

### 3. *Die Dispersion des Fluorits und die Ketteler'sche Theorie der Dispersion; von F. Paschen.*

(Hierzu Taf. IX Fig. 4.)

Zum Zwecke genauer Wellenlängenmessungen im ultra-rothen Spectralgebiete habe ich die Wellenlängenscala des Spectrums eines Flussspathprismas so genau festgelegt, wie ich es mit den mir zur Verfügung stehenden Mitteln vermochte, und diese Messung kürzlich publicirt.<sup>1)</sup> Die Bestimmungen reichen bis zu der Wellenlänge  $9,429 \mu$ . Da das Prisma sich dabei stets in der Minimalstellung befand, ergaben sich mit Hülfe des brechenden Winkels auch die Brechungsexponenten und zwar im allgemeinen mit einem Fehler, welcher wenige Einheiten der fünften Decimalen nicht überschreitet.

Trotzdem es mir nicht unmöglich scheint, mit grösseren Mitteln eine noch weitergehende Genauigkeit zu erzielen, dürfte schon das Erreichte ein brauchbares Material abgeben, um die Theorien der Dispersion bezüglich ihrer Brauchbarkeit im ultra-rothen Gebiete einer ziemlich scharfen Prüfung zu unterziehen.

Es kommt dazu, dass die Brechungsexponenten des Flussspathes auch im sichtbaren und ultravioletten Spectralgebiete mit ungefähr derselben Genauigkeit bekannt sind, sodass ein Beobachtungsmaterial zur Verfügung steht, welches sich über das Spectralgebiet von der Wellenlänge  $0,1856 \mu$  bis zu derjenigen  $9,429 \mu$  erstreckt.

Meine Arbeit enthält schon die Prüfung der sogenannten Briot'schen Dispersionsformel, d. h. derjenigen Formel, welche Ketteler aus der Neumann'schen Theorie abgeleitet hat, die man aber gewöhnlich die Briot'sche nennt.

Es ergab sich das Resultat, dass diese Formel nicht geeignet ist, den Beobachtungen gerecht zu werden. Stellt man durch geeignete Constanten den Anschluss an die Beobachtungen

---

1) F. Paschen, Wied. Ann. **53**. p. 301. 1894. In dieser Abhandlung sind folgende Druckfehler stehen geblieben: p. 314 Z. 20 v. o. lies „ausgemessenen“ statt „ausgeblendeten“; p. 320 Z. 5 v. o. lies „Energiecurve“ statt „Energiequelle“; p. 333 Z. 21 v. u. lies „nach einigen“ statt „in einigen“.

im ultravioletten, sichtbaren und ersten ultrarothern Spectralgebiete her, so weicht die Formel im weiteren Ultraroth mehr und mehr und bei langen Wellen ausserordentlich stark ab. Es lassen sich auf keine Weise Constanten für die Formel finden, welche überall im Spectrum einen genügenden Anschluss an die Beobachtungen erzwingen. Bezüglich der Begründung dieser Thatsache verweise ich auf meine citirte Arbeit p. 329—332.

Zugleich ergab sich, dass mit den so erhaltenen starken Abweichungen im Ultraroth eine Absorption in der Substanz des Prismas parallel geht, welche da beginnt, wo die Abweichungen anfangen stärker zu wachsen, und die nach langen Wellen hin ebenfalls an Stärke zunimmt. Wir sind also dabei in grosse Nähe eines Spectralgebietes gelangt, für welches die Substanz nicht mehr als ein vollkommen durchsichtiges Medium betrachtet werden kann.

Die der Briot'schen Formel zu Grunde liegende ältere Theorie nimmt bekanntlich noch nicht an, dass die Körpertheilchen durch Lichtwellen, also durch schwingende Aethertheilchen, in Mitschwingungen versetzt werden. Sie bezieht sich demgemäss nur auf völlig durchsichtige Körper. Der Einfluss der Absorption auf die Dispersion und die anomale Dispersion ist nach ihr nicht zu erklären. Wir können daher von vorn herein nicht erwarten, dass diese Formel auch noch in der Nähe eines Absorptionsgebietes brauchbar bleibt.

