola (7) della mia Memoria: *Sulle funzioni di una variabile complessa* (Annali di Mat., t. 4) si troverà pel punto  $(\rho, \theta)$ :

$$\begin{aligned} \log m\rho = & \frac{1}{2\pi \log \frac{R_1}{R_2}} \left( \log R_1 \int_0^{2\pi} \log m_2 d\alpha - \log R_2 \int_0^{2\pi} \log m_1 d\alpha \right) + \\ & + \frac{\log \rho}{2\pi \log \frac{R_1}{R_2}} \int_0^{2\pi} \log \frac{m_1 R_1}{m_2 R_2} d\alpha + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{\rho^n}{R_1^{2n} - R_2^{2n}} \int_0^{2\pi} (R_1^n \log m_1 - R_2^n \log m_2) \cos n(\theta - \alpha) d\alpha + \\ & + \frac{1}{\pi} \sum_1^\infty \frac{R_1^n R_2^n}{\rho^n (R_1^{2n} - R_2^{2n})} \int_0^{2\pi} (R_1^n \log m_2 - R_2^n \log m_1) \cos n(\theta - \alpha) d\alpha \end{aligned}$$

e ora posto  $\int \frac{d\rho}{\rho} = \log \rho = u$ ,  $\theta = v$ , si ha colle notazioni del § 3 il valore di  $P$  espresso per  $u$  e  $v$ , e colla formola (4) dello stesso paragrafo si ottiene poi il valore di  $x + iy$  espresso per  $u \pm iv$  o per  $\log \rho \pm i\theta$ .

La rappresentazione però corrispondente alle formole che si ottengono può presentare delle singolarità dipendentemente dai valori dati  $m_1$  e  $m_2$  di  $m$ .

Quando poi in particolare si dia la condizione che  $m$  sia costante sui cerchi  $R_1$  e  $R_2$  senza essere  $m_1 R_1 = m_2 R_2$ , si trova subito:

$$\log m \rho = \frac{1}{\log \frac{R_1}{R_2}} \left( \log R_1 \log m_2 - \log R_2 \log m_1 + \log \frac{m_1 R_1}{m_2 R_2} \log \rho \right),$$

ovvero:

$$P = \log m \rho = \frac{1}{\log \frac{R_1}{R_2}} \left( \log R_1 \log m_2 - \log R_2 \log m_1 + \log \frac{m_1 R_1}{m_2 R_2} u \right),$$

e si ha perciò dalla (4):

$$x + iy = \frac{\log R_1 - \log R_2}{\log m_1 R_1 - \log m_2 R_2} e^{ic_1 + \frac{\log R_1 \log m_2 - \log R_2 \log m_1}{\log R_1 - \log R_2} + \frac{\log m_1 R_1 - \log m_2 R_2}{\log R_1 - \log R_2} (u \pm iv)} + p + iq,$$

ovvero:

$$x + iy = \frac{\log R_1 - \log R_2}{\log m_1 R_1 - \log m_2 R_2} e^{ic_1 + \frac{\log R_1 \log m_2 - \log R_2 \log m_1}{\log R_1 - \log R_2}} \cdot \rho^{\frac{\log m_1 R_1 - \log m_2 R_2}{\log R_1 - \log R_2}} e^{\pm i \frac{\log m_1 R_1 - \log m_2 R_2}{\log R_1 - \log R_2} \theta} + p + iq,$$

ove  $c_1$ ,  $p$  e  $q$  sono costanti reali.

E nel caso di  $m_1 R_1 = m_2 R_2$  si ha invece:

$$x + iy = e^{ic_1 + \frac{\log R_1 \log m_2 - \log R_2 \log m_1}{\log R_1 - \log R_2}} (\log \rho \pm i\theta) + p + iq.$$

2.° Si voglia ora la rappresentazione di una zona sferica  $\omega$  a due basi su un piano  $S'$  per modo che lungo le due basi il modulo di similitudine  $m$  abbia dati valori  $m_1$  e  $m_2$ .

Per questo si potrebbe rappresentare direttamente la zona sferica sul piano  $S'$ , ma è più comodo fare una rappresentazione ausiliare di  $\omega$  fra due cerchi di un piano ausiliario  $S_1$ , e poi passare da questo al piano dato  $S'$ .

