Über die Geometrieen, in denen die Geraden die Kürzesten sind*).

Von

Georg Hamel in Karlsruhe.

Inhaltsverzeichnis.

---

*) Die vorliegende Arbeit ist nicht nur ein Auszug der unter demselben Titel erschienenen Dissertation (Göttingen, 1901). Der Gedankengang und die hauptsächlichsten Resultate sind zwar dieselben geblieben, doch sind wesentliche Stellen ganz umgearbeitet worden, so namentlich die Einleitung und die Paragraphen 1, 2, 8. Ganz neu ist der § 4, der von den elliptischen Geometrieen handelt. Ich hoffe, gleichzeitig manche Einzelheiten knapper und schärfer gefaßt zu haben, als es in meiner Dissertation geschehen ist.

Einleitung.

Das Ziel der nachfolgenden Untersuchungen ist dieses:

Es sollen alle Geometrieen aufgestellt werden, die folgenden Forderungen genügen:

A) Den Axiomen der „Verknüpfung“ und der „Anordnung“ in der Hilbertschen*) oder den „projektiven“ Axiomen in der Schurschen**) Bezeichnungsweise.

Bei Beschränkung auf die Ebene allein nehmen wir noch den Desarguesschen Satz als Axiom hinzu***).

B) Folgendem Axiom der Stetigkeit, das in dieser Fassung das Archimedische†) und das Vollständigkeitsaxiom†) in sich schließt:

„Wird durch geometrische Konstruktionen (nach den Axiomen (A)) innerhalb einer Strecke eine unendliche Reihe von Punkten P erzeugt der Art, daß jeder Pnnkt P zwischen dem vorhergehenden und dem nachfolgenden liegt, so soll die genannte Reihe innerhalb oder an den Enden der Strecke einen ganz bestimmten Grenzpunkt besitzen, d. h. einen Punkt, der alle von der Punktreihe P einmal überholten Punkte trennt von allen den Punkten, die von der Punktreihe P niemals erreicht werden“††.)

C) Den „linearen Kongruenzaxiomen“, die von dem Abtragen der Strecken handeln (IV, 1, 2, 3 nach der Hilbertschen Zählung; im folgenden stets so bezeichnet). Doch soll das erste Kongruenzaxiom in folgender Weise modifiziert werden:

Es darf Punkte geben, von denen aus auf allen oder auf einzelnen hindurchgehenden Geraden ein Abtragen von Strecken nicht möglich ist. Solche Punkte wollen wir je nachdem kurzweg „singulär“ oder „relativ singulär“ (d. h. in Bezug auf die betreffende Gerade) nennen. Alle anderen Punkte heißen „regulär“; Punkte aber, die nicht schlechtweg singulär sind, „erreichbar“.

Das Auftreten singulärer Punkte möge jedoch in folgender Weise beschränkt sein:

---

*) Hilbert: „Grundlagen der Geometrie“ Festschrift zur Feier der Enthüllung des Gauss-Weber-Denkmals in Göttingen. Teil I (Teubner 1899).

**) Schur: „Ueber die Grundlagen der Geometrie“. Math. Ann. 55. Daselbst findet man auch weitere Litteraturangaben.

***) Siehe u. a. Hilbert: „Grundlagen“. Kap. V.

†) Hilbert: „Grundlagen“. Axiom V, § 8; außerdem: „Ueber den Zahlbegriff“. (Berichte der deutschen Mathematiker-Vereinigung 1900); endlich die Uebersetzung der „Grundlagen“ durch Herrn Laugel in den Annales de l'école normale 3. Serie, tome XVII, p. 122, 123.

††) Vergl. u. a. Klein: „Ueber die sogenannte Nicht-Euklidische Geometrie“. Math. Ann. 6, p. 136.

α) Kann auf einer Geraden von einem Punkte aus eine Strecke a nach der einen Seite hin abgetragen werden, so soll dies auch nach derandern Seite hin gestattet sein.

β) Kann auf einer Geraden von einem Punkte aus eine Strecke a abgetragen werden, so sollen an derselben Stelle auch alle Strecken abgetragen werden dürfen, die „kleiner" wie a sind, d. h. solche Strecken, deren sämtliche Punkte innerhalb von a liegen.

γ) Sind zwei Geraden a und b gegeben (die auch ineinanderliegen können) mit je einem auf ihnen erreichbaren Punkte A resp. B, so sind die Umgebungen von A und B „vergleichbar", d. h. es gibt auf a mindestens eine Strecke AA', die einer Strecke BB' auf b kongruent ist.

δ) Es gibt ein Gebiet endlicher Ausdehnung, innerhalb dessen nur reguläre Punkte liegen*).

D) Dem Axiom: Die gerade Strecke soll die kürzeste Verbindung zwischen zwei Punkten sein.

E) Einem Axiom der Differentiierbarkeit (Siehe § 2, p. 241).

Nicht gefordert werden:

a) das Parallelenaxiom,

b) der erste Kongruenzsatz oder das Kongruenzaxiom IV, 6 nach der Hilbertschen Zählung: „Wenn für zwei Dreiecke ABC und $A'B'C'$ die Kongruenzen $AB \equiv A'B'$, $AC \equiv A'C'$, $\sphericalangle BAC \equiv \sphericalangle B'A'C'$ gelten, so sind auch stets die Kongruenzen

$$\sphericalangle ABC \equiv \sphericalangle A'B'C' \quad \text{und} \quad \sphericalangle ACB \equiv \sphericalangle A'C'B'$$

erfüllt."

(Von der Kongruenz der Winkel werden wir im folgenden überhaupt nicht weiter reden.)

Der Schwerpunkt der ganzen Fragestellung liegt in der Forderung D). Da diese wohl zuerst von Archimedes**) erhoben worden ist, wollen wir sie im folgenden kurz die **„Archimedische Forderung"** nennen. (Zum Unterschied von dem schon genannten Archimedischen Axiom der Stetigkeit.)

Soviel sei über das Problem selbst in der Einleitung gesagt. Was seine historische Stellung und seine Beziehung zur Variationsrechnung angeht, so seien folgende Bemerkungen erlaubt:

---

*) Die Darstellung weicht hier von der in meiner Dissertation gegebenen nicht unerheblich ab. Dort wird der Begriff „Länge" direkt definitionsmäßig als eine Zahl eingeführt (§ 2); hier soll später in § 2 gezeigt werden, wie aus unseren Axiomen C, alle die Forderungen arithmetischen Charakters abgeleitet werden können, die ich in meiner Dissertation (§ 2) axiomatisch hingestellt habe. Andererseits habe ich mich hier insofern auf einfachere Fälle beschränkt, als ich gleich von vornherein an dem festhalte, was ich das „starke Monodromieaxiom" nenne, d. h. ich verlange, daß stets $AB \equiv BA$ sein soll. Man vergleiche hierzu die §§ 3 meiner Dissertation und dieser Abhandlung.

**) „Περι σφαιρας και κυλινδρου". Λαμβανομενον α'.

Unter die hier in Rede stehenden Geometrieen gehören außer der elementaren Euklidischen Geometrie auch die beiden sogenannten nichteuklidischen Geometrieen, die, wie Herr Klein*) zuerst zeigte, auf der Grundlage einer projektiven Geometrie (welche unseren Forderungen A) und B) genügt) durch Einführung einer geeigneten Maßbestimmung aufgebaut werden können. Dann stellte Herr Hilbert**) in einem an Herrn Klein gerichteten Briefe eine allgemeinere Geometrie auf, deren Maßbestimmung so beschaffen ist, daß die Gerade Kürzeste bleibt. Endlich machte Herr Minkowski***) mit einem andern Typus von Geometrieen bekannt, welche unseren Forderungen Genüge leisten.

Es scheint deshalb die Frage nach der allgemeinsten Geometrie dieser Art wohl an sich schon berechtigt zu sein†).

Sie dürfte aber noch ein weiteres Interesse beanspruchen, indem sie einen Spezialfall der Frage bildet, welche ich das „Umkehrungsproblem der Variationsrechnung" nennen möchte:

„Gegeben ist ein System von Differentialgleichungen; gesucht ist das allgemeinste Variationsproblem, zu dem diese Differentialgleichungen als Lagrangesche Gleichungen gehören".

Seine Entstehung verdankt diese Aufgabe wohl der Mechanik, und zwar besonders den Untersuchungen Jacobis über das Hamiltonsche Prinzip. In dem Falle, daß eine gewöhnliche Differentialgleichung vorliegt, gab meines Wissens die erste Lösung Imchenetzky††); weitere Arbeiten darüber veröffentlichten die Herren Königsberger†††), Böhm*†) und in besonders eleganter Form Herr Hirsch**†), der auch partielle

---

*) Klein: „Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie". Math. Ann. 4.

**) Hilbert: „Ueber die gerade Linie als kürzeste Verbindung zweier Punkte". Math. Ann. 34.

***) Minkowski: „Geometrie der Zahlen" (Teubner, Leipzig 1896) Kap. I.

†) Vergleiche dazu: Hilbert: „Mathematische Probleme; Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematiker-Congress Paris 1900", p. 15. Darboux: „Leçons sur la théorie générale des surfaces". Bd. III. Paris 1894, p. 54.

††) Imchenetzky: „Sur la transformation d'une équation differentielle de l'ordre pair à la forme d'une équation isopérimétrique". Bulletin de St. Pétersbourg, tome XXXI, 1886.

(Dieses Citat verdanke ich einer freundlichen Mitteilung des Herrn Kneser.)

†††) Königsberger: „Ueber die Principien der Mechanik". Berliner Berichte 1896, II. „Ueber die allgemeinen kinetischen Potentiale". Crelles Journal 121.

*†) Böhm: „Die Existenzbedingungen eines von den ersten und zweiten Differentialquotienten der Koordinaten abhängigen kinetischen Potentials". Crelles Journal 121.

**†) Hirsch: „Die Existenzbedingungen des verallgemeinerten kinetischen Potentials". Math. Ann. 50 und: „Ueber eine charakteristische Eigenschaft der Differentialgleichungen der Variations-Rechnung". Math. Ann. 49.

Differentialgleichungen in den Bereich seiner Betrachtungen hineinzog. Was Systeme von Differentialgleichungen angeht, so finden sich wohl die ersten Resultate bei Helmholtz*); Herr A. Mayer**) gab die noch fehlenden Beweise. Allerdings gehen diese Untersuchungen nur so weit, daß die Bedingungen dafür angegeben werden, wann jede der Differentialgleichungen von der Form einer Lagrangeschen Gleichung ist; ob sich ein System durch geeignete Kombination der einzelnen Gleichungen auf diese Form bringen läßt, wird nicht erörtert. Auch ist die Frage in keinem Falle über das rein Formale hinaus verfolgt worden; andere Bedingungen der Variationsrechnung als die Lagrangeschen sind nie erörtert worden.

Es soll nun gerade hier in dem angekündigten Probleme, soweit es ein solches der Variationsrechnung ist, das Schwergewicht auf die Erörterung der hinreichenden Bedingungen der Variationsrechnung gelegt werden.

Kapitel I.

Die Geometrieen der Ebene.

§ 1.

Die „idealen" Elemente und die „Namengebung".

Denken wir uns ein bestimmtes System von Punkten, Geraden und Ebenen, das unseren Forderungen A) und B) genügt. Wie Herr Schur***) gezeigt hat, kann man dann zu diesen Punkten, Geraden und Ebenen solche „idealen" Punkte, Geraden und Ebenen zufügen, daß das modifizierte Parallelen-Axiom erfüllt ist:

Je zwei Geraden einer Ebene haben einen (und nur einen) Punkt gemeinsam.

