Über die Riemannsche Funktionalgleichung der ζ-Funktion.

(Zweite Mitteilung).[1])

Von

Hans Hamburger in Berlin.

---

1. In der vorliegenden Mitteilung werden einige allgemeine Sätze bewiesen, die sich an die Problemstellung der ersten Mitteilung gleichen Titels anschließen. Die Bedeutung dieser Sätze, die weniger ein selbständiges Interesse zu verdienen scheinen, wird sich erst in einer weiteren dritten Mitteilung ergeben, welche sich mit den Dirichletschen L-Reihen beschäftigen wird.

Durch das Studium dieser Reihen wird man nämlich auf die vier Funktionalgleichungen

$$\text{(I)} \qquad f(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} = f(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{s-1}{2}},$$

$$\text{(I}'\text{)} \qquad f(s)\,\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} = -f(1-s)\,\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{s-1}{2}},$$

$$\text{(II)} \qquad f(s)\,\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} = f(1-s)\,\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{s-1}{2}},$$

$$\text{(II}'\text{)} \qquad f(s)\,\Gamma\left(\frac{s-1}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{-\frac{s}{2}} = -f(1-s)\,\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)\left(\frac{\pi}{k}\right)^{\frac{s-1}{2}}$$

geführt, und auf die Resultate dieser zweiten Mitteilung gestützt, werde ich dann in der dritten Mitteilung beweisen, daß, wenn k eine ganze positive Zahl bezeichnet, k und nur k voneinander linear unabhängige

---

[1]) Vgl. die erste Mitteilung gleichen Titels des Verfassers (im folgenden kurz mit I. Mtlg. zitiert), Math. Zeitschr., **10** (1921), S. 240–254 und die Note des Verfassers in den Sitzber. der Berl. Math. Ges., XX. Jahrgang (1920/21), S. 4–9, insbes. S. 7–9.

Dirichletsche Reihen $f(s)$ existieren, die einer der vier Funktionalgleichungen (I), (I′), (II), (II′) genügen[2]).

Ist hingegen k eine gebrochene oder irrationale positive Zahl, so haben die vier Funktionalgleichungen überhaupt keine Lösung $f(s)$, die gleichzeitig eine Dirichletsche Reihe ist und noch einige weitere allgemeine Bedingungen (die Bedingungen **a)**, **b)** und **c)** von Satz 3 dieser Mitteilung) erfüllt.

Mit Hilfe der L-Reihen gelingt es schließlich, ein vollständiges System von k linear unabhängigen Lösungen von (I), (I′), (II), (II′) explizit anzugeben.

2. Im § 1 der vorliegenden Mitteilung sind die Sätze formuliert, soweit sie mit den Funktionalgleichungen (I) und (I′) zusammenhängen. Aus diesen Sätzen ergibt sich unmittelbar eine Folgerung, die das Resultat der ersten Mitteilung über die ζ-Funktion verallgemeinert.

In den §§ 2 und 3 finden sich die Beweise der Sätze 3 und 4 des § 1.

Der § 4 endlich enthält die entsprechenden Betrachtungen über Lösungen einer Funktionalgleichung, die mit (II) und (II′) zusammenhängt.

§ 1.

Formulierung der Sätze; Anwendung auf die ζ-Funktion.

1. Satz 3. *Es sei $f(s)$ eine für alle Werte der komplexen Veränderlichen $s = \sigma + it$ definierte analytische Funktion mit den Eigenschaften:*

a) *$f(s)$ besitze im Endlichen höchstens endlich viele Pole beliebiger Ordnung.*

b) *Es mögen zwei positive Konstanten r und γ existieren, derart, daß für $|s| \geqq r$ die Funktion $f(s)$ im Endlichen überall regulär ist und sich dort durch die Beziehung*

$$|f(s)| \leqq e^{|s|^{\gamma}}$$

abschätzen läßt.

c) *Für $\sigma > 1$ sei $f(s)$ durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe*

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s} \tag{1}$$

definiert.

---

[2]) Vgl. die Note des Verfassers: Über die Funktionalgleichung der L-Reihen, Sitzber. der Berl. Math. Ges., XX. Jahrgang (1920/21), S. 10–13.

d″) *Setzt man*

$$g(1-s)=f(s)\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\pi^{-s+\frac{1}{2}}, \tag{2}$$

so lasse sich $g(1-s)$ *für* $\sigma<-\alpha$, *unter* α *eine endliche positive Zahl verstanden, durch eine absolut konvergente Dirichletsche Reihe allgemeiner Gestalt*

$$g(1-s)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{b_n}{l_n^{1-s}} \qquad (0<l_1<l_2<\ldots\to\infty) \tag{3}$$

darstellen.

Dann muß die Dirichletsche Reihe (3) *den Bedingungen genügen:*

e) *Sind*

$$l_1<l_2<\ldots<l_k=1 \text{ [3]}$$

sämtliche der Zahlen l_n, *die* $\leqq 1$ *sind, so ist, wenn* $n=\mu k+\varkappa$ $(\mu\geqq 1,\ 1\leqq\varkappa\leqq k)$ *gesetzt wird,*

$$l_n=\mu+l_\varkappa,\quad b_n=b_\varkappa,$$

mithin ist die Dirichletsche Reihe (3) *von der Gestalt*

$$g(1-s)=\sum_{\mu=0}^{\infty}\sum_{\varkappa=1}^{k}\frac{b_\varkappa}{(\mu+l_\varkappa)^{1-s}}. \tag{4}$$

f) *Es ist für* $1\leqq\varkappa\leqq k-1$

$$l_{k-\varkappa}=1-l_\varkappa,\quad b_{k-\varkappa}=b_\varkappa.$$

g) *Endlich sind die Koeffizienten* a_n *der Dirichletschen Reihe* (1) *mit den* $b_\varkappa$ *und* $l_\varkappa$ *durch die Beziehungen*

$$a_n=\sum_{\varkappa=1}^{k}b_\varkappa\cos 2\pi n l_\varkappa \tag{5}$$

verknüpft.

2. Es sei umgekehrt eine Dirichletsche Reihe der Gestalt (4) vorgelegt. Diese Reihe ist immer für $\sigma<0$ absolut konvergent, die durch sie dargestellte Funktion $g(1-s)$ läßt sich (wie bereits bekannt ist[4])

[3]) Es wird in dieser Arbeit ein für allemal $l_k=1$ gesetzt. Sollte zunächst unter den Größen l_n die Zahl 1 nicht vorkommen, so werden der einheitlichen Schreibweise wegen die formalen Glieder $\frac{b_k}{(1-m)^{1-s}}$ $(m=0,1,\ldots\to\infty,\ b_k=0)$ der Dirichletschen Reihe $g(1-s)$ hinzugefügt.

[4]) H. Kinkelin, Allgemeine Theorie der harmonischen Reihen mit Anwendung auf die Zahlentheorie. Programm der Gewerbeschule Basel (1861/62), S. 1–32. Vgl. auch E. Landau, Handbuch der Lehre von der Verteilung der Primzahlen, Leipzig.

in der ganzen komplexen s-Ebene analytisch fortsetzen und ist überall im Endlichen regulär, mit Ausnahme höchstens der Stelle $s = 0$, wo $g(1-s)$ einen Pol erster Ordnung besitzen kann.