Si osserverà perciò che se:

$$ds^2 = \operatorname{sen}^2 \beta \left( \frac{d\zeta^2}{\operatorname{sen}^2 \beta} + d\alpha^2 \right)$$

è l'elemento lineare della sfera, che per semplicità si suppone di raggio uguale

a uno, e le basi della zona sono i due cerchi  $\beta = \beta_1$ ,  $\beta = \beta_2$ , si avrà subito una rappresentazione conforme di questa zona nell'area  $\omega_1$  compresa fra due cerchi del piano il cui elemento lineare è:

$$ds_1^2 = \rho^2 \left( \frac{d\varphi^2}{\varphi^2} + d\theta^2 \right),$$

facendo:

$$\log \rho + i\theta = \int \frac{d\beta}{\sin \beta} + i\alpha = \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta + i\alpha,$$

e il modulo di similitudine  $\mu$  sarà  $\frac{\rho}{\sin \beta}$  ovvero  $\frac{1}{2 \cos^2 \frac{\beta}{2}}$ . Si farà poi una rap-

presentazione conforme di  $\omega_1$  sul piano  $S'$  colle formole precedenti per modo che il modulo di similitudine corrispondente  $\frac{ds'}{ds}$  sui due cerchi  $\beta_1$  e  $\beta_2$  sia  $2m_1 \cos^2 \frac{\beta_1}{2}$ , e  $2m_2 \cos^2 \frac{\beta_2}{2}$  (cioè  $\frac{m_1}{\mu_1}$ , e  $\frac{m_2}{\mu_2}$ ), e così il problema resterà evidentemente risoluto anche per la zona sferica a due basi.

3.° Supponiamo ora che su una superficie  $S$  una o più linee che tagliano sotto angoli costanti un sistema di linee isoterme  $v$  formino il contorno completo  $s$  di una porzione  $\omega$  di superficie nella quale ogni punto è individuato da un sistema di coordinate isoterme  $u$  e  $v$  che si comportano come se fossero coordinate cartesiane nel piano. Su un'altra superficie  $S'$  si immaginino pure delle linee  $s'$  che formino anch'esse il contorno completo di un area  $\omega'$  e taglino sotto angoli costanti le linee  $v'$  di un doppio sistema isoterma  $u'$  e  $v'$  analogo al precedente; e si cerchi di rappresentare  $\omega$  su  $\omega'$ .

Secondo quanto già osservammo al § 6, siccome i contorni  $s$  e  $s'$  si devono corrispondere nella rappresentazione di  $\omega$  su  $\omega'$ , se entro le aree  $\omega$  e  $\omega'$  il rapporto  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$  deve soddisfare alle solite condizioni di continuità ecc. ad ogni linea che tagli sotto angoli costanti le linee  $v$  su  $\omega$  corrisponderà una linea che taglia sotto angoli costanti le linee  $v'$  su  $\omega'$  e viceversa; talchè basta che questa costanza degli angoli colle linee  $v$  e  $v'$  si abbia per le linee del contorno perchè si abbia uguale corrispondenza nell'interno delle aree  $\omega$  e  $\omega'$ , quando la rappresentazione non deve presentare singolarità.

In questi casi poi, sempre secondo quanto fu detto al § 6, se la rappresentazione è possibile, sarà

$$u' + iv' = A(u + iv) + p + iq \quad (25)$$

la formola che stabilisce la corrispondenza fra i punti delle due superficie, con  $A$ ,  $p$  e  $q$  costanti arbitrarie delle quali le ultime due sono reali.

In particolare dunque, se sarà data una zona sferica a due basi  $\beta_1$  e  $\beta_2$  per la quale si abbia:

$$ds^2 = \operatorname{sen}^2 \beta \left( \frac{d\beta^2}{\operatorname{sen}^2 \beta} + d\alpha^2 \right),$$

e si vorrà rappresentarla su di un piano in un'area rettangolare di cui due lati opposti corrispondano alle due basi  $\beta_1$  e  $\beta_2$  della zona, e gli altri due corrispondano a un cerchio meridiano che può considerarsi come una linea doppia  $\alpha=0$ ,  $\alpha=2\pi$  limite della zona, si può dire che a tutti i meridiani e a tutti i paralleli della zona corrisponderanno linee rette, e saremo nel caso della rappresentazione di MERCATORE.