Die Axiome der ersten Gruppe bleiben für das erweiterte Gebiet erhalten, ebenso die Stetigkeitsaxiome, wie daraus hervorgeht, daß eine Strecke idealer Punkte von einem eigentlichen Punkte aus auf eine Strecke eigentlicher Punkte projiziert werden kann. Die allerdings notwendig gewordene präzisere Fassung des Begriffes „zwischen" sei mit Hilfe einer

*) Helmholtz: „Ueber die physikalische Bedeutung des Prinzips der kleinsten Wirkung". Crelles Journal 100.

**) A. Mayer: „Die Existenzbedingungen eines kinetischen Potentials". Sächsische Berichte 1896, p. 519.

***) Schur: „Ueber die Einführung der sogenannten idealen Elemente in die projective Geometrie". Math. Ann. 39 (1891).

„Normalebene“ (resp. Normalgeraden) vollzogen und zwar in derselben Weise, wie von Herrn Dehn*) nach dem Vorgange des Herrn Pasch**) geschehen ist.

Mit dieser vervollständigten Geometrie operieren wir jetzt weiter. Dabei unterscheiden wir die ursprünglichen Punkte, Geraden und Ebenen von den „idealen“ durch die Bezeichnung „eigentlich“***). (Die „eigentlichen“ Punkte zerfallen nach unserer früheren Terminologie wieder in „erreichbare“ und „singuläre“.)

Es ist nun eine bekannte Folgerung der Axiome A) und B), daß jedem Punkte der (erweiterten) Ebene (auf die wir uns jetzt zunächst beschränken) ein reelles Zahlentripel x, y, t derart zugeordnet werden kann, daß der Punkt durch die Verhältnisse dieser drei Zahlen, die Gerade aber durch eine homogene lineare Gleichung zwischen den drei Zahlen dargestellt wird.

Die Folge des Axioms B) und des modifizierten Parallelenaxioms ist es, daß auch umgekehrt zu jedem Zahlentripel (außer dem Tripel $x = 0$, $y = 0$, $t = 0$) ein Punkt und zu jeder linearen Gleichung, deren Koeffizienten nicht sämtlich Null sind, eine Gerade gehört. Wir können insbesondere erreichen, daß $t = 0$ die „Normalgerade“ darstellt†)

Diese Einführung eines Zahlensystems soll nur zur Charakterisierung der Punkte und Geraden dienen, also eine Art Namengebung darstellen; keineswegs aber soll damit irgend eine Länge definiert werden.

Statt des Tripels x, y, t werden wir meistens $\frac{x}{t}, \frac{y}{t}$ als Koordinaten betrachten und diese mit x, y bezeichnen; $x = \infty$ sowie $y = \infty$ bedeuten jetzt Punkte der Normalgeraden††).

Schließen wir zunächst einmal diese Normalgerade von der ferneren Betrachtung aus (wir werden sie später wieder aufnehmen (§ 4)), so

*) M. Dehn: „Die Legendreschen Sätze über die Winkelsumme im Dreieck“. Math. Ann. 53 (1900).

**) M. Pasch: „Vorlesungen über neuere Geometrie“. Leipzig (Teubner) 1882.

***) Es kann sehr wohl sein, daß es gar keine idealen Elemente gibt. Dann hat die Geometrie elliptischen Typus; die Normalgerade muß zur Präzision des Begriffes „zwischen“ von Anfang an eingeführt werden.

†) Aus der zahlreichen Litteratur zu diesem Gegenstande sei außer der schon zitierten noch genannt: Klein: „Ueber die sogenannte Nicht-Euclidische Geometrie“, Math. Ann. Bd. 4, 6, 7. Fiedler: „Darstellende Geometrie“, Bd. III, außerdem Vierteljahrsschrift der nat. Ges. Zürich, XV, 2 (1871). Anne Lucy Bosworth: „Begründung einer vom Parallelenaxiom unabhängigen Streckenrechnung“, Diss. Göttingen 1900.

††) Daß unsere unter B) gegebene Fassung der Stetigkeit mit dem üblichen Begriff der Stetigkeit in der Zahlenmannigfaltigkeit x, y (abgesehen von der Normalgeraden) übereinstimmt, folgt aus dem Fundamentalsatz der projektiven Geometrie.

kann man alle andern Geraden mit Hilfe eines Parameters s darstellen durch die Differentialgleichungen:

$$\frac{d^2x}{ds^2}=0 \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{ds^2}=0,$$

wobei noch $ds \equiv +\sqrt{dx^2+dy^2}$ gesetzt werden darf.

Als Form der linearen Gleichung einer Geraden wird sich im folgenden diese empfehlen:

$$y \cos \vartheta - x \sin \vartheta = a.$$

Dabei nennen wir ϑ die „Richtung" der Geraden; falls dieselbe von $\pm\frac{\pi}{2}$ abweicht, dürfen wir auch schreiben

$$y = \operatorname{tg} \vartheta \cdot x + b \quad \text{und} \quad \frac{d^2y}{dx^2}=0.$$

Weiterhin kann der Begriff der „stetigen Kurve" etwa so eingeführt werden, daß wir darunter eine Mannigfaltigkeit verstehen, deren x und y sich als stetige Funktionen eines stetig veränderlichen Parameters darstellen lassen.

§ 2.

Die „Länge".

Nunmehr suchen wir die Konsequenzen der Axiome C) und D) (siehe Einleitung) zu ziehen.

a) Kann man von einem eigentlichen Punkte O aus auf einer Geraden eine Strecke $OA_1 \equiv a$ abtragen, so kann man a auf der Geraden beliebig oft nacheinander abtragen:

$$OA_1 \equiv A_1A_2 \equiv A_2A_3 \equiv \cdots.$$

(Folgerung aus C, α und IV, 1).

Dabei kann es vorkommen, daß der Ausgangspunkt O einmal wieder überschritten wird, (die Gerade ist in unserer erweiterten Ebene eine geschlossene Kurve!) oder aber, es gibt infolge der Stetigkeit einen bestimmten Grenzpunkt G, der alle von der Reihe $A_1, A_2, \cdots$ einmal überholten Punkte von den andern trennt.

Nehmen wir zunächst einmal an, daß ein Grenzpunkt G vorhanden sei. Dann gelten die folgenden Sätze:

b) Auf GO selbst kann der Begriff der Kongruenz nicht angewendet werden; es ist insbesondere nicht GO sich selbst kongruent. Denn sonst müßte nach C, β auch a von G aus abtragbar sein, was dem widerspricht, daß G der Grenzpunkt der Reihe $A_1, A_2, \cdots$ sein soll. Dasselbe gilt für jede Strecke, die den Punkt G enthält (nach C, β).

c) Die Grenze G ist dieselbe für alle Strecken, die kleiner als a sind.

Denn sei $b < a$, so ist der Satz einleuchtend, wenn man b eine endliche Anzahl mal (n mal) so abtragen kann, daß $nb > a$ wird (Folgerung des Kongruenzaxioms IV, 3 und des Stetigkeitsaxioms). Eine solche Zahl n aber muß es geben, da sonst der Grenzpunkt, der zu b gehört, schon innerhalb a läge, der Begriff der Kongruenz dann aber bereits auf a nicht mehr anwendbar wäre (Satz b).

d) Die Grenze G ist dieselbe für alle Punkte, die zwischen O und G liegen (Folgerung aus Satz c und aus IV, 3).

e) Von einem Grenzpunkt G aus ist auf der betrachteten Geraden ein Streckenabtragen überhaupt nicht möglich.

Denn wäre dies der Fall, so könnte man insbesondere auch die betreffende Strecke g von G aus nach O zu abtragen (gemäß C, α), etwa $GB \equiv g$. Innerhalb GB aber gibt es Stellen, von denen aus a nach G hin abtragbar ist, also ist $a < g$; somit müßte nach (C, β) auch a von G aus abtragbar sein, was nicht der Fall ist.

Also ist ein solcher Grenzpunkt G ein „relativ singulärer Punkt" hinsichtlich der Geraden OG, falls er überhaupt ein eigentlicher Punkt ist. (Siehe Einleitung.) Alle Punkte zwischen O und G sind jedenfalls eigentliche Punkte. Liegen über OG hinaus noch eigentliche Punkte, die nicht alle singulär inbezug auf die Gerade OG sind, so wiederholt sich das Spiel.

f) Existiert eine Grenze G nicht, wird also O von der Punktreihe $A_1, A_2, \cdots$ wieder einmal überschritten (und dann immer wieder), so geschieht dies von allen Punktreihen $B_1, B_2, \cdots$ die durch fortwährendes Abtragen einer andern Strecke b auf derselben Geraden entstehen. Alle Punkte der Geraden sind dann eigentliche, auf der Geraden erreichbare Punkte; wir wollen die Geometrie inbezug auf diese Gerade „vom elliptischen Typus" nennen.

Alle diese Sätze beweisen nun zusammen mit dem Axiom C, γ den folgenden Satz:

g) *Seien s_1 und s_2 zwei Strecken, die von relativ-singulären Punkten bezüglich ihrer Geraden eingeschlossen sind, selbst aber im Innern keine relativ-singulären Punkte enthalten, so kann man s_1 und s_2 kongruent aufeinander abbilden; und diese Abbildung ist, wenn man einen erreichbaren Punkt A der Strecke s_1 einem ebensolchen B der Strecke s_2 zugeordnet und auf beiden Strecken einen Richtungssinn festgelegt hat, ein-eindeutig und bestimmt.*

Dasselbe gilt in etwas abgeänderter Weise für zwei Geraden, von denen eine resp. beide von elliptischem Typus sind; nur wird die Abbildung erst dann eindeutig, wenn man bei jedem Punkte noch angibt, wie oft man sich den Ausgangspunkt A resp. B überschritten zu denken hat.

Damit sind alle Sätze gewonnen, die gestatten, den Begriff der „Länge“ einzuführen.

I) Zunächst definieren wir für eine Gerade mit dem erreichbaren Punkte O (ein solcher existiert gemäß C, δ) die Länge folgendermaßen:

Irgend eine Strecke OA ohne relativ-singulären Punkt bezeichnen wir mit der Zahl 1. Den durch fortgesetztes Abtragen der Strecke OA hintereinander entstehenden Strecken $OA_2, OA_3, \cdots$ geben wir die Längen $2, 3, \cdots$. Unter der Strecke der Länge $\frac{1}{m}$ (m eine ganze Zahl) verstehen wir die Strecke OB, die m mal nacheinander abgetragen die Strecke 1 ergibt. (Eine solche Strecke OB existiert infolge der Stetigkeit.)

Es gilt dann der folgende Satz:

Die Strecke der Länge $\frac{1}{m}$ kann durch Vergrößerung von m beliebig klein gemacht werden; d. h. es gibt keine Strecke OC, die kleiner wäre als jede Strecke $\frac{1}{m}$ ($m = 1, 2, 3, \cdots$ in inf.).

Was unter der Strecke c zu verstehen ist, wenn c eine rationale Zahl ist, ist jetzt völlig klar. Die Stetigkeit gestattet aber, auch jeder Irrationalzahl eine Strecke zuzuordnen. Umgekehrt wird dann auch jeder Strecke von O aus eine positive Zahl eindeutig als „Länge“ zugeordnet sein.

II) für alle anderen Strecken definieren wir dann die Länge so, daß wir festsetzen, die Länge sei bei kongruenter Abbildung (Satz g) invariant. Diese Definition ist unabhängig von der Wahl des in Satz g genannten Punktes A (nach IV, 2).