Es lässt sich in der That zeigen, dass das Glied, welches der Briot'schen Formel fehlt, um sie zum Anschluss an die Beobachtungen zu bringen, ein solches ist, welches die ältere Neumann'sche Theorie überhaupt nicht ergiebt, sondern zu welchem erst die neueren Theorien führen, welche den Zusammenhang zwischen der Absorption und der Refraction dadurch herstellen, dass sie ein Mitschwingen der Körpermoleculé annehmen und diesbezügliche Kräfte, die also in den Absorptionsstellen erhebliche Beträge erreichen, in das System der älteren Gleichungen einfügen. Die Endgleichungen der Dispersion, zu denen Ketteler auf solche Weise gelangt ist, werde ich dabei im Folgenden zu Grunde legen.

Zunächst soll nachgewiesen werden, welcher Mangel der Briot'schen Formel bezüglich ihrer Anwendung auf die Be-

obachtungen am Flussspath anhaftet. Die Briot'sche Formel lautet:

$$\frac{1}{n^2} = -dl^{-4} - bl^{-2} + a + cl^2.$$

$n$  bedeutet den Brechungsexponenten,  $l$  die Wellenlänge in der Prismensubstanz, oder, wenn  $\lambda$  die Wellenlänge derselben Lichtbewegung im Vacuum vorstellt,  $l = (\lambda/n)$ .  $d$ ,  $b$ ,  $a$  und  $c$  sind Constanten.

Mit den von Carvallo berechneten numerischen Constanten:

$$a = 0,490335 \quad b = 0,000713835$$

$$c = 0,001584 \quad d = 0,000001042$$

schliesst sich die Formel von 0,2 bis  $1,8 \mu$  den Beobachtungen an, wie aus meiner Arbeit p. 328 ersichtlich ist. Die Abweichungen bei längeren Wellen befolgen ein einfaches Gesetz, welches folgende Tabelle illustriert. Sie enthält die Wellenlänge  $\lambda$ , den der Formel entsprechenden Brechungsexponenten „ $n$  ber.“, die daraus gebildeten Werthe  $l^4 = (\lambda/n)^4$ , ferner Werthe von  $1/n^2$ , welche berechnet sind 1. aus den beobachteten  $n$  ( $1/n^2$  beob.), 2. aus den nach der Formel mit obigen Constanten berechneten Brechungsexponenten  $n$  ( $1/n^2$  ber.); in der letzten Columnne schliesslich die Differenz dieser 2 Werthe  $1/n^2$  dividirt durch die vierte Potenz von  $l$ , also den Ausdruck:

$$\Delta(1/n^2)/l^4 = \frac{\frac{1}{n^2} \text{ beob.} - \frac{1}{n^2} \text{ ber.}}{l^4}.$$

$\lambda$	$n$ ber.	$l^4$	$\frac{1}{n^2}$ beob.	$\frac{1}{n^2}$ ber.	$\Delta \frac{1}{n^2}$ 0,00	$\frac{\Delta \frac{1}{n^2}}{l^4}$ 0,00000
4,4199	1,40592	97,7	0,506153	0,505920	0233	2386
4,7146	1,40280	127,6	0,508433	0,508166	0265	2092
5,0092	1,39949	164,2	0,510919	0,510574	0345	2102
5,3039	1,39597	208,4	0,513632	0,513151	0481	2308
5,5985	1,39224	261,5	0,516492	0,515904	0588	2249
5,8932	1,38830	324,7	0,519656	0,518839	0817	2515
6,4825	1,37978	487,3	0,526342	0,525268	1074	2204
7,0718	1,37038	709,4	0,534306	0,532495	1811	2554
7,6612	1,36011	1006,7	0,543275	0,540571	2704	2686
8,2505	1,34893	1399,4	0,553243	0,549570	3673	2625
8,8398	1,33680	1912,4	0,564651	0,559587	5064	2649
9,4291	1,32372	2574,6	0,577441	0,570696	6475	2620

Die letzte Spalte dieser Zusammenstellung führt Zahlen, welche nahezu constant sind. Für die längeren Wellen, für welche die Berechnung des fraglichen Werthes genauer ist, wird die Constanz sogar eine vollkommene.