Bildet man andererseits mit den Koeffizienten a_n der Formeln (5) die Reihe

$$f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s},$$

so ist sie offenbar wegen $|a_n| \leqq \sum_{\varkappa=1}^{k} |b_\varkappa|$ für $\sigma > 1$ absolut konvergent. Nunmehr behaupten wir

Satz 4. *Es sei die Funktion $g(1-s)$ für $\sigma < 0$ durch eine Dirichletsche Reihe vom Typus (4) definiert, die außer* **e)** *auch die Bedingungen* **f)** *erfüllt, und es sei andererseits $f(s)$ eine Dirichletsche Reihe der Gestalt (1), deren Koeffizienten a_n mit den $b_\varkappa$ und $l_\varkappa$ von $g(1-s)$ durch die Beziehungen (5) zusammenhängen. Dann besteht zwischen den Funktionen $f(s)$ und $g(1-s)$ die Funktionalgleichung (2).*

3. Aus Satz 3 ergibt sich eine wichtige Folgerung für die Riemannsche ζ-Funktion selbst.

Man setze nämlich in der Dirichletschen Reihe (3) alle $l_n \geqq 1$ voraus, es sei mithin $g(1-s)$ eine Dirichletsche Reihe des oft untersuchten Typus

$$g(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} b_n e^{-\lambda_n (1-s)} \qquad (\lambda_n = \log l_n \geqq 0). \tag{6}$$

Besteht nun zwischen $g(1-s)$ und einer Funktion $f(s)$, die den Voraussetzungen **a)**, **b)** und **c)** genügt, die Beziehung (2), so ist nach Satz 3 wegen **e)** und **g)**

$$l_1 = 1, \quad l_2 = 2, \ldots, l_n = n, \ldots$$

$$b_n = b_1, \quad a_n = b_1,$$

mithin ist

$$g(1-s) = b_1 \zeta(1-s), \quad f(s) = b_1 \zeta(s).$$

Ist also $g(1-s)$ eine Dirichletsche Reihe vom Typus (6), so ist bis auf einen konstanten Faktor wieder die ζ-Funktion die einzige, die den Bedingungen **a)**, **b)**, **c)** *und der Funktionalgleichung (2) genügt.*

---

1 (1909), S. 475–478. Im folgenden wird übrigens die Kenntnis dieser Eigenschaft der Reihe (4) nicht vorausgesetzt, sondern ein neuer Beweis für ihre Fortsetzbarkeit angegeben.

§ 2.

Notwendige Bedingungen für das Bestehen der Funktionalgleichung; Beweis von Satz 3.

1. Setzt man

$$G(s+2)=f(s+2)\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\pi^{-s+\frac{1}{2}},$$

so ist nach Satz 2 der 1. Mtlg. mit Rücksicht auf die Voraussetzung **c)**

$$G(s+2)=\int_0^\infty x^{s-1}\varphi(x)\,dx,$$

für $-1<\sigma<0$, wobei

$$\varphi(x)=2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n^2}(\cos 2\pi n x-1) \tag{7}$$

gesetzt ist.

Substituiert man wieder s für $s+2$, so erhält man nach einfachen Umformungen (vgl. Formel (17) des § 2 der 1. Mtlg.)

$$G(s)=\frac{-4\pi^2}{(s-2)(s-1)}f(s)\frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}\pi^{-s+\frac{1}{2}}$$

$$=\frac{-4\pi^2}{(s-2)(s-1)}g(1-s)=\int_0^\infty x^{s-3}\varphi(x)\,dx;$$

für $1<\sigma<2$, mithin

$$g(1-s)=-(s-2)(s-1)\int_0^\infty x^{s-3}\frac{\varphi(x)}{4\pi^2}dx,$$

unter $g(1-s)$ die durch die Beziehung (2) definierte Funktion verstanden.

Außerdem ergibt sich aus Hilfssatz 1 und 2 der 1. Mtlg. (vgl. Formel (19) der 1. Mtlg.)

$$\frac{\varphi(x)}{4\pi^2}=\frac{-1}{2\pi i}\int_{\frac{5}{4}-i\infty}^{\frac{5}{4}+i\infty}x^{-s+2}\frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)}ds. \tag{7'}$$

Da die Dirichletsche Reihe (3) in der Halebene $\sigma<-\alpha$ absolut konvergent vorausgesetzt wurde (vgl. Bedingung **d″**)), so bleibt $g(1-s)$ in jedem Streifen $\sigma_0\leqq\sigma\leqq-\alpha-\delta$ unterhalb einer festen von s unabhängigen Schranke. Aus Hilfssatz 1 der 1. Mtlg. ergibt sich daher ebenso wie beim Beweise von Satz 1 der 1. Mtlg. die für $\sigma<-\alpha$ absolut konvergente Integraldarstellung:

$$g(1-s)=(s-2)(s-1)\int_0^\infty x^{s-3}\psi(x)\,dx, \tag{8}$$

wobei

$$\psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\beta-\infty i}^{-\beta+\infty i} x^{-s+2}\frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)}\,ds \qquad (\beta > \alpha)$$

zu setzen ist. Indem man dieses Integral vermittelst des Residuenkalküls mit dem Integral (7') in Verbindung bringt (vgl. dieselbe Überlegung beim Beweise von Satz 1 der 1. Mtlg.), schließt man:

$$\psi(x) = R(x) - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2}. \tag{9}$$

Hierbei bedeutet $R(x)$ das Residuum der Funktion

$$-x^{-s+2}\frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)} \tag{10}$$

im Streifen $-\beta \leqq \sigma \leqq \frac{5}{4}$; $R(x)$ ist also, da nach Voraussetzung **a)** $f(s)$ und somit auch die Funktion (10) dort nur endlich viele Pole enthält, von der Gestalt

$$R(x) = \sum_{\nu=1}^{m} x^{-s_\nu+2}\left(A_{q_\nu-1}^{(\nu)}\log^{q_\nu-1}x + \ldots - A_1^{(\nu)}\log x + A_0^{(\nu)}\right), \tag{11}$$

wenn mit $s_1, \ldots, s_\nu, \ldots, s_m$ die Pole der Funktion (10) im Streifen $-\beta \leqq \sigma \leqq \frac{5}{4}$ und mit $q_1, \ldots, q_\nu, \ldots, q_m$ ihre Ordnungszahlen bezeichnet werden. Demnach ist $R(x)$ eine für positive Werte von x reguläre analytische Funktion.

2. Nunmehr suchen wir für $g(1-s)$ eine zweite im Bereich $\sigma < -\alpha$ absolut konvergente Integraldarstellung der Form (8), indem wir die nach Voraussetzung **d'')** für $\sigma < -\alpha$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe (3) umformen.