Nun können wir die folgenden Sätze ableiten (Vergleiche § 2 meiner Dissertation):

1) Seien die Punkte $1: x_1, y_1$ und $2: x_2, y_2$ durch eine Strecke ohne relativ-singuläre Punkte verbunden, so kommt dieser Strecke eine Länge zu, die eine positive Funktion der vier Variabeln $x_1, y_1; x_2, y_2$ ist. Wir bezeichnen diese Funktion mit $F(x_1, y_1; x_2, y_2)$. Da stets $AB \equiv BA$ sein sollte, so ist auch

$$F(x_1, y_1; x_2, y_2) = F(x_2, y_2; x_1, y_1)^{*)}.$$

2) Liegen die Punkte 1, 2, 3 in dieser Reihenfolge auf ein und derselben Geraden, so ist stets

$$F(x_1, y_1; x_3, y_3) = F(x_1, y_1; x_2, y_2) + F(x_2, y_2; x_3, y_3).$$

Es ist dies eine Folge der Definitionen I) und II) sowie des Kongruenzaxioms IV, 3.

Die hingeschriebene Relation gelte auch noch, wenn zwei Punkte zusammenfallen, d. h. es sei

$$F(x, y; x, y) = 0.$$

*) Dies ist hier anders als in meiner Dissertation, siehe die Bemerkung auf Seite 233 in der Einleitung.

Außerdem läßt sich noch aus der allgemeinen Gleichung 2) die Folgerung ziehen:

Setzen wir $x_2 = x_1 + s \cos \vartheta$, $y_2 = y_1 + s \sin \vartheta$ ($s > 0$, siehe § 1) so ist $F(x_1, y_1; x_2, y_2)$ eine mit s stets wachsende Funktion.

3) *F ist eine stetige Funktion seiner vier Argumente* in einem solchen endlich ausgedehnten Bereiche, innerhalb dessen nur reguläre Punkte liegen.

> α) Ändern wir die Punkte 1, 2 zunächst nur so ab, daß sie auf der Geraden 1, 2 bleiben, so ist der Satz eine leicht zu erweisende Folgerung der Sätze 2) sowie der Definitionen I) und II)
>
> β) Wollen wir den Satz allgemein beweisen, so müssen wir das Axiom D) (die Archimedische Forderung) hinzunehmen.

Zuvor aber beweisen wir folgenden Hülfssatz:

Tragen wir von einem Punkte A im Innern des genannten Gebietes auf allen Geraden eine Strecke ε ab, so kommen die Endpunkte dieser Strecken im Sinne der Namengebung nicht beliebig nahe an A heran.

Wäre dies nämlich der Fall, so müßte es einen Strahl S geben, in dessen beliebiger Nähe solche Endpunkte beliebig nahe (im Sinne der Namengebung) an A heranrückten. Nun bestimme man aber auf S einen Punkt B so, daß $AB \equiv \frac{1}{2}\varepsilon$ ist. In B errichte man auf S eine Senkrechte (im Sinne der Namengebung) und trage nach beiden Seiten eine Strecke BD resp. BD' ebenfalls von der Länge $\frac{\varepsilon}{2}$ ab. (Alle diese Operationen sind möglich, nach der Voraussetzung über den in Rede stehenden Bereich.) Jetzt haben zufolge des Axioms D) alle Punkte im Dreiecke ADD' von A eine Entfernung, die kleiner ist als ε; mithin können sich von den oben genannten Endpunkten keine innerhalb ADD' befinden; also dürfen von ihnen auch keine beliebig nahe an S und zugleich beliebig nahe an A liegen.

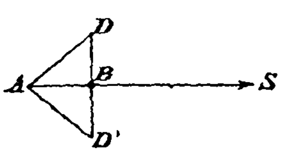

Fig. 1.

Man kann daher um A ein im Sinne der Namengebung endliches Gebiet abgrenzen, innerhalb dessen jeder Punkt von A eine Entfernung kleiner als ε besitzt.

Sei nun AB eine Strecke der Länge l und lasse sich um AB ein Gebiet abgrenzen, innerhalb dessen kein singulärer Punkt liegt. Dann kann man um A einen Bereich angeben, sodaß für jeden Punkt A' desselben $AA' < \frac{\varepsilon}{4}$ ist, und um B einen solchen Bereich, daß für Punkte B' desselben $BB' < \frac{\varepsilon}{4}$ ist; wobei ε eine beliebig kleine vorgegebene Größe ist. (Folgerung des Hülfssatzes.)

Läßt man nun die Punkte A' und B' innerhalb dieser Bereiche irgendwie in die Punkte A, B einrücken, so ist nach der Archimedischen Forderung stets

$$AB < A'B' + BB' + AA' < A'B' + \frac{\varepsilon}{2},$$

$$A'B' < AB + BB' + AA' < AB + \frac{\varepsilon}{2}$$

also

$$|A'B' - AB| < \varepsilon.$$

Und damit ist die Stetigkeit bewiesen.

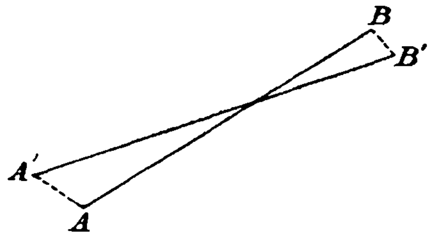

Fig. 2.

Wir wollen nun aber, um bequemer weiter operieren zu können, noch das folgende Axiom einführen:

E) Es besitze die Funktion F im allgemeinen die vier ersten Ableitungen nach allen Variabeln.

Ob ein Teil dieses Axioms vielleicht beweisbar ist, oder ob es möglich ist, ohne dasselbe auszukommen, soll hier nicht weiter erörtert werden.

Ich habe dann in meiner Dissertation gezeigt, wie *infolge der Sätze* 1), 2), 3) *und des Axioms* E) *die Länge dl eines Linienelementes ds, das von der Stelle x, y in der Richtung ϑ ausgeht, sich unabhängig davon, welcher endlichen Strecke ds angehört, folgendermaßen darstellen läßt:*

$$dl \equiv ds \cdot f(x, y, \operatorname{tg} \vartheta),$$

wo f eine positive, eindeutige und im allgemeinen stetige und dreimal differentiierbare Funktion seiner Argumente ist.

(In meiner Dissertation ist die Eindeutigkeit hinsichtlich des letzten Arguments $\operatorname{tg} \vartheta$ nicht gefordert.)

Falls die betrachtete Strecke nicht gerade der y-Achse parallel läuft, ist es bequem, die weniger symmetrische Form

$$dl = g(x, y, \operatorname{tg} \vartheta) dx$$

anzuwenden. Natürlich ist einfach $g \cdot \cos \vartheta = f$.

Allgemein werden wir jetzt unter der Länge eines beliebigen Kurvenstückes, das aber zunächst in jedem Punkte eine im allgemeinen stetige Tangente besitzen soll, den Ausdruck verstehen:

$$\int f(x, y, \operatorname{tg} \vartheta) ds \quad \text{resp.} \quad \int g(x, y, y') dx,$$

diese Integrale längs des betreffenden Kurvenstückes erstreckt, sodaß

$$y = y(x); \quad y' = \operatorname{tg} \vartheta = \frac{dy}{dx}$$

zu setzen ist. Diese Definition ist mit der für Strecken gegebenen infolge unserer Sätze 1), 2) und 3) im Einklang.

Nunmehr schränken wir die Willkür der Funktion f, resp. g, ganz erheblich durch die Forderung ein:

4) Die Funktion g, resp. f soll so gewählt werden, daß die Länge einer geraden Strecke kürzer sei als die eines jeden andern, die Endpunkte der Strecke verbindenden Bogens der oben genannten Art, für dessen Elemente: x, y, y' überhaupt g allenthalben definiert ist.

Dies ist der Inhalt der eingangs erwähnten Archimedischen Forderung. Nach den Lehren der Variationsrechnung zerfällt sie in die folgenden Teilforderungen:

4a) Die Lagrangesche Gleichung des aus $\int g\,dx$ entspringenden Variationsproblems muß die Form annehmen

$$\frac{d^2y}{dx^2} = 0.$$

Also muß g der partiellen Differentialgleichung genügen:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p \partial x} + p\,\frac{\partial^2 g}{\partial p\,\partial y} - \frac{\partial g}{\partial y} = 0,$$

worin $y' = p$ gesetzt ist.

Man erhält diese partielle Differentialgleichung, indem man die Lagrangesche Gleichung aufstellt und dann berücksichtigt, daß $y'' = 0$ sein soll*).

Differentiiert man die Differentialgleichung für g nochmals nach p, so bekommt man für $M = \frac{\partial^2 g}{\partial p^2}$ eine lineare partielle Differentialgleichung, deren allgemeines Integral lautet:

$$M = W(p, y - px)\,^{**}).$$

W ist eine willkürliche Funktion der Argumente p und $y - px$.

Also ist zunächst g in der Form anzusetzen:

$$g = \int_c^p \int_c^p W(p, y - px)\,dp\,dp + p \cdot v(x, y) + w(x, y),$$

c ist eine beliebige Konstante.

Setzt man dies Resultat in die Differentialgleichung für g ein, so erhält man durch leichte Rechnung

$$g = \int_c^p \int_c^p W(p, y - px)\,dp\,dp + \frac{\partial u(x, y)}{\partial x} + p\,\frac{\partial u}{\partial y}\,^{**}).$$

c und u bleiben beliebig.

---

*) Hirsch, Math. Ann. 49, § 7; Darboux, l. c. p. 53ff.

**) Darboux, l. c. p. 58 u. 59.

Nachdem wir uns bis hierher der formal einfachen Funktion g bedient haben, wollen wir weiterhin die allgemeiner $\left(\text{auch für } \vartheta = \pm \frac{\pi}{2}\right)$ gültige Form

$$\int f(x, y, \operatorname{tg} \vartheta) ds$$

benutzen.

Setzen wir noch

$$\frac{1}{\cos^3 \vartheta} W = w(\operatorname{tg} \vartheta, y - x \operatorname{tg} \vartheta)$$

und

$$c = \operatorname{tg} \vartheta_0,$$

so erhalten wir nach leichter Rechnung

$$f = \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau) w(\operatorname{tg} \tau, y - x \operatorname{tg} \tau) d\tau + \frac{\partial u}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \vartheta.$$

Dabei bedeutet τ die Integrationsvariabele.

4b) Die Weierstraßsche Funktion E muß stets ein negatives Vorzeichen besitzen.

Seien $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\operatorname{tg} \bar{\vartheta} = \bar{p}$ die Werte von x, y, p längs irgend einer Kurve $\bar{C}$, welche die gegebenen Endpunkte 1 und 2 verbindet; seien $\vartheta = \operatorname{arctg} p$ die Richtungen der auf $\bar{C}$ einmündenden Extremalen (Geraden), die von 1 ausgehen, so stellt sich E unter Benutzung der Funktion $g(x, y, p)$ dar durch

$$E = \left[g(\bar{x}, \bar{y}, p) - p \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y}, p)}{\partial p} - g(\bar{x}, \bar{y}, \bar{p}) + \bar{p} \frac{\partial g(\bar{x}, \bar{y}, p)}{\partial p} \right] \frac{\partial \bar{x}}{\partial \bar{s}} \text{*)}.$$

Führt man die vorkommenden Differentiationen an der Darstellung von g durch W aus, und substituiert hinterher w statt W, so läßt sich der Ausdruck für E in folgender Weise zusammenziehen:

$$E = \int_{\bar{\vartheta}}^{\vartheta} \sin(\bar{\vartheta} - \tau) w(\operatorname{tg} \tau, \bar{y} - \bar{x} \operatorname{tg} \tau) d\tau.$$

Daraus erkennt man sofort, daß die notwendige Bedingung dafür, daß E stets negativ wird, die ist, daß w in seinem ganzen Definitionsbereiche das positive Zeichen besitzt. Und diese Bedingung ist auch hinreichend, da wir für $\bar{\vartheta}$ die Beschränkung annehmen dürfen, daß $|\bar{\vartheta} - \vartheta| < \pi$ ist. Darüber weiteres im § 3.

