7.

Zur Theorie der elliptischen Functionen.

(Von Herrn Prof. *C. G. J. Jacobi* zu Königsberg in Pr.)

1.

Unter den Formeln, durch welche man die vielen von mir in den *Fundam. nov.* gegebenen Entwicklungen mit leichter Mühe noch vermehren kann, scheint mir die nachfolgende, welche die Tangente der halben Differenz der Amplitude des Integrals u und der Gröfse $\frac{\pi u}{2K}$ selber ergiebt, einen eigenthümlichen Character zu haben.

Da
$$\sqrt{\left(\frac{1-\sin x}{1+\sin x}\right)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - x)}{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + x)},$$
so kann man die Formel *F. N.* S. 99 (4.) wie folgt schreiben:

$$1.\quad \sqrt{\left(\frac{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}\right)} = \frac{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - x)(1-2q\sin x+q^2)(1-2q^2\sin x+q^4)\dots}{\sin\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + x)(1+2q\sin x+q^2)(1+2q^2\sin x+q^4)\dots}.$$

In der Formel (S. 183)
$$\sqrt[4]{q}.\sin x(1-2q^2\cos 2x+q^4)(1-2q^4\cos 2x+q^8)\dots$$
$$= \frac{\sqrt[4]{q}.\sin x - \sqrt[4]{q^9}.\sin 3x + \sqrt[4]{q^{25}}.\sin 5x - \dots}{(1-q^2)(1-q^4)(1-q^6)\dots}$$
setze man $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi - x)$ und $\frac{1}{2}(\frac{1}{2}\pi + x)$ für x und gleichzeitig $\sqrt{q}$ für q, so erhält man nach Division mit $\sqrt[4]{q}$ den Zähler und Nenner in (1.), und daher

$$2.\quad \sqrt{\left(\frac{1-\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1+\sin\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}\right)} = \operatorname{tang}\left(45^0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\right)$$
$$= \frac{\sin(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x) - q\sin 3(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x) + q^3\sin 5(\frac{1}{4}\pi - \frac{1}{2}x) - \dots}{\sin(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x) - q\sin 3(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x) + q^3\sin 5(\frac{1}{4}\pi + \frac{1}{2}x) - \dots},$$
wo die Exponenten von q die dreieckigen Zahlen sind. Setzt man hierin $\frac{1}{2}\pi - x$ für x, so erhält man

$$3.\quad \operatorname{tang}\left(45^0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{coam}\frac{2Kx}{\pi}\right) = \frac{\sin\frac{1}{2}x - q\sin\frac{3}{2}x + q^3\sin\frac{5}{2}x - q^6\sin\frac{7}{2}x + \dots}{\cos\frac{1}{2}x + q\cos\frac{3}{2}x + q^3\cos\frac{5}{2}x + q^6\cos\frac{7}{2}x + \dots}. \text{*)}$$

*) Ich bemerke bei dieser Gelegenheit die Formel
$$\sqrt{k'}\operatorname{tang}\operatorname{am}\tfrac{1}{2}u = \sqrt{(\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}u.\operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\operatorname{coam}u))},$$
welche etwas bequemer als die von *Legendre* für die Halbirung gegebne ist.

Nach der S. 31 gemachten Bemerkung gehen am $\frac{2Kx}{\pi}$ und $\frac{1}{2}\pi - \text{coam}\,\frac{2Kx}{\pi}$ in einander über, wenn man $-q$ für q setzt. Die vorstehende Formel giebt daher sogleich auch folgende:

$$3.\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \frac{\sin\frac{1}{2}x + q\sin\frac{3}{2}x - q^3\sin\frac{5}{2}x - q^6\sin\frac{7}{2}x + \dots}{\cos\frac{1}{2}x - q\cos\frac{3}{2}x - q^3\cos\frac{5}{2}x + q^6\cos\frac{7}{2}x + \dots},$$

wo im Zähler und Nenner immer zwei positive und zwei negative Zeichen mit einander abwechseln. Man erhält aus dieser Formel, wenn $i = \sqrt{-1}$,

$$4.\quad \frac{1 + i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}{1 - i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}} = e^{i\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}}$$

$$= \frac{e^{\frac{1}{2}ix} - q\,e^{-\frac{3}{2}ix} - q^3\,e^{\frac{5}{2}ix} + q^6\,e^{-\frac{7}{2}ix} + q^{10}\,e^{\frac{9}{2}ix} - \dots}{e^{-\frac{1}{2}ix} - q\,e^{\frac{3}{2}ix} - q^3\,e^{-\frac{5}{2}ix} + q^6\,e^{\frac{7}{2}ix} + q^{10}\,e^{-\frac{9}{2}ix} - \dots}$$

und hieraus

$$e^{i\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right)} = \frac{1 + i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right)}{1 - i\operatorname{tang}\frac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right)}$$

$$= \frac{1 - q\,e^{-2ix} - q^3\,e^{2ix} + q^6\,e^{-4ix} + q^{10}\,e^{4ix} - \dots}{1 - q\,e^{2ix} - q^3\,e^{-2ix} + q^6\,e^{4ix} + q^{10}\,e^{-4ix} - \dots}$$

oder

$$5.\quad \operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\left(\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} - x\right) =$$

$$\frac{(q - q^3)\sin 2x - (q^6 - q^{10})\sin 4x + (q^{15} - q^{21})\sin 6x - \dots}{1 - (q + q^3)\cos 2x + (q^6 + q^{10})\cos 4x - (q^{15} + q^{21})\cos 6x + \dots}.$$

Diese merkwürdige Formel ist zur Berechnung einzelner Werthe oder von Tafeln vorzugsweise bequem. Da $\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{1}{2}K = \frac{1}{\sqrt{k'}}$, also

$$\operatorname{tang}(\operatorname{am}\tfrac{1}{2}K - 45^0) = \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'}},$$

so erhält man aus (4.), wenn man $x = \frac{1}{4}\pi$ setzt,

$$6.\quad \frac{1 - \sqrt{k'}}{1 + \sqrt{k'} + \sqrt{(2(1 + k'))}} = \frac{q - q^3 - q^{15} + q^{21} + q^{45} - q^{55} - \dots}{1 - q^6 - q^{10} + q^{28} + q^{36} - q^{66} - \dots}.$$

Setzt man $q = b^8$, so erhält der Bruch rechts die Form

$$\frac{\Sigma \pm b^{(8k \pm 3)^2}}{\Sigma \pm b^{(8k \pm 1)^2}}.$$

Das Zeichen $+$ oder $-$ ist zu nehmen, je nachdem k gerade oder ungerade ist.

Wenn der Modul der Einheit sehr nahe kommt, mufs man sich der Entwicklungen bedienen, welche statt der Kreisfunctionen Exponentialgröfsen enthalten. Setzt man ix für x und k' für k, so verwandelt sich

$$\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} \quad \text{in} \quad i\operatorname{tang}\tfrac{1}{2}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi},$$

und gleichzeitig q in q', wo q und q' durch die Gleichung

$$\log q \,.\, \log q' = \pi^2$$

mit einander verbunden sind. Nennt man u das elliptische Integral erster Gattung und setzt

$$z = e^x = e^{\frac{\pi u}{2K'}}, \qquad \operatorname{am}(u, k) = \varphi,$$

so erhält man aus (4.) folgende Entwicklung von ebenfalls eigenthümlicher Form:

$$7. \quad \operatorname{tang}(45^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1 - q'z^2 - q'^3 z^{-2} + q'^6 z^4 + q'^{10} z^{-4} - \dots}{1 - q'z^{-2} - q'^3 z^2 + q'^6 z^{-4} + q'^{10} z^4 - \dots}.$$

Wenn φ sich sehr der Gränze $\frac{1}{2}\pi$ und daher z der Gränze $\frac{1}{\sqrt{q'}}$ nähert, werden je zwei aufeinander folgende Terme in Zähler und Nenner nahe gleich oder entgegengesetzt. Vereinigt man sie in ein Glied, so bleibt die Convergenz noch überaus grofs. Ist z. B. $k = \frac{10}{11}$, so wird ungefähr $q = \frac{1}{8}$, so dafs die Formel (5.) noch sehr rasch convergirt. Aber es wird dann schon q' ungefähr $\frac{1}{150}$, so dafs man für alle Amplituden mit der Formel

$$\operatorname{tang}(41^0 - \tfrac{1}{2}\varphi) = \frac{1}{z} \cdot \frac{1 - q'z^2 - q'^3 z^{-2}}{1 - q'z^{-2} - q'^3 z^2}$$

ausreicht, um φ bis auf $0''01$ genau zu haben.