Fügt man also der Briot'schen Formel ein Glied  $+ \epsilon l^4$  an, so schliesst sie sich im Ultraroth den Beobachtungen an. Behalten die übrigen Constanten die obigen, von Carvallo für sie berechneten Werthe, so muss  $\epsilon$  den Zahlenwerth 0,00000263 haben. Die Formel würde dann nur noch in dem Gebiete von  $1,8 \mu$  bis  $3 \mu$  ein wenig abweichen. Durch eine geringe Variation in den Zahlenwerthen von  $a$ ,  $b$ ,  $c$  und  $\epsilon$  lassen sich aber für diese Constanten Werthe berechnen, welche einen völligen Anschluss an die gesammten Beobachtungen ergeben, d. h. einen Anschluss bis auf wenige Einheiten der fünften Decimalstelle im Werthe von  $n$ . Den Beweis hierfür will ich übergehen, da dies aus dem Schlusse des Aufsatzes ohnehin hervorgehen wird.

Es wird hierdurch natürlich, wie immer bei ähnlichen Fragen, nur die Zweckmässigkeit, nicht aber die Nothwendigkeit der Hinzunahme eines Gliedes  $\epsilon l^4$  zu der vierconstantigen Briot'schen Formel erwiesen. Denn wir können von vornherein nichts darüber sagen, ob sich nicht eine andere Function von  $l$  finden lässt, deren Hinzunahme zu der Formel denselben Effect hat, zumal, wenn man bedenkt, dass die Grössenordnung der anderen vier Constanten an keinerlei Schranken gebunden zu sein braucht.

Es fragt sich nun, wie sich die Dispersionstheorien zu der Hinzufügung eines Gliedes stellen, welches die vierte Potenz von der Wellenlänge enthält. Zunächst lässt sich zeigen, dass die ältere Neumann'sche Theorie ein solches Glied nicht ergiebt. Aus der Ableitung, welche Ketteler<sup>1)</sup> für die Briot'sche Formel gibt, geht hervor, dass sich für sie ein Ausdruck ((15) bei Ketteler) berechnet von der Form:

$$\frac{1}{n^2} = -Kl^2 + A - \frac{B}{l^2} + \frac{C}{l^4} - + \dots$$

Er enthält wohl noch beliebig viele Potenzen von  $1/l^2$ , welche sicher nicht dasselbe leisten wie die Potenz  $l^4$ , und uns daher

1) Ketteler, Theoret. Optik p. 24 u. 25.

nichts nützen können; aber er enthält keine weitere Function, die einem Gliede  $+\varepsilon l^4$  gleichwerthig sein könnte.

Die Briot'sche Formel mit vier Constanten ist von Ketteler<sup>1)</sup> selbst durch umfangreiche Rechnungen geprüft und für das damals vorliegende Beobachtungsmaterial ausserordentlich brauchbar gefunden. Ketteler bezeichnet dort jedes weitere Glied als überflüssig. Allein alle die Messungen, an denen Ketteler diese Prüfung vollzog, Messungen an Gläsern, Wasser, Schwefelkohlenstoff, Kalkspath, Quarz, Arragonit etc. reichten nach Roth hin niemals bis in die Nähe von Absorptionsgebieten.

Nachdem wir gesehen haben, dass die ältere Neumann'sche Theorie uns im Stiche lässt, thun wir gut, uns an Theorien zu halten, welche den Einfluss der Absorption auf die Dispersionscurve rechnerisch verfolgen. Die Ketteler'sche Theorie ergiebt für den Brechungsexponenten  $n$  die folgenden Gleichungen<sup>1)</sup>:

$$(I) \quad n^2 - k_0^2 - a^2 = \sum \frac{M(\lambda^2 - \Delta^2)}{(\lambda^2 - \Delta^2)^2 + g^2 \lambda^2}; \quad 2nk_0 = \sum \frac{Mg\lambda}{(\lambda^2 - \Delta^2)^2 + g^2 \lambda^2}.$$

$a^2$ ,  $\Delta$  und  $g$  sind Constanten,  $k_0$  bedeutet den Extinctionscoefficienten und die einzelnen Summanden beziehen sich auf einzelne Absorptionsgebiete, die in beliebiger Zahl vorhanden sein können.

Das zu untersuchende Beobachtungsmaterial über die Dispersion des Fluorits liegt zwischen zwei Absorptionsgebieten, von denen das eine im Ultraviolett, das andere im Ultraroth zu supponiren sind. Wir haben hierfür also zwei der Summanden der Formel (I) zu berücksichtigen.