*) Vergleiche Kneser: „Lehrbuch der Variationsrechnung“. Braunschweig 1900. p. 77, Formel 58.

Es mag bemerkt werden, daß es im vorliegenden Falle keinen Sinn haben würde, nur den Eintritt eines schwachen Minimums zu fordern, sich also mit der Erfüllung der Legendreschen Bedingung zu begnügen. Denn wie eine nähere Überlegung zeigt, ist die Forderung, daß ein schwaches Extremum für alle Strecken stattfinden soll, auf denen $f(x, y, y')$ überhaupt existiert, gleichbedeutend mit der Forderung des starken Extremums.

Was die Jacobische Bedingung angeht, so ist sie in dem Falle, daß wir die Grenzen des zum Minimum zu machenden Integrales festhalten, von selbst erfüllt, da alle von einem Punkte ausgehenden Geraden keine zweite Enveloppe besitzen. Nur in dem Falle, daß alle Punkte und Geraden der erweiterten Geometrie erreichbare Punkte und Geraden sind, ist noch eine Bemerkung hinzuzufügen, hinsichtlich deren wir aber auf den § 4 verweisen möchten.

Abgesehen davon können wir jetzt das folgende Resultat aussprechen:

Alle ebenen Geometrieen, die unseren Axiomen und insbesondere der Archimedischen Forderung entsprechen, sind durch eine Maßbestimmung gegeben, in der sich das Bogenelement dl ausdrückt durch

$$dl \equiv ds \left\{ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\operatorname{tg}\tau, y - x \operatorname{tg}\tau)\, d\tau + \frac{\partial u(x,y)}{\partial x} \cos\vartheta + \frac{\partial u(x,y)}{\partial y} \sin\vartheta \right\},$$

wobei w eine in ihrem Definitionsbereiche überall positive Funktion sein muß.

Auch die frühere Einschränkung, nach der zum Vergleiche nur Kurven mit stetiger Tangente herangezogen werden sollten, fällt jetzt weg. Die Gerade ist auch kürzer wie jeder Kurvenzug, für den die Länge etwa im Hilbertschen Sinne*) definiert werden kann.

§ 3.

Die Monodromieaxiome.

Die einzige Forderung, der in unserer Darstellung des Linienelementes noch nicht Folge geleistet ist, ist der Teil des ersten Kongruenzaxioms, der aussagt, daß

$$AB \equiv BA$$

ist. In meiner Dissertation habe ich diese Kongruenz nicht gefordert: es findet sich dementsprechend dort folgende Definition:

I) Wenn $AB \equiv BA$ ist, oder, was dasselbe ist, wenn $f(x, y, \operatorname{tg}\vartheta)$

*) Siehe C. A. Noble: „Eine neue Methode in der Variationsrechnung". Dissertation Göttingen, 1901. Kap. II.

eine eindeutige Funktion auch des letzten Argumentes ist, so wollen wir sagen, das „starke Monodromieaxiom" sei erfüllt.

Da wir die Befriedigung dieses Axioms hier ständig fordern, müssen wir uns noch fragen, welche Bedingungen dadurch den Funktionen w und u sowie der Konstanten c des vorigen Paragraphen auferlegt werden.

Ich habe nun in meiner Dissertation gezeigt, daß die notwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Erfüllung des starken Monodromieaxioms die folgenden sind:

1) Es muß w eine eindeutige Funktion von $x, y, \operatorname{tg}\vartheta$ sein.

2) Die Funktion u darf nicht willkürlich angenommen werden; sie bestimmt sich vielmehr folgendermaßen:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{1}{2}\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} \sin\tau \cdot w\, d\tau,$$

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{1}{2}\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta_0+\pi} \cos\tau \cdot w\, d\tau.$$

Die Integrabilitätsbedingung ist erfüllt. Alsdann wird dl (resp. $f(x, y, \operatorname{tg}\vartheta)$) von ϑ_0 ganz unabhängig und läßt sich in die einfache Form bringen:

$$dl \equiv \frac{ds}{2}\int\limits_{\vartheta-\pi}^{\vartheta} \sin(\vartheta-\tau)\, w(\operatorname{tg}\tau, y - x\operatorname{tg}\tau)\, d\tau.$$

Dies ist das Längenelement in dem Falle, daß das starke Monodromieaxiom erfüllt ist.

Verzichtet man aber auf das starke Monodromieaxiom, so garantiert die in § 2 gegebene Darstellung noch nicht einmal die Eindeutigkeit der Längenbestimmung für eine Strecke AB. Halte ich A fest und lasse B irgendwie herumwandern, bis es wieder in seine ursprüngliche Lage zurückkehrt, so braucht nach einem vollen Umlauf des ϑ um 2π die Länge der Strecke AB nicht mehr dieselbe zu sein, wie beim Ausgang. Dieser Umstand gab in meiner Dissertation die Veranlassung zu folgender Definition:

II) Wenn dl oder $f(x, y, \operatorname{tg}\vartheta)$ nach einem vollen Umlauf des ϑ um 2π wieder den alten Wert bekommt, F also im vollen Sinne eine eindeutige Funktion ist, so wollen wir sagen, das „schwache Monodromieaxiom" sei erfüllt.

Ich habe in meiner Dissertation gezeigt, daß die hinreichenden und notwendigen Bedingungen für die Befriedigung des schwachen Monodromieaxioms die folgenden sind:

1) Es muß w eine eindeutige Funktion von $x, y, \sin\vartheta, \cos\vartheta$ sein.

2) Es müssen die Relationen stattfinden:

$$\int_0^{2\pi} \sin \tau \cdot w\, d\tau = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos \tau \cdot w\, d\tau = 0.$$

Von der Funktion u ist nur Eindeutigkeit hinsichtlich der Variabeln x, y zu verlangen.

Wir wollen aber im Laufe der folgenden Betrachtungen stets das starke Monodromieaxiom als erfüllt voraussetzen mit Ausnahme des Beispiels der Minkowskischen Geometrie (siehe § 5).

§ 4.

Die Normalgerade; die elliptischen Geometrieen.

Bis hierher blieb die Normalgerade von der Betrachtung ausgeschlossen, wir können aber nachträglich ihr Verhalten ohne weitere Rechnungen feststellen, indem wir zunächst die folgenden allgemeinen Sätze beweisen:

1) Gelten unsere sämtlichen Axiome A, B, C, D, E für alle Punkte und Geraden mit Ausnahme einer einzigen, von der dies noch ungewiß ist, und haben alle auf die ausgezeichnete Gerade einmündenden Strecken einen bestimmten endlichen Wert, so hat jede Strecke auf der fraglichen Geraden ebenfalls einen bestimmten endlichen Werth, d. h. die Länge einer (variablen) Strecke, deren Endpunkte irgendwie in die Endpunkte der fraglichen Strecke hineinrücken, konvergiert gegen einen festen endlichen Grenzwert unabhängig von der Art des Grenzüberganges.

2) Sind die Voraussetzungen des Satzes 1) erfüllt, gilt also insbesondere die Archimedische Forderung für alle in einer gewissen Umgebung der fraglichen Strecke gelegenen Strecken, von denen höchstens ein Punkt auf der Geraden liegt, so ist auch die fragliche Strecke selbst die kürzeste Entfernung ihrer Endpunkte.

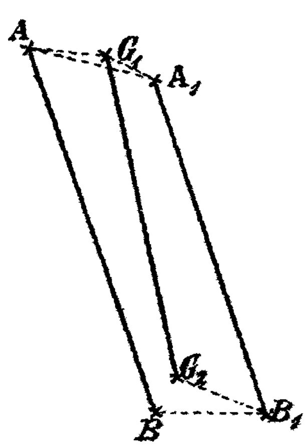

Fig. 3.

Der Beweis des ersten Satzes gestaltet sich folgendermaßen:

Es sei $G_1\, G_2$ eine Strecke auf der Geraden, für die wir die Existenz der Länge noch nicht wissen. AB sei eine Strecke, deren Enden A und B in G_1 und G_2 einlaufen sollen; A_1, B_1 sei eine andere Strecke dieser Art.

Wir verbinden dann A, G_1, A_1 untereinander durch Strecken, ebenso B, G_2, B_1.

Zunächst beweisen wir jetzt, daß wir um G_1 ein endliches Gebiet abgrenzen können, dessen sämtliche Punkte, abgesehen von den Punkten der kritischen

Geraden, von G_1 eine Entfernung haben, die kleiner als die willkürlich angenommene Größe ε ist. Zu dem Zwecke ziehen wir durch G_1 zwei Geraden, auf denen wir nach beiden Seiten $\frac{\varepsilon}{2}$ abtragen. Verbinden wir die vier Endpunkte dieser Strecken unter einander, so haben alle Punkte innerhalb des entstehenden Rechteckes die verlangte Eigenschaft, wie durch zweimalige Anwendung der Archimedischen Forderung hervorgeht.

Infolgedessen können wir A_1 und A so nahe an G_1, und B und B_1 so nahe an G_2 wählen, daß

$$AG_1 < \frac{\varepsilon}{2}; \quad A_1G_1 < \frac{\varepsilon}{2}; \quad BG_2 < \frac{\varepsilon}{2}; \quad B_1G_2 \leq \frac{\varepsilon}{2}$$

ist, wo ε eine beliebig vorgegebene kleine Zahl bedeutet. Dann ist nach der Archimedischen Forderung auch

$$AA_1 < \varepsilon \quad \text{und} \quad BB_1 < \varepsilon.$$

Daraus schließt man nach derselben Forderung

$$\begin{aligned} AB &< A_1B_1 + 2\varepsilon, \\ A_1B_1 &< AB + 2\varepsilon \end{aligned}$$

also ist

$$\lim_{\varepsilon=0} AB = \lim_{\varepsilon=0} A_1B_1;$$

und diesen Limes nennen wir die Entfernung G_1G_2.

Damit ist der erste Satz bewiesen. Der zweite Satz sagt nun aus, daß auch die Strecke G_1G_2 kleiner ist als jede andere Verbindung der Punkte G_1 und G_2.

Gäbe es nämlich eine kürzere Verbindung, so könnte man jedenfalls eine nicht längere konstruieren, die aus zwei Strecken G_2C und CG_2 besteht. Nun kann aber auf CG_1 ein Punkt A und auf CG_2 ein Punkt B so gewählt werden, daß

$$AG_1 < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$BG_2 < \frac{\varepsilon}{3},$$

$$|G_1G_2 - AB| < \frac{\varepsilon}{3}.$$

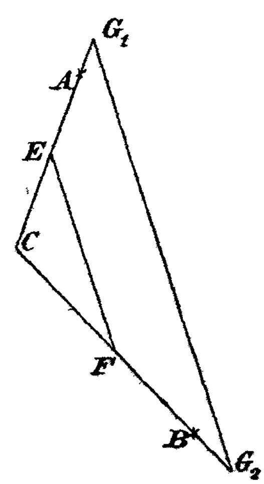

Fig. 4.