Es bezeichne $B(x)$ eine Treppenfunktion, die durch die Beziehungen

$$\begin{array}{ll} B(x) = 0 & \text{für} \quad 0 \leqq x < l_1, \\ B(x) = b_1 & \text{für} \quad l_1 \leqq x < l_2, \\ \cdots\cdots\cdots & \\ B(x) = b_1 + b_2 + \ldots + b_m & \text{für} \quad l_m \leqq x < l_{m+1} \end{array}$$

definiert sei. Dann leitet man aus der Dirichletschen Reihe (3) durch partielle Summation ebenso wie beim Beweise von Satz 1 das für $\sigma < -\alpha$ absolut konvergente Integral

$$g(1-s) = -(s-1)\int_0^\infty x^{s-2}B(x)\,dx$$

ab. Setzt man

$$B_1(x) = \int_0^x B(u)\,du,$$

das heißt

$$
\begin{aligned}
&= 0 && (\text{für } 0 \leqq x < l_1), \\
(12) \qquad &= \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu (x - l_\nu) && (\text{für } l_m \leqq x < l_{m+1}),
\end{aligned}
$$

so erhält man nach nochmaliger partieller Integration für $\sigma < -\alpha$

$$
(13) \qquad g(1-s) = (s-2)(s-1)\int_0^\infty x^{s-3} B_1(x)\,dx.
$$

Vergleicht man diese Integraldarstellung mit (8), so ergibt sich in Verbindung mit (9) nach Hilfssatz 2 (1. Mtlg.)

$$
(14) \qquad B_1(x) = \psi(x) = R(x) - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2}.
$$

3. Da $\varphi(x)$ nach Formel (7) eine gewöhnliche Kosinusreihe ist, so hat $\varphi(x)$ die beiden Eigenschaften

$$
(15) \qquad \varphi(x+1) = \varphi(x), \quad \varphi(1-x) = \varphi(x).
$$

Demnach ist für $x \geqq 0$

$$
B_1(x+1) - B_1(x) = R(x+1) - R(x).
$$

Andererseits ist wegen (12), wenn außer der ganzen Zahl m noch eine ganze Zahl k durch die Beziehungen

$$
(16) \qquad l_m \leqq x < l_{m+1}, \quad l_{m+k} \leqq x+1 < l_{m+k+1}
$$

definiert wird:

$$
(17) \qquad B_1(x+1) - B_1(x) = x\sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu + \sum_{\nu=1}^{m+k} b_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu l_\nu
$$

(m und k hängen also zunächst beide von x ab).

Die Kurve, die die Summe rechter Hand als Funktion von x darstellt, ist im allgemeinen (vgl. Formel (31) der 1. Mtlg.) ein gebrochener geradliniger Polygonzug, dessen Ecken in den Punkten mit den Abszissen l_m und $l_m - 1$ ($m = 1, 2, \ldots \to \infty$) liegen. Andererseits ist $R(x+1) - R(x)$ wegen (11) eine für positive x reguläre analytische Funktion, besitzt mithin für $x > 0$ einen stetigen Differentialquotienten erster Ordnung. Daraus folgt aber, daß $B_1(x+1) - B_1(x)$ eine gewöhnliche Linearfunktion ist, also:

$$
\begin{aligned}
(18) \qquad & B_1(x+1) - B_1(x) = R(x+1) - R(x) = ax + b, \\
& R(x) = \frac{a}{2}x^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)x + p(x),
\end{aligned}
$$

wo $p(x)$ eine periodische Funktion mit der Periode 1 bedeutet. Aus Formel (11) ersieht man aber, daß $p(x)$ nur gleich einer Konstanten sein kann; da aber wegen (7), (12) und (14) $R(x)$ für $x = 0$ verschwindet, so ist sogar $p(x) = 0$, folglich

$$R(x) = \frac{a}{2} x^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right) x \quad (19)$$ [5].

Aus (17) und (18) folgt ferner

$$\sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu = a, \quad (20)$$

$$\sum_{\nu=1}^{m+k} b_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu l_\nu = b, \quad (21)$$

wo unter m und k wieder die durch die Beziehung (16) definierten ganzen Zahlen zu verstehen sind.

4. Nunmehr soll aus (20) geschlossen werden, daß die b_n und l_n den Bedingungen **e)** genügen.

Und in der Tat durchläuft der Punkt x von rechts nach links das Intervall $l_m + \varepsilon \geqq x \geqq l_m - \varepsilon \quad (l_{m+1} > l_m + \varepsilon)$, so wird nach den Relationen (16) die untere Summationsgrenze in $\sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu$ sich um 1 erniedrigen, wenn x durch den Punkt $x = l_m$ hindurchgeht; zu dieser Summe wird demnach der Summand b_m hinzukommen. Soll sie trotzdem gleich a bleiben, so muß sich zum Ausgleich die obere Summationsgrenze auch um 1 erniedrigen, das heißt wenn x durch den Punkt l_m hindurchgeht, so muß wegen (16) auch $x + 1$ durch l_{m+k} hindurchgehen, mithin

$$l_{m+k} = l_m + 1, \quad (22)$$

und somit wird die Summe um b_{m+k} vermindert werden. Da sie aber um den gleichen Summand vermindert wird, der durch die Abnahme der unteren Summationsgrenze hinzugekommen ist, so folgt

$$b_{m+k} = b_m. \quad (23)$$

Andererseits gilt umgekehrt: Ist $l_p > 1$, so ist auch $l_p - 1$ eine der Zahlen l_n, die mit l_m bezeichnet werde, und es ergibt sich $b_m = b_p$. Dies zeigt man, indem man den Punkt $x + 1$ das Intervall $l_p + \varepsilon \geqq x \geqq l_p - \varepsilon$

---

[5]) Indem man diesen Ausdruck für das Residuum $R(x)$ mit (11) vergleicht, erkennt man bereits, daß die Funktion (10) in dem Bereiche $\sigma \leq \frac{5}{4}$ höchstens $\left(\text{das heißt im Falle } a \neq 0,\ b - \frac{a}{2} \neq 0\right)$ in den Punkten $s = 0$ und $s = 1$ Pole erster Ordnung hat. Demnach besitzt $f(s)$ (vgl. Formel (2)) höchstens im Punkte $s = 1$ einen Pol erster Ordnung. Doch wird diese Eigenschaft von $f(s)$ im folgenden nicht benutzt.

von rechts nach links durchlaufen läßt und bemerkt, daß, wenn der Punkt $x+1$ den Punkt l_p passiert, auch x durch den Punkt l_m hindurchgehen muß.

Dann folgt aber unmittelbar, daß diejenigen k Zahlen $l_\varkappa$, die $\leqq 1$ sind, wegen (22) die Zahlen l_n bereits eindeutig bestimmen, daß daher die Zahlen l_n und wegen (23) auch die Koeffizienten b_n die Bedingungen **e)** erfüllen. Mithin ergibt sich k als feste Zahl, die nicht mehr von x (vgl. Formel (16)) abhängt.

Es ergibt sich ferner aus (20) und (21), indem man $m=0$, d. h. $0<x<l_1$ wählt,

$$\sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa = a, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa(1-l_\varkappa) = b. \tag{24}$$

5. Um zu zeigen, daß zwischen den $l_\varkappa$ und $b_\varkappa$ auch die unter **f)** behaupteten Beziehungen bestehen, benutzen wir die zweite der beiden Eigenschaften (15) der Kosinusreihe (7): $\varphi(x)=\varphi(1-x)$ für $0<x<1$

Aus ihr folgt um so mehr für $0<x<\frac{1}{2}$

$$B_1(1-x)-B_1(x)=R(1-x)-R(x),$$

oder indem man die Formeln (12) und (19) benutzt und die ganzen Zahlen ξ und m, die von x abhängen, durch die Beziehungen

$$l_m \leqq x < l_{m+1}, \qquad l_{\xi-1} < 1-x \leqq l_\xi$$

definiert,

$$\begin{aligned} b(1-2x) &= \sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu((1-x)-l_\nu) - \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu(x-l_\nu) \\ &= -\Big(\sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu\Big)x + \sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu l_\nu, \end{aligned} \tag{25}$$

folglich

$$\sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu + \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu = 2b, \qquad \sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu l_\nu = b. \tag{26}$$

Aus (26) lassen sich nunmehr die Beziehungen **f)** leicht ableiten: Denn durchläuft x von rechts nach links das Intervall $l_m+\varepsilon \geqq x \geqq l_m-\varepsilon$, so nimmt $\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu$ um b_m ab, wenn x den Punkt l_m passiert. Soll also die Summe (26) konstant bleiben, so muß $1-x$ durch einen Punkt l_ξ hindurchgehen, wenn x den Punkt l_m passiert, und es muß $b_m=b_\xi$ sein, das heißt zu jeder Zahl $l_m<\frac{1}{2}$ gehört eine Zahl $l_\xi=1-l_m>\frac{1}{2}$.