Im Ultraviolett sind keine Absorptionsgebiete des Fluorits experimentell ermittelt; dagegen habe ich gezeigt, dass im Ultraroth eine schon aus den Messungen von W. H. Julius bekannte Absorption bei ca.  $7 \mu$  beginnt. Diese Absorption habe ich etwa bis  $9,7 \mu$  quantitativ verfolgt. Es ist daher zunächst die Grösse der Werthe  $k_0$  hier festzustellen. In

1) Ketteler, Pogg. Ann. 140. p. 1. 1870.

2) Genau dieselben zwei Gleichungen hat Ketteler neuerdings auch aus der electromagnetischen Dispersionstheorie von v. Helmholtz abgeleitet (Wied. Ann. 49. p. 382. 1893). Vgl. hierzu ferner P. Drude. Physik des Aethers p. 518—534.

meiner Dispersionsarbeit findet sich der Lichtverlust in einer 4,056 mm dicken Fluoritplatte. Aus den dort angeführten Zahlen ergibt sich die Absorption  $a$ , wenn man von ihnen den Betrag 5,7 Proc. abzieht, welcher dem Lichtverluste durch Reflexionen und Schlieren etc. entspricht. Aus  $a$  berechnet sich der Extinctionscoefficient  $k_0$  der Formel (I) nach der Gleichung:

$$k_0 = \frac{1}{d \log e} - \frac{\lambda}{4\pi} \log \frac{1}{1-a}.$$

$d$  ist die Dicke der Schicht, also 4,056 mm,  $e$  die Basis der natürlichen Logarithmen,  $\lambda$  die Wellenlänge in Millimetern. In der folgenden Zusammenstellung finden sich die Berechnungen meines Beobachtungsmateriales für die in Betracht kommenden Wellenlängen.

$\lambda$ mm	$a$	$\log \frac{1}{1-a}$	$k_0$	$k_0^2$
0,00			0,0000	0,0 <sub>8</sub>
76612	0,024	0,0106	0367	0013
82505	0,083	0,0376	1402	0196
88398	0,183	0,0878	3506	1229
94291	0,313	0,1680	6940	4818

Die Werthe  $k_0^2$  sind, wie man sieht, höchstens von der Grösse 0,0<sub>8</sub>5. Da die Werthe  $n^2$  nur bis auf einige Einheiten der fünften Decimalen sicher sind, so können wir diejenigen  $k_0^2$  für die Rechnung völlig vernachlässigen. Die Ketteler'schen Dispersionsgleichungen (I) reduciren sich daher für unseren Fall auf eine einzige Gleichung mit zwei Summanden und von der Form:

$$(II) \quad n^2 - a^2 = - \frac{M_1 (\lambda_1^2 - \lambda^2)}{(\lambda_1^2 - \lambda^2)^2 + g_1 \lambda^2} + \frac{M_2 (\lambda^2 - \lambda_2^2)}{(\lambda^2 - \lambda_2^2)^2 + g_2 \lambda^2}.$$

Von den rechts stehenden zwei Gliedern bezieht sich das erstere mit  $\lambda_1 > \lambda$  auf ein Absorptionsgebiet im Ultraroth mit der Wellenlänge  $\lambda_1$  der stärksten Absorption, das zweite Glied mit  $\lambda_2 < \lambda$  rührt her von einem Absorptionsgebiet im Ultraviolett mit der Stelle  $\lambda_2$  der grössten Absorption.

In Taf. IX Fig. 4 findet sich ein solches Spectralgebiet mit der zugehörigen Dispersionscurve skizzirt. Die schattirten Stellen bei  $\lambda_1$  und  $\lambda_2$  stellen die zwei Absorptionsgebiete dar. Die ausgezogene Linie hat den durch die Formel (II) (für die Absorptionsstellen selbst durch die For-

mel (I)) bestimmten Verlauf (einen Verlauf, welchen Ketteler auch experimentell für den Absorptionsstreifen von alkoholischen Cyaninlösungen bestimmt hat.<sup>1)</sup> Bei den verdünnteren dieser Lösungen konnte er thatsächlich durch die ganze Breite des Absorptionsstreifens hindurch die Dispersion verfolgen.)