Da weiterhin jedenfalls

$$AB < AC + BC,$$

so folgt

$$G_1G_2 < G_1C + G_2C + \varepsilon,$$

oder

$$G_1G_2 \leq G_1C + G_2C,$$

weil ε beliebig klein gemacht werden kann, in dieser Ungleichheit aber lauter Größen vorkommen, die von ε unabhängig sind.

Daß aber auch das Gleichheitszeichen unmöglich ist, folgt daraus, daß man noch Wege zwischen G_1 und G_2 konstruieren kann, die kürzer sind als $CG_1 + CG_2$, z. B. G_1EFG_2 (s. Fig. 4), die aber andererseits doch wieder nur gleich G_1G_2 sein dürften, was ein Widerspruch ist.

Damit ist der Satz bewiesen.

Wir betrachten nunmehr eine Geometrie von völlig elliptischem Typus; d. h. eine Geometrie, von der wir wissen, daß jede Gerade außer der Normalgeraden eine endliche Länge besitzt; in der es also sonst keine relativ singulären und gar keine uneigentlichen Punkte gibt.

Außerdem mögen wir wissen, daß in jedem Dreieck, das von der Normalgeraden nicht geschnitten wird, die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte.

Wir stellen die Fragen:

1) Wann existiert auch auf der Normalgeraden eine Längenbestimmung?

2) Wann ist diese so beschaffen, daß auch für sie die Archimedische Forderung erfüllt ist?

Auf Grund der bewiesenen Sätze können wir jedenfalls soviel aussagen:

Betrachten wir auf der Normalgeraden eine bestimmte Strecke s, so konvergieren die Längen aller Strecken, die von einer bestimmten Seite in die betrachtete Strecke s einrücken, gegen eine bestimmte Grenze und dieser Grenzwert ist auch die untere Grenze für die Längen aller Verbindungen, die auf der betrachteten Seite der Strecke s liegen.

Um allerdings diesen Satz auf die Überlegungen im Anfange dieses Paragraphen stützen zu können, müßten wir zeigen, daß auch in einem Dreieck, von dem eine Ecke in die Normalgerade einrückt, noch immer jede Seite kleiner bleibt als die Summe der beiden andern. Daß dies aber tatsächlich der Fall ist, läßt sich durch Betrachtungen erweisen, die den im Anfange dieses Paragraphen angestellten sehr ähnlich sind.

Wenn wir aber zeigen wollen, daß die durch Annäherung von verschiedenen Seiten an die Normalgerade erzielten Grenzwerte für die Längen einer Strecke übereinstimmen, so müssen wir die Archimedische Forderung auch für Dreiecke erfüllt wissen, welche von der Normalgeraden durchsetzt werden. Und über solche Dreiecke sagen die Betrachtungen des § 2 noch nichts aus.

(Es ist hier übrigens noch eine Bemerkung einzuschalten. In der elliptischen Geometrie gibt es zwei Strecken endlicher Länge, welche zwei Punkte verbinden (wenn wir prinzipiell von Strecken, die länger sind als der Umfang der ganzen Geraden, sich aber teilweise selbst überdecken, absehen). Unter diesen ist natürlich im allgemeinen nur die eine die wirklich kürzeste Verbindung der beiden Punkte. Trotzdem bleibt der Satz, daß im Dreieck jede Seite kürzer ist als die Summe der beiden andern immer bestehen, wenn wir nur unter allen Strecken, welche drei Punkte verbinden, solche Tripel auswählen, die ein Stück aus der Ebene ausschneiden. Daß dieser Satz richtig ist, solange die Normalgerade das Dreieck nicht schneidet, folgt aus den Betrachtungen des § 2).

Soll aber in einem Dreiecke die Summe zweier Seiten auch dann noch größer sein als die dritte, falls das Dreieck von der Normalgeraden geschnitten wird, so ist, wie wir sofort erkennen werden, die hinreichende und notwendige Bedingung dafür die, daß alle Geraden dieselbe Gesamtlänge haben.

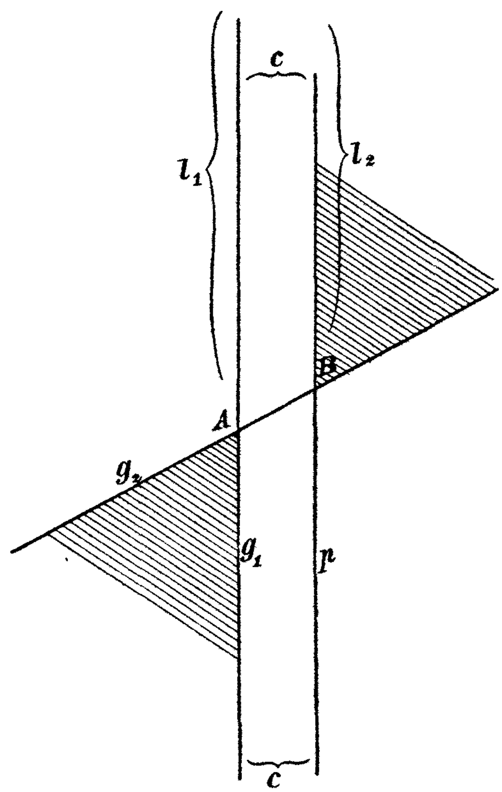

Fig. 5.

Wir wollen zunächst zeigen, daß die Bedingung notwendig ist.

Betrachten wir die beiden Geraden g_1 und g_2, die sich in A schneiden. Dann kann man auf g_2 einen Punkt B so wählen, daß $AB < \varepsilon$ ist, wo ε eine beliebig kleine Zahl ist. Durch B ziehe man eine Parallele p zu g_1; g_1 und p schneiden sich also auf der Normalgeraden im Punkte C. Sei l_1 die Länge der einen Strecke AC (also $g_1 - l_1$ die der andern) und l_2 die Länge der einen Strecke BC (also $p - l_2$ die der andern), so ist $l_2 < l_1 + AB$ oder $l_2 < l_1 + \varepsilon$. Soll nun der in Rede stehende Dreieckssatz auch gelten für Dreiecke, die von der Normalgeraden geschnitten werden, so muß er auch erfüllt sein für das schraffierte Dreieck ABC. In diesem müßte also sein

$$g_2 - AB < g_1 - l_1 + l_2$$

oder

$$g_2 < g_1 + 2\varepsilon.$$

Ganz analog läßt sich beweisen, daß

$$g_1 < g_2 + 2\varepsilon'.$$

Da nun ε und ε' beliebig kleine Größen sind, so folgt $g_1 = g_2$, w. z. b. w.

Der Fall, daß g_1 und g_2 parallel sind, läßt sich durch zweimalige Anwendung des eben bewiesenen Satzes erledigen.

Nun zeigen wir auch, daß die Bedingung, daß alle Geraden gleiche Länge besitzen, hinreichend ist dafür, daß auch in Dreiecken, die von der Normalgeraden geschnitten werden, die Summe zweier Seiten größer ist als die dritte (falls dieser Satz gültig ist für alle Dreiecke, die von der Normalgeraden nicht geschnitten werden, wie wir voraussetzen).

Betrachten wir wieder das schraffierte Dreieck ABC. Wäre nun der genannte Satz falsch, also etwa $(g_2 - AB) \geqq g_1 - l_1 + l_2$, so folgte, da $g_1 = g_2$ ist, $AB + l_2 \leqq l_1$, was unmöglich ist, da AB, l_2, l_1 die Seiten eines Dreiecks sind, das von der Normalgeraden nicht durchsetzt wird.

Ebensowenig kann $g_1 - l_1 \geqq g_2 - AB + l_2$ sein, da dann $AB \geqq l_1 + l_2$ sein müsste, was aus denselben Gründen falsch ist. Die dritte Seite läßt sich natürlich ebenso behandeln. Damit ist die Grundlage gewonnen, um die an den Anfang gestellten Sätze vollständig anwenden zu können. Es existiert daher auf der Normalgeraden eine eindeutig festgelegte Maßbestimmung, wenn 1) die Geometrie überall vom elliptischen Typus ist und außerhalb der Normalgeraden überall unsere Axiome erfüllt, 2) wenn alle Geraden dieselbe Gesamtlänge besitzen.

Welche Bedingungen ergeben sich daraus für die Funktion w?

Bedingung 1) verlangt:

$$\lim_{s=\infty} \int_0^s \frac{ds}{2} \int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta} \sin(\vartheta-\tau)\, w(\operatorname{tg}\tau,\ s\ \sin(\vartheta-\tau) + y_0\cos\tau - x_0\sin\tau)\, d\tau$$

hat für alle endlichen x_0, y_0 und für alle ϑ einen bestimmten endlichen Wert.

Bedingung 2) verlangt, daß

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{ds}{2} \int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta} \sin(\vartheta-\tau)\, w(\operatorname{tg}\tau,\ s\cdot\sin(\vartheta-\tau) + y_0\cos\tau - x_0\sin\tau)\, d\tau$$

von ϑ, x_0, y_0 unabhängig ist.

Nun läßt sich zeigen, daß dies tatsächlich stets dann eintritt, wenn die beiden Integrationen über s und τ vertauschbar sind.

Nehmen wir an, daß diese Integrationen vertauschbar seien, und daß die Länge auf allen Geraden einen endlichen Wert besitze, so erfüllt unsere Geometrie vom elliptischen Typus überall ohne Ausnahme die Archimedische Forderung und alle Geraden haben dieselbe Gesamtlänge.

Dies ist so zu verstehen:

Von den beiden, zwei Punkte verbindenden Strecken ist stets die eine die absolut kürzeste Verbindung zwischen den beiden Punkten, wenn nicht grade beide Strecken gleich sind. Jede der beiden Strecken aber ist kürzer als jedes solches Kurvenstück, das unter Festhalten der Enden durch stetige Deformation aus der Strecke erzeugt werden kann, das also mit ihr aus der elliptischen Ebene ein Stück herausschneidet. (Die beiden Strecken, in die eine elliptische Gerade durch zwei Punkte geteilt wird, können nicht in einander übergeführt werden. Es zeigen diese letzten Betrachtungen einen wesentlichen Unterschied der elliptischen Geometrie von der sphärischen, in der alle diese Sätze in dieser Form nicht gelten.)

§ 5.

Beispiele. Die Minkowskische und die Hilbertsche Geometrie.

I) Der nächst einfache Fall ist der, daß die Punkte einer und nur einer Geraden unerreichbare Punkte sind. Wir werden diese Gerade die „unendlich ferne Gerade" nennen.

Wir können ohne Einschränkung der Allgemeinheit annehmen, daß sie mit der Normalgeraden zusammenfalle. Das Parallelenaxiom ist jetzt im Euklidschen Sinne erfüllt.

Es wird ein gewisses Interesse haben, solche Geometrieen zu suchen, in denen zu jeder Schar paralleler Extremalen (Geraden) eine Schar paralleler Geraden als „Transversalen" im Kneserschen Sinne gehört.

Eine leichte Rechnung ergibt, daß die hinreichende und notwendige Bedingung dafür, daß eine Geometrie der vorstehend gekennzeichneten Art vorliegt, die ist, daß w von seinem zweiten Argument unabhängig und daß $\frac{\partial u}{\partial x} = \alpha$, $\frac{\partial u}{\partial y} = \beta$ Konstanten sind. (Wir lassen hier einmal zu, daß das starke Monodromieaxiom nicht erfüllt ist.)