Indem man $1-x$ das Intervall $l_\xi-\varepsilon \leqq x \leqq l_\xi+\varepsilon$ durchlaufen läßt, zeigt man, daß sich umgekehrt jeder Zahl $l_\xi>\frac{1}{2}$ eine Zahl $l_m=1-l_\xi<\frac{1}{2}$ zuordnen läßt, deren zugehörige Koeffizienten b_ξ bzw. b_m einander gleich sind.

Mithin folgt aber, wenn wieder $l_k = 1$ gesetzt wird (vgl. Anm. [3])):

I. Im Falle $k = 2q + 1$

$$l_\varkappa < \tfrac{1}{2} \quad \text{für} \quad 1 \leqq \varkappa \leqq q, \qquad \tfrac{1}{2} < l_\varkappa < 1 \quad \text{für} \quad q + 1 \leqq \varkappa \leqq 2q = k - 1.$$

II. Im Falle $k = 2q + 2$

$$l_{q+1} = \tfrac{1}{2}, \quad l_\varkappa < \tfrac{1}{2} \text{ für } 1 \leqq \varkappa \leqq q, \quad \tfrac{1}{2} < l_\varkappa < 1 \text{ für } q + 2 \leqq \varkappa \leqq 2q + 1 = k - 1,$$

und in beiden Fällen

$$l_\varkappa = 1 - l_{k-\varkappa}, \qquad b_\varkappa = b_{k-\varkappa} \qquad \text{für } 1 \leqq \varkappa \leqq k - 1.$$

Damit sind die Behauptungen **f)** bewiesen.

6. Um endlich nachzuweisen, daß die Koeffizienten a_n mit den $b_\varkappa$ und $l_\varkappa$ durch die Beziehungen (5) zusammenhängen, berücksichtigen wir, daß aus den Beziehungen (7) und (14), das heißt aus

$$\varphi(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} (\cos 2\pi n x - 1) = 4\pi^2 (R(x) - B_1(x)),$$

sich die Größen $\frac{2 a_n}{n^2}$ als Fourierkoeffizienten der Entwicklung von $4\pi (R(x) - B_1(x))$ in eine Kosinusreihe ergeben; man erhält daher

$$(27) \qquad a_n = 4\pi^2 n^2 \int_0^1 (R(x) - B_1(x)) \cos 2\pi n x \, dx \qquad (n = 1, 2, \ldots \to \infty).$$

Es ist nun aber wegen (19)

$$(28) \qquad \int_0^1 R(x) \cos 2\pi n x \, dx = \int_0^1 \left(\frac{a}{2} x^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right) x\right) \cos 2\pi n x \, dx = \frac{a}{4\pi^2 n^2}.$$

Andererseits ist, wenn man für $B_1(x)$ die Beziehung (12) benutzt und vorübergehend

$$\beta_0 = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu = \beta_m; \qquad \gamma_0 = 0, \qquad \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu l_\nu = \gamma_m$$

setzt,

$$\int_0^1 B_1(x) \cos 2\pi n x \, dx$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \left(\beta_\varkappa \int_{l_\varkappa}^{l_{\varkappa+1}} x \cos 2\pi n x \, dx - \gamma_\varkappa \int_{l_\varkappa}^{l_{\varkappa+1}} \cos 2\pi n x \, dx\right)$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \left\{ \beta_\varkappa \left[\frac{l_{\varkappa+1} \sin 2\pi n l_{\varkappa+1} - l_\varkappa \sin 2\pi n l_\varkappa}{2\pi n} + \frac{\cos 2\pi n l_{\varkappa+1} - \cos 2\pi n l_\varkappa}{4\pi^2 n^2}\right] \right.$$
$$\left. - \gamma_\varkappa \frac{\sin 2\pi n l_{\varkappa+1} - \sin 2\pi n l_\varkappa}{2\pi n} \right\}$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{k-1} \left(l_\varkappa(\beta_{\varkappa-1}-\beta_\varkappa) - (\gamma_{\varkappa-1}-\gamma_\varkappa)\right)\frac{\sin 2\pi n l_\varkappa}{2\pi n}$$

$$+ (\beta_{k-1} l_k - \gamma_{k-1})\frac{\sin 2\pi n l_k}{2\pi n}$$

$$+ \sum_{\varkappa=1}^{k-1} (\beta_{\varkappa-1}-\beta_\varkappa)\frac{\cos 2\pi n l_\varkappa}{4\pi^2 n^2} + \beta_{k-1}\frac{\cos 2\pi n l_k}{4\pi^2 n^2}$$

$$(29) \qquad = \frac{-1}{4\pi^2 n^2}\sum_{\varkappa=1}^{k-1} b_\varkappa \cos 2\pi n l_\varkappa + \frac{\beta_{k-1}}{4\pi^2 n^2}$$

(da $l_m(\beta_{m-1}-\beta_m) = -l_m b_m = \gamma_{m-1}-\gamma_m$, $l_k = 1$ ist). Mithin ergibt sich in Verbindung mit (27), (28) und (29)

$$a_n = \sum_{\varkappa=1}^{k-1} b_\varkappa \cos 2\pi n l_\varkappa + a - \sum_{\varkappa=1}^{k-1} b_\varkappa$$

$$= \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa \cos 2\pi n l_\varkappa$$

wegen (24).

Damit sind alle Behauptungen des Satzes 3 vollständig bewiesen.

§ 3.

Hinreichende Bedingungen für das Bestehen der Funktionalgleichung; Beweis von Satz 4.

1. Es sei $g(1-s)$ eine Dirichletsche Reihe vom Typus (4), die außer **e)** auch den Bedingungen **f)** genügt.

Wir gehen von der mindestens in der Halbebene $\sigma < -\alpha$ absolut konvergenten Integraldarstellung (13) für $g(1-s)$ aus, die man aus der Dirichletschen Reihe (3) ableitet, und verstehen unter $B_1(x)$ wieder die in Formel (12) definierte Funktion. Endlich setze man wieder

$$(30) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa = a, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa(1-l_\varkappa) = b$$

und bilde die Funktion

$$(31) \qquad \chi(x) = B_1(x) - \frac{a}{2}x^2 - \left(b - \frac{a}{2}\right)x.$$