Ich will noch einen sehr convergirenden Ausdruck für die ganzen Integrale zweiter Gattung hinzufügen. Vergleicht man nämlich die beiden Formeln *Fund.* S. 110.

$$\tfrac{1}{2}\pi A = \left(\frac{2xK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \sin^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,dx = 4\pi\left[\frac{q}{(1-q)^2} + \frac{q^3}{(1-q^3)^2} + \frac{q^5}{(1-q^5)^2}\text{ etc.}\right]$$

$$\tfrac{1}{2}\pi B = \left(\frac{2kK}{\pi}\right)^2 \int_0^{\frac{1}{2}\pi} \cos^2\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi}\,dx = 4\pi\left[\frac{q}{(1+q)^2} + \frac{q^3}{(1+q^3)^2} + \frac{q^5}{(1+q^5)^2}\text{ etc.}\right],$$

so sieht man, dafs A in $-B$, B in $-A$ übergeht, wenn man $-q$ für q setzt. Differenziirt man ferner die Formel *Fund.* S. 103 (3.), nemlich

$$\log\frac{2K}{\pi} = 4\left[\frac{q}{1+q} + \frac{q^3}{3(1+q^3)} + \frac{q^5}{5(1+q^5)} + \text{etc.}\right],$$

so erhält man

$$\frac{2q\,dK}{K\,dq} = B.$$

Hieraus folgt nach S. 184 (6.)

$$4q\frac{d}{dq}\sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)} = \sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)}.B = k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}.\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos^2\varphi\, d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta(\varphi)}$$
$$= 8(q+4q^4+9q^9+16q^{16} \text{ etc.}).$$

Setzt man hierin $-q$ für q, wodurch K in $k'K$, B in $-A$ übergeht, so erhält man

$$\sqrt{k'}.k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\sin^2\varphi\, d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta} = 8(q-4q^4+9q^9-16q^{16} \text{ etc.}),$$

und daher, durch Addition und Subtraction, zur Bestimmung der ganzen Integrale zweiter Gattung die Formeln:

$$C = k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\cos^2\varphi+\sqrt{k'}.\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta\varphi} = 16(q+9q^9+25q^{25}\ldots.)$$
$$D = k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\cos^2\varphi-\sqrt{k'}.\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\frac{1}{2}\pi\Delta\varphi} = 64(q^4+4q^{16}+9q^{36} \text{ etc.}),$$

von denen besonders die zweite bemerkenswerth ist, indem sie zeigt, dafs der Werth des ganzen elliptischen Integrals zweiter Gattung

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{(\cos^2\varphi-\sqrt{k'}.\sin^2\varphi)\, d\varphi}{\Delta\varphi}$$

von der Ordnung der *sechsten* Potenz des Moduls und von

$$\frac{64q^4}{k^2\left(\frac{2K}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

nur in Gröfsen von der Ordnung der *dreifsigsten* Potenz des Moduls verschieden ist, welche aufserdem noch durch überaus grofse Zahlen dividirt wird. Man sieht auch aus der vorstehenden Formel, dafs

$$B < A \quad \text{und} \quad B > \sqrt{k'}.A.$$

Um aus D den Werth von E^I zu finden, dient die Formel

$$(1+\sqrt{k'})E^I = \sqrt{k'}(1+\sqrt{k'^3})F^I + \frac{\frac{1}{2}\pi D}{\left(\frac{2F^I}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

Auch kann man die Formel

$$-(1+\sqrt{k'})\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = (1-\sqrt{k'})F^I - \frac{\pi D}{k^2\left(\frac{2F^I}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}.$$

bemerken. Da immer

$$q > \frac{k^2}{16}, \quad q < \frac{k^2}{16k'},$$

so ist in der Entwicklung von D der erste Term, welcher, extreme Fälle abgerechnet, allein einen Werth erhält, immer $< \frac{k^8}{1024k'^4}$. Man sieht, wie genau für nicht allzugrofse Moduln die beiden Gröfsen

$$(1+\sqrt{k'})F^I \quad \text{und} \quad \sqrt{k'}(1+\sqrt{k'^3})E^I$$

mit einander übereinkommen, indem die Differenz, nach den Potenzen von k^2 entwickelt, mit dem Term $\frac{1}{2}\pi.\frac{k^8}{1024}$ beginnt.

2.

Man kann bei Berechnung der elliptischen Integrale mit Vortheil die *Gaufsischen* Tafeln anwenden, in welchen für einen unter der Columne A als Argument gegebenen $\log x$, wo $x > 1$ der Werth von $\log(1+x)$ in der Columne C sich befindet. Ich will hierüber in einige nähere Erörterungen eingehen.

Es sollen im Folgenden die Werthe von A mit einem lateinischen Buchstaben und die entsprechenden von $C-\frac{1}{2}A-0.3010300$ mit dem entsprechenden griechischen bezeichnet werden, so dafs man, wenn $m > n$ und $a = \log\frac{m}{n}$,

$$\alpha = \log\frac{m+n}{2\sqrt{(mn)}}$$

oder α gleich dem Logarithmus des Verhältnisses des arithmetischen und geometrischen Mittels von m und n setzt. Ist $-a$ der Logarithmus des Complements eines gegebenen Moduls, so wird hiernach $-\alpha$ der Logarithmus des Complements des kleineren Moduls, in welchen der gegebene durch die *Landen*sche Substitution transformirt wird. Setzt man nun nacheinander

$$a = \log\frac{m}{n}, \quad a' = \alpha, \quad a'' = \alpha', \quad a''' = \alpha'' \text{ u. s. w.},$$

indem man immer den gefundenen Werth von $\alpha^{(i)}$ zum Argument A macht und den entsprechenden Werth von $\alpha^{(i+1)} = C-\frac{1}{2}A-0.3010300$ aufsucht, bis man auf verschwindende Gröfsen kommt, so wird, nach der S. 97 angewandten Bezeichnung,

$$a = \log\frac{m}{n}, \quad a' = \alpha = \log\frac{m'}{n'}, \quad a'' = \alpha' = \log\frac{m''}{n''} \text{ etc.}$$

Man erhält ferner aus den Formeln

$$mn = n'n', \quad m'n' = n''n'', \quad \dots\dots \quad m^{(i-1)}n^{(i-1)} = n^{(i)}n^{(i)}$$

die Gleichung

$$\frac{m}{n}\cdot\frac{m'}{n'}\dots\dots\frac{m^{(i-1)}}{n^{(i-1)}} = \frac{n^{(i)}n^{(i)}}{n\,n},$$

und daher, wenn durch μ die Gränze bezeichnet wird, welcher die Gröfsen

$n^{(i)}$ sehr schnell sich nähern,

$$\log\mu = \log n + \tfrac{1}{2}[a + a' + a'' + \ldots.].$$

Der so für μ erhaltene Werth giebt bekanntlich das ganze elliptische Integral erster Gattung durch die Formel

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi)}} = \frac{1}{\mu}.$$

Die Gröfsen n', n'' etc. selber findet man durch successive Addition von $\frac{1}{2}a$, $\frac{1}{2}a'$ etc. vermittelst der Formeln

$$\log n' = \log n + \tfrac{1}{2}a,\quad \log n'' = \log n' + \tfrac{1}{2}a' \ldots.,$$

und hieraus

$$\log m' = \log n' + a',\quad \log m'' = \log n'' + a'' \ldots.$$

Gaufs hat in seiner Abhandlung „Determinatio attractionis" auch eine sehr bequeme Anordnung für die Berechnung des ganzen elliptischen Integrals zweiter Gattung mitgetheilt. Berechnet man nämlich

$$\lambda = \tfrac{1}{4}\sqrt{(mm - nn)},\quad \lambda' = \frac{\lambda\lambda}{m'},\quad \lambda'' = \frac{\lambda'\lambda'}{m''},\ \ldots.,$$

$$\nu = \frac{2\lambda'\lambda' + 4\lambda''\lambda'' + 8\lambda'''\lambda''' + \ldots.}{\lambda\lambda},$$

so findet man nach einer Formel, welche im Wesentlichen mit der von *Legendre* gegebenen übereinkommt,

$$\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi)}} = -\frac{\nu}{\mu}.$$

Die Gröfsen $\frac{4\lambda}{m}$, $\frac{4\lambda'}{m'}$, $\frac{4\lambda''}{m''}$ etc. oder $\frac{4\lambda}{m}$, $\frac{4\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}$, $\frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda'\lambda'}$ etc. sind der gegebene und die nach und nach transformirten Moduln. Nach *Fund.* S. 149 (4.) findet man die Gröfse q durch die Formel

$$\log q = 2\log\lambda + a - \tfrac{3}{2}a' - \tfrac{3}{4}a'' - \tfrac{3}{8}a''' \text{ etc.}$$

Um das unbestimmte Integral erster Gattung zu finden, hat man nach *Fund.* S. 97 die Gröfsen Δ' aus den vorhergehenden Δ durch die Formel

$$\Delta' = \sqrt{\left(\frac{mm'(\Delta + n)}{m + \Delta}\right)}$$

zu berechnen, woraus folgt:

$$\frac{m'}{\Delta'} = \sqrt{\frac{m'}{n'}}\cdot\sqrt{\frac{1 + \frac{m}{\Delta}}{2\sqrt{\frac{m}{\Delta}}}}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{\Delta}{n}}}{1 + \frac{\Delta}{n}}},$$

$$\frac{\Delta'}{n'} = \sqrt{\frac{m'}{n'}}\cdot\sqrt{\frac{2\sqrt{\frac{m}{\Delta}}}{1 + \frac{m}{\Delta}}}\cdot\sqrt{\frac{1 + \frac{\Delta}{n}}{2\sqrt{\frac{\Delta}{n}}}}.$$

Setzt man daher

$$a = \log\frac{m}{n}, \quad b = \log\frac{m}{\Delta}, \quad c = \log\frac{\Delta}{n},$$
$$a' = \alpha, \quad b' = \tfrac{1}{2}(\alpha+\beta-\gamma), \quad c' = \tfrac{1}{2}(\alpha-\beta+\gamma),$$
$$a'' = \alpha', \quad b'' = \tfrac{1}{2}(\alpha'+\beta'-\gamma'), \quad c'' = \tfrac{1}{2}(\alpha'-\beta'+\gamma'),$$
$$\text{etc.} \qquad \text{etc.},$$

wo man immer, wenn man in den *Gaufsischen* Tafeln $A = a^{(i)}$, $b^{(i)}$ oder $c^{(i)}$ nimmt, die Gröfsen $\alpha^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ oder $\gamma^{(i)}$ durch die Formel

$$C - \tfrac{1}{2}A - 0.3010300$$

erhält, so wird

$$\log\frac{m^{(i)}}{\Delta^{(i)}} = b^{(i)}, \qquad \log\frac{\Delta^{(i)}}{n^{(i)}} = c^{(i)}.$$