Das Längenelement hat also jetzt die Form:

$$dl \equiv \left\{ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\tau)\, d\tau + \alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \right\} ds,$$

und die Länge der Strecke $\overline{12}$ ist gleich

$$\overline{12} = s_{1,2} \left\{ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\tau)\, d\tau + \alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \right\}.$$

Die Maßbestimmung ist also auf jeder Geraden proportional der gewöhnlichen Euklidschen Maßbestimmung und von jeder Parallelverschiebung unabhängig.

Das heißt aber:

Die einzige Geometrie unserer Art, bei der zu parallelen Geraden wieder parallele Geraden als Transversalen gehören, ist die Minkowskische

Geometrie (siehe Einleitung); denn diese ist durch die eben genannten Eigenschaften charakterisiert.

Die „Aichkurve“ stellt sich in den Polarkoordinaten r, ϑ dar durch

$$1 = r \cdot \left\{ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\tau)\, d\tau + \alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \right\}.$$

Daraus folgt:

$$\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r} = w(\vartheta).$$

Da aber $w(\vartheta)$ der einzigen Bedingung unterworfen war, stets positiv zu sein, und andererseits $\frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r}$ bis auf einen stets positiven Faktor gleich dem Krümmungsradius der Kurve ist, so erhalten wir für die Aichkurve die einzige Bedingung, daß sie eine überall konvexe Kurve um den Nullpunkt darstellt.

Daß sie den Nullpunkt wirklich umgibt, drückt sich darin aus, daß $\frac{1}{r}$ für alle ϑ einen endlichen Wert besitzt, falls wir annehmen, daß alle Punkte regulär sind.

Ferner ist klar, daß die Forderung des starken Monodromieaxioms darauf hinausläuft, daß die Aichkurve eine zum Anfangspunkt symmetrische Kurve sein muß.

II) Herr Hilbert hat in einem an Herrn Klein gerichteten Briefe (siehe Einleitung) eine Geometrie aufgestellt, in der ebenfalls die Gerade Kürzeste ist.

Betrachten wir in der xy-Ebene eine konvexe, geschlossene Kurve und definieren für das Innere derselben die Entfernung zweier Punkte durch den Logarithmus des Doppelverhältnisses, das diese beiden Punkte mit den Schnittpunkten der durch sie festgelegten Geraden auf der genannten Kurve bilden, so erhalten wir die fragliche Maßbestimmung.

Sei $H(x, y) = 0$ die Gleichung der bestimmenden Kurve, $y = px + b$ eine Gerade, so ergeben sich die Werte der Abscissen der Schnittpunkte der Geraden mit der konvexen Kurve durch die Gleichung $H(x, px + b) = 0$. Entweder hat diese Gleichung für x zwei reelle Wurzeln, oder eine mehrfache Wurzel, oder gar keine reelle Wurzel.

Seien die Wurzeln, falls sie existieren, $v_1(p, b)$ und $v_2(p, b)$, so erhält man mit leichter Mühe für den Ausdruck $W(p, y - px)$ den Wert

$$W(p, y - px) = \frac{\partial^2 (v_2 - v_1)}{\partial b^2},$$

wobei für v_2 die größere oder kleinere der beiden Wurzeln zu nehmen ist, je nachdem $+\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{3\pi}{2}$ oder $-\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}$ ist.

Es zeigt sich dann, daß die Funktion

$$w = \frac{1}{\cos^3 \vartheta} W$$

ein stets positives Vorzeichen besitzt, wenn die Kurve $H(x, y) = 0$ überall konvex ist. Ferner ist w definiert für alle Punkte im Innern der Kurve $H = 0$.

III) Man kann nun offenbar eine weit allgemeinere Geometrie unserer Art erzeugen, wenn man

$$W = \sum_{\lambda=1}^{\infty} \frac{\partial^2 (v_{\lambda,2} - v_{\lambda,1})}{\partial b^2}$$

setzt, wo die v_λ Kurven $H_\lambda = 0$ entsprechen.

Ob man aber durch solche Übereinanderlagerung Hilbertscher Geometrieen die allgemeine Geometrie unserer Art erhalten kann, habe ich noch nicht klarstellen können.

§ 6.

Über den Einfluß von Unstetigkeiten der Funktion w.

Es sei mir gestattet, aus den in der Überschrift dieses Paragraphen angedeuteten Untersuchungen hier nur einen Satz herauszuheben; im übrigen sei auf meine Dissertation verwiesen (§ 5—8).

Der betreffende Satz lautet:

Hat die Funktion w Singularitäten der Art, daß $\int dl$ auch längs einer über solche Stellen hinweg gehenden Geraden einen bestimmten endlichen Wert besitzt — also die betreffenden Punkte, für welche die Singularitäten eintreten, noch als erreichbare Punkte zu bezeichnen sind — so zeigt die zu w gehörige Geometrie keinerlei Abweichungen von der Archimedischen Forderung, falls nur w außerhalb der betreffenden Stellen überall positiv bleibt. Die gerade Strecke bleibt also die kürzeste Verbindung ihrer Endpunkte.

§ 7.

Verallgemeinerung des Begriffes „Aichkurve".

Angenommen, w sei längs eines Stückes der y-Achse regulär, eine Annahme, die keine Beschränkung bedeutet.

Bilden wir jetzt in Polarkoordinaten r, ϑ für jeden Punkt $x = 0$, $y = b$ als Anfangspunkt die Kurve

$$1 = r\left\{\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\tau, b)\, d\tau + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} \cos\vartheta + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=0} \sin\vartheta\right\},$$

so fällt diese für den Fall, daß w von b unabhängig ist, mit der Minkowskischen Aichkurve zusammen.

Für unsere Kurve gilt die Differentialgleichung

$$\text{(1)} \qquad \frac{d^2\left(\frac{1}{r}\right)}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r} = w(\vartheta, b).$$

Soweit w willkürlich ist, ist die Kurve auch willkürlich, denn $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}$ und $\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)_{x=0}$ sind natürlich willkürliche Funktionen von y resp. b.

Ist das schwache Monodromieaxiom erfüllt, so heißt das offenbar, daß zu jedem $\vartheta + 2k\pi$ dasselbe r gehört wie zu ϑ (k eine ganze Zahl), daß die Kurve also geschlossen ist. Ist das starke Monodromieaxiom erfüllt, so gehört zu jedem $\vartheta + k\pi$ dasselbe r wie zu ϑ, die Kurve ist also in bezug auf $x = 0$, $y = b$ symmetrisch.

Da aber, wie wir schon früher sahen

$$\frac{d^2 \frac{1}{r}}{d\vartheta^2} + \frac{1}{r}$$

bis auf einen positiven Faktor gleich der Krümmung der Kurve ist, so sagt $w > 0$ aus, daß die Kurve stets konvex ist.

Damit haben wir das Resultat:

Man erhält die ***allgemeinste ebene Geometrie****, in der die Gerade Kürzeste ist, in folgender Weise:*

Um jeden Punkt einer Geraden, die wir zur y-Achse machen, beschreibe man eine konvexe Kurve. Man setze dann die Gleichung dieser Kurve in Polarkoordinaten r, ϑ um den Punkt der Geraden in der Form an, die stets zu erhalten ist:

$$1 = r g(\vartheta, b)$$

oder

$$1 = r\left\{\int\limits_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\tau, b)\, d\tau + \left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0} \cos\vartheta + \left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_{x=0} \sin\vartheta\right\},$$

wobei b der Parameter ist, der den Punkt auf der Geraden markiert, und $u(x, b)$ noch in mannigfacher Weise gewählt werden kann, nur so, daß $\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)_{x=0}$ und $\left(\frac{\partial u}{\partial b}\right)_{x=0}$ durch g gegebene Funktionen von b sind. w aber ist vollständig durch g bestimmt, nach Gleichung (1).

Dann ist das Längenelement der gesuchten Geometrie gleich

$$ds \left\{ \int_{\vartheta_0}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\tau, y - x \operatorname{tg} \tau)\, d\tau + \frac{\partial u}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial u}{\partial y} \sin \vartheta \right\};$$

die Länge also bis auf eine bloße Funktion des Ortes (unabhängig von dem Verbindungswege der Endpunkte) bestimmt.

Ist die gewählte Kurve symmetrisch, so kann das starke Monodromieaxiom erfüllt werden durch passende Wahl von u, das dann ebenfalls völlig bestimmt ist*).

Ist die Kurve nach einem Umlaufe geschlossen, so ist das schwache Monodromieaxiom erfüllt, wie sonst auch u — aber in Übereinstimmung mit dem oben Gesagten — gewählt werden mag.

Diese, die Geometrie also wesentlich bestimmenden Kurven mögen „Aichkurven“ heißen.

Kapitel II.

Die Geometrieen im Raume.

§ 8.

Der Aufbau der postulierten Geometrieen.

Wenn wir jetzt zum Raume übergehen, so stehen der Verallgemeinerung der Überlegungen des § 1 keinerlei Schwierigkeiten im Wege; wir können also jedem Punkte außerhalb der Normalebene ein Zahlentripel x, y, z zuordnen; die Gerade ist dann dargestellt durch die Gleichungen:

$$y = px + u,$$
$$z = qx + v,$$

oder durch die Differentialgleichungen

$$\frac{d^2x}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2y}{ds^2} = 0, \quad \frac{d^2z}{ds^2} = 0, \qquad \left(ds \equiv + \sqrt{dx^2 + dy^2 + dz^2}\right).$$

Was nun die Untersuchungen des § 2 angeht, so haben unsere Axiome jetzt ganz analoge Resultate wie damals: es läßt sich die Länge einer geradlinigen Strecke im allgemeinen darstellen durch das Integral:

$$\int_{x_1}^{x_2} \mathfrak{y}(x, y, z, y', z')\, dx. \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx},\ z' = \frac{dz}{dx}\right)$$

*) Siehe § 3.

und immer durch

$$\int_0^s f\left(x, y, z, \frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds}, \frac{dz}{ds}\right) ds,$$

wobei f in den drei letzten Variabeln homogen von der ersten Dimension ist.

Für andere Kurven definieren wir dann die Länge eines Abschnittes durch obiges Integral, das wir längs der betreffenden Kurve erstrecken.

4) Die Archimedische Forderung, daß die Gerade die kürzeste Verbindung zwischen zwei gegebenen Punkten sein soll, zerfällt wieder in zwei andere:

4a) Es müssen die beiden partiellen Differentialgleichungen erfüllt sein, die durch Vergleichung der Differentialgleichungen der Geraden mit den Lagrangeschen des Variationsproblems entstehen, nämlich

$$(1) \qquad 0 = \frac{\partial^2 g}{\partial p \, \partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial p \, \partial y} p + \frac{\partial^2 g}{\partial p \, \partial z} q - \frac{\partial g}{\partial y},$$

$$(2) \qquad 0 = \frac{\partial^2 g}{\partial q \, \partial x} + \frac{\partial^2 g}{\partial q \, \partial y} p + \frac{\partial^2 g}{\partial q \, \partial z} q - \frac{\partial g}{\partial z}. \qquad (p = y', q = z')$$

Daraus erhält man zunächst als notwendige Bedingung, daß $\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial p \, \partial q}$, $\frac{\partial^2 g}{\partial q^2}$ je eine Funktion von p, q, $u = y - px$, $v = z - qx$ allein sein müssen.

