UN'APPLICAZIONE ANALITICA DI UN TEOREMA DI FOURIER.

Nota di **Luciano Orlando** (Roma).

Adunanza del 25 marzo 1906.

Se leggiamo $\Delta_2 u = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}$, dove u rappresenta una funzione delle tre coordinate cartesiane ortogonali x, y, z, e se intendiamo che $\Delta_{2\nu}$ esprima la ν^{ma} potenza simbolica della forma differenziale Δ_2, l'equazione alle derivate parziali

$$(1) \qquad \Delta_{2m} u + a_1 \Delta_{2(m-1)} u + \cdots + a_{m-1} \Delta_2 u + a_m u = 0,$$

dove con $a_1, a_2, \ldots, a_{m-1}, a_m$ si indicano grandezze reali, indipendenti da x, y, z, non è certamente fra le più facili a integrarsi, nemmeno in casi molto particolari.

Uno dei campi più semplici, nei quali ci possiamo proporre d'integrare la (1), è un semispazio, sede, per esempio, dei punti che hanno la z positiva, limitato dunque dal piano d'equazione $z=0$. Noi ci proponiamo di determinare una funzione $u(x, y, z)$, che verifichi regolarmente la (1), si annulli all'infinito, e sia tale che i suoi valori, e quelli rispettivamente delle sue prime $m-1$ derivate su z, si riducano per $z = 0$ ai valori delle funzioni note di x, y

$$(2) \qquad u_0, \quad \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0, \quad \left(\frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)_0, \ldots, \left(\frac{\partial^{m-1}}{\partial z^{m-1}}\right)_0.$$

Queste funzioni sono *funzioni arbitrarie* di x, y, ma l'arbitrarietà di queste funzioni, pur essendo molto vasta, non è infinita, perchè anche qui si presentano analoghe restrizioni a quelle, molto note, che si presentano nell'integrazione della $\Delta_{2m} = 0$. Per accennare a queste restrizioni, evitando un lungo esame *a priori*, noi stabiliamo di escludere quelle funzioni che, nel corso dei nostri ragionamenti, dovessero farci incontrare risultati privi di senso, come, per esempio, integrali impropri non convergenti.

Intanto noi supponiamo che l'equazione algebrica

$$(3) \qquad t^m - a_1 t^{m-1} + \cdots \pm a_{m-1} t \mp a_m = 0$$

non abbia radici multiple. Siano $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m$ le sue radici, fra di loro differenti. Assumiamo due numeri reali α e β, e stabiliamo l'equazione

$$(4) \qquad \gamma_\nu^2 = \lambda_\nu - \alpha^2 - \beta^2,$$

la quale rappresenta m equazioni se ν assume i valori $1, 2, \ldots, m$. L'equazione (4) ha due radici; l'argomento di una di queste differisce di π dall'argomento dell'altra.

Ciò mostra che noi possiamo facilmente determinare m grandezze $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$, tali che le loro parti immaginarie siano positive: queste grandezze $\gamma_1, \gamma_2, \cdots, \gamma_m$ risultano fra di loro differenti.

Ed ora poniamo

$$(5) \qquad u(x, y, z) = \int\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, e^{i(\alpha x+\beta y)} \sum_{\nu=1}^{m} A_\nu(\alpha, \beta) e^{i\gamma_\nu z}.$$

Se le $A_\nu(\alpha, \beta)$ sono funzioni scelte in modo che l'integrale abbia senso e che sia lecito derivare, rispetto a x, y, z, sotto il segno, la funzione $u(x, y, z)$, definita da (5), verifica (1). Per fare in modo che si accordi, al contorno, colla condizione relativa alle funzioni (2), bisogna determinare opportunamente le $A_\nu(\alpha, \beta)$. Bisogna, dunque, che le A_ν verifichino questo sistema:

$$(6) \quad \left\{ \begin{aligned} u_0 &= \int\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, e^{i(\alpha x+\beta y)} (A_1 + A_2 + \cdots + A_m) \\ -i\left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 &= \int\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, e^{i(\alpha x+\beta y)} (\gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \cdots + \gamma_m A_m) \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ -i^{3-m}\left(\frac{\partial^{m-1} u}{\partial z^{m-1}}\right)_0 &= \int\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta\, e^{i(\alpha x+\beta y)} (\gamma_1^{m-1} A_1 + \gamma_2^{m-1} A_2 + \cdots + \gamma_m^{m-1} A_m). \end{aligned} \right.$$