Für das Integral

$$\int_0^\varphi \frac{d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi)}} = \Phi$$

findet man hiernach durch die Formel S. 98

$$\log\operatorname{tang}\mu\Phi = \log\operatorname{tang}\varPhi + \log\frac{\Delta'\Delta''\Delta'''\ldots.}{mm'm''\ldots.}$$
$$= \log\operatorname{tang}\varPhi + \log\frac{\mu}{m} - b' - b'' - b''' - \text{ etc.}$$

Man kann auch die ersten Gröfsen $\frac{m}{\Delta}$ und $\frac{\Delta}{n}$ auf analoge Art durch $\operatorname{tang}\varPhi$ finden. Sind nämlich b^0, c^0 positive Gröfsen, welche durch die Gleichungen

$$\pm\log\operatorname{tang}^2\varPhi = b^0, \qquad \pm\log\frac{n^2}{m^2}\operatorname{tang}^2\varPhi = c^0$$

bestimmt werden, so wird

$$\log\frac{m}{\Delta} = b = \tfrac{1}{2}(\alpha^0+\beta^0-\gamma^0), \qquad \log\frac{\Delta}{n} = c = \tfrac{1}{2}(\alpha^0-\beta^0+\gamma^0),$$

wo $\alpha^0 = a$. Die Gröfse $\mu\Phi$ ist der in den Reihen-Entwicklungen mit x bezeichnete Winkel.

Aus der von *Gaufs* angewandten Substitution

$$\sin\varPhi = \frac{2m\sin\varphi'}{(m+n)\cos^2\varphi' + 2m\sin^2\varphi'}$$

findet man

$$\frac{\sin\varphi'}{m'} = \frac{2\sin\varphi}{m+\Delta}, \qquad \operatorname{tang}\varPhi' = \frac{\Delta'}{m}\operatorname{tang}\varPhi,$$

wo, wie im Vorhergehenden,

$$\Delta = \sqrt{(mm\cos^2\varPhi + nn\sin^2\varPhi)}, \qquad \Delta' = \sqrt{(m'm'\cos^2\varPhi' + n'n'\sin^2\varPhi')}.$$

Hieraus folgt:

$\log \frac{\sin\varphi'}{m'} = \log \frac{\sin\varphi}{m} + \frac{1}{2}b - \beta, \quad \log \frac{\sin\varphi''}{m''} = \log \frac{\sin\varphi'}{m'} + \frac{1}{2}b' - \beta'$, etc.,
$\log\cos\phi' = \log\cos\phi + b' + \frac{1}{2}b - \beta, \; \log\cos\phi'' = \log\cos\phi' + b'' + \frac{1}{2}b' - \beta'$, etc.
Man hat so durch die bereits berechneten Werthe von $b^{(i)}$, $\beta^{(i)}$ und durch $\log\sin\phi$, $\log\cos\phi$ nacheinander durch bloſse Addition die Werthe von $\log\sin\phi'$, $\log\cos\phi'$, $\log\sin\phi''$, $\log\cos\phi''$ etc. Diese Gröſsen dienen dazu, die von *Gauſs* für das *unbestimmte* Integral zweiter Gattung gegebne Formel zu berechnen, welche man, mit einer kleinen Veränderung, so darstellen kann:

$$\int_0^\varphi \frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi + nn\sin^2\varphi)}} = -\nu\Phi + \frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} + \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''} + \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m''} + \text{etc.}$$

Bezeichnet man das vorstehende Integral mit P und, wie *Legendre*, mit F^I, E^I die ganzen, mit $F(\phi)$, $E(\phi)$ die unbestimmten elliptischen Integrale erster und zweiter Gattung, so daſs $F(\phi) = \Phi$, so wird, für $m = 1$,

$$E(\phi) = \tfrac{1}{2}(\Phi + P) + \tfrac{1}{2}(k'k')(\Phi - P),$$
$$\frac{E^I}{F^I} = \tfrac{1}{2}(1-\nu) + \tfrac{1}{2}(k'k')(1+\nu),$$

und daher

$$\frac{F^I E(\varphi) - E^I F(\varphi)}{F^I} = \tfrac{1}{2}k^2(P + \nu\Phi)$$
$$= \frac{mm - nn}{2mm}\left[\frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'} + \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi'\sin\varphi''}{m''} + \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda}\cdot\frac{\cos\varphi''\sin\varphi'''}{m'''} + \dots\right].$$

Zufolge des oben für $\frac{\sin\varphi'}{m'}$ gegebenen Werthes wird

$$\int \frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} = \int \frac{2\sin\varphi\cos\varphi\, d\varphi}{\Delta(m+\Delta)}$$

und daher

$$\tfrac{1}{2}(mm - nn)\int_0^\varphi \frac{\cos\varphi\sin\varphi'}{m'}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta} = \log\frac{2m}{m+\Delta}.$$

Setzt man daher, wie in den *Fundam.*,

$$e^{\int_0^\varphi \frac{F^I E(\varphi) - E^I F(\varphi)}{F^I}\cdot\frac{d\varphi}{\Delta}} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(o)},$$

und bemerkt die Formeln

$$(mm - nn)\frac{\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} = m'm' - n'n', \quad (mm - nn)\frac{\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} = m''m'' - n''n'', \text{ etc.},$$
$$\frac{d\varphi}{\Delta} = \frac{d\varphi'}{\Delta'} = \frac{d\varphi''}{\Delta''} \text{ etc.},$$

so erhält man einen neuen zur Berechnung bequemen Ausdruck für die Function $\Theta(u)$:

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(o)} = \frac{2m}{m+\Delta}\cdot\left(\frac{2m'}{m'+\Delta'}\right)^2\cdot\left(\frac{2m''}{m''+\Delta''}\right)^4\cdot\left(\frac{2m'''}{m'''+\Delta'''}\right)^8\cdots.$$

Da $\log\frac{2m}{m+\Delta} = \frac{1}{2}b-\beta$, so giebt diese Formel die folgende:

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \tfrac{1}{2}b-\beta+b'-2\beta'+2b''-4\beta''+4b'''-8\beta''' \text{ etc.},$$

welcher man noch verschiedne andre Formen geben kann.

3.

Setzt man $k = \frac{\sqrt{(mm-nn)}}{m}$, $k^{(2)} = \frac{\sqrt{(m'm'-n'n')}}{m'}$, ferner

$$K^{(2)} = \tfrac{1}{2}(1+k').K, \qquad \Phi = \operatorname{am}\left(\frac{2Kx}{\pi}, k\right),$$

so wird

$$\Phi' = \operatorname{am}\left(\frac{2K^{(2)}x}{\pi}, k^{(2)}\right).$$

Zufolge der S. 92 gemachten Bemerkung verwandelt sich daher k, K, Φ in $k^{(2)}$, $K^{(2)}$, Φ', wenn man q^2 für q setzt. Dies erhält eine Bestätigung durch die Formel

$$\operatorname{tang}\Phi = \frac{m\operatorname{tang}\varphi'}{\Delta'} = \frac{2}{1+k'}\cdot\frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\sqrt{(1-k^{(2)2}\sin^2\varphi')}}.$$

Wenn man nämlich aus den S. 88 für $\sin\Phi$, $\cos\Phi$, $\Delta\Phi$ gegebnen Zerfällungen in unendliche Producte den Werth von $\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta\varphi}$ entnimmt und in demselben q^2 für q setzt, so erhält man sogleich den Ausdruck für $\frac{1}{2}(1+k')\operatorname{tang}\Phi$. Umgekehrt kann man auf diese Art die vorstehende Formel, durch welche Φ aus Φ' bestimmt wird, unmittelbar aus jenen Factorenzerfällungen von $\sin\Phi$, $\cos\Phi$, $\Delta\Phi$ ableiten.

Für $m=1$ hat man die Formel S. 101 (16.):

$$\frac{2k'k'K}{\pi}\cdot\frac{\operatorname{tang}\varphi}{\Delta\varphi} = \frac{2k'K}{\pi}\cdot\frac{\cos\operatorname{coam}u}{\cos\operatorname{am}u} = \operatorname{tang}x-\frac{4q\sin 2x}{1+q}+\frac{4q^2\sin 4x}{1+q^2} - \text{ etc.}$$

Setzt man hierin q^2 für q, so verwandelt sich der Ausdruck links in

$$\frac{2k'}{1+k'}\cdot\frac{2K}{\pi}\cdot\frac{\operatorname{tang}\varphi'}{\sqrt{(1-k^{(2)2}\sin^2\varphi')}} = \frac{2k'K}{\pi}\operatorname{tang}\Phi.$$

Man kann daher zu den in den *Fundam.* mitgetheilten Reihen noch die folgende fügen:

$$\frac{2k'K}{\pi}\operatorname{tang}\operatorname{am}\frac{2Kx}{\pi} = \operatorname{tang}x-\frac{4q^2\sin 2x}{1+q^2}+\frac{4q^4\sin 4x}{1+q^4}-\frac{4q^6\sin 6x}{1+q^6}+\text{ etc.}$$