Dann behaupten wir erstens:

$$(32) \qquad \chi(x) = \chi(x+1) \qquad \text{für } x > 0.$$

Man erhält nämlich in Verbindung mit (17)

$$\chi(x+1)-\chi(x)=B_1(x+1)-B_1(x)-ax-b$$

$$(33)\qquad =x\sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu+\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu+\sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu(1-l_\nu)-ax-b,$$

wobei wegen der Voraussetzung e) aus $l_m \leqq x < l_{m+1}$

$$l_{m+k}\leqq x+1<l_{m+k+1}$$

folgt. Es sei $m=\mu k+\varkappa$, dann ist wegen (23) und (30) einerseits

$$(34)\qquad \sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu=\sum_{\nu=\varkappa+1}^{k+\varkappa} b_\nu=\sum_{\nu=\varkappa+1}^{k} b_\nu+\sum_{\nu=1}^{\varkappa} b_\nu=a,$$

andererseits

$$\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu=\sum_{\varrho=1}^{\mu}\sum_{\iota=1}^{k} b_\iota+\sum_{\iota=1}^{\varkappa} b_\iota=\mu a+\sum_{\iota=1}^{\varkappa} b_\iota,$$

$$\sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu(1-l_\nu)=\sum_{\nu=\varkappa+1}^{k+\varkappa} b_\nu(1-\mu-l_\nu)$$

$$=-\mu a+\sum_{\nu=\varkappa+1}^{k} b_\nu(1-l_\nu)+\sum_{\nu=1}^{\varkappa} b_\nu(1-1-l_\nu)$$

$$=-\mu a-\sum_{\nu=1}^{\varkappa} b_\nu-\sum_{\nu=1}^{k} b_\nu(1-l_\nu).$$

Das ergibt aber wegen (30)

$$(35)\qquad \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu+\sum_{\nu=m+1}^{m+k} b_\nu(1-l_\nu)=\sum_{\nu=1}^{k} b_\nu(1-l_\nu)=b.$$

Aus (33), (34) und (35) folgt die Behauptung (32).

2. Wir behaupten **zweitens:**

$$(36)\qquad \chi(x)=\chi(1-x)\qquad \text{für } 0<x<1.$$

Offenbar genügt es, diese Behauptung für $0<x<\frac{1}{2}$ zu beweisen. Es ergibt sich in Verbindung mit (25)

$$\chi(1-x)-\chi(x)=B_1(1-x)-B_1(x)-b(1-2x)$$

$$(37)\qquad =-\Big(\sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu+\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu\Big)x+\sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu-\sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu l_\nu+b(2x-1),$$

wobei die ganzen Zahlen m und ξ durch die Beziehungen

$$l_m\leqq x<l_{m+1},\qquad l_{\xi-1}<1-x\leqq l_\xi$$

bestimmt sind. Nach Voraussetzung ist dann aber

$$\xi = k - m; \qquad l_\xi = 1 - l_m; \qquad b_\xi = b_m;$$

mithin wegen $\sum_{\nu=1}^{m}{}' b_\nu = \sum_{\nu=1}^{m}{}' b_{k-\nu} = \sum_{\nu=k-m}^{k-1}{}' b_\nu$,

$$\sum_{\nu=1}^{\xi-1}{}' b_\nu + \sum_{\nu=1}^{m}{}' b_\nu = \sum_{\nu=1}^{k-m-1}{}' b_\nu + \sum_{\nu=1}^{m}{}' b_\nu = \sum_{\nu=1}^{k-1}{}' b_\nu . \tag{38}$$

Andererseits ist aber wegen **f)** für $1 \leqq m \leqq k-1$

$$\sum_{\nu=1}^{m}{}' b_\nu = \sum_{\nu=1}^{m}{}' [b_\nu(1-l_\nu) + b_\nu l_\nu] = \sum_{\nu=1}^{m}{}' [b_\nu(1-l_\nu) + b_{k-\nu}(1-l_{k-\nu})]$$

$$= \sum_{\nu=1}^{m}{}' b_\nu(1-l_\nu) + \sum_{\nu=k-m}^{k-1}{}' b_\nu(1-l_\nu). \tag{39}$$

Setzt man $m = k-1$, so ergibt sich wegen $l_k = 1$

$$\sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu = 2\sum_{\nu=1}^{k-1}{}' b_\nu(1-l_\nu) = 2\sum_{\nu=1}^{k}{}' b_\nu(1-l_\nu) = 2b,$$

mithin in Verbindung mit (38)

$$-\Big(\sum_{\nu=1}^{\xi-1}{}' b_\nu + \sum_{\nu=1}^{m}{}' b_\nu\Big) = -2b. \tag{40}$$

Es ist ferner

$$\sum_{\nu=1}^{\xi-1}{}' b_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{\xi-1}{}' b_\nu l_\nu = \sum_{\nu=1}^{m}{}' b_\nu + \sum_{\nu=m+1}^{k-m-1}{}' b_\nu(1-l_\nu),$$

folglich, wenn man den Wert für $\sum_{\nu=1}^{m}{}' b_\nu$ aus (39) einsetzt,

$$\sum_{\nu=1}^{\xi-1}{}' b_\nu - \sum_{\nu=m+1}^{\xi-1}{}' b_\nu l_\nu = \sum_{\nu=1}^{k-1}{}' b_\nu(1-l_\nu) = \sum_{\nu=1}^{k}{}' b_\nu(1-l_\nu) = b. \tag{41}$$

Aus (40) und (41) folgt aber wegen (37) die Behauptung (36).

3. Nunmehr betrachten wir das Integral

$$J(s) = \int_0^\infty x^{s-3}\chi(x)\,dx, \tag{42}$$

wobei $\chi(x)$ die durch Formel (31) definierte Funktion ist. Wegen (32) ist $\chi(x)$ als periodische Funktion beschränkt; außerdem ist $B_1(x) = 0$ für $0 \leqq x < l_1$, daher bleibt $\frac{\chi(x)}{x}$ unterhalb einer festen Schranke, wenn x

gegen 0 abnimmt. Das Integral (42) ist demnach in dem Streifen $1 < \sigma < 2$ absolut konvergent.

Wir behaupten weiter: Das Integral $(s-2)(s-1)J(s)$ ist die analytische Fortsetzung in dem Streifen $1 < \sigma < 2$ des Integrals (13), das die Funktion $g(1-s)$ nur für $\sigma < -\alpha$ darstellt. Es ist nämlich für $1 < \sigma < 2$

$$J(s) = \int_0^1 x^{s-3} B_1(x)\,dx - \int_0^1 x^{s-3}\left(\frac{a}{2}x^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)x\right)dx + \int_1^\infty x^{s-3}\chi(x)\,dx$$

$$(43) \qquad = -\frac{a}{2s} - \left(b - \frac{a}{2}\right)\frac{1}{s-1} + \int_0^1 x^{s-3} B_1(x)\,dx + \int_1^\infty x^{s-3}\chi(x)\,dx.$$

In dieser Form konvergieren aber wegen $B_1(x) = 0$ für $0 \leqq x < l_1$ die Integrale rechter Hand von (43) in der ganzen Halbebene $\sigma < 2$. Speziell wird für $\sigma < -\alpha < 0$

$$J(s) = -\frac{a}{2s} - \left(b - \frac{a}{2}\right)\frac{1}{s-1} + \int_0^1 x^{s-3} B_1(x)\,dx + \int_1^\infty x^{s-3} B_1(x)\,dx$$
$$- \int_1^\infty x^{s-3}\left(\frac{a}{2}x^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)x\right)dx$$
$$= \int_0^\infty x^{s-3} B_1(x)\,dx.$$

Daraus folgt aber wegen (13), daß $(s-2)(s-1)J(s)$ die analytische Fortsetzung von $g(1-s)$ in dem Streifen $1 < \sigma < 2$ ist.

Die Beziehung (43) zeigt außerdem, daß $g(1-s) = (s-2)(s-1)J(s)$ in der ganzen Halbebene $\sigma < 2$ regulär ist und nur an der Stelle $s = 0$ einen Pol erster Ordnung mit dem Residuum $-a$ hat.