E infatti colla (25) si trova:

$$x + iy = (a + ib) \left( \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta + i\alpha \right),$$

trascurando le costanti  $p$  e  $q$ , e di qui si ha subito:

$$x = a \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \mp b\alpha, \quad y = b \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta \pm a\alpha,$$

o anche

$$ax + by = (a^2 + b^2) \log \operatorname{tg} \frac{1}{2} \beta, \quad ay - bx = \pm (a^2 + b^2) \alpha,$$

e queste sono appunto le formole della rappresentazione di MERCATORE.

4.° Cerchisi ora la rappresentazione di un'area piana  $\omega$  limitata da un contorno  $s$  su un cerchio  $\omega'$ ; ciò che costituisce il noto problema posto da RIEMANN.

Ammettendo che le linee o pezzi di linee che costituiscono il contorno  $s$  di  $\omega$  taglino sotto angoli costanti un sistema di linee isoterme  $v$  che insieme alle linee ortogonali  $u$  si prenderanno come coordinate su  $S$ , e ammettendo inoltre che queste linee  $u$  e  $v$ , tranne tutt'al più in un numero finito di punti, in tutto  $\omega$  si comportino come le ordinarie coordinate cartesiane, il problema per quanto fu detto al § 10, quando si ammette che le singolarità nel rapporto  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$ , se vi sono, siano del genere di quelle considerate nei paragrafi precedenti, si riduce in generale a determinare entro il cerchio  $\omega'$  una funzione  $\varphi$  che, oltre essere finita e continua insieme alle sue derivate entro il cerchio  $\omega$  soddisfa in esso alla equazione  $\Delta'_2 \varphi = f$ , ove  $f$  è una funzione nota, e al contorno

la sua derivata rispetto alla normale interna prende dati valori. Questo problema si sa completamente risolvere (\*); quindi il problema di RIEMANN, quando si tratta di un'area piana  $\omega$  il cui contorno  $s$  è formato da linee che tagliano sotto angoli costanti un sistema di linee isoterme  $v$  che insieme alle loro traiettorie ortogonali  $u$  non presentano mai singolarità in  $\omega$ , tranne tutt'al più in un numero finito di punti, si può sempre completamente risolvere colle sole considerazioni che precedono.

Applichiamo questo processo al caso considerato da CHRISTOFFEL, nel 1° volume di questi Annali, per la rappresentazione di un poligono piano e rettilineo e convesso  $\omega$  su un cerchio  $\omega'$ .

Prendiamo perciò su  $\omega$  un sistema di coordinate cartesiane  $x$  e  $y$ ; i lati del contorno poligonale  $s$  di  $\omega$  taglieranno sotto angoli costanti queste linee  $x$  e  $y$ , e quindi si potranno subito applicare le considerazioni che precedono.

Prendiamo poi sul piano del cerchio  $\omega'$  un sistema di coordinate cartesiane  $x'$ ,  $y'$ , si avrà:

$$ds'^2 = dx'^2 + dy'^2, \quad \lambda_1^2 = 1,$$

talchè, secondo le notazioni dei §§ 6 e seg., sulla circonferenza  $s'$  che forma il contorno di  $\omega'$  si avrà:

$$\frac{di'}{ds'} = \frac{1}{R} \quad \text{e} \quad \varpi_1 = - \int di' = -2\pi.$$

Siano ora  $a_1, a_2, \dots a_n$  i vertici del poligono nell'ordine in cui si succedono, e siano  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$  i loro angoli interni, e  $p'_1, p'_2, \dots p'_n$  i punti che loro devono corrispondere sulla circonferenza  $s'$ . In questi punti gli angoli  $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \dots \varepsilon'_n$  che secondo le notazioni del § 12 corrisponderanno a  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots \varepsilon_n$  saranno tutti uguali a  $\pi$ , e perciò in essi il rapporto  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$  che ora si riduce a  $m$  presenterà delle singolarità.