Ueberhaupt bietet die Betrachtung, durch welche diese Formel abgeleitet ist, ein wichtiges Mittel dar, aus den gefundnen Resultaten mit Leichtigkeit neue abzuleiten. Man bemerke z. B., dafs, wenn man in dem für $\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}}$ oben gefundnen Ausdruck $k^{(2)}$ für k oder q^2 für q setzt und ihn dann in's Quadrat erhebt, dasselbe Resultat sich ergiebt, als wenn man den Ausdruck mit $\frac{m+\Delta}{2m}$ multiplicirt. Da sich nach S. 52. $k'K$ dadurch, dafs man q^2 für q setzt, in $\sqrt{k'}.K$ verwandelt und nach S. 165.

$$\frac{\Delta}{m}.\Theta(u) = \sqrt{k'}.\Theta(u+K)$$

ist, so erhält man hieraus die Gleichung

$$2\Theta^2(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)}) = \sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)}\Theta u + \sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}\Theta(u+K).$$

Die oben gegebne Gleichung

$$\frac{\sin\varphi'}{m'} = \frac{2\sin\varphi}{m+\Delta}$$

kann man auch so darstellen:

$$k^{(2)}\sin^2\Phi' = \frac{1-k'}{1+k'}.\sin^2\Phi' = \frac{m-\Delta}{m+\Delta}.$$

Aus der Formel S. 173 (1.) folgt aber, wenn man $k^{(2)}$ für k setzt,

$$k^{(2)}\sin^2\Phi' = \frac{1-k'}{1+k'}\sin^2\Phi' = \frac{H^2(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}{\Theta^2(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}$$

und daher

$$\frac{H^2(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}{\Theta^2(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})} = \frac{m-\Delta}{m+\Delta} = \frac{\Theta u - \sqrt{k'}.\Theta(u+K)}{\Theta u + \sqrt{k'}.\Theta(u+K)},$$

woraus

$$2H^2(\tfrac{1}{2}(1+k').u, k^{(2)}) = \sqrt{\left(\frac{2K}{\pi}\right)}\Theta u - \sqrt{\left(\frac{2k'K}{\pi}\right)}\Theta(u+K)$$

folgt. Ersetzt man die Formel

$$\sqrt{k^{(2)}}\sin\Phi' = \sqrt{\left(\frac{1-k'}{1+k'}\right)}\sin\Phi' = \frac{k\sin\varphi}{1+\frac{\Delta}{m}}$$

durch die folgende:

$$\frac{H(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})}{\Theta(\frac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)})} = \sqrt{k}.\frac{Hu}{\Theta u + \sqrt{k'}.\Theta(u+K)},$$

so erhält man

$$2H(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)}).\Theta(\tfrac{1}{2}(1+k')u, k^{(2)}) = \sqrt{\left(\frac{2kK}{\pi}\right)}H(u):$$

eine Formel, welche sich unmittelbar aus der Darstellung von Θu und $\mathrm{H} u$ als unendliche Producte ergiebt. Die drei gefundnen Formeln geben die Gleichungen

$$2[1-2q^2\cos 2x+2q^8\cos 4x-2q^{18}\cos 6x+\dots]^2$$
$$=(1+2q+2q^4+2q^9+\dots)(1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\dots)$$
$$+(1-2q+2q^4-2q^9+\dots)(1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\dots),$$

$$8[\sqrt{q}.\sin x-\sqrt{q^9}.\sin 3x+\sqrt{q^{25}}.\sin 5x-\dots]^2$$
$$=(1+2q+2q^4+2q^9+\dots)(1-2q\cos 2x+2q^4\cos 4x-2q^9\cos 6x+\dots)$$
$$-(1-2q+2q^4-2q^9+\dots)(1+2q\cos 2x+2q^4\cos 4x+2q^9\cos 6x+\dots),$$

$$[1-2q^2\cos 2x+2q^8\cos 4x-2q^{18}\cos 6x+\dots](\sqrt{q}.\sin x-\sqrt{q^3}.\sin 3x+\sqrt{q^5}.\sin 5x\dots)$$
$$=(\sqrt[4]{q}+\sqrt[4]{q^9}+\sqrt[4]{q^{25}}+\dots)(\sqrt[4]{q}.\sin x-\sqrt[4]{q}.\sin 3x=\sqrt[4]{q}.\sin 5x-\dots).$$

Dies sind die einfachsten Fälle sehr wichtiger und sehr allgemeiner Formeln für die Verwandlung der Potenzen und Producte der Functionen Θu und $\mathrm{H} u$ in ein Aggregat linearer Ausdrücke.

Die Rechnungsvorschriften, welche auf der von *Legendre* hauptsächlich untersuchten *Landen*schen Transformation beruhen, erfordern zur Auffindung der Werthe der unbestimmten Integrale erster Gattung den Gebrauch trigonometrischer Tafeln. Man berechnet φ_1, φ_2 etc. durch die Formel

$$\log\operatorname{tang}(\varphi_1-\varphi)=\log\operatorname{tang}\varphi-a,\quad\text{etc.}$$

Die Winkel $\frac{1}{2}\varphi$, $\frac{1}{4}\varphi_2$ etc. nähern sich sehr bald der Gränze

$$\mu\Phi=\mu\int_0^{\varphi}\frac{d\varphi}{\sqrt{(mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi)}}.$$

Um die unbestimmten Integrale zweiter Gattung zu finden, setze man

$$\frac{Z}{m}=\frac{F^I E(\varphi)-E^I F(\varphi)}{F^I}=\frac{mm-nn}{2m}\left[\int_0^{\varphi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta}+\nu\Phi\right]$$

und bezeichne mit $\frac{Z_i}{m^{(i)}}$ die analogen Gröfsen, welche man erhält, wenn man $m^{(i)}$, $n^{(i)}$, φ_i für m, n, φ setzt. Die *Legendre*schen Formeln geben dann

$$Z_1=Z-4\lambda'\sin\varphi_1,\qquad Z_2=Z_1-4\lambda''\sin\varphi_2,\quad\text{etc.}$$

und daher

$$Z=4[\lambda'\sin\varphi_1+\lambda''\sin\varphi_2+\lambda'''\sin\varphi_3+\text{etc.}].$$

Multiplicirt man diese Formel mit

$$\frac{d\varphi}{\Delta}=\frac{1}{2}\frac{d\varphi_1}{\Delta_1}=\frac{1}{4}\frac{d\varphi_2}{\Delta_2}\ \text{etc.},$$

und bemerkt, dafs

$$\frac{4\lambda'\sin\varphi_1\,d\varphi}{\Delta}=\frac{1}{4}(mm-nn).\frac{\sin 2\varphi\,d\varphi}{mm\cos^2\varphi+nn\sin^2\varphi}=-\frac{1}{2}d\log\frac{\Delta}{m},$$

so erhält man durch Integration

$$e^{\int_0^\varphi \frac{Z\,d\varphi}{\Delta}} = \frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \sqrt{\frac{m}{\Delta}} \cdot \sqrt[4]{\frac{m'}{\Delta_1}} \cdot \sqrt[4]{\frac{m''}{\Delta_2}} \ldots,$$

welches der in den *Fundam.* S. 151. durch Betrachtung der unendlichen Producte gefundne Ausdruck ist. Es steht aber dort aus Versehen der inverse Werth. Eben so müssen S. 150. für $\frac{1}{\sqrt{k'}}\Delta\,\text{am}\,\frac{2Kx}{\pi}$, $\frac{1}{\sqrt{k^{(p)\prime}}}\Delta\,\text{am}\,\frac{2K^{(p)}x}{\pi}$, $\Delta^{\frac{1}{2}}\Delta^{(2)\frac{1}{4}}\ldots$, $\frac{\Theta\left(\frac{2Kx}{\pi}\right)}{\Theta(0)}$ die inversen Werthe gesetzt werden. Die Gröfsen Δ, Δ_1 etc. kann man durch die Formeln

$$\cos(2\Phi - \Phi_1) = \frac{\Delta}{m}, \qquad \cos(2\Phi_1 - \Phi_1) = \frac{\Delta_1}{m'} \quad \text{etc.}$$

berechnen. Diese geben den Ausdruck

$$\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \frac{1}{\sqrt{(\cos(2\varphi - \varphi_1))}} \cdot \frac{1}{\sqrt[4]{(\cos(2\varphi_1 - \varphi_2))}} \cdot \frac{1}{\sqrt[8]{(\cos(2\varphi_2 - \varphi_3))}} \ldots,$$

welcher blofs von den Amplituden abhängt. Will man die in den *Fundam.* mitgetheilte Berechnungsweise der Gröfsen Δ_1, Δ_2 etc. anwenden, so gebraucht man wieder mit Vortheil die *Gaufs*ischen Tafeln.

4.

Ich will die hauptsächlichsten der im Vorigen mitgetheilten Formeln durch ein von *Legendre* ebenfalls behandeltes numerisches Beispiel erläutern, welches sich auf einen schon ziemlich grofsen Modul $k = \sin 75^0$ bezieht.

Es sei

$$m = 1, \qquad \log n = \log\sin 15^0 = 9.4129962,$$
$$\Phi = 47^0\, 3'\, 30''\, 95,$$

wo $\tang\Phi = \sqrt{\frac{2}{\sqrt{3}}}$. Die benutzten Tafeln sind die auf 7 Stellen berechneten *Matthiessischen* (Altona 1817). Bei den Interpolationen ist noch immer die 8te Stelle mitgenommen worden, um den Fehler in der 7ten zu verringern.

