Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiegruppe.

Von J. Plemelj in Czernowitz.

Unter den vielen Fragen, welche durch Riemanns Ideen angeregt worden sind, hat wohl die umfassendsten Untersuchungen jenes funktionentheoretische Problem zur Folge gehabt, welches die Bestimmung von Funktionen verlangt, die die Verzweigung einer gegebenen Riemannschen Fläche oder, noch allgemeiner, die einer gegebenen Monodromiegruppe besitzen. Während das einfachere „algebraische“ Problem durch Anwendung kombinatorischer Methoden der Potentialtheorie durch Schwarz und Neumann bereits vor langer Zeit eine Lösung gefunden hat, führten diese Methoden beim allgemeinen Problem nicht zum Ziele. Funktionen, deren Existenz dieses Riemannsche Problem behauptet, haben den Charakter der Lösungen linearer Differentialgleichungen mit rationalen Koeffizienten. In speziellen Fällen ist die Willkürlichkeit der Monodromiegruppe einer linearen Differentialgleichung nach älteren Methoden bereits nachgewiesen worden. So geben die automorphen ζ-Funktionen Poincarés bei gegebenen Verzweigungspunkten ein Mittel, den Beweis für Differentialgleichungen beliebiger Ordnung zu erbringen, wenn nur die Monodromiegruppe auf reale Verzweigungsexponenten führt.[1])

Die Revolution, welche in neuester Zeit die Verwendung der Fredholmschen Funktionalgleichung in der Theorie linearer Randwertaufgaben hervorgerufen hat, zeigte auch hier ihre Wirkung. Den ersten vollständigen Existenzbeweis erbrachte Hilbert[2]) durch Zurückführung eines noch verallgemeinerten Riemannschen Problems auf ein System Fredholmscher Funktionalgleichungen. Komplizierte Greensche Funktionen und viele Hilfsfunktionen gestalten den Beweis sehr verwickelt und wenig übersichtlich. Die Frage nach der allgemeinsten Lösung beantwortet dieser Existenzbeweis nicht.

---

[1]) Schlesinger, Handb. d. lin. Diffgl. II 2, S. 386 ff.

[2]) Göttinger Nachrichten 1905, S. 307 ff. Ein vorausgegangener Versuch seines Schülers Kellog (Math. Ann. 60) mit ähnlichem Bestreben ist völlig mißglückt.

Einen einfachen Existenzbeweis, der ohne irgend welche Greensche Funktionen das Ziel erreicht und gänzlich funktionentheoretischer Natur ist, hat darauf der Verfasser angegeben (Anz. Ak. Wiss., Wien, 10. Mai 1906). In der vorliegenden Arbeit will ich diesen Beweis mit den unmittelbar daran anknüpfenden Fragen, zumal die nach der Anzahl unabhängiger Lösungen, was die Methode Hilberts direkt nicht erledigt, erörtern. Die von selbst sich darbietende natürliche Verknüpfung mit analogen Problemen, z. B. dem sogenannten adjungierten, dem in der Theorie linearer Differentialgleichungen die bekannten Multiplikatoren entsprechen, gibt unmittelbar die Existenz eines Fundamentalsystems von Lösungen selbst bei dem verallgemeinerten Problem. Es läßt sich ein einfachstes „primitives" Fundamentalsystem herstellen, welches außerhalb der Verzweigungsstellen keinen Punkt der Ebene auszeichnet; durch dieses Fundamentalsystem läßt sich jede im Endlichen außerhalb der Verzweigungspunkte reguläre Lösung in einfacher Weise mit in z rationalen Koeffizienten linear darstellen. Die Ergebnisse habe ich, wohl Riemanns Prinzipien entsprechend, direkt aus der Definition und dem Existenzbeweis geschöpft, ohne die Theorie linearer Differentialgleichungen irgend zu beanspruchen. Das primitive Fundamentalsystem ist, wie sich schließlich von selbst ergibt, die Lösung eines Systems linearer Differentialgleichungen, welches ein möglichst einfaches ist, denn die Anzahl der im allgemeinen Falle darin vorhandenen Konstanten stimmt genau mit der Zahl unabhängiger Parameter der Monodromiegruppe.[1])

Das „algebraische" Problem, Funktionen zu konstruieren, die die Verzweigung einer gegebenen n-blättrigen Riemannschen Fläche haben, ist ein Spezialfall des hier behandelten. Das vorliegende Verfahren scheint mir aber weit naturgemäßer und einfacher zu sein als jede der bisherigen, auf Sätzen der Potentialtheorie beruhenden Methoden.