Ammettendo che queste singolarità siano di quelle considerate nei §§ 10 e seg., si dovrà avere intanto:

$$\log m = - \sum_1^n A'_n \log r'_n + \psi,$$

essendo  $\psi$  una funzione che conterrà i termini corrispondenti alle altre singo-

---

(\*) V. mia Mem.: *Sulle integraz. della equaz.  $\Delta^2 u = 0$*  in questi Annali, vol. 5, o l'altra: *Sopra una funzione analoga a quella di Green* negli Atti della Accademia dei Lincei, vol. 3, ser. II.

larità che dovessero ancora trovarsi in  $m$ , e essendo  $r'_h$  le distanze dei punti  $p'_h$  ai vari punti del cerchio, e  $A'_h$  quantità costanti.

Ma, per quanto si disse al § 12, si ha:

$$A'_h = \frac{\varepsilon_h}{\varepsilon'_h} - 1 = \frac{\varepsilon_h}{\pi} - 1,$$

e per il poligono convesso si ha anche:

$$\sum \varepsilon_h - \sum \varepsilon'_h = (n-2)\pi - n\pi = -2\pi = \varpi_1,$$

quindi per quanto si disse al § 12, soddisfacendo già i termini che figurano in  $\log m$  alla condizione  $\sum_1^n A'_h \varepsilon'_h = \varpi_1$ , non è necessario supporre che in  $\psi$  si trovino altre singolarità (\*), e si può cercare di risolvere il problema determinando (§ 10), se sarà possibile, la funzione  $\psi$  colla condizione di essere finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde in tutto il cerchio  $\omega'$ , e di soddisfare alla equazione  $\Delta'_s \psi = 0$ , e all'altra:

$$\frac{d\psi}{dn'} = -\frac{di'}{ds'} + \sum_1^n A'_h \frac{d \log r'_h}{dn'} = -\frac{1}{R} + \sum_1^n A'_h \frac{d \log r'_h}{dn'},$$

al contorno, essendo come si è detto:

$$A'_h = \frac{\varepsilon_h}{\pi} - 1, \quad \text{e} \quad \sum A'_h = -2.$$

Ma, introducendo un sistema di coordinate polari  $(\rho', \theta')$  col polo nel centro di  $\omega'$ , e indicando con  $\theta'_h$  l'angolo polare di  $p'_h$ , si ha:

$$r'^2_h = R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta' - \theta'_h);$$

quindi sarà:

$$\log r'_h = \frac{1}{2} \log [R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta' - \theta'_h)],$$

e:

$$\frac{d \log r'_h}{dn'} = -\left( \frac{d \log r'_h}{d\rho'} \right)_{\rho'=R} = -\left[ \frac{\rho' - R \cos(\theta' - \theta'_h)}{R^2 + \rho'^2 - 2R\rho' \cos(\theta' - \theta'_h)} \right]_{\rho'=R} = -\frac{1}{2R};$$

---

(\*) Se sul cerchio  $\omega'$  si fossero adottate le coordinate polari  $\rho', \theta'$ , queste avrebbero presentato una singolarità nel centro, e il rapporto  $\frac{m\lambda}{\lambda_1}$  si sarebbe allora ridotto a  $\frac{m}{\rho'}$ . Essendo poi allora  $di' = 0$ ,  $\omega_1 = 0$ , la condizione  $\sum \varepsilon_h - \sum \varepsilon'_h = \varpi_1$ , non sarebbe stata più soddisfatta, e ai termini  $A'_h \log r'_h$  si sarebbe dovuto aggiungere un termine corrispondente alla singolarità nel centro, che secondo le considerazioni dei §§ 12 e 13 sarebbe stato appunto  $-\log \rho'$ .



talchè osservando che  $\sum A'_h = -2$ , si conclude che la funzione  $\psi$  al contorno dovrà soddisfare alla condizione  $\frac{d\psi}{dn'} = 0$ , mentre nell'interno dovrà soddisfare all'altra  $\Delta'_2 \psi = 0$  e essere finita e continua insieme alle sue derivate prime e seconde.