Setzt man $a = \log\frac{1}{n} = 0.5870038$, ferner

$$\log\tang\Phi^2 = b^0 = 0.0624693.6,$$
$$\log\frac{n^2}{m^2}\tang\Phi^2 = c^0 = 8.8884617.6,$$

und sucht nach der in der Abhandlung angegebnen Regel aus den *Matthiessischen* Tafeln die Werthe

$$\beta^0 = 0.0011222.3,$$
$$\gamma^0 = 0.2870960.3,$$

so findet man nach und nach:

$$\log\frac{m}{\Delta} = b = \tfrac{1}{2}(a+\beta^0-\gamma^0) = 0.1505150, \qquad \beta = 0.0064882.3,$$
$$\log\frac{\Delta}{n} = c = a - b = 0.43648880, \qquad \gamma = 0.0526732.3,$$
$$a' = 0.0924352.2, \quad b' = 0.0231251.1, \quad c' = 0.0693101.1,$$
$$\beta' = 0.0001539.7, \quad \gamma' = 0.0013812.0,$$
$$a'' = 0.0024545.8, \quad b'' = 0.0006136.7, \quad c'' = 0.0018409.1,$$
$$\beta'' = 0.0000001.0, \quad \gamma'' = 0.0000009.0,$$
$$a''' = 0.0000018.0, \quad b''' = 0.0000005.0, \quad c''' = 0.0000013.0.$$

Hat man hier aus a^i, b^i, c^i die Gröfsen α^i, β^i, γ^i gefunden, indem man nach der allgemeinen Regel

$$a^i,\ b^i \text{ oder } c^i = A \quad \text{und} \quad \alpha^i,\ \beta^i,\ \gamma^i = C - \tfrac{1}{2}A - 0.300103000$$

setzt, wo C aus A durch die *Matth.* Tafeln gegeben ist, so wird

$$a^{i+1} = \alpha^i, \qquad b^{i+1} = \tfrac{1}{2}(\alpha^i+\beta^i-\gamma), \qquad c^{i+1} = \tfrac{1}{2}(\alpha^i-\beta^i+\gamma^i),$$

und daher immer $a^i = b^i + c^i$. Wenn daher $\log\frac{1}{n}$, $\log\operatorname{tang}\varphi$ gegeben ist, so hat man zur Berechnung aller vorstehenden Gröfsen nur *achtmal* in die Tafeln zu gehen. Hiermit ist aber schon fast alles gegeben, was zur Berechnung der ganzen und unbestimmten Integrale erster und zweiter Gattung und der Gröfsen $\log q$ und $\log\Theta$ erforderlich ist. Denn man hat zunächst

$$\log\mu = \log\frac{\pi}{2F^I} = \log n + \tfrac{1}{2}a + \tfrac{1}{2}a' + \tfrac{1}{2}a'' + \tfrac{1}{2}a''' = 9.75394390.$$

Um $\log q$ zu finden, braucht man noch den log. des vierten Theils des Moduls

$$\log\lambda = \log\tfrac{1}{4}\sqrt{(mm-nn)} = 9.3828837.7;$$

dann wird

$$\log q = 2\log\lambda + a - 3[\tfrac{1}{2}a' + \tfrac{1}{4}a'' + \tfrac{1}{8}a'''] = 9.2122768.7.$$

Setzt man ferner $\Phi = F(\varphi)$, so wird

$$\log\operatorname{tang}\mu\Phi = \log\operatorname{tang}\varphi + \log\frac{\mu}{m} - [b' + b'' + b'''] = 9.7614393.0.$$

Der genaue Werth von $x = \mu\Phi$ ist 30^0 und man hat nach den Tafeln $\log\operatorname{tang} 30^0 = 9.7614393.7$. Man findet ferner

$$\log\frac{\Theta(u)}{\Theta(0)} = \int_0^\varphi \left[E(\varphi) - \frac{E^I}{F^I}F(\varphi)\right]\frac{d\varphi}{\Delta}$$
$$= \tfrac{1}{2}b + b' + 2b'' + 4b''' - [\beta + 2\beta' + 4\beta''] = 0.0928153.9.$$

Um die Integrale zweiter Gattung zu erhalten, mufs man zuvor durch Addition und Subtraction die Logarithmen der Gröfsen m^i, n^i, λ^i bilden:

$$\log n' = 9.7064981, \quad \log m' = 9.7989333.2, \quad \log\lambda' = 8.9668342,$$
$$\log n'' = 9.7527157.1, \quad \log m'' = 9.7551702.9, \quad \log\lambda'' = 8.1784981,$$
$$\log n''' = 9.7539430.0, \quad \log m''' = 9.7539448.0, \quad \log\lambda''' = 6.60305,$$
$$\log n^{\text{IV}} = 9.7539439.0, \quad \log m^{\text{IV}} = 9.7539439.0, \quad \log\lambda^{\text{IV}} = 3.452.$$

Hier ist

$$\log n^{i+1} = \log n^i + \tfrac{1}{2}a^i, \quad \log m^i = \log n^i + a^i, \quad \log\lambda^{i+1} = 2\log\lambda^i - \log m^{i+1}.$$

Hiernach findet man

$$\log\frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} = 9.4689309, \qquad \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} = 0.2943952.7,$$
$$\log\frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} = 8.1932888, \qquad \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} = 0.01560519.0,$$
$$\log\frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda} = 5.34343, \qquad \frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda} = 0.0000220.5,$$
$$\nu = 0.3100232.2.$$

Der gefundene Werth von ν, welcher das Aufschlagen *dreier* Zahlen erforderte, giebt

$$\nu = \frac{-1}{F^I}\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi}; \qquad \frac{E^I}{F^I} = \frac{mm+nn}{2mm} - \frac{mm-nn}{2mm}\,\nu.$$

Zur Berechnung des unbestimmten Integrals zweiter Gattung geht man von den Werthen von $\log\sin\Phi$, $\log\cos\Phi$ aus und findet dann durch successives Addiren:

$\log\frac{\sin\varphi}{m}$	$= 9.8645412.7$	$\log\cos\Phi$	$= 9.8333065.7$
$\frac{1}{2}b-\beta$	$= 0.0687692.8$	$b'+\frac{1}{2}b-\beta$	$= 0.0918943.9$
$\log\frac{\sin\varphi}{m'}$	$= 9.9333105.5$	$\log\cos\Phi'$	$= 9.9252009.6$
$\frac{1}{2}b'-\beta'$	$= 0.0114085.9$	$b''+\frac{1}{2}b'-\beta'$	$= 0.0120222.6$
$\log\frac{\sin\varphi''}{m''}$	$= 9.9447191.4$	$\log\cos\Phi''$	$= 9.9372232.2$
$\frac{1}{2}b''-\beta''$	$= 0.0003067.4$	$b'''+\frac{1}{2}b''-\beta''$	$= 0.0003072.4$
$\log\frac{\sin\varphi'''}{m'''}$	$= 9.9450258.8$	$\log\cos\Phi'''$	$= 9.9375304.6$
$\frac{1}{2}b'''$	$= 2.5$		
$\log\frac{\sin\varphi^{\text{IV}}}{m^{\text{IV}}}$	$= 9.9450261.3$		

$$\log \frac{\cos\varphi \sin\varphi'}{m'} = 9.7666171.2 \qquad \frac{\cos\varphi \sin\varphi'}{m'} = 0.5842747.0$$

$$\log \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi' \sin\varphi''}{m''} = 9.3388510.0 \qquad \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi' \sin\varphi''}{m''} = 0.2181981.5$$

$$\log \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi'' \sin\varphi'''}{m'''} = 8.0755378.6 \qquad \frac{4\lambda''\lambda''}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi'' \sin\varphi'''}{m'''} = 0.0118997.5$$

$$\log \frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi''' \sin\varphi^{\mathrm{IV}}}{m^{\mathrm{IV}}} = 5.22599 \qquad \frac{8\lambda'''\lambda'''}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi''' \sin\varphi^{\mathrm{IV}}}{m^{\mathrm{IV}}} = 0.0000168.3$$

$$\log \nu = 9.4913942.9 \qquad 0.8143894.3$$

$$\log \nu\Phi = \log \frac{\nu}{\mu} 30^0 = 9.4564490.9 \qquad \nu\Phi = 0.2860547.2$$

$$\int_0^\varphi \frac{\cos 2\varphi \, d\varphi}{\Delta\varphi} = 0.5283347.1.$$

Man hat zur Berechnung des vorstehenden Integrals zwar nur *fünf* Zahlen aufzuschlagen, aber sehr viele Additionen zu machen. Es wird daher eben so vortheilhaft die Gröfse $\frac{\cos\varphi \sin\varphi'}{m'} +$ etc. auch durch die Formel

$$\frac{\cos\varphi \sin\varphi'}{m'} + \frac{2\lambda'\lambda'}{\lambda\lambda} \cdot \frac{\cos\varphi' \sin\varphi''}{m''} + \text{etc.}$$

$$= \frac{1}{8\lambda\lambda}\left[E(\Phi) - \frac{E^I}{F^I} F(\Phi)\right] = \frac{1}{2\lambda\lambda\mu} \cdot \frac{q \sin 2x - 2q^4 \sin 4x + 3q^9 \sin 6x \text{ etc.}}{1 - 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x \text{ etc.}}$$

berechnet werden können. Da hier $x = 30^0$ und $\log q = 9.2122768.7$ ist, so findet man, wenn man den Bruch mit $\frac{Z}{N}$ bezeichnet,

$$q \sin 2x = 0.1411911.5 \qquad q\cos 2x = 0.0815167.5$$

$$2q^4 \sin 4x = 0.0012236.8 \qquad -q^4 \cos 4x = 0.0003532.4$$

$$Z = 0.1399674.7 \qquad -q^9 \cos 6x = 0.8$$

$$\log Z = 9.1460271.7 \qquad N = 9.8362601.8$$

$$\log N = 9.9223413.9 \qquad = 1 - 2q\cos 2x + 2q^4 \cos 4x - 2q^9 \cos 6x$$

$$\log \frac{Z}{2\lambda\lambda\mu N} = 9.9108321.4; \qquad \frac{1}{2\lambda\lambda\mu} \cdot \frac{Z}{N} = 0.8143894.4.$$

Die frühere Rechnung gab dieselbe Gröfse 0.8143894.3. Den Werth von $\log N$ kann man auch aus der Formel

$$\log N = \log \frac{\Theta u}{\Theta 0} + \tfrac{1}{2} \log \frac{n}{\mu}$$

erhalten. Wir fanden aber oben

$$\log \frac{\Theta u}{\Theta 0} = 0.0928153.9,$$

$$\tfrac{1}{2} \log \frac{n}{\mu} = 9.8295261.5,$$

und hieraus wird

$$\log N = 9.9223415.4,$$

welches nur um 1.5 in der 7ten Stelle von dem durch die Reihen-Entwicklung gefundnen Werthe abweicht.