Für sehr bemerkenswert halte ich den Umstand, daß bei der ganzen Untersuchung das Gebiet des komplexen nirgends verlassen wird; man hat z. B. die volle Schmiegsamkeit komplexer Integrationswege zur Verfügung. Diese Methode liegt so in direkter Fortsetzung zu der auf Goursats Prinzipien beruhenden Herleitung des Cauchyschen Integralsatzes, wo auch ganz im komplexen unter den wenigsten Voraussetzungen der Satz sich ergibt, womit schon die Grundlage der Funktionentheorie gegeben ist. Nimmt man nur noch den Ergänzungssatz zur Cauchyschen Integraldarstellung hinzu (siehe vorigen Artikel), so hat man schon

[1]) Es liegt wohl nahe, besonders an der Hand der Existenzbeweise zu versuchen, durch geeignete stetige Änderung des einen Systems der Parameter das System der anderen Parameter in ein beliebig gegebenes überzuführen. Die umfassenden Versuche Schlesingers so den Existenzbeweis zu führen, sind gänzlich mißlungen (Crelle, J., Bd. 129, 1905 (287—294); Bd. 130, 1905 (26—46); Math. Ann., Bd. 63, S. 273, 277 ff.; Acta Math., Bd. 31) auch im algebraischen Falle (Ann. d. Éc. Norm. Sup. (3) XX, 1903). Seine Methode führt nicht zum Ziele.

alles zum Existenzbeweise nötige, denn die Sätze über die Funktionalgleichung Fredholms — hier kommen nur die elementarsten zur Verwendung — sind, wie die Determinantensätze der Algebra, deren Grenzfälle sie ja sind, nach den Erfahrungen der letzten Jahre zu den Grundlagen der Analysis zu rechnen. So ergibt sich hier, wie bei Anwendung der Determinante in der Algebra, die theoretisch einfachste Lösung.

1.

Das funktionentheoretische Problem, dessen Beantwortung das Ziel dieser Arbeit ist, lautet in der Formulierung, wie sie von Riemann[1]) selbst herrührt, folgendermaßen: Es sind n regulär-analytische Funktionen des Außengebietes und n solche im Innengebiete einer geschlossenen, sich selbst nicht schneidenden Kurve zu bestimmen, so daß in jedem Punkte z der Randkurve zwischen den Randwerten $\varphi_1^-(z), \varphi_2^-(z), \ldots \varphi_n^-(z)$ der Außenfunktionen und den Randwerten $\varphi_1^+(z), \varphi_2^+(z), \ldots \varphi_n^+(z)$ der Innenfunktionen lineare umkehrbare Beziehungen der Form

$$\text{(I)}\quad \begin{aligned} \varphi_\varkappa^-(z) &= \alpha_{\varkappa 1}(z)\,\varphi_1^+(z) + \alpha_{\varkappa 2}(z)\,\varphi_2^+(z) + \cdots + \alpha_{\varkappa n}(z)\,\varphi_n^+(z), \\ \varphi_\varkappa^+(z) &= \alpha'_{\varkappa 1}(z)\,\varphi_1^-(z) + \alpha'_{\varkappa 2}(z)\,\varphi_2^-(z) + \cdots + \alpha'_{\varkappa n}(z)\,\varphi_n^-(z) \end{aligned}$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots n$$

bestehen. Das zweite System dieser Gleichungen ist die Umkehrung des ersten, so daß zwischen den Koeffizienten $\alpha_{\varkappa\lambda}(z)$ und $\alpha'_{\varkappa\lambda}(z)$ die bekannten Relationen

$$\text{(1)}\quad \alpha_{\varkappa 1}(z)\,\alpha'_{1\lambda}(z) + \alpha_{\varkappa 2}(z)\,\alpha'_{2\lambda}(z) + \cdots + \alpha_{\varkappa n}(z)\,\alpha'_{n\lambda}(z) = \begin{cases} 1 \text{ für } \varkappa = \lambda \\ 0 \;\;\text{„}\;\; \varkappa \neq \lambda \end{cases}$$

$$\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n$$

gelten.