Setzt man dementsprechend:

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p^2} = U(p, q, u, v),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial p \, \partial q} = V(p, q, u, v),$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial q^2} = W(p, q, u, v),$$

so liefert die Bedingung für die Vereinbarkeit dieser drei Gleichungen die Relationen:

$$(\mathrm{Ia}) \qquad \frac{\partial U}{\partial q} = \frac{\partial V}{\partial p}; \quad \frac{\partial V}{\partial q} = \frac{\partial W}{\partial p}; \quad \frac{\partial U}{\partial v} = \frac{\partial V}{\partial u}; \quad \frac{\partial V}{\partial v} = \frac{\partial W}{\partial u},$$

woraus wieder folgt, daß U, V, W je der partiellen Differentialgleichung genügen müssen:

$$(\mathrm{Ib}) \qquad \frac{\partial^2 h}{\partial u \, \partial q} = \frac{\partial^2 h}{\partial v \, \partial p}. \qquad (h = U, V, W)$$

Berücksichtigt man alles dies, so erhält man als notwendigen Ansatz für das Längenelement den folgenden:

$$\text{(II)}\quad dl \equiv g\,dx \equiv dx\int_{p_0,q_0}^{p,q}\left\{dp\int_{p_0,q_0}^{p,q}(U\,dp+V\,dq)+dq\cdot\int_{p_0,q_0}^{p,q}(V\,dp+W\,dq)\right\}$$
$$+\,dt(x,y,z),$$

wobei t eine willkürliche Funktion von x, y, z bedeutet, p_0, q_0 irgend welche Konstanten.

Daß die hingeschriebenen Kurvenintegrale einen nur von den Grenzen abhängigen Wert haben, ist an die Erfüllung der Relationen (I) gebunden.

Erstrecken wir die inneren Integrale stets über dieselbe Kurve wie das äußere, so können wir auch schreiben

$$\text{(IIa)}\quad dl \equiv g\,dx \equiv dx\int_{p_0 q_0}^{p,q}\int_{p_0 q_0}^{p,q}(U\,dp\,dp+2V\,dp\,dq+W\,dq\,dq)+dt(x,y,z).$$

Und daß der so bestimmte Ausdruck für g auch die Differentialgleichungen (1) und (2) befriedigt, wenn nur U, V, W den Bedingungen (I) genügen, ist leicht nachzuweisen.

4b) Damit wirklich ein Minimum eintritt, muß die Weierstraßsche E-Funktion stets negativ sein.

Sind $\overline{p}$, $\overline{q}$ die Werte von p, q auf irgend einer die Endpunkte der ins Auge gefaßten Strecke verbindenden Kurve $\overline{C}$, p, q die Werte auf den in $\overline{C}$ einmündenden Extremalen (Geraden), welche von dem einen Ende der Strecke ausgehen, so lautet die E-Funktion:

$$E=\left[g(p,q)-g(\overline{p},\overline{q})+(\overline{p}-p)\frac{\partial g(p,q)}{\partial p}+(\overline{q}-q)\frac{\partial g(p,q)}{\partial q}\right]\cdot\frac{d\overline{x}}{d\overline{s}}\,^{*)}.$$

Mit Hülfe von (II) erhält man nun leicht

$$E=-\frac{d\overline{x}}{ds}\int_{p,q}^{\overline{p},\overline{q}}\int_{p,q}^{\overline{p},\overline{q}}(U\,dp\,dp+2V\,dp\,dq+W\,dq\,dq).$$

Damit aber dieser Ausdruck stets negativ sei, ist notwendig und hinreichend, daß an jeder Stelle des fünfdimensionalen Raumes p, q, x, y, z und für jedes dp, dq

$$\frac{dx}{ds}(U\,dp\,dp+2V\,dp\,dq+W\,dq\,dq)>0$$

sei, woraus wieder folgt:

---

*) Vergleiche Noble l. c. p. 65. Der Faktor $\frac{d\overline{x}}{ds}$ muß notwendig hinzugenommen werden, wenn wir nicht voraussetzen, daß y und z längs $\overline{C}$ eindeutige Funktionen von x sind, was hier eine wesentliche Beschränkung bilden würde.

$$\text{(III)} \qquad U \cdot W - V^2 > 0 \quad \text{und} \quad \frac{dx}{ds} U > 0,$$

was wir auch schreiben können:

$$\text{(IIIa)} \qquad \frac{\partial^2 g}{\partial p^2}\frac{\partial^2 g}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial p \, \partial q}\right)^2 > 0, \quad \frac{dx}{ds} \cdot \frac{\partial^2 g}{\partial p^2} > 0.$$

Wir können somit folgendes Resultat aussprechen:

Erfüllen die im übrigen willkürlichen Funktionen U, V, W der vier Argumente p, q, $u = y - xp$, $v = z - qx$ die Bedingungen (I) *und* (III), *so liefert der durch* (II) *gegebene Ausdruck des Längenelementes dl die allgemeinste Maßbestimmung, die den in der Einleitung erwähnten Axiomen entspricht.* (Abgesehen vom starken Monodromieaxiom.)

Machen wir die nicht wesentliche Annahme, daß U, V, W an der Stelle $p = 0$, $q = 0$ regulär seien, so können wir $p_0 = 0$, $q_0 = 0$ setzen.

Werde weiterhin eine Größe ε durch die Gleichung $\frac{p}{q} = \operatorname{ctg} \varepsilon$ bestimmt, so können wir als speziellen Integrationsweg $\varepsilon = \text{const.}$ wählen, falls U, V, W auf diesem ganzen Wege regulär sind.

Setzen wir dementsprechend $p = r \cos \varepsilon$, $q = r \sin \varepsilon$, so lautet der Ausdruck für das Längenelement

$$dl \equiv dx \int_0^r dr \int_0^r (U \cos^2 \varepsilon + 2\, V \cos \varepsilon \sin \varepsilon + W \sin^2 \varepsilon)\, dr + dt(x, y, z)$$

Führen wir endlich als neue Variabele ϑ durch die Transformation

$$r = \operatorname{tg} \vartheta$$

ein, so bekommen wir

$$\text{(IIb)} \qquad dl \equiv ds \int_0^\vartheta \sin(\vartheta - \tau)\, w \, d\tau + dt(x, y, z),$$

wo

$$w = \frac{1}{\cos^3 \tau} (U \cos^2 \varepsilon + 2 V \cos \varepsilon \sin \varepsilon + W \sin^2 \varepsilon)$$

gesetzt ist.

Die Bedingungen, welche w erfüllen muß, lassen sich daraufhin gemäß (I) und (III) leicht angeben; speziell mag erwähnt werden, daß die zweite Bedingung (III) einfach lautet

$$\text{(IIIb)} \qquad w > 0.$$

§ 9.

Die Monodromieaxiome.

I) Wenn das schwache Monodromieaxiom erfüllt sein soll, d. h. wenn der Strecke AB überhaupt eine eindeutig bestimmte Länge zukommen soll, so müssen folgende Bedingungen erfüllt sein:

1) Es dürfen U, V, W nur solche Singularitäten besitzen, daß

a) die in g vorkommenden Integrale in den unabhängigen Variabeln p, q vom Wege unabhängig bleiben, solange in der pq-Ebene die unendlich ferne Gerade nicht überschritten wird.

b) daß dasselbe noch der Fall ist nach Einführung der Variabeln ϑ, ε statt p, q und zwar für alle Werte von ϑ und ε, für die überhaupt U, V, W definiert sind.

2) Es müssen w und damit auch U, V, W als Funktionen von τ und ε je die Periode 2π besitzen.

3) Es müssen die Gleichungen

$$\int_0^{2\pi} \sin \tau w \, d\tau = 0 \quad \text{und} \quad \int_0^{2\pi} \cos \tau w \, d\tau = 0$$

erfüllt sein. Die Funktion t bleibt ganz beliebig, abgesehen natürlich davon, daß sie eindeutig sein muß. Die Bedingungen 1), 2), 3) sind auch hinreichend für die Erfüllung des schwachen Monodromieaxioms.

II) Wenn das s t a r k e M o n o d r o m i e a x i o m befriedigt sein soll, d. h., wenn die Länge der Strecke AB stets der von BA gleich sein soll, so müssen abgesehen von der Bedingung I, 1) noch die folgenden Bedingungen erfüllt sein:

2) w muß eine eindeutige Funktion von $\operatorname{tg} \tau \cos \varepsilon$ und $\operatorname{tg} \tau \sin \varepsilon$, d. h. von p und q sein.

3) Die Funktion t muß so angenommen werden, daß

$$\frac{dt}{ds} = -\frac{1}{2} \int_0^{\pi} \sin(\vartheta - \tau) \, w \, d\tau$$

wird.

Daß diese Bestimmung von t möglich ist, läßt sich mit Benutzung der Voraussetzungen I, 1) leicht zeigen.

Die Erfüllung der Bedingungen 1), 2), 3) *ist auch hinreichend dafür, daß das starke Monodromieaxiom erfüllt ist; das Längenelement selbst erscheint dann unter der Form:*

$$dl \equiv \frac{ds}{2} \int_{\vartheta-\pi}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau) \, w(\tau) \, d\tau.$$

§ 10.

Beispiele.

I) Nehmen wir U, V, W als von u, v unabhängig an, wodurch die Bedingungen (Ib) von selbst erfüllt sind, $\frac{\partial t}{\partial x} = \alpha$, $\frac{\partial t}{\partial y} = \beta$, $\frac{\partial t}{\partial z} = \gamma$, wo α, β, γ Konstanten sind, so wird

$$dl \equiv ds \left\{ \int_0^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\varepsilon, \tau)\, d\tau + \alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \cos\varepsilon + \gamma \sin\vartheta \sin\varepsilon \right\}.$$

Diese Maßbestimmung ist unter den andern dadurch eindeutig hervorgehoben, daß sie auf parallelen Geraden dieselbe ist, d. h. nur von der Richtung ϑ, ε des Linienelementes abhängt, nicht aber von dem Orte (x, y, z) desselben. Wir erhalten so offenkundig die Minkowskische Geometrie im Raume (siehe Einleitung).

Die „Aichfläche", die vom Koordinatenanfangspunkt überall die Entfernung 1 hat, stellt sich in Polarkoordinaten $r, \vartheta, \varepsilon$ so dar:

$$1 = r \left\{ \int_0^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w(\tau, \varepsilon)\, d\tau + \alpha \cos\vartheta + \beta \sin\vartheta \cos\varepsilon + \gamma \sin\vartheta \sin\varepsilon \right\}.$$

Die einzige Bedingung, der diese Fläche unterworfen ist, ist die, daß sie eine den Nullpunkt umgebende, überall konvexe Fläche sein muß. Im übrigen kann sie ganz beliebig gewählt werden.

Ist sie einfach geschlossen, d. h. ist r eine eindeutige Funktion der Richtung $\vartheta, \varepsilon (0 \leqq \vartheta \leqq \pi, |\varepsilon| \leqq \pi)$, so ist das schwache Monodromieaxiom erfüllt; ist aber die Fläche zu dem Anfangspunkt symmetrisch, so ist das starke Monodromieaxiom befriedigt.