Sehr leicht wird die Berechnung von ν durch die Formel

$$-(1+\sqrt{k'})\int_0^{\frac{1}{2}\pi}\frac{\cos 2\varphi\, d\varphi}{\Delta\varphi} = (1-\sqrt{k'})F^I - \frac{\pi D}{k^2\left(\frac{2F^I}{\pi}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

oder

$$\frac{\sqrt{m}+\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{\nu}{\mu} = \frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}}\cdot\frac{1}{\mu} - \frac{\mu^{\frac{3}{2}}D}{8\lambda\lambda}.$$

Es ist

$$\frac{\sqrt{m}-\sqrt{n}}{\sqrt{m}+\sqrt{n}} = \frac{m-n}{2(m'+n')} = \frac{mm-nn}{2(m'+n')(m+n)} = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''},$$

$$\sqrt{m}+\sqrt{n} = \sqrt{(2(m'+n'))} = 2\sqrt{m''},$$

und daher, wenn man q^{16}, als unmerklich, wegläfst,

$$\nu = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} - \frac{\sqrt{m}.\mu^{\frac{5}{2}}D}{16\lambda\lambda\sqrt{m''}} = \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} - \frac{4\sqrt{m}.\mu^{\frac{5}{2}}q^4}{\sqrt{m''}.\lambda\lambda}.$$

Es ist

$$\log\frac{2\lambda\lambda}{m'm''} = 9.5126939.3; \qquad \frac{2\lambda\lambda}{m'm''} = 0.3256071.8,$$

$$\log\frac{4\sqrt{m}.\mu^{\frac{5}{2}}q^4}{\sqrt{m''}.\lambda\lambda} = 8.1926745.4; \qquad \frac{4\sqrt{m}.\mu^{\frac{5}{2}}q^4}{\sqrt{m''}.\lambda\lambda} = 0.0155838.4,$$

$$\nu = 0.3100233.4,$$

welches nur um 1.2 in der 7ten Stelle vom oben gefundnen Werthe abweicht.

Königsberg, den 12. Juni 1843.

Ich füge die folgende Tabelle hinzu, welche für die Werthe des Argumentes $\vartheta = \arc\sin k$ von Zehntel zu Zehntel Grad die Werthe von $\log q$ bis auf 5 Decimalstellen nebst den ersten Differenzen giebt.

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
0.0	Infinitum.		5.0	6.67813	1722	10.0	7.28185	869
0.1	3.27964	0.60206	5.1	6.69535	1689	10.1	7.29054	860
0.2	3.88170	35218	5.2	6.71224	1657	10.2	7.29914	852
0.3	4.23388	24988	5.3	6.72881	1626	10.3	7.30766	844
0.4	4.48376	19382	5.4	6.74507	1596	10.4	7.31610	836
0.5	4.67758	15836	5.5	6.76103	1567	10.5	7.32446	828
0.6	4.83594	13390	5.6	6.77670	1540	10.6	7.33274	820
0.7	4.96984	11599	5.7	6.79210	1513	10.7	7.34094	813
0.8	5.08583	10231	5.8	6.80723	1488	10.8	7.34907	805
0.9	5.18814	9152	5.9	6.82211	1462	10.9	7.35712	798
1.0	5.27966	8279	6.0	6.83673	1439	11.0	7.36510	791
1.1	5.36245	7457	6.1	6.85112	1415	11.1	7.37301	784
1.2	5.43702	7054	6.2	6.86527	1392	11.2	7.38085	777
1.3	5.50756	6437	6.3	6.87919	1371	11.3	7.38862	771
1.4	5.57193	5994	6.4	6.89290	1349	11.4	7.39633	763
1.5	5.63187	5606	6.5	6.90639	1329	11.5	7.40396	758
1.6	5.68793	5267	6.6	6.91968	1310	11.6	7.41154	750
1.7	5.74060	4965	6.7	6.93278	1289	11.7	7.41904	745
1.8	5.79025	4697	6.8	6.94567	1272	11.8	7.42649	738
1.9	5.83722	4456	6.9	6.95839	1252	11.9	7.43387	732
2.0	5.88178	4239	7.0	6.97091	1236	12.0	7.44119	727
2.1	5.92417	4042	7.1	6.98327	1218	12.1	7.44846	720
2.2	5.96459	3862	7.2	6.99545	1201	12.2	7.45566	714
2.3	6.00321	3697	7.3	7.00746	1185	12.3	7.46280	709
2.4	6.04018	3547	7.4	7.01931	1169	12.4	7.46989	703
2.5	6.07565	3408	7.5	7.03100	1154	12.5	7.47692	698
2.6	6.10973	3279	7.6	7.04254	1139	12.6	7.48390	693
2.7	6.14252	3160	7.7	7.05393	1124	12.7	7.49083	686
2.8	6.17412	3050	7.8	7.06517	1110	12.8	7.49769	682
2.9	6.20462	2946	7.9	7.07627	1096	12.9	7.50451	677
3.0	6.23408	2849	8.0	7.08723	1083	13.0	7.51128	671
3.1	6.26257	2759	8.1	7.09806	1069	13.1	7.51799	667
3.2	6.29016	2674	8.2	7.10875	1056	13.2	7.52466	661
3.3	6.31690	2595	8.3	7.11931	1044	13.3	7.53127	657
3.4	6.34285	2519	8.4	7.12975	1032	13.4	7.53784	651
3.5	6.36804	2449	8.5	7.14007	1020	13.5	7.54435	648
3.6	6.39253	2381	8.6	7.15027	1008	13.6	7.55083	642
3.7	6.41634	2318	8.7	7.16035	996	13.7	7.55725	638
3.8	6.43952	2258	8.8	7.17031	986	13.8	7.56363	633
3.9	6.46210	2201	8.9	7.18017	974	13.9	7.56996	629
4.0	6.48411	2146	9.0	7.18991	964	14.0	7.57625	625
4.1	6.50557	2095	9.1	7.19955	953	14.1	7.58250	620
4.2	6.52652	2046	9.2	7.20908	944	14.2	7.58870	616
4.3	6.54698	1999	9.3	7.21852	933	14.3	7.59486	612
4.4	6.56697	1954	9.4	7.22785	923	14.4	7.60098	607
4.5	6.58651	1911	9.5	7.23708	914	14.5	7.60705	604
4.6	6.60562	1870	9.6	7.24622	904	14.6	7.61309	599
4.7	6.62432	1831	9.7	7.25526	895	14.7	7.61908	596
4.8	6.64263	1793	9.8	7.26421	887	14.8	7.62504	591
4.9	6.66056	1757	9.9	7.27308	877	14.9	7.63095	588
5.0	6.67813	1722	10.0	7.28185	869	15.0	7.63683	584