Beim Problem, wie es Riemann gestellt hat, sind die Koeffizienten $\alpha_{\varkappa\lambda}(z)$ längs der ganzen Kurve abteilungsweise wechselnde gegebene Systeme von Konstanten. Wir müssen aber, um unsere Methode anwendbar zu machen, zunächst diese Koeffizienten $\alpha_{\varkappa\lambda}(z)$, $\alpha'_{\varkappa\lambda}(z)$ durch die Voraussetzung der Stetigkeit beschränken, dafür verallgemeinern wir sie in der Weise, daß sie irgend welche längs der Randkurve stetige Funktionen sind, die wir überdies als einmal differentiierbar annehmen.[2]) Die Randkurve soll im Endlichen liegen und überall eine Normale besitzen.

Nach Beantwortung dieses Problems werden wir ein einfaches Verfahren angeben, wie das ursprüngliche Problem Riemanns auf dieses verallgemeinerte zurückgeführt werden kann.

---

[1]) Werke, Nachlaß XXI.

[2]) Dieselbe Aufgabe behandelt Hilbert a. a. O.

Von den gesuchten Funktionen wird die Regularität im Außen- bezw. Innengebiete und stetiger Anschluß an stetige Randwerte vorausgesetzt. Die Außenfunktionen, welche die Randwerte $\varphi_1^-(z), \varphi_2^-(z), \ldots \varphi_n^-(z)$ haben, sollen im ∞ bezüglich die konstanten Werte $c_1, c_2, \ldots c_n$ annehmen. Die Randfunktionen $\varphi_\varkappa^-(z)$ und $\varphi_\varkappa^+(z)$ müssen nun, damit sie Randwerte solcher analytischer Funktionen sind, den folgenden Gleichungen entsprechen

$$(2, \Phi_\varkappa^+) \qquad 0 = +\varphi_\varkappa^-(z) + \frac{1}{\pi i}\int \frac{\varphi_\varkappa^-(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta - 2c_\varkappa,$$

$$(2, \Phi_\varkappa^-) \qquad 0 = -\varphi_\varkappa^+(z) + \frac{1}{\pi i}\int \frac{\varphi_\varkappa^+(\zeta)}{\zeta - z}\, d\zeta,$$

deren Bestehen auch eine hinreichende Bedingung ist. Die Integrale, welche in diesen Gleichungen über die Randkurve zu erstrecken sind, haben in gewöhnlichem Sinne, weil ζ und z Randpunkte sind, keine Bedeutung; sie sind, wie ihre Herleitung ergibt, als gewisse Grenzwerte, wie sie in meiner Arbeit „Ein Ergänzungssatz etc." [siehe vorigen Aufsatz, Gl. (5)] definiert worden sind, aufzufassen. Für die rechten Seiten dieser Gleichungen soll deshalb die kürzere Bezeichnung $\Phi_\varkappa^+$ bezw. $\Phi_\varkappa^-$ gewählt werden, weil sie stets, wenn sie nicht Null sind, Randwerte regulärer, nicht identisch verschwindender Innen- bezw. Außenfunktionen sind.

Aus den Gleichungen (2) kann mit Hilfe der Gleichungen (I) die Elimination von $\varphi_1^+(z), \varphi_2^+(z), \ldots \varphi_n^+(z)$ so bewerkstelligt werden, daß man ein System von Gleichungen für $\varphi_1^-(z), \varphi_2^-(z), \ldots \varphi_n^-(z)$ erhält, in denen die Integrale in gewöhnlichem Sinne eine Bedeutung haben. Solche Gleichungen ergeben sich, wie der Anblick von (I) zeigt, indem man die Gleichungen $(2, \Phi^+)$ und $(2, \Phi^-)$ in folgender Weise zusammenfaßt:

$$(\mathrm{I}') \qquad 0 = -\Phi_\varkappa^+ + \alpha_{\varkappa 1}(z)\,\Phi_1^- + \alpha_{\varkappa 2}(z)\,\Phi_2^- + \cdots + \alpha_{\varkappa n}(z)\,\Phi_n^-$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots n$$

und aus ihnen dann mit Hilfe von (2) und (I) die Funktionen $\varphi_1^+(z), \varphi_2^+(z), \ldots \varphi_n^+(z)$ eliminiert.