Die Grössen  $g_1$  und  $g_2$  bedeuten die sogenannten Reibungs-coefficienten der Ketteler'schen Theorie, die nur da wirksam werden, wo die Lichtschwingungen die Körpermoleculë zu lebhafterem Mitschwingen veranlassen. Sie erreichen dementsprechend erst in den Absorptionsstellen selber endliche Werthe. Die vergleichenden Bestimmungen Ketteler's über die Refraction und Absorption alkoholischer Cyaninlösungen ergaben in dem Absorptionsstreifen Werthe von  $g^2$  von der Grössenordnung  $1/1000$ . In grösserer Ferne von der Mitte der Absorption ist  $g^2$  sehr klein. Vernachlässigen wir die  $g^2$  für unseren Fall, so schreibt sich die Ketteler'sche Gleichung in der Form:

$$(III) \quad n^2 - a^2 = - \frac{M_1}{\lambda_1^2 - \lambda^2} + \frac{M_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2}.$$

Die dieser Formel entsprechende Curve besteht aus vier Hyperbelästen, welche in der Figur durch die punktirten Linien rechts und links von den Absorptionsstreifen angedeutet sind, und von denen die beiden mittleren mit einer mehr oder weniger ausgeprägten Inflexionsstelle in einander übergehen. Von  $a$  bis  $b$  würde sich so ungefähr der Gültigkeitsbereich der Formel (III) erstrecken, da in diesem Intervalle die vollständigen Formeln (I) und (II) keinen anderen Verlauf ergeben.

Die Ausdrücke rechts in der Formel (III) lassen sich auch nach Potenzen von  $\lambda^2$  resp.  $\lambda^{-2}$  entwickeln.<sup>2)</sup> So entsteht die mit (III) identische unendliche Reihe:

$$(IV) \quad n^2 - a^2 = -A - B\lambda^2 - C\lambda^4 - \dots + \alpha\lambda^{-2} + \beta\lambda^{-4} + \dots$$

Hieraus ist ersichtlich, dass Ketteler's Theorie nicht nur, wie die Neumann'sche zu steigenden Potenzen von  $\lambda^{-2}$ ,

1) Ketteler, Wied. Ann. 12. p. 481. 1881 und 15. p. 337. 1882; Theoret. Opt. p. 559–635.

2) Da  $\lambda_1^2 > \lambda^2 > \lambda_2^2$  ist, entsteht nämlich die Doppelreihe:

$$n^2 - a^2 = -M_1 \sum_{r=0}^{r=\infty} \lambda^{+2r} \lambda_1^{-2(r+1)} + M_2 \sum_{r=0}^{r=\infty} \lambda_2^{+2r} \lambda^{-2(r+1)}$$

sondern auch zu steigenden Potenzen von  $\lambda^2$  führt. Ketteler hat seine Formel meist in der Form:

$$(V) \quad n^2 - a^2 = \frac{M_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} - h\lambda^2$$

an der Erfahrung geprüft. Diese Form hat sich dabei für durchsichtige Medien im allgemeinen ebenso zweckmässig gezeigt, wie die Briot'sche. Dies ist von vorneherein infolge der ähnlichen Form der beiden Ausdrücke plausibel. Es ist gleichgültig, ob man  $\lambda$  oder  $l$  als Variable betrachtet. Die Uebereinstimmung der Ketteler'schen Form (V) kann also gar nichts für die Zweckmässigkeit der neueren Theorie beweisen, da ja die ältere Theorie zu einer stets ebenso zweckmässigen Formel führt. Für vollkommen durchsichtige Medien ergibt eben die Ketteler'sche Theorie nichts anderes, als die ältere Theorie. Diese Gebiete sind zur Prüfung der neuen Theorie daher nicht geeignet.