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
15.0	7.63683	584	20.0	7.89068	443	25.0	8.08971	359
15.1	7.64267	580	20.1	7.89511	440	25.1	8.09330	357
15.2	7.64847	577	20.2	7.89951	438	25.2	8.09687	356
15.3	7.65424	572	20.3	7.90389	436	25.3	8.10043	354
15.4	7.65996	570	20.4	7.90825	434	25.4	8.10397	354
15.5	7.66566	565	20.5	7.91259	433	25.5	8.10751	351
15.6	7.67131	562	20.6	7.91692	430	25.6	8.11102	351
15.7	7.67693	559	20.7	7.92122	428	25.7	8.11453	350
15.8	7.68252	555	20.8	7.92550	426	25.8	8.11803	348
15.9	7.68807	552	20.9	7.92976	424	25.9	8.12151	347
16.0	7.69359	548	21.0	7.93400	423	26.0	8.12498	345
16.1	7.69907	545	21.1	7.93823	420	26.1	8.12843	345
16.2	7.70452	542	21.2	7.94243	418	26.2	8.13188	343
16.3	7.70994	539	21.3	7.94661	417	26.3	8.13531	342
16.4	7.71533	535	21.4	7.95078	415	26.4	8.13873	341
16.5	7.72068	533	21.5	7.95493	413	26.5	8.14214	340
16.6	7.72601	529	21.6	7.95906	411	26.6	8.14554	338
16.7	7.73130	526	21.7	7.96317	409	26.7	8.14892	338
16.8	7.73656	523	21.8	7.96726	408	26.8	8.15230	336
16.9	7.74179	520	21.9	7.97134	406	26.9	8.15566	335
17.0	7.74699	517	22.0	7.97540	404	27.0	8.15901	334
17.1	7.75216	515	22.1	7.97944	402	27.1	8.16235	333
17.2	7.75731	511	22.2	7.98346	401	27.2	8.16568	331
17.3	7.76242	508	22.3	7.98747	399	27.3	8.16899	331
17.4	7.76750	507	22.4	7.99146	397	27.4	8.17230	329
17.5	7.77257	502	22.5	7.99543	396	27.5	8.17559	329
17.6	7.77759	500	22.6	7.99939	394	27.6	8.17888	327
17.7	7.78259	498	22.7	8.00333	392	27.7	8.18215	326
17.8	7.78757	494	22.8	8.00725	391	27.8	8.18541	325
17.9	7.79251	492	22.9	8.01116	389	27.9	8.18866	324
18.0	7.79743	490	23.0	8.01505	388	28.0	8.19190	323
18.1	7.80233	487	23.1	8.01893	386	28.1	8.19513	322
18.2	7.80720	484	23.2	8.02279	384	28.2	8.19835	321
18.3	7.81204	482	23.3	8.02663	383	28.3	8.20156	320
18.4	7.81686	479	23.4	8.03046	381	28.4	8.20476	319
18.5	7.82165	476	23.5	8.03427	380	28.5	8.20795	318
18.6	7.82641	475	23.6	8.03807	378	28.6	8.21113	317
18.7	7.83116	471	23.7	8.04185	377	28.7	8.21430	315
18.8	7.83587	470	23.8	8.04562	375	28.8	8.21745	315
18.9	7.84057	467	23.9	8.04937	374	28.9	8.22060	314
19.0	7.84524	464	24.0	8.05311	372	29.0	8.22374	313
19.1	7.84988	463	24.1	8.05683	371	29.1	8.22687	312
19.2	7.85451	460	24.2	8.06054	370	29.2	8.22999	311
19.3	7.85911	457	24.3	8.06424	368	29.3	8.23310	310
19.4	7.86368	456	24.4	8.06792	367	29.4	8.23620	309
19.5	7.86824	453	24.5	8.07159	365	29.5	8.23929	308
19.6	7.87277	451	24.6	8.07524	364	29.6	8.24237	307
19.7	7.87728	449	24.7	8.07888	362	29.7	8.24544	306
19.8	7.88177	447	24.8	8.08250	361	29.8	8.24850	306
19.0	7.88624	444	24.9	8.08611	360	29.9	8.25156	305
20.9	7.89068	443	25.0	8.08971	359	30.0	8.25461	303

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
30.0	8.25461	303	35.0	8.39646	265	40.0	8.52199	238
30.1	8.25764	303	35.1	8.39911	265	40.1	8.52437	237
30.2	8.26067	301	35.2	8.40176	264	40.2	8.52674	237
30.3	8.26368	301	35.3	8.40440	264	40.3	8.52911	236
30.4	8.26669	301	35.4	8.40704	262	40.4	8.53147	236
30.5	8.26970	301	35.5	8.40966	262	40.5	8.53383	235
30.6	8.27268	298	35.6	8.41228	262	40.6	8.53618	235
30.7	8.27567	297	35.7	8.41490	261	40.7	8.53853	235
30.8	8.27864	296	35.8	8.41751	260	40.8	8.54088	234
30.9	8.28160	296	35.9	8.42011	260	40.9	8.54322	233
31.0	8.28456	295	36.0	8.42271	259	41.0	8.54555	233
31.1	8.28751	294	36.1	8.42530	258	41.1	8.54788	233
31.2	8.29045	293	36.2	8.42788	258	41.2	8.55021	233
31.3	8.29338	292	36.3	8.43046	257	41.3	8.55254	232
31.4	8.29630	292	36.4	8.43303	257	41.4	8.55486	231
31.5	8.29922	290	36.5	8.43560	256	41.5	8.55717	231
31.6	8.30212	290	36.6	8.43816	256	41.6	8.55948	230
31.7	8.30502	289	36.7	8.44072	255	41.7	8.56178	230
31.8	8.30791	288	36.8	8.44327	254	41.8	8.56408	230
31.9	8.31079	288	36.9	8.44581	254	41.9	8.56638	229
32.0	8.31367	287	37.0	8.44835	253	42.0	8.56867	229
32.1	8.31654	286	37.1	8.45088	253	42.1	8.57096	229
32.2	8.31940	285	37.2	8.45341	252	42.2	8.57325	228
32.3	8.32225	284	37.3	8.45593	251	42.3	8.57553	227
32.4	8.32509	283	37.4	8.45844	251	42.4	8.57780	227
32.5	8.32792	283	37.5	8.46095	251	42.5	8.58007	227
32.6	8.33075	282	37.6	8.46346	250	42.6	8.58234	227
32.7	8.33357	281	37.7	8.46596	249	42.7	8.58461	226
32.8	8.33638	281	37.8	8.46845	249	42.8	8.58687	225
32.9	8.33919	280	37.9	8.47094	248	42.9	8.58912	225
33.0	8.34199	279	38.0	8.47342	248	43.0	8.59137	225
33.1	8.34478	278	38.1	8.47590	247	43.1	8.59362	225
33.2	8.34756	278	38.2	8.47837	247	43.2	8.59587	224
33.3	8.35034	277	38.3	8.48084	246	43.3	8.59811	224
33.4	8.35311	276	38.4	8.48330	245	43.4	8.60035	223
33.5	8.35587	275	38.5	8.48575	245	43.5	8.60258	223
33.6	8.35862	275	38.6	8.48820	245	43.6	8.60481	222
33.7	8.36137	274	38.7	8.49065	244	43.7	8.60703	222
33.8	8.36411	273	38.8	8.49309	244	43.8	8.60925	222
33.9	8.36684	273	38.9	8.49553	243	43.9	8.61147	221
34.0	8.36957	272	39.0	8.49796	242	44.0	8.61368	221
34.1	8.37229	271	39.1	8.50038	242	44.1	8.61589	221
34.2	8.37500	271	39.2	8.50280	242	44.2	8.61810	221
34.3	8.37771	270	39.3	8.50522	241	44.3	8.62031	220
34.4	8.38041	269	39.4	8.50763	240	44.4	8.62251	219
34.5	8.38310	269	39.5	8.51003	240	44.5	8.62470	219
34.6	8.38579	268	39.6	8.51243	240	44.6	8.62689	219
34.7	8.38847	267	39.7	8.51483	239	44.7	8.62908	219
34.8	8.39114	266	39.8	8.51722	239	44.8	8.63127	218
34.9	8.39380	266	39.9	8.51961	238	44.9	8.63345	218
35.0	8.39646	265	40.0	8.52199	238	45.0	8.63563	217

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
45.0	8.63563	217	50.0	8.74052	203	55.0	8.83912	192
45.1	8.63780	217	50.1	8.74255	202	55.1	8.84104	192
45.2	8.63997	217	50.2	8.74457	202	55.2	8.84296	192
45.3	8.64214	216	50.3	8.74659	202	55.3	8.84488	191
45.4	8.64430	216	50.4	8.74861	202	55.4	8.84679	192
45.5	8.64646	216	50.5	8.75063	201	55.5	8.84871	191
45.6	8.64862	215	50.6	8.75264	201	55.6	8.85062	192
45.7	8.65077	215	50.7	8.75465	201	55.7	8.85254	191
45.8	8.65292	215	50.8	8.75666	201	55.8	8.85445	190
45.9	8.65507	215	50.9	8.75867	201	55.9	8.85635	191
46.0	8.65722	214	51.0	8.76068	200	56.0	8.85826	191
46.1	8.65936	214	51.1	8.76268	200	56.1	8.86017	190
46.2	8.66150	213	51.2	8.76468	199	56.2	8.86207	191
46.3	8.66363	213	51.3	8.76667	200	56.3	8.86398	190
46.4	8.66576	213	51.4	8.76867	199	56.4	8.86588	190
46.5	8.66789	212	51.5	8.77066	199	56.5	8.86778	190
46.6	8.67001	212	51.6	8.77265	199	56.6	8.86968	189
46.7	8.67213	212	51.7	8.77464	199	56.7	8.87157	190
46.8	8.67425	212	51.8	8.77663	198	56.8	8.87347	189
46.9	8.67637	211	51.9	8.77861	198	56.9	8.87536	190
47.0	8.67848	211	52.0	8.78059	198	57.0	8.87726	189
47.1	8.68059	211	52.1	8.78257	198	57.1	8.87915	189
47.2	8.68270	210	52.2	8.78455	198	57.2	8.88104	189
47.3	8.68480	210	52.3	8.78653	197	57.3	8.88293	188
47.4	8.68690	210	52.4	8.78850	197	57.4	8.88481	189
47.5	8.68900	209	52.5	8.79047	197	57.5	8.88670	188
47.6	8.69109	209	52.6	8.79244	197	57.6	8.88858	189
47.7	8.69318	209	52.7	8.79441	196	57.7	8.89047	188
47.8	8.69527	209	52.8	8.79637	197	57.8	8.89235	188
47.9	8.69736	208	52.9	8.79834	196	57.9	8.89423	188
48.0	8.69944	208	53.0	8.80030	196	58.0	8.89611	188
48.1	8.70152	208	53.1	8.80226	195	58.1	8.89799	188
48.2	8.70360	207	53.2	8.80421	196	58.2	8.89987	187
48.3	8.70567	207	53.3	8.80617	195	58.3	8.90174	188
48.4	8.70774	207	53.4	8.80812	195	58.4	8.90362	187
48.5	8.70981	207	53.5	8.81007	195	58.5	8.90549	187
48.6	8.71188	206	53.6	8.81202	195	58.6	8.90736	187
48.7	8.71394	207	53.7	8.81397	194	58.7	8.90923	187
48.8	8.71601	205	53.8	8.81591	194	58.8	8.91110	187
48.9	8.71806	205	53.9	8.81785	194	58.9	8.91297	187
49.0	8.72011	206	54.0	8.81979	195	59.0	8.91484	187
49.1	8.72217	205	54.1	8.82174	194	59.1	8.91671	186
49.2	8.72422	204	54.2	8.82368	193	59.2	8.91857	187
49.3	8.72626	205	54.3	8.82561	194	59.3	8.92044	186
49.4	8.72831	204	54.4	8.82755	193	59.4	8.92230	186
49.5	8.73035	204	54.5	8.82948	193	59.5	8.92416	187
49.6	8.73239	204	54.6	8.83141	193	59.6	8.92603	186
49.7	8.73443	203	54.7	8.83334	193	59.7	8.92789	186
49.8	8.73646	203	54.8	8.83527	192	59.8	8.92975	186
49.9	8.73849	203	54.9	8.83719	193	59.9	8.93161	186
50.0	8.74052	203	55.0	8.83912	192	60.0	8.93347	185