Führt man die Abkürzung

$$(3) \quad A_{\varkappa\lambda}(z, \zeta) = \alpha_{\varkappa 1}(z)\,\alpha'_{1\lambda}(\zeta) + \alpha_{\varkappa 2}(z)\,\alpha'_{2\lambda}(\zeta) + \cdots + \alpha_{\varkappa n}(z)\,\alpha'_{n\lambda}(\zeta)$$

ein, so erhalten die Gleichungen die sehr durchsichtige Form:

$$
(4)\quad \left\{
\begin{aligned}
c_1 &= \varphi_1^-(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\Big\{[A_{11}(z,\zeta)-1]\,\varphi_1^-(\zeta) + A_{12}(z,\zeta)\,\varphi_2^-(\zeta) + \\
&\qquad + \cdots + A_{1n}(z,\zeta)\,\varphi_n^-(\zeta)\Big\}\frac{d\zeta}{\zeta - z} \\
c_2 &= \varphi_2^-(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\Big\{A_{21}(z,\zeta)\,\varphi_1^-(\zeta) + [A_{22}(z,\zeta)-1)\,\varphi_n^-(\zeta) + \\
&\qquad + \cdots + A_{2n}(z,\zeta)\,\varphi_n^-(\zeta)\Big\}\frac{d\zeta}{\zeta - z} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
c_n &= \varphi_n^-(z) - \frac{1}{2\pi i}\int\Big\{A_{n1}(z,\zeta)\,\varphi_1^-(\zeta) + A_{n2}(z,\zeta)\,\varphi_2^-(\zeta) + \\
&\qquad + \cdots + [A_{nn}(z,\zeta)-1]\,\varphi_n^-(\zeta)\Big\}\frac{d\zeta}{\zeta - z}.
\end{aligned}
\right.
$$

In diesen Gleichungen sind wegen (1) und (3) und der vorausgesetzten Stetigkeit und Differentiierbarkeit der Koeffizienten $\alpha_{\varkappa\lambda}(z)$, $\alpha'_{\varkappa\lambda}(z)$ die Faktoren aller $\varphi_\varkappa^-(\zeta)$ unter dem Integralzeichen selbst für $\zeta = z$ endlich, so daß sich das System (4) von Funktionalgleichungen als eine Fredholmsche Integralgleichung auffassen und nach der Methode Fredholms lösen läßt.

Jede Lösung von (4) ist, wenn endlich, zugleich stetig; es folgt dies aus der Stetigkeit der Integrale in (4). Um die Differenz der Werte des Integrals in zwei benachbarten Punkten z_1 und z_2 abzuschätzen, hat man nach (1) und (3) Integrale der Form

$$\int\left[\frac{\alpha_{\varkappa\lambda}(z_1)}{\zeta - z_1} - \frac{\alpha_{\varkappa\lambda}(z_2)}{\zeta - z_2}\right]\alpha'_{\lambda\mu}(\zeta)\,\varphi_\mu^-(\zeta)\,d\zeta$$

zu untersuchen. Für dieses Integral findet sich nun höchstens die Größenordnung $-|z_1 - z_2|\,\lg|z_1 - z_2|$. Daraus folgt nun[1]) auch die Existenz und Stetigkeit der Integrale in $(2, \Phi^+)$ und $(2, \Phi^-)$ als Cauchysche Hauptwerte, so daß Φ^+ und Φ^-, wenn sie sich aus einer Lösung von (4) nicht identisch Null ergeben, stetige Randwerte regulärer Innen- bezw. Außenfunktionen sind. Eine Lösung der Gleichungen (4) gibt also eine Lösung des Problems (I), wenn sich in (2) die Ausdrücke Φ^+ und Φ^- identisch Null ergeben; wenn nicht, so lösen uns die Funktionen $\Phi_\varkappa^+$ und $\Phi_\varkappa^-$ ein ähnliches Riemannsches Problem (I'), welches wir „das begleitende Problem von (I)" nennen wollen.

Welcher der beiden Fälle eintritt, läßt sich hier nicht allgemein entscheiden; jedenfalls enthalten die Gleichungen (4) sämtliche etwa vorhandenen Lösungen des Problems (I). Die Gleichungen (4) besitzen nun nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen.