Die Entscheidung für seine Theorie hat Ketteler bezüglich der Dispersion dadurch herbeigeführt, dass er vergleichende Bestimmungen über die Absorption und Dispersion an Medien mit Absorptionsgebieten anstellte und diese Messung mit der vollständigen Gleichung (I) confrontirte. Es hat sich dabei eine völlige Uebereinstimmung der Theorie mit der Erfahrung herausgestellt, die sogar soweit ging, dass sich aus Absorptionsbestimmungen dieselben Werthe für die Dispersionsconstanten  $M$  berechneten, wie aus den entsprechenden Bestimmungen der Dispersion.<sup>1)</sup>

In ganz anderer Weise entscheidet nun das vorhandene Beobachtungsmaterial über die Dispersion des Fluorites gegen die ältere und für die Ketteler'sche Theorie:

Genau, wie die Briot'sche Formel sich nur bis zu einer gewissen Spectralgegend diesen Beobachtungen fügt, so auch die Ketteler'sche Gleichung (5). Wie die Briot'sche Formel durch Hinzunahme eines Gliedes  $\epsilon l^4$  zum Anschluss an die Beobachtungen zu bringen ist, so auch die Ketteler'sche Gleichung (V) durch Hinzunahme eines Gliedes  $h\lambda^4$ , sodass sie also wird:

$$(VI) \quad n^2 - a^2 = \frac{M_2}{\lambda^2 - \lambda_2^2} - h\lambda^2 - h\lambda^4.$$

1) Vgl. Ketteler, Theor. Optik. p. 590—592.



Während aber die ältere Neumann'sche Theorie ein solches Glied nicht ergibt, sieht man an der Form (IV) der Ketteler'schen Endgleichung, dass die neuere Theorie zu einem Ausdrucke führt, der beliebig viele Potenzen von  $\lambda^2$  enthalten darf.

Die folgende Tabelle enthält den Beweis für das soeben Gesagte. Das über Flussspath vorhandene gesammte sichere Beobachtungsmaterial ist hier verglichen erstens mit Formel (5), zweitens mit den Formeln (VI) und (III). Zu dem ersteren Zweck sind die Constanten der Formel (V) so bestimmt, dass diese Formel sich über ein möglichst grosses Gebiet anschliesst. Das leisten die folgenden Werthe der Constanten:

Formel V.

$$\begin{aligned} a^2 &= 2,03944 & M_2 &= 0,006047 \\ k &= 0,003287 & \lambda_2^2 &= 0,0092217. \end{aligned}$$

Man sieht an der Tabelle, dass damit bis etwa  $5 \mu$  ein guter Anschluss erzielt ist. Ebenso weit lässt sich auch die Briot'sche Formel zum Anschluss bringen, wenn man Carvallo's Constanten etwas verändert. Die grossen Abweichungen jenseits  $5 \mu$ , die ebenso auch bei der Briot'schen Formel eintreten, zeigen, wie sehr hier diese Formeln in die Brüche gehen, und wie verfehlt es wäre, etwa die Messungen bis  $5 \mu$  im Sinne dieser Formel extrapoliren zu wollen, wenn man jenseit  $5 \mu$  keine Bestimmungen gemacht hätte.

Die nächste Spalte enthält die nach der Formel VI berechneten Werthe, wenn die Constanten dieser Formel folgende Werthe haben:

Formel VI.

$$\begin{aligned} a^2 &= 2,03906 & M_2 &= 0,006125 \\ k &= 0,0032055 & \lambda_2^2 &= 0,008884 \\ h &= 0,000002855 \end{aligned}$$

Fast genau die gleichen Werthe wie aus Formel (VI) mit diesen Constanten berechnen sich nach der Formel (III) mit folgenden Constanten (vgl. die letzte Spalte der Tabelle):

Formel III.

$$\begin{aligned} a^2 &= 6,09104 & M_1^{(1)} &= 5099,15 \\ \lambda_1^2 &= 1258,47 & (\lambda_1 = 35,475 \mu) & M_2^{(1)} = 0,00612093 \\ \lambda_2^2 &= 0,008884 & (\lambda_2 = 0,094256 \mu) & - \end{aligned}$$

1) Als „Dispersionsconstanten“ berechnen sich danach:

$$D_1 = M_1 / \lambda_1^2 = 4,05186 \quad \text{und} \quad D_2 = M_2 / \lambda_2^2 = 0,68897.$$

Wie man sieht, ist die Uebereinstimmung dieser Ketteler'schen Formeln im ganzen durchmessenen Spectralgebiete von  $0,1856\mu$  bis  $9,4291\mu$  hin eine vollständige.

Es spricht dies gewiss sehr für die ausserordentliche Zweckmässigkeit der Dispersionstheorie von Ketteler.