II) Man erhält die Hilbertsche Geometrie für den Raum in folgender Weise:

Man nehme eine geschlossene konvexe Fläche $H(x, y, z) = 0$. Dann existieren für alle p, q, u, v, deren Geraden:

$$y = px + u,$$
$$z = qx + v$$

durch das Innere der genannten Fläche gehen, zwei reelle Wurzeln ω_1 und ω_2 der Gleichung

$$H(\omega, \omega p + u, \omega p + v) = 0.$$

Setzt man alsdann

$$U = \frac{\partial^2(\omega_2 - \omega_1)}{\partial u^2},$$

$$V = \frac{\partial^2(\omega_2 - \omega_1)}{\partial u \, \partial v},$$

$$W = \frac{\partial^2(\omega_2 - \omega_1)}{\partial v^2}, \quad \left(\omega_1 > \omega_2, \text{ falls } -\frac{\pi}{2} < \vartheta < \frac{\pi}{2}, \text{ sonst } \omega_1 < \omega_2\right)$$

so sind die Bedingungen (I) und (III) sämtlich erfüllt. Ist $H = 0$ eine einfach geschlossene Fläche, so ist das starke Monodromieaxiom befriedigt, falls man noch t richtig bestimmt, und zwar erhält man für die Länge der Strecke $\overline{12}$ im Innern von $H = 0$:

$$\int_0^s \frac{ds}{2} \int_{\vartheta - \pi}^{\vartheta} \sin(\vartheta - \tau)\, w \, d\tau = lg \frac{(x_2 - \omega_2)(x_1 - \omega_1)}{(x_2 - \omega_1)(x_1 - \omega_2)}.$$

Dabei sind in ω_1 und ω_2 die Werte von p, q, u, v einzusetzen, die der durch die Strecke $\overline{12}$ bestimmten Geraden angehören.

Damit ist die von Herrn Hilbert gegebene Form erreicht:

Die Entfernung ist gleich dem Logarithmus des Doppelverhältnisses, das von folgenden vier Punkten gebildet wird: den Endpunkten der zu messenden Strecke und den Schnittpunkten der durch sie bestimmten Geraden mit der zugrunde gelegten *konvexen* Fläche.

Die Geometrie existiert nur im Innern der genannten Fläche.

§ 11.

Über die Differentialgleichung:

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u \, \partial q} = \frac{\partial^2 h}{\partial v \, \partial p}.$$

Es leuchtet nach § 8 ein, daß die wirkliche Bestimmung aller räumlichen Geometrieen unserer Art auf die Integration dieser Differentialgleichung hinausführt.

Abgesehen von den bekannten Existenztheoremen über partielle Differentialgleichungen, mögen noch die folgenden für uns wichtigen Sätze kurz genannt werden, die ich über sie bis jetzt habe aufstellen können:

1) *Gegeben sei h längs $u = 0$ als Funktion $U(p, q, v)$ und längs $q = 0$ als Funktion $Q(p, u, v)$ der eingeschlossenen Größen. Diese Anfangswerte U, Q seien in p, v analytisch, aber nicht notwendigerweise in q resp. u; in diesen Variabeln jedoch stetig und zweimal differentiierbar. Dann gibt es eine Funktion $h(p, q, u, v)$, die in einem gewissen Gebiete um $u = 0$, $q = 0$ regulär ist, die in Rede stehende Differentialgleichung erfüllt und die vorgeschriebenen Anfangswerte annimmt.*

(Natürlich muß $U(p, 0, v) = Q(p, 0, v)$ sein!)

Und zwar lautet das Integral, wenn man

$$h_0 = U + Q - (U)_{q=0}$$

setzt und unter $\underbrace{\int}_{n}$ ein n-faches Integral versteht, folgendermaßen:

$$h = \sum_{n=0}^{\infty} \underbrace{\int_0^q}_{n} dq \underbrace{\int_0^u}_{n} du \, \frac{\partial^{2n} h_0}{\partial p^n \, \partial v^n}.$$

Dafür läßt sich auch der folgende geschlossene Ausdruck finden:

$$h(u, q, v, p) = h_0(u, q, v, p) + \frac{1}{2\pi} \int_0^u d\alpha \int_0^q d\beta \int_0^{2\pi} \frac{\partial^2 h_0}{\partial p \, \partial v} \, d\vartheta,$$

wobei $\frac{\partial^2 h_0}{\partial p \, \partial v}$ als Funktion folgender Argumente anzusehen ist:

$$\alpha, \beta, v - \sqrt{(u-\alpha)(q-\beta)}\, e^{\vartheta i}, \qquad p - \sqrt{(u-\alpha)(q-\beta)}\, e^{-\vartheta i}.$$

Für den Fall, daß h_0 in p, v nicht analytisch ist, habe ich den Existenzbeweis noch nicht führen können.

2) *Es existiere eine Funktion h, die der partiellen Differentialgleichung* $\frac{\partial^2 h}{\partial u \, \partial q} = \frac{\partial^2 h}{\partial v \, \partial p}$ *genügt und für $u = 0$ gleich $U(p, q, v)$ und für $q = 0$ gleich $Q(p, u, v)$ ist. Dann ist diese Funktion h in einem gewissen Bereiche um die Stelle $u = 0$, $q = 0$, p, v auch die einzige Funktion, die alle diese Bedingungen befriedigt*, vorausgesetzt, daß h eine stetige, bis zur zweiten Ordnung differentiierbare Funktion ist, die aber keineswegs analytisch zu sein braucht.

Der in Rede stehende Bereich kann a priori, unabhängig von den Werten der Funktionen U und Q angegeben werden.

§ 12.

Über die geometrische Deutung der Resultate. Erweiterung des Begriffes „Aichfläche".

Nachdem wir in den §§ 8—11 die analytischen Bedingungen formuliert haben, die das Längenelement dl auf Grund unserer Axiome erfüllen muß, soll jetzt eine geometrisch anschauliche Erläuterung derselben folgen.

Die eigentümliche Form von U, V, W weist zunächst darauf hin, daß wir g im wesentlichen überall kennen, wenn es auf der yz-Ebene allein gegeben ist für jeden Punkt in allen Richtungen.

Das im vorigen Paragraphen genannte Existenztheorem sagt dann — allerdings einstweilen nur unter Beschränkung auf den analytischen Charakter gewisser Funktionen — aus, daß es hinreicht, g allein zu kennen für die z-Achse in allen Richtungen ($u = 0$); außerdem aber noch in allen Punkten der yz-Ebene, jedoch nur für $q = 0$, d. h. in den Richtungen, die der xy-Ebene parallel sind.

Denken wir uns jetzt um jeden Punkt x, y, z eine Fläche konstruiert der Art, daß

$$1 = r \cos \vartheta g$$

die Gleichung derselben in den Polarkoordinaten $r, \vartheta, \varepsilon$ ist, bezogen auf den Punkt x, y, z.

Dann sagen, ebenso wie in dem speziellen Beispiel der Minkowskischen Geometrie die Ungleichheitsbedingungen (III), (§ 8) nichts anderes aus, als daß die so konstruierte Fläche überall gegen den festen Punkt x, y, z konkav ist.

Aus der Geometrie selber kann man sich die Fläche in folgender Weise entstanden denken:

Konstruieren wir die Fläche, die in der betreffenden Geometrie von dem gewählten Punkte x, y, z einen bestimmten konstanten Abstand $a < 1$ hat, vergrößern sie aber im Sinne der Namengebung dadurch, daß wir jeden Radiusvektor durch a dividieren. Alsdann lasse man a gegen Null konvergieren. Es gibt dann eine Grenzfläche, die, in Polarkoordinaten dargestellt, lautet

$$1 = rg \cos \vartheta.$$

Diese Fläche soll allgemein „Aichfläche“ heißen.

Mit Hülfe solcher Aichflächen kann man sich nun die ***allgemeinste Geometrie,*** *die unsern Axiomen Genüge leistet, folgendermaßen verschaffen:*

Man konstruiere um jeden Punkt einer Geraden, die wir zur z-Achse machen, eine konvexe Fläche, und um jeden Punkt einer durch die z-Achse gehenden Ebene, die wir zur yz-Ebene machen, in den Ebenen $z = \text{const.}$ je eine konvexe Kurve.

Diese Flächen und Kurven mögen im allgemeinen stetig in einander greifen. Schreibt man sie mittels Polarkoordinaten $r, \vartheta, \varepsilon$ in bezug auf den zugehörigen Punkt in der Form $1 = r \cos \vartheta \cdot \overline{\overline{g}}$, so bestimmen die Werte von $\frac{\partial^2 \overline{\overline{g}}}{\partial p^2}, \frac{\partial^2 \overline{\overline{g}}}{\partial p\, \partial q}, \frac{\partial^2 \overline{\overline{g}}}{\partial q^2}$ *) ($p = \operatorname{tg} \vartheta \cos \varepsilon$, $q = \operatorname{tg} \vartheta \sin \varepsilon$), soweit sie sich bilden lassen, zusammen mit der Differentialgleichung

$$\frac{\partial^2 h}{\partial u\, \partial q} = \frac{\partial^2 h}{\partial v\, \partial p} \qquad (u = y,\ v = z)$$

und den Relationen Ia des § 8 die drei Funktionen U, V, W vollständig. Setzen wir dann

*) Wir setzen von unseren Gebilden voraus, daß diese Differentialquotienten existieren.

$$w = \frac{1}{\cos^3\vartheta}(\cos^2\varepsilon\, U + 2\cos\varepsilon\sin\varepsilon\, V + \sin^2\varepsilon\, W)$$

und bilden die Funktion

$$\bar{g} = \frac{1}{\cos\vartheta}\int\limits_0^\vartheta \sin(\vartheta-\tau)\, w(p, q, u, v)\, d\tau + \alpha(y, z) + \beta(y, z)p + \gamma(y, z)q,$$

so sind α, β, γ vollständig bestimmt, wenn wir verlangen, daß $\bar{g}$ mit $\bar{\bar{g}}$ in den Definitionsbereichen des letzteren übereinstimmen und gleichzeitig $\frac{\partial\gamma}{\partial y} = \frac{\partial\beta}{\partial z}$ sein soll.

Endlich leiten wir aus $\bar{g}$ die Funktion g dadurch ab, daß wir setzen

$$g = \frac{1}{\cos\vartheta}\int\limits_0^\vartheta \sin(\vartheta-\tau)\, w(p, q, y-xp, z-xq)\, d\tau + \frac{\partial t}{\partial x} + p\frac{\partial t}{\partial y} + q\frac{\partial t}{\partial z},$$

wobei t noch in mannigfaltiger Weise so gewählt werden kann, daß

$$\left(\frac{\partial t}{\partial x}\right)_{x=0} = \alpha(y, z); \quad \left(\frac{\partial t}{\partial y}\right)_{x=0} = \beta(y, z); \quad \left(\frac{\partial t}{\partial z}\right)_{x=0} = \gamma(y, z)$$

wird.

$$dl \equiv g\, dx$$

stellt dann das Längenelement der gesuchten Geometrie dar.

Dieselbe existiert so weit, als die Funktion g existiert, und befriedigt die Archimedische Forderung, solange w und $\frac{\partial^2 g}{\partial p^2}\frac{\partial^2 g}{\partial q^2} - \left(\frac{\partial^2 g}{\partial p\,\partial q}\right)^2$ positiv bleiben. In gewisser Nähe der Anfangswerte ($u = 0$, $q = 0$) ist diese letzte Bedingung aus Stetigkeitsrücksichten sicher erfüllt.

Das Einzige, was nach Wahl der angegebenen Aichflächen noch unbestimmt bleibt, ist zum Teil die Funktion t. Diese Unbestimmtheit fällt aber auch fort, sowie *wir die Erfüllung des starken Monodromieaxioms fordern. In diesem Falle ist die Geometrie durch die angenommenen Aichflächen und Aichkurven völlig festgelegt.*

Eine notwendige Bedingung für den Eintritt des starken Monodromieaxioms ist jedenfalls die, daß die ursprünglichen Aichflächen und Aichkurven symmetrisch waren; ob diese Bedingung auch hinreichend ist, könnte erst eine eingehendere Untersuchung der im vorigen Paragraphen besprochenen Differentialgleichung ergeben.