---

[1]) Siehe vorangehenden Artikel.

Der Begriff der linearen Unabhängigkeit ist wegen der Linearität des Problems (I) unschwer zu fassen. Im nächsten Abschnitte wird dieser Begriff genauer definiert und die Frage nach der Existenz der Lösungen von (I) in jeder Hinsicht befriedigend beantwortet werden können. Es wird sich zeigen, daß, wenigstens wenn man den gesuchten Funktionen irgendwo, etwa im Unendlichen, ein polares Unendlichwerden gestattet, es dann stets genau n linear unabhängige Lösungen dieses verallgemeinerten Riemannschen Problems gibt, durch die jede weitere Lösung in einfachster Weise ausdrückbar ist.

2.

Die Gleichungen (4) können nach einem Verfahren Fredholms in folgender Weise in einer einzigen Integralgleichung zusammengefaßt werden: Man denke sich den Integrationsweg, d. h. die Kurve K in n übereinander liegenden Ebenen gelegt und lasse dann bei der Integration z alle diese Kurven $K_1, K_2, \ldots K_n$ durchlaufen. Man fasse nun $\varphi_1^-(z), \varphi_2^-(z), \ldots \varphi_n^-(z)$ in einer einzigen Funktion $\varphi(z)$ zusammen, die bezüglich im $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots n^{\text{ten}}$ Blatt den Wert $\varphi_1^-(z), \varphi_2^-(z), \ldots \varphi_n^-(z)$ annimmt und analog habe $c(z)$ in den einzelnen Blättern die konstanten Werte $c_1, c_2, \ldots c_n$. Man setze ferner

$$K(z,\zeta) = -\frac{A_{\varkappa\lambda}(z,\zeta)}{2\pi i(\zeta - z)}, \text{ wenn } z \text{ auf } K_\varkappa,\ \zeta \text{ auf } K_\lambda \text{ liegt und } \varkappa \neq \lambda.$$

$$K(z,\zeta) = -\frac{A_{\varkappa\varkappa}(z,\zeta) - 1}{2\pi i(\zeta - z)}, \quad \text{wo } z \text{ und } \zeta \text{ beide auf } K_\varkappa \text{ liegen.}$$

Bei dieser Definition der Funktionen $\varphi(z)$, $c(z)$, $K(z,\zeta)$[1]) schreiben sich die Gleichungen (4) in der einen Fredholmschen Funktionalgleichung

$$c(z) = \varphi(z) + \int\limits_{K_1 + \cdots + K_n} K(z,\zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta, \tag{5}$$

wovon man sich sofort überzeugt, wenn man das Integral in die einzelnen Kurven entsprechenden Integrale zerlegt und dann nacheinander z auf der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots n^{\text{ten}}$ Kurve annimmt. Man wird bei dieser Verallgemeinerung der Lage des z auch kurz $\varphi(z)$ d. h. $[\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots \varphi_n(z)]$ als eine Lösung des Problems I bezeichnen können.

Die Integralgleichung (5) ist stets dann, und zwar in eindeutiger Weise, lösbar, wenn sie in ihrer homogenen Form, d. h. für $c(z) = 0$, keine Lösung besitzt. Tritt jedoch dieser Ausnahmsfall ein, so gibt es nur dann Lösungen von (5), wenn die gegebene Funktion $c(z)$ gewissen Bedingungen genügt. Um diese aufzustellen, bemerken wir die Tatsache, daß die Funktionalgleichung

[1]) Man wird hier $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots \varphi_n(z)$ bei dieser Zusammenziehung nicht etwa als Zweige derselben in n Blättern ausgebreiteten Funktion $\varphi(z)$ im Sinne der Funktionentheorie verstehen.

(5) in ihrer homogenen Form $[c(z) = 0]$ stets gleichzeitig lösbar ist mit der folgenden „adjungierten“

$$0 = \psi(z) + \int\limits_{K_1 \ldots K_n} K(\zeta, z)\, \psi(\zeta)\, d\zeta, \tag{6}$$

und zwar sogar genau durch die gleiche Anzahl Lösungen $\psi^{(1)}(z), \psi^{(2)}(z), \ldots \psi^{(\nu)}$, zwischen denen keine Relation

$$A_1 \psi^1(z) + A_2 \psi^{(2)}(z) + \cdots + A_\nu \psi^{(\nu)}(z) = 0$$

mit nicht sämtlich verschwindenden Konstanten A besteht, wobei natürlich z auf jede Kurve $K_1, K_2, \ldots K_n$ zu liegen kommt.