Wellenl. $\mu$	n beob.	n berechnet						Beob- achter
		Formel V	$\Delta n$ 0,000	Formel VI	$\Delta n$ 0,000	Formel III	$n \Delta$ 0,000	
0,1856	1,50940	1,50965	-25	1,50949	-09	1,50946	-06	Sarasin
0,1931 <sup>1)</sup>	1,50205 <sup>1)</sup>	1,50159	+46	1,50153	+52	1,50152	+53	"
0,19881	1,49629	1,49628	+01	1,49627	+03	1,49627	+02	"
0,20243	1,49326	1,49323	+03	1,49324	+02	1,49324	+02	"
0,20610	1,49041	1,49034	+07	1,49038	+03	1,49039	+02	"
0,20988	1,48765	1,48758	+07	1,48765	$\pm 00$	1,48765	$\pm 00$	"
0,21441	1,48462	1,48453	+09	1,48461	+01	1,48461	+01	"
0,21935	1,47150	1,48147	+03	1,48157	-07	1,48153	-03	"
0,22645	1,47762	1,47752	+10	1,47763	-01	1,47763	-01	"
0,23125	1,47517	1,47510	+07	1,47521	-04	1,47522	-05	"
0,25713	1,46476	1,46476	$\pm 00$	1,46488	-12	1,46489	-13	"
0,27467	1,45958	1,45962	-04	1,45974	-16	1,45975	-17	"
0,32525	1,44987	1,44973	+14	1,44980	+07	1,44983	+04	"
0,34015	1,44775	1,44770	+05	1,44777	-02	1,44778	-03	"
0,34655	1,44697	1,44692	+05	1,44697	$\pm 00$	1,44701	-04	"
0,36009	1,44535	1,44542	-07	1,44546	-11	1,44549	-14	"
0,39681	1,44214	1,44212	+02	1,44215	-01	1,44217	-03	"
0,41012	1,44121	1,44116	+05	1,44117	+04	1,44119	+02	"
0,48607	1,43713	1,43712	+01	1,43709	+04	1,43713	$\pm 00$	Paschen
0,58930	1,43393	1,43394	-01	1,43389	+04	1,43392	+01	"
0,637	1,43292	1,43296	-04	1,43290	+02	1,43292	$\pm 00$	Carvallo
0,65618	1,43257	1,43261	-04	1,43255	+02	1,43259	-02	Sarasin
0,68671	1,43200	1,43213	-13	1,43206	-06	1,43209	-09	"
0,700	1,43192	1,43193	-01	1,43193	+09	1,43189	+03	Carvallo
0,71886	1,43157	1,43166	-09	1,43160	-03	1,43163	-07	Sarasin
0,76040	1,43101	1,43114	-13	1,43107	-06	1,43109	-08	"
0,777	1,43096	1,43095	+01	1,43088	+08	1,43092	+04	Carvallo
0,878	1,42996	1,42998	-02	1,42991	+05	1,42994	+02	"
0,8840	1,42996	1,42993	+03	1,42986	+10	1,42989	+07	Paschen
1,009	1,42904	1,42902	+02	1,42894	+10	1,42897	+07	Carvallo
1,1786	1,42799	1,42803	-04	1,42795	+04	1,42799	$\pm 00$	Paschen
1,187	1,42804	1,42798	+06	1,42790	+14	1,42794	+10	Carvallo
1,3751	1,42699	1,42704	-05	1,42697	+02	1,42700	-01	Paschen
1,444	1,42676	1,42671	+05	1,42665	+11	1,42669	+07	Carvallo
1,4733	1,42653	1,42657	-04	1,42651	+02	1,42653	$\pm 00$	Paschen
1,5715	1,42607	1,42611	-04	1,42605	+02	1,42608	-01	"
1,6206	1,42592	1,42588	+04	1,42582	+10	1,42584	+08	"
1,7680	1,42517	1,42517	$\pm 00$	1,42512	+05	1,42515	+02	"

1) Diese Beobachtung von Sarasin fällt sehr heraus. Sie enthält wohl einen Beobachtungsfehler.