4. Aus der Beziehung $\chi(x+1) = \chi(x)$ folgt, daß sich $\chi(x)$ in eine trigonometrische Reihe

$$\chi(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty}(A_n \cos 2\pi n x + A_n' \sin 2\pi n x)$$

entwickeln läßt. Wegen $\chi(x) = \chi(1-x)$ müssen aber sämtliche Koeffizienten $A_n' = 0$ sein. Da endlich $\chi(x)$ für $x = 0$ verschwindet, so läßt sich die trigonometrische Reihe auch in der Form

$$\chi(x) \sim \sum_{n=1}^{\infty} A_n(\cos 2\pi n x - 1)$$

schreiben, wobei der Fourierkoeffizient

$$A_n = 2\int_0^1 \chi(x)\cos 2\pi n x\,dx \qquad (n \geqq 1)$$
$$= 2\int_0^1 B_1(x)\cos 2\pi n x\,dx - 2\int_0^1 \left(\frac{a}{2}x^2 + \left(b - \frac{a}{2}\right)x\right)\cos 2\pi n x\,dx$$

ist. Diese Integrale sind bereits im vorigen Paragraphen, Formel (28) und (29), berechnet worden, und zwar ergab sich dort

$$A_n = \frac{-2}{4\pi^2 n^2} \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa \cos 2\pi n l_\varkappa .$$

Man setze die Summe rechter Hand gleich ihrem der Voraussetzung g) Formel (5) entnommenen Wert a_n, dann erhält man für $\chi(x)$ die Fourierreihe

$$\chi(x) = \frac{-2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} (\cos 2\pi n x - 1),$$

die wegen $|a_n| \leqq \sum_{\varkappa=1}^{k} |b_\varkappa|$ (vgl. Formel (5)) absolut und gleichmäßig konvergiert, mithin wegen $\chi(x) = \chi(x+1)$ die Funktion $\chi(x)$ für alle positiven Werte von x darstellt.

Setzt man, um mit Formel (15) aus Satz 2 der 1. Mtlg. in Übereinstimmung zu bleiben,

$$-4\pi^2 \chi(x) = \varphi(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} (\cos 2\pi n x - 1),$$

so erhält man unter Berücksichtigung von (42) in dem Streifen $1 < \sigma < 2$

$$g(1-s) = (s-2)(s-1) J(s) = \frac{-(s-2)(s-1)}{4\pi^2} \int_0^\infty x^{s-3} \varphi(x) dx$$

und hieraus folgt in Verbindung mit Satz 2 und Formel (17) und (20) der 1. Mtlg.

$$g(1-s) = f(s) \frac{\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)} \pi^{-s+\frac{1}{2}},$$

unter $f(s)$ die Dirichletsche Reihe (1) dieser Mtlg. verstanden.

Da, wie oben gezeigt wurde, $g(1-s)$ im Bereiche $\sigma < 2$ nur für $s = 0$ einen Pol erster Ordnung hat, ebenso wie $\Gamma\left(\frac{s}{2}\right)$ rechter Hand von (2), so kann $f(s)$ für $\sigma < 2$ höchstens im Punkte $s = 1$ einen Pol haben, da dort die Funktion $\frac{1}{\Gamma\left(\frac{1-s}{2}\right)}$ verschwindet. In der Halbebene $\sigma \geqq 2$ ist $f(s)$ nach Voraussetzung c), mithin auch $g(1-s)$, regulär. Hiermit ist Satz 4 vollständig bewiesen.

§ 4.

Über eine der Riemannschen verwandte Funktionalgleichung.

1. Satz 5. *Es sei* $f(s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^s}$ *eine Dirichletsche Reihe, die für* $\sigma > 1$ *absolut konvergiert. Setzt man*

$$(44) \qquad G(s+2) = f(s+2) \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)} \pi^{-s+\frac{1}{2}},$$

$$(45) \qquad \varphi(x) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \sin 2\pi n x,$$

so ist für $-1 < \sigma < 0$

$$(46) \qquad G(s+2) = \int_0^{\infty} x^{s-1} \varphi(x)\, dx.$$

Dieser Satz ist ein Analogon zu Satz 2 der 1. Mtlg.; sein Beweis ergibt sich ebenso aus Formel (10) der 1. Mtlg., wie dort der Satz 2 aus der entsprechenden Formel (9).

Auch hier empfiehlt es sich, wie in der 1. Mtlg., die Formeln (44) und (46) umzuformen, indem man s für $s+2$ substituiert. Setzt man außerdem noch

$$(47) \qquad g(1-s) = \frac{(s-2)(s-1)}{-4\pi^2} G(s) = f(s) \frac{\Gamma\left(\frac{s+1}{2}\right)}{\Gamma\left(\frac{2-s}{2}\right)} \pi^{-s+\frac{1}{2}},$$

so folgt aus (46) die im Streifen $1 < \sigma < 2$ absolut konvergente Integraldarstellung

$$(48) \qquad g(1-s) = \frac{(s-2)(s-1)}{-4\pi^2} \int_0^{\infty} x^{s-3} \varphi(x)\, dx.$$

Ebenso wie in Formel (19) der 1. Mtlg. ergibt sich, da nach Hilfssatz 2 die Funktion $G(s)$ sich nur auf eine Weise durch ein Integral der Gestalt (46) darstellen läßt, aus Hilfssatz 1 (1. Mtlg.) für $\varphi(x)$ außer der Reihe (45) noch die Integraldarstellung

$$(49) \qquad \varphi(x) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\frac{5}{4}-i\infty}^{\frac{5}{4}+i\infty} x^{-s+2} G(s)\, ds,$$

nachdem man gezeigt hat, daß im Streifen $1 < \sigma < \frac{3}{2}$ die Funktion $G(s)$ die Voraussetzungen des Hilfssatzes 1 erfüllt.

2. Satz 6. *Es sei $f(s)$ eine für alle Werte der komplexen Veränderlichen s definierte analytische Funktion, die die Voraussetzungen* **a)**, **b)** *und* **c)** *von Satz* 3 *erfüllt.*

d‴) $g(1-s)$ *bezeichne die in Formel* (47) *definierte Funktion und lasse sich durch eine für $\sigma < -\alpha$ $(\alpha > 0)$ absolut konvergente Dirichletsche Reihe*

$$(3) \qquad g(1-s) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{b_n}{l_n^{1-s}} \qquad (0 < l_1 < l_2 < \ldots)$$

darstellen.

Dann erfüllt die Dirichletsche Reihe (3) *die Bedingungen:*

e) *Sind*

$$l_1 < l_2 < \ldots < l_k = 1$$ [6])

sämtliche der Zahlen l_n, die $\leqq 1$ sind, so ist, wenn $n = \mu k + \varkappa$ $(\mu \geqq 1,\ 1 \leqq \varkappa \leqq k)$ gesetzt wird,

$$l_n = \mu + l_\varkappa, \qquad b_n = b_\varkappa,$$

mithin ist die Dirichletsche Reihe (3) *von der Gestalt*

$$(4) \qquad g(1-s) = \sum_{\mu=0}^{\infty} \sum_{\varkappa=1}^{k} \frac{b_\varkappa}{(\mu + l_\varkappa)^{1-s}}.$$

f′) *Außerdem ist für $1 \leqq \varkappa \leqq k-1$* [7])

$$l_{k-\varkappa} = 1 - l_\varkappa; \qquad b_{k-\varkappa} = -b_\varkappa, \qquad b_k = 0.$$

g′) *Die Koeffizienten a_n der Dirichletschen Reihe* (1) *sind mit den $b_\varkappa$ und $l_\varkappa$ durch die Beziehungen verknüpft:*

$$(50) \qquad a_n = \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa \sin 2\pi n l_\varkappa.$$

Beweis. Aus der nur für $1 < \sigma < 2$ absolut konvergenten Integraldarstellung (48) für $g(1-s)$ geht man ebenso wie beim Beweise von Satz 1 der ersten Mitteilung und von Satz 3, indem man Hilfssatz 1 (1. Mtlg.) benutzt, zu der für $\sigma < -\alpha$ absolut konvergenten Integraldarstellung

$$(51) \qquad g(1-s) = (s-2)(s-1)\int_0^\infty x^{s-3}\,\psi(x)\,dx$$

---

[6]) Vgl. Anm. [3]) S. 226.