Die nicht homogene Integralgleichung (5) ist, wie gesagt, dann im allgemeinen nicht lösbar, wohl aber, wenn $c(z)$ die folgenden notwendigen und hinreichenden Bedingungen erfüllt[1])

$$0 = \int\limits_{K_1 \ldots K_n} c(\zeta) \cdot \psi(\zeta)\, d\zeta$$

für jede der Lösungen $\psi(\zeta)$ der homogenen adjungierten Funktionalgleichung (6).

Es ist von Interesse, die Bedeutung der Lösungen der homogenen adjungierten Funktionalgleichungen kennen zu lernen. Zu diesem Zwecke schreiben wir die Integralgleichung (6) als ein System von Gleichungen, indem wir den Integrationsweg zerlegen und z nacheinander auf der $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots n^{\text{ten}}$ der übereinanderliegenden Kurven nehmen. Die Gleichungen lauten zufolge der Definition von $K(\zeta, z)$, wenn man der Funktion $\psi(z)$ auf der $\varkappa^{\text{ten}}$ Kurve die Bezeichnung $\psi_\varkappa^+(z)$ gibt:

$$(7)\quad \left\{\begin{aligned}
0 &= \psi_1^+(z) + \frac{1}{2\pi i}\int \Big\{[A_{11}(\zeta, z) - 1]\, \psi_1^+(\zeta) + A_{21}(\zeta, z)\, \psi_2^+(\zeta) + \\
&\qquad + \cdots + A_{n1}(\zeta, z)\, \psi_n^+(\zeta)\Big\} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\
0 &= \psi_2^+(z) + \frac{1}{2\pi i}\int \Big\{A_{12}(\zeta, z)\, \psi_1^+(\zeta) + [A_{22}(\zeta, z) - 1]\, \psi_2^+(\zeta) + \\
&\qquad + \cdots + A_{n2}(\zeta, z)\, \psi_n^+(\zeta)\Big\} \frac{d\zeta}{\zeta - z} \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
0 &= \psi_n^+(z) + \frac{1}{2\pi i}\int \Big\{A_{1n}(\zeta, z)\, \psi_1^+(\zeta) + A_{2n}(\zeta, z)\, \psi_2^+(\zeta) + \\
&\qquad + \cdots + [A_{nn}(\zeta, z) - 1]\, \psi_n^+(\zeta)\Big\} \frac{d\zeta}{\zeta - z}.
\end{aligned}\right.$$

Diese Gleichungen ergeben sich nun genau durch dasselbe Verfahren wie die Gleichungen (4), wenn man sich die Aufgabe

[1]) Siehe d. Verfassers: Monatsh. Math. Phys., 15, 1904, S. 118.

gestellt hätte, Innenrandwerte $\psi_1^+(z), \psi_2^+(z), \ldots \psi_n^+(z)$ und Außenrandwerte $\psi_1^-(z), \psi_2^-(z), \ldots \psi_n^-(z)$ regulärer analytischer Funktionen, die im ∞ überdies verschwinden sollen, zu bestimmen, welche an der Randkurve in der Beziehung stehen

$$\text{(II)}\quad \begin{aligned} \psi_\varkappa^+(z) &= \alpha'_{1\varkappa}(z)\,\psi_1^-(z) + \alpha'_{2\varkappa}(z)\,\psi_2^-(z) + \cdots + \alpha'_{n\varkappa}(z)\,\psi_n^-(z) \\ \psi_\varkappa^-(z) &= \alpha_{1\varkappa}(z)\,\psi_1^+(z) + \alpha_{2\varkappa}(z)\,\psi_2^+(z) + \cdots + \alpha_{n\varkappa}(z)\,\psi_n^+(z). \end{aligned}$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots n.$$