Wellenl. $\mu$	$n$ beob.	$n$ berechnet						Beob- achter
		Formel V	$\Delta n$ 0,000	Formel VI	$\Delta n$ 0,000	Formel III	$\Delta n$ 0,000	
1,849 <sup>1)</sup>	1,42460	1,42478	-18	1,42474	-14	1,42476	-16	Carvalló
1,9153	1,42438	1,42444	-06	1,42441	-03	1,42443	-05	Paschen
1,9644	1,42412	1,42420	-08	1,42416	-04	1,42418	-06	"
2,0626	1,42363	1,42369	-06	1,42366	-03	1,42369	-06	"
2,1608	1,42317	1,42316	+01	1,42315	+02	1,42317	$\pm 00$	"
2,2100	1,42297	1,42290	+07	1,42288	+09	1,42290	+07	"
2,3573	1,42208	1,42210	-02	1,42207	+01	1,42208	$\pm 00$	"
2,5537	1,42092	1,42089	+03	1,42090	+02	1,42092	$\pm 00$	"
2,6519	1,42015	1,42028	-13	1,42030	-15	1,42031	-16	"
2,7502	1,41969	1,41964	+05	1,41967	+02	1,41968	+01	"
2,9466	1,41823	1,41831	-08	1,41835	-13	1,41836	-13	"
3,1430	1,41704	1,41689	+15	1,41695	+09	1,41695	-09	"
3,2413	1,41608	1,41615	-07	1,41621	-13	1,41620	-12	"
3,5359	1,41378	1,41380	-02	1,41387	-09	1,41386	-08	"
3,8306	1,41121	1,41125	-03	1,41132	-10	1,41131	-09	"
4,1250	1,40850	1,40850	$\pm 00$	1,40856	-06	1,40854	-04	"
4,4199	1,40559	1,40554	+05	1,40558	+01	1,40556	+03	"
4,7147	1,40244	1,40237	+07	1,40238	+06	1,40235	+09	"
5,0092	1,39902	1,39900	+02	1,39895	+07	1,39893	-09	"
5,3039	1,39532	1,39542	-10	1,39529	+03	1,39526	+06	"
5,5985	1,39145	1,39162	-17	1,39140	+05	1,39137	+08	"
5,8932	1,38721	1,38761	-40	1,38725	-04	1,38718	+03	"
6,4825	1,37837	1,37893	-56	1,37821	+16	1,37818	+19	"
7,0718	1,36808	1,36938	-130	1,36811	-03	1,36807	+01	"
7,6612	1,35672	1,35890	-218	1,35690	-18	1,35686	-14	"
8,2505	1,34444	1,34751	-307	1,34452	-08	1,34446	-02	"
8,8398	1,33079	1,33517	-438	1,33088	-09	1,33076	$\pm 00$	"
9,4291 <sup>2)</sup>	1,31612 <sup>2)</sup>	1,32184	-572	1,31589	-23	1,31576	+36	"

1) Diese Beobachtung ist von Carvalló selbst als unsicher bezeichnet.

2) Von den acht Beobachtungen bei dieser grössten Wellenlänge wichen zwei unsichere stärker nach oben ab. Lässt man sie fort, so folgt als Mittel aus den sechs übrigen der Werth  $n = 1,31593$ . Doch ist ein solches Verfahren wohl nicht ganz gerecht gegen die zwei Beobachtungen. Ich will also nur bemerken, dass die Differenz von 23 bez. 36 Einheiten der fünften Decimale von  $n$  1,1 bez. 1,7 Minuten in der Minimalablenkung entspricht, während die grösste Abweichung unter den acht beobachteten Minimalablenkungen fünf Minuten betrug.

*Anm. bei der Correctur:* In einer neuen Arbeit (Wied. Ann. 53. p. 273. 1894) hat Hr. H. Rubens mit einer, wie es scheint, besseren Spectralanordnung, aber immer noch mit dem selbst gemachten Gitter, die Dispersion des Fluorits bis 8,95  $\mu$  bestimmt; aber leider weichen seine Bestimmungen sehr von den meinigen ab. Rubens findet bis ins Absorptionsgebiet hinein die Formel V gültig und hält das für eine Bestätigung der Ketteler-Helmholtz'schen Theorie. Ich bleibe dem gegenüber bei den von mir im Obigen abgeleiteten Schlüssen und halte meine Beobachtungen für genauer.

Hannover, September 1894.