[7]) In der Bedingung **f′)** ist offenbar enthalten, daß, wenn $k = 2q$ ist, $l_q = \frac{1}{2}$ und für den zugehörigen Koeffizienten $b_q = 0$ folgt.

über, wobei sich nach dem Cauchyschen Residuenkalkül in Verbindung mit Formel (49)

$$(52) \qquad \psi(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{-\beta-i\infty}^{-\beta+i\infty} x^{-s+2}\frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)}ds = R(x) - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2} \qquad (\beta > \alpha)$$

ergibt. Hierbei bezeichnet $R(x)$ wieder das Residuum der Funktion

$$(53) \qquad -x^{-s+2}\frac{g(1-s)}{(s-2)(s-1)}$$

im Streifen $-\beta \leqq \sigma \leqq \frac{5}{4}$, für das man eine für positive Werte von x reguläre analytische Funktion der Gestalt (11) erhält.

Andererseits ergibt sich ebenso wie beim Beweise von Satz 1 und 3 aus der nach Voraussetzung **d‴)** für $\sigma < -\alpha$ absolut konvergenten Dirichletschen Reihe (3) die mindestens im Bereich $\sigma < -\alpha$ absolut konvergente Integraldarstellung

$$(54) \qquad g(1-s) = (s-2)(s-1)\int_0^\infty x^{s-3}B_1(x)\,dx,$$

wobei $B_1(x)$ durch Formel (12) definiert ist.

Durch Vergleichung von (51) und (54) ergibt sich nach Hilfssatz 2 der 1. Mtlg. (vgl. auch Formel (14) des § 2 der vorliegenden Mtlg.)

$$(55) \qquad B_1(x) = \psi(x) = R(x) - \frac{\varphi(x)}{4\pi^2}$$

wegen (52).

Nun ist aber $\varphi(x)$ wegen (45) als trigonometrische Reihe eine Funktion mit der Periode 1. Man erhält daher

$$B_1(x+1) - B_1(x) = R(x+1) - R(x),$$

und aus dieser Beziehung folgt ebenso wie beim Beweise von Satz 3:

erstens, daß $R(x)$ gleich einem Polynom zweiten Grades der Gestalt (19) ist,

zweitens, daß die b_n und l_n, wie behauptet, die Bedingungen **e)** erfüllen.

Außerdem sind die in den Koeffizienten von $R(x)$ (siehe Formel (19)) auftretenden Größen a und b mit den $b_\varkappa$ und $l_\varkappa$ durch die Formel (24) verknüpft.

3. Um auch die Behauptung **f′)** zu beweisen, gehe man davon aus, daß nunmehr $\varphi(x)$ wegen (45) als Sinusreihe der Beziehung

$$\varphi(x) + \varphi(1-x) = 0$$

genügt. Man erhält also in Verbindung mit (55)

$$B_1(x) + B_1(1-x) = R(x) + R(1-x),$$

oder, indem man für $B_1(x)$ und $R(x)$ die Formeln (12) und (19) benutzt, für $0 < x < \frac{1}{2}$

$$\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu (x - l_\nu) + \sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu (1 - x - l_\nu) = \frac{a}{2}(x^2 + (1-x)^2) + \left(b - \frac{a}{2}\right)(x + 1 - x),$$

$$(56) \qquad -\left(\sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu\right) x - \sum_{\nu=1}^{m} b_\nu l_\nu + \sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu (1 - l_\nu) = a(x^2 - x) + b,$$

wobei m und ξ ganze von x abhängige Zahlen bedeuten, die durch die Beziehungen

$$(57) \qquad l_m \leqq x < l_{m+1}, \qquad l_{\xi-1} < 1 - x \leqq l_\xi$$

bestimmt sind. Da die linke Seite von (56) eine mindestens streckenweis lineare Funktion, die rechte Seite aber ein gewöhnliches Polynom zweiten Grades ist, so verschwindet der Koeffizient a, das heißt wegen (19)

$$(58) \qquad R(x) = b\,x \text{ [8]}.$$

Es folgt also zunächst

$$(59) \qquad \sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu = 0.$$

Geht nunmehr x von rechts nach links durch den Punkt l_m hindurch, so wächst die Summe linker Hand von (59) um b_m, soll sie trotzdem gleich Null bleiben, so muß gleichzeitig der Punkt $1 - x$ durch l_ξ hindurchgehen, und es muß $b_\xi = -b_m$ sein, mithin $l_\xi = 1 - l_m$.

Da offenbar auch umgekehrt x durch einen Punkt l_m hindurchgehen muß, wenn $1 - x$ einen Punkt l_ξ passiert, so folgt

$$l_\xi = l_{k-m} = 1 - l_m, \qquad b_\xi = b_{k-m} = -b_m.$$

Demnach ergibt sich für $k = 2q$

$$l_q = 1 - l_q = \tfrac{1}{2}.$$

Ist nunmehr $l_{q-1} < x < \frac{1}{2} < 1 - x < l_{q+1}$, so ist wegen (59)

$$\sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu = b_q = 0.$$

Aus (59) ergibt sich ferner für jedes ganzzahlige k, wenn man $m = 0$, das heißt $0 < x < l_1$ setzt, $\sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu = 0$. Andererseits ist aber wegen (24),

---

[8]) Vergleicht man den Ausdruck (58) für $R(x)$ mit dem Ausdruck (11), so erkennt man ebenso wie in Anm. [5]) bereits an dieser Stelle, daß im Bereiche $\sigma < \frac{5}{4}$ die Funktion (53) höchstens im Punkte $s = 1$ einen Pol erster Ordnung hat. Mithin sind die Funktionen $g(1-s)$ und $f(s)$ (vgl. Formel (47)) überall im Endlichen regulär.

und wegen $a = \sum_{\nu=1}^{k} b_\nu = 0$, auch $b_k = 0$. Damit sind alle Behauptungen f′) bewiesen.

4. Um endlich noch g′) zu beweisen, berücksichtigen wir, daß aus (45) und (55), das heißt aus

$$\varphi(x) = 4\pi^2 (R(x) - B_1(x)) = 2 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^2} \sin 2\pi n x,$$

die Größen $\frac{2a_n}{n^2}$ sich als Fourierkoeffizienten der Entwicklung von $4\pi^2$ $(R(x) - B_1(x))$ in eine Sinusreihe ergeben, daß mithin in Verbindung mit (58)

$$a_n = 4\pi^2 n^2 \int_0^1 (bx - B_1(x)) \sin 2\pi n x \, dx$$

ist. Die Auswertung dieser Integrale führt nach ähnlichen Rechnungen wie am Schluß von § 2 auf die behaupteten Beziehungen (50), und damit ist Satz 6 vollständig bewiesen.