Man hätte hier die Gleichungen

$$(8, \Psi_\varkappa^-) \qquad 0 = -\psi_\varkappa^+(z) + \frac{1}{\pi i}\int \frac{\psi_\varkappa^+(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

$$(8, \Psi_\varkappa^+) \qquad 0 = +\psi_\varkappa^-(z) + \frac{1}{\pi i}\int \frac{\psi_\varkappa^-(\zeta)}{\zeta - z}\,d\zeta$$

folgendermaßen zusammenzufassen

$$\text{(II')}\quad \begin{aligned} 0 &= -\Psi_\varkappa^- + \alpha'_{1\varkappa}(z)\,\Psi_1^+ + \alpha'_{2\varkappa}(z)\,\Psi_2^+ + \cdots + \alpha'_{n\varkappa}(z)\,\Psi_n^+ \\ 0 &= -\Psi_\varkappa^+ + \alpha_{1\varkappa}(z)\,\Psi_1^- + \alpha_{2\varkappa}(z)\,\Psi_2^- + \cdots + \alpha_{n\varkappa}(z)\,\Psi_n^+ \end{aligned}$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots n,$$

wobei also hier ebenfalls das zweite System die Umkehrung des ersten ist. Ersetzt man in (II') die Ausdrücke $\Psi_\varkappa^+$ und $\Psi_\varkappa^-$ durch (8) und drückt nach (II) die $\psi_\varkappa^-(z)$ durch die $\psi_\varkappa^+(z)$ aus, so ergibt sich für $\psi_1^+(z), \psi_2^+(z), \ldots \psi_n^+(z)$ genau das obige Gleichungssystem (7).

Genau wie oben wird hier eine Lösung von (7) eine Lösung des Problems (II) geben, wenn die mit den Werten $\psi_\varkappa^+(z)$ bestimmten rechten Seiten $\Psi_\varkappa^-$ und $\Psi_\varkappa^+$ in (8) sich identisch Null ergeben; wenn nicht, so sind $\Psi_\varkappa^-$ und $\Psi_\varkappa^+$ Randwerte analytischer Funktionen, welche das Problem (II') lösen.

Die Probleme (I) und (II') heißen einander „adjungiert"; ebenso ist (I') adjungiert zu (II).

Wir erkennen vor allem die Tatsache, daß jedes der Probleme (I), (I'), (II), (II') nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen besitzt; denn das System (4) bezw. die Integralgleichung (5), der sämtliche Lösungen von (I) genügen, besitzt in homogener Form $c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$ nur eine endliche Anzahl ν von „linear unabhängigen", d. h. solchen Lösungen $\varphi^{(1)}(z), \varphi^{(2)}(z), \ldots \varphi^{(\nu)}(z)$, zwischen denen keine Relation

$$C_1\,\varphi^{(1)}(z) + C_2\,\varphi^{(2)}(z) + \cdots + C_\nu\,\varphi^{(\nu)}(z) = 0$$

mit nicht sämtlich verschwindenden Konstanten $C_1, C_2, \ldots C_\nu$ besteht.

Wir wollen übereinkommen zu sagen, daß eine Lösung $\varphi(z)$ im Unendlichen die Ordnung μ hat, wenn $z^{\mu}\varphi(z)$ im ∞ allenthalben regulär ist, aber nicht verschwindet, d. h. es sind, wenn $\varphi(z)$ in den einzelnen Kurven aus den Funktionen $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots \varphi_n(z)$ besteht, die Ausdrücke

$$z^{-\mu}\varphi_1(z),\ z^{-\mu}\varphi_2(z), \ldots z^{-\mu}\varphi_n(z)$$

im Unendlichen nicht sämtlich Null. Einer positiven Zahl μ entspricht ein Pol μ^{ter} Ordnung im Unendlichen und einem negativen μ eine Nullstelle $|\mu|^{\text{ter}}$ Ordnung.