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
60.0	8.93347	185	65.0	9.02553	183	70.0	9.11748	185
60.1	8.93532	186	65.1	9.02736	183	70.1	9.11933	186
60.2	8.93718	185	65.2	9.02919	183	70.2	9.12119	186
60.3	8.93903	186	65.3	9.03102	183	70.3	9.12305	186
60.4	8.94089	185	65.4	9.03285	184	70.4	9.12491	186
60.5	8.94274	185	65.5	9.03469	183	70.5	9.12677	186
60.6	8.94459	186	65.6	9.03652	183	70.6	9.12863	186
60.7	8.94645	185	65.7	9.03835	183	70.7	9.13049	187
60.8	8.94830	185	65.8	9.04018	184	70.8	9.13236	186
60.9	8.95015	185	65.9	9.04202	183	70.9	9.13422	187
61.0	8.95200	185	66.0	9.04385	183	71.0	9.13609	187
61.1	8.95385	184	66.1	9.04568	183	71.1	9.13796	187
61.2	8.95569	185	66.2	9.04751	183	71.2	9.13983	187
61.3	8.95754	185	66.3	9.04934	184	71.3	9.14170	187
61.4	8.95939	184	66.4	9.05118	183	71.4	9.14357	187
61.5	8.96123	185	66.5	9.05301	183	71.5	9.14544	188
61.6	8.96308	184	66.6	9.05484	184	71.6	9.14732	188
61.7	8.96492	185	66.7	9.05668	183	71.7	9.14920	188
61.8	8.96677	184	66.8	9.05851	184	71.8	9.15108	188
61.9	8.96861	184	66.9	9.06035	183	71.9	9.15296	188
62.0	8.97045	184	67.0	9.06218	184	72.0	9.15484	188
62.1	8.97229	185	67.1	9.06402	183	72.1	9.15672	189
62.2	8.97414	184	67.2	9.06585	184	72.2	9.15861	189
62.3	8.97598	184	67.3	9.06769	183	72.3	9.16050	189
62.4	8.97782	184	67.4	9.06952	184	72.4	9.16239	189
62.5	8.97966	184	67.5	9.07136	184	72.5	9.16428	189
62.6	8.98150	183	67.6	9.07320	183	72.6	9.16617	189
62.7	8.98333	184	67.7	9.07503	184	72.7	9.16806	190
62.8	8.98517	184	67.8	9.07687	184	72.8	9.16996	190
62.9	8.98701	184	67.9	9.07871	184	72.9	9.17186	190
63.0	8.98885	184	68.0	9.08055	184	73.0	9.17376	190
63.1	8.99069	183	68.1	9.08239	184	73.1	9.17566	191
63.2	8.99252	184	68.2	9.08423	184	73.2	9.17757	191
63.3	8.99436	183	68.3	9.08607	184	73.3	9.17948	191
63.4	8.99619	184	68.4	9.08791	184	73.4	9.18139	191
63.5	8.99803	183	68.5	9.08975	184	73.5	9.18330	191
63.6	8.99986	184	68.6	9.09159	185	73.6	9.18521	192
63.7	9.00170	183	68.7	9.09344	184	73.7	9.18713	192
63.8	9.00353	184	68.8	9.09528	185	73.8	9.18905	192
63.9	9.00537	183	68.9	9.09713	184	73.9	9.19097	192
64.0	9.00720	183	69.0	9.09897	185	74.0	9.19289	193
64.1	9.00903	184	69.1	9.10082	185	74.1	9.19482	193
64.2	9.01087	183	69.2	9.10267	184	74.2	9.19675	193
64.3	9.01270	183	69.3	9.10451	185	74.3	9.19868	193
64.4	9.01453	184	69.4	9.10636	185	74.4	9.20061	194
64.5	9.01637	183	69.5	9.10821	185	74.5	9.20255	194
64.6	9.01820	183	69.6	9.11006	185	74.6	9.20449	194
64.7	9.02003	183	69.7	9.11191	186	74.7	9.20643	195
64.8	9.02186	183	69.8	9.11377	185	74.8	9.20838	195
64.9	9.02369	184	69.9	9.11562	186	74.9	9.21033	195
65.0	9.02553	183	70.0	9.11748	185	75.0	9.21228	195

ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.	ϑ	log. q	Diff. I.
75.0	9.21228	195	80.0	9.31515	220	85.0	9.43962	296
75.1	9.21423	196	80.1	9.31735	222	85.1	9.44256	298
75.2	9.21619	196	80.2	9.31957	222	85.2	9.44554	301
75.3	9.21815	196	80.3	9.32179	222	85.3	9.44855	304
75.4	9.22011	197	80.4	9.32401	224	85.4	9.45159	307
75.5	9.22208	197	80.5	9.32625	224	85.5	9.45466	310
75.6	9.22405	197	80.6	9.32849	225	85.6	9.45776	314
75.7	9.22602	198	80.7	9.33074	227	85.7	9.46090	318
75.8	9.22800	198	80.8	9.33301	227	85.8	9.46408	321
75.9	9.22998	198	80.9	9.33528	228	85.9	9.46729	325
76.0	9.23196	199	81.0	9.33756	229	86.0	9.47054	329
76.1	9.23395	199	81.1	9.33985	230	86.1	9.47383	334
76.2	9.23594	200	81.2	9.34215	230	86.2	9.47717	338
75.3	9.23794	200	81.3	9.34445	232	86.3	9.48055	343
76.4	9.23994	200	81.4	9.34677	233	86.4	9.48398	348
76.5	9.24194	201	81.5	9.34910	234	86.5	9.48746	353
76.6	9.24395	201	81.6	9.35144	235	86.6	9.49099	359
76.7	9.24596	201	81.7	9.35379	236	86.7	9.49458	364
76.8	9.24797	202	81.8	9.35615	238	86.8	9.49822	370
76.9	9.24999	203	81.9	9.35853	238	86.9	9.50192	377
77.0	9.25202	202	82.0	9.36091	240	87.0	9.50569	384
77.1	9.25404	204	82.1	9.36331	240	87.1	9.50953	391
77.2	9.25608	203	82.2	9.36571	242	87.2	9.51344	398
77.3	9.25811	204	82.3	9.36813	244	87.3	9.51742	407
77.4	9.26015	205	82.4	9.37057	244	87.4	9.52149	416
77.5	9.26220	205	82.5	9.37301	246	87.5	9.52565	425
77.6	9.26425	206	82.6	9.37547	247	87.6	9.52990	435
77.7	9.26631	206	82.7	9.37794	249	87.7	9.53425	445
77.8	9.26837	206	82.8	9.38043	250	87.8	9.53870	458
77.9	9.27043	207	82.9	9.38293	252	87.9	9.54328	470
78.0	9.27250	208	83.0	9.38545	253	88.0	9.54798	484
78.1	9.27458	208	83.1	9.38798	255	88.1	9.55282	499
78.2	9.27666	209	83.2	9.39053	256	88.2	9.55781	515
78.3	9.27875	209	83.3	9.39309	258	88.3	9.56296	534
78.4	9.28084	210	83.4	9.39567	260	88.4	9.56830	554
78.5	9.28294	210	83.5	9.39827	261	88.5	9.57384	577
78.6	9.28504	211	83.6	9.40088	263	88.6	9.57961	602
78.7	9.28715	211	83.7	9.40351	265	88.7	9.58563	632
78.8	9.28926	212	83.8	9.40616	267	88.8	9.59195	665
78.9	9.29138	213	83.9	9.40883	269	88.9	9.59860	704
79.0	9.29351	214	84.0	9.41152	271	89.0	9.60564	750
79.1	9.29565	214	84.1	9.41423	273	89.1	9.61314	805
79.2	9.29779	214	84.2	9.41696	275	89.2	9.62119	874
79.3	9.29993	215	84.3	9.41971	277	89.3	9.62993	959
79.4	9.30208	216	84.4	9.42248	279	89.4	9.63952	1073
79.5	9.30424	217	84.5	9.42527	282	89.5	9.65025	1229
79.6	9.30641	218	84.6	9.42809	284	89.6	9.66254	1462
79.7	9.30859	218	84.7	9.43093	287	89.7	9.67716	1859
79.8	9.31077	219	84.8	9.43380	290	89.8	9.69575	2725
79.9	9.31296	219	84.9	9.43670	292	89.9	9.72300	27700
80.0	9.31515	220	85.0	9.43962	294	90.0	10.00000	