Ma la formula di FOURIER *):

$$(I) \qquad f(x, y) = \frac{1}{4\pi^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} d\alpha\, d\beta \int\int_{-\infty}^{\infty} f(\xi, \eta) e^{i[\alpha(x-\xi)+\beta(y-\eta)]} d\xi\, d\eta$$

mostra che, se determiniamo le A_ν mediante quest'altro sistema:

$$(7) \quad \left\{ \begin{aligned} A_1 + A_2 + \cdots + A_m &= \frac{1}{4\pi^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta\, u_0\, e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)} \\ \gamma_1 A_1 + \gamma_2 A_2 + \cdots + \gamma_m A_m &= \frac{-i}{4\pi^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)_0 e^{-i(\alpha\xi+\beta\eta)} \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \gamma_1^{m-1} A_1 + \gamma_2^{m-1} A_2 + \cdots + \gamma_m^{m-1} A_m &= \frac{-i^{3-m}}{4\pi^2} \int\int_{-\infty}^{\infty} d\xi\, d\eta \left(\frac{\partial^{m-1} u}{\partial z^{m-1}}\right)_0 e^{i(\alpha\xi+\beta\eta)}, \end{aligned} \right.$$

anche il sistema (6) risulta verificato. Ora è tanto noto il determinante del sistema (7), che si vede subito l'univocità della determinazione delle $A_\nu(\alpha, \beta)$ mediante questo sistema. Sostituendo in (5), noi avremo ottenuto il nostro intento.

Questo breve metodo acquisterebbe importanza se potessimo dimostrare che le

*) H. WEBER, *Die partiellen differentialgleichungen der mathematischen Physik*, Bd. II, 10, § 76.

precedenti condizioni *individuano* la funzione $u(x, y, z)$. Per la $\Delta_{2m} = 0$, è noto che ciò avviene, ma la forma della (1) è ben più complicata che non sia la forma della $\Delta_{2m} = 0$. Mentre che, per esempio, una funzione $\varphi(x, y, z)$, regolare in un campo S, di contorno σ, è individuata dai valori φ sul contorno σ, quando verifica in S la $\Delta_2 \varphi = 0$, non si può dire altrettanto, come è noto, quando deve verificare in S la $\Delta_2 \varphi + \lambda^2 \varphi = 0$, dove λ denota un numero reale: tuttavia se il campo S è un semispazio, e se φ verifica all'infinito condizioni analoghe a quelle che deve verificare perchè sia individuata nel caso della $\Delta_2 = 0$, è presumibile che ciò avvenga. Se, invece, si tratta dell'equazione

$$\Delta_2 \varphi - \lambda^2 \varphi = 0, \tag{8}$$

noi possiamo brevemente dimostrare che i valori di φ, dati al contorno d'un arbitrario campo S, individuano φ nel campo S. Supponiamo, per giungere a dimostrare questa proprietà, che siano invece φ_1 e φ_2 due funzioni di x, y, z, che verifichino regolarmente in S l'equazione (8), assumendo in ogni punto di σ i medesimi valori. La loro differenza $\varphi_1 - \varphi_2 = \varphi$ si annulla in ogni punto di σ, e verifica, come è chiaro, la (8). Ma, se n denota la direzione della normale a σ verso l'interno di S, è valida, come si sa, la formula

$$\int \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial z}\right)^2 \right] dS + \int u \frac{du}{dn} d\sigma + \int u \Delta_2 u \, dS = 0,$$

dove u denota una funzione regolare in S, e le integrazioni in $d\sigma$ e in dS sono rispettivamente estese a tutto il contorno σ e a tutto il campo S: se il campo S ha punti all'infinito, bisogna che u verifichi in questi punti le condizioni perchè la formula sia applicabile. Se poniamo in questa formula $u = \varphi$, otteniamo che l'integrale in $d\sigma$ s'annulla, perchè φ è nulla in ogni punto di σ, e risulta

$$\int \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 + \lambda^2 \varphi^2 \right] dS = 0.$$

Questa formula non può essere valida se non è in ogni punto di S

$$\varphi = 0, \qquad \varphi_1 = \varphi_2,$$

dunque *una soluzione regolare della* (8) *è individuata dai suoi valori al contorno.* Se integriamo la (8) nel semispazio, dando i valori di φ sul piano limite, il nostro metodo fornisce l'*integrale generale;* ma, se dalla forma particolarissima (8) passiamo alla (1), può essere che bastino le m condizioni al contorno, relative alle funzioni (2), ma non è dimostrato.

Roma, 15 marzo 1906.

LUCIANO ORLANDO.