Questo porta che  $\psi$  debba essere una costante  $-\log c$  in tutto il cerchio  $\omega'$ ; quindi si può dire intanto che dovrà essere:

$$\log m = -\sum_1^n A'_h \log r'_h - \log c = \log \frac{r'^{\frac{1-\varepsilon_1}{\pi}}_1 r'^{\frac{1-\varepsilon_2}{\pi}}_2 \dots r'^{\frac{1-\varepsilon_n}{\pi}}_n}{c}.$$

Ma, colle coordinate polari  $\rho'$ ,  $\theta'$ , osservando che:

$$r'^2_h = \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{i(\theta' - \theta'_h)}\right) \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{-i(\theta' - \theta'_h)}\right) R^2,$$

si trova che secondo le notazioni del § 3 si ha:

$$P = -\frac{1}{2} \log \frac{c}{R^2} + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{i(\theta' - \theta'_1)}\right)^{1-\frac{\varepsilon_1}{\pi}} \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{i(\theta' - \theta'_2)}\right)^{1-\frac{\varepsilon_2}{\pi}} \dots - \\ - \frac{1}{2} \log \frac{c}{R^2} + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{-i(\theta' - \theta'_1)}\right)^{1-\frac{\varepsilon_1}{\pi}} \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{-i(\theta' - \theta'_2)}\right)^{1-\frac{\varepsilon_2}{\pi}} \dots,$$

quindi, osservando che il secondo membro è già spezzato in due parti l'una delle quali è funzione di  $\rho' e^{i\theta'}$  o  $x' + iy'$ , e l'altra è funzione di  $\rho' e^{-i\theta'}$  o  $x' - iy'$ , e ritenendo che  $x \pm iy = \psi_1(x' + iy')$  sia la formola che stabilisce la corrispondenza fra i punti dei due piani, per quanto si disse al § 3 si troverà subito:

$$-\log \sqrt{\psi'_1} = -\frac{1}{2} \log \frac{c}{R^2} + \frac{1}{2} \log \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{i(\theta' - \theta'_1)}\right)^{1-\frac{\varepsilon_1}{\pi}} \left(1 - \frac{\rho'}{R} e^{i(\theta' - \theta'_2)}\right)^{1-\frac{\varepsilon_2}{\pi}} \dots - i \frac{c_1}{2},$$

con  $c_1$  costante arbitraria reale; e ora, indicando con  $z'$  la variabile complessa  $\rho' e^{i\theta'}$  o  $x' + iy'$  e con  $z'_h$  i valori di questa variabile relativi ai punti  $p'_h$  che corrispondono ai vertici del poligono, si avrà di qui:

$$\psi' = \frac{c}{R^2} e^{ic_1} \left(1 - \frac{z'}{z'_1}\right)^{\frac{\varepsilon_1}{\pi}-1} \left(1 - \frac{z'}{z'_2}\right)^{\frac{\varepsilon_2}{\pi}-1} \dots \left(1 - \frac{z'}{z'_n}\right)^{\frac{\varepsilon_n}{\pi}-1},$$

e quindi; integrando e indicando con  $c'$  un'altra costante arbitraria reale, e con  $(x_0, y_0)$  le coordinate del punto del poligono cui deve corrispondere il

centro del cerchio, si otterrà infine:

$$x + iy = ce^{ic'} \int_0^z (z' - z'_1)^{\frac{\varepsilon_1}{\pi} - 1} (z' - z'_2)^{\frac{\varepsilon_2}{\pi} - 1} \dots (z' - z'_n)^{\frac{\varepsilon_n}{\pi} - 1} dz' + x_0 + iy_0,$$

per la formola che dà la rappresentazione richiesta.

Questa formola, ponendo  $z' = \frac{Z - Z_0}{Z - Z'_0}$  per ridurre il cerchio ad un mezzo piano, diviene precisamente quella data da CHRISTOFFEL per la rappresentazione di un poligono su un mezzo piano.

Tornando poi colla stessa formola a determinare il valore di  $\log m$ , si trova naturalmente che sulla circonferenza del cerchio di raggio  $R$  (su cui si trovano i punti  $z'_1, z'_2, \dots, z'_n$ ) si ha  $\frac{d \log m}{dn'} = -\frac{di'}{ds} = -\frac{1}{R}$ , e questa a causa delle (9) ci assicura che la formola precedente trasforma sempre necessariamente un poligono in un cerchio di raggio  $R$ . Onde però il poligono trasformato sia quello dato, conviene determinare convenientemente le costanti  $z'_1, z'_2, \dots, z'_n$ .

Pisa, dicembre 1876.