5. Auch der Satz 6 läßt sich umkehren.

Satz 7. *Es sei $g(1-s)$ eine Dirichletsche Reihe der Gestalt* (4), *die außer* e) *auch die Bedingungen* f′) *erfüllt*[9]), *und $f(s)$ eine Dirichletsche Reihe der Gestalt* (1) *deren Koeffizienten a_n mit den $b_\varkappa$ und $l_\varkappa$ von $g(1-s)$ durch die Beziehungen* (50) *zusammenhängen.*

Dann besteht zwischen $f(s)$ und $g(1-s)$ die Funktionalgleichung (47).

Beweis. Wie beim Beweise von Satz 4 gehe man von der aus der Dirichletschen Reihe abgeleiteten Integraldarstellung (54) für $g(1-s)$ aus, die mindestens für $\sigma < -\alpha$ konvergent ist. Setzt man wieder

$$(60) \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa = a, \qquad \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa (1 - l_\varkappa) = b,$$

so ist, wegen der Voraussetzung f′), $a = 0$.

Man bilde die Funktion

$$(61) \qquad \chi(x) = B_1(x) - bx = B_1(x) - \frac{a}{2} x^2 - \left(b - \frac{a}{2}\right) x.$$

Da die b_n und l_n die Voraussetzung e) erfüllen, so folgt genau wie in § 3 (vgl. Formel (31) bis (35))

$$\chi(x) = \chi(x+1) \quad \text{für} \quad x > 0.$$

[9]) Aus den Bedingungen e) und f′) läßt sich (vgl. Landau, l. c. Anm. [4])) unmittelbar folgern, daß wegen $\sum_{\nu=1}^{k} b_\nu = 0$ die Funktion $g(1-s)$ sich über die ganze Ebene fortsetzen läßt und überall im Endlichen regulär ist.

6. Andererseits behaupten wir:

$$\chi(x)+\chi(1-x)=0 \quad \text{für} \quad 0<x<1. \tag{62}$$

Offenbar genügt es, die Behauptung für $x \leqq \frac{1}{2}$ zu beweisen. In Verbindung mit (56) ergibt sich

$$\chi(x)+\chi(1-x)=-\Big(\sum_{\nu=m+1}^{\xi-1} b_\nu\Big)x-\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu l_\nu+\sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu(1-l_\nu)-b, \tag{63}$$

wobei die ganzen Zahlen m und ξ durch die Beziehungen (57) bestimmt sind. Aus der Voraussetzung **f′)** folgt aber $\xi-1=k-m-1$ und weiter

$$\sum_{\nu=m+1}^{k-m-1} b_\nu=0. \tag{64}$$

Andererseits ist wegen **f′)**

$$-\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu l_\nu=\sum_{\nu=1}^{m} b_{k-\nu}(1-l_{k-\nu})=\sum_{\nu=k-m}^{k-1} b_\nu(1-l_\nu),$$

folglich

$$-\sum_{\nu=1}^{m} b_\nu l_\nu+\sum_{\nu=1}^{\xi-1} b_\nu(1-l_\nu)=\sum_{\nu=1}^{k-1} b_\nu(1-l_\nu)=\sum_{\nu=1}^{k} b_\nu(1-l_\nu)=b \tag{65}$$

wegen $l_k=1$ und wegen (60). Aus (63), (64) und (65) ergibt sich aber die behauptete Beziehung (62).

7. Nunmehr betrachte man — ebenso wie in § 3 — das Integral

$$J(s)=\int_0^\infty x^{s-3}\chi(x)\,dx, \tag{66}$$

unter $\chi(x)$ die in Formel (61) definierte Funktion verstanden. Als periodische Funktion ist $\chi(x)$ beschränkt. Außerdem bleibt, wegen $B_1(x)=0$ für $0 \leqq x<l_1$, auch der Quotient $\frac{\chi(x)}{x}$ beschränkt, wenn x gegen 0 abnimmt; daraus folgt, daß das Integral (66) im Streifen $1<\sigma<2$ absolut konvergiert.

Andererseits ist für $1<\sigma<2$

$$\begin{aligned} J(s)&=\int_0^1 x^{s-3}B_1(x)\,dx-b\int_0^1 x^{s-2}\,dx+\int_1^\infty x^{s-3}\chi(x)\,dx \\ &=\frac{-b}{s-1}+\int_0^1 x^{s-3}B_1(x)\,dx+\int_1^\infty x^{s-3}\chi(x)\,dx, \end{aligned} \tag{67}$$

und in dieser Gestalt konvergieren die Integrale rechter Hand von (67) offenbar in der ganzen Halbebene $\sigma<2$.

Aus (67) folgt ebenso wie im § 3, daß das Integral (66) die analytische Fortsetzung des nur für $\sigma < -\alpha$ absolut konvergenten Integrals $\int\limits_0^\infty x^{s-3} B_1(x)\,dx$, mithin $(s-2)(s-1)J(s)$ wegen (54) die analytische Fortsetsung von $g(1-s)$ ist. Wie sich aus (67) ergibt, ist aber $g(1-s) = (s-2)(s-1)J(s)$ in der Halbebene $\sigma < 2$ überall im Endlichen regulär.

Aus der Beziehung $\chi(x+1) = \chi(x)$ folgt, daß sich $\chi(x)$ in eine trigonometrische Reihe entwickeln läßt:

$$\chi(x) \sim A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (A_n \cos 2\pi n x + A_n' \sin 2\pi n x).$$

Aus $\chi(0) = 0$, $\chi(x) + \chi(1-x) = 0$ folgt aber $A_0 = 0$, $A_n = 0$ für alle $n \geqq 1$. Andererseits ist

$$A_n' = 2\int\limits_0^1 \chi(x) \sin 2\pi n x\, dx \qquad (n \geqq 1).$$

Indem man die Funktion (61) für $\chi(x)$ einsetzt, die Integration ausführt und nachher die Formeln (50) der Voraussetzung g') benutzt, ergibt sich

$$A_n' = \frac{-2}{4\pi^2 n^2} \sum_{\varkappa=1}^{k} b_\varkappa \sin 2\pi n\, l_\varkappa = \frac{-2\, a_n}{4\pi^2 n^2};$$

mithin ist wegen $|a_n| \leq \sum\limits_{\varkappa=1}^{k} |b_\varkappa|$ die Fourierreihe

$$\chi(x) = \frac{-2}{4\pi^2} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{n^3} \sin 2\pi n x$$

absolut und gleichmäßig konvergent. Offenbar stimmt aber diese Reihe für $\chi(x)$ mit der Reihe $-\frac{\varphi(x)}{4\pi^2}$ der Formel (45) aus Satz 5 überein. Die aus (66) gewonnene, im Streifen $1 < \sigma < 2$ absolut konvergente Integraldarstellung von $g(1-s) = (s-2)(s-1)J(s)$ ist also mit dem Integral (48) identisch. Von (48) können wir aber auf die Beziehung (47) zurückschließen, und damit ist bewiesen, daß zwischen $f(s)$ und $g(1-s)$ die Funktionalgleichung (47) besteht.

Aus ihr folgt, daß $g(1-s)$ nicht nur, wie bisher bewiesen wurde, in der Halbebene $\sigma < 2$, sondern überall im Endlichen regulär ist. Das gleiche gilt offenbar auch von der Funktion $f(s)$.

Damit ist Satz 7 vollständig bewiesen.

(Eingegangen am 19. August 1920.)