Die Lösungen, welche sich aus (5) ergeben, führen auf Funktionen, welche im Unendlichen regulär sind, d. h. entweder endlich sind oder daselbst eine Nullstelle besitzen. Die Lösungen von (I), welche im Unendlichen verschwinden, ergeben sich überdies sämtlich aus der homogenen Integralgleichung (5) $(c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$. Da die homogene Integralgleichung (5) nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen besitzt, so ist die Ordnung des Nullwerdens der Lösungen von (I) im Unendlichen beschränkt; denn, wenn $\varphi(z)$ im Unendlichen eine Nullstelle p^{ter} Ordnung hat, so sind die Größen

$$\varphi(z),\ z\,\varphi(z),\ z^2\varphi(z), \ldots z^{p-1}\varphi(z)$$

infolge der Linearität des Problems (I) ebenfalls Lösungen des Problems (I), die im Unendlichen noch sämtlich verschwinden, also aus der homogenen Integralgleichung (5) fließen. Diese Lösungen sind natürlich untereinander linear unabhängig, und da es nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger im Unendlichen verschwindender Lösungen gibt, kann p eine gewisse ganze Zahl nicht überschreiten. Aus demselben Grunde folgt auch, daß jedes der Probleme (I), (I′), (II), (II′) nur eine endliche Anzahl im Unendlichen verschwindender linear unabhängiger Lösungen besitzt und die Ordnung des Verschwindens eine endliche ganze Zahl nicht überschreitet.

Aus dieser Überlegung folgt, daß das zu I′ analoge Problem

$$(\overset{*}{\mathrm{I}}{}') \quad 0 = -\Phi_{\varkappa}^{+} + \frac{\alpha_{\varkappa 1}(z)}{(z-z_0)^p}\overset{*}{\Phi}{}_1^{-} + \frac{\alpha_{\varkappa 2}(z)}{(z-z_0)^p}\overset{*}{\Phi}{}_2^{-} + \cdots + \frac{\alpha_{\varkappa n}(z)}{(z-z_0)^p}\overset{*}{\Phi}{}_n^{-},$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots n$$

wenn für z_0 ein Innenpunkt genommen wird, keine im Unendlichen reguläre Lösung $\overset{*}{\Phi}{}_{\varkappa}^{-}$ besitzen kann, wenn p genügend groß genommen wurde, weil man sonst aus dieser Lösung von $(\overset{*}{\mathrm{I}}{}')$ sofort eine Lösung von (I′) herleiten könnte, welche im Unendlichen eine Nullstelle mindestens p^{ter} Ordnung hätte. Diese Lösung würde man erhalten, wenn man für die Außenfunktionen $\Phi_1^-, \Phi_2^-, \ldots \Phi_n^-$ die Ausdrücke

$$\frac{\overset{*}{\Phi}{}_1^-}{(z-z_0)^p}, \quad \frac{\overset{*}{\Phi}{}_2^-}{(z-z_0)^p}, \ldots \frac{\overset{*}{\Phi}{}_n^-}{(z-z_0)^p}$$

nimmt, welche infolge der Regularität der $\overset{*}{\Phi}{}_\varkappa^-$ im Unendlichen mindestens in p^{ter} Ordnung verschwinden. Aus demselben Grunde wird die zu (II′) analoge Aufgabe

$$(\overset{*}{\text{II}}{}') \; 0 = -\Psi_\varkappa^+ + \frac{\alpha_{1\varkappa}(z)'}{(z-z_0)^p}\overset{*}{\Psi}{}_1^- + \frac{\alpha_{2\varkappa}(z)}{(z-z_0)^p}\overset{*}{\Psi}{}_2^- + \cdots + \frac{\alpha_{n\varkappa}}{(z-z_0)^p}\overset{*}{\Psi}{}_n^-$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots n$$

bei genügend großem p mit $(\overset{*}{\text{I}}{}')$ gleichzeitig keine Lösung haben.

Die Probleme $(\overset{*}{\text{I}}{}')$ und $(\overset{*}{\text{II}}{}')$ sind nun die begleitenden Probleme von

$$(\overset{*}{\text{I}}) \; \overset{*}{\varphi}{}_\varkappa^-(z) = \frac{\alpha_{\varkappa 1}(z)}{(z-z_0)^p}\varphi_1^+(z) + \frac{\alpha_{\varkappa 2}(z)}{(z-z_0)^p}\varphi_2^+(z) + \cdots + \frac{\alpha_{\varkappa n}(z)}{(z-z_0)^p}\varphi_n^+(z)$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots n$$

beziehungsweise von

$$(\overset{*}{\text{II}}) \; \overset{*}{\psi}{}_\varkappa^-(z) = \frac{\alpha_{1\varkappa}(z)}{(z-z_0)^p}\psi_1^+(z) + \frac{\alpha_{2\varkappa}(z)}{(z-z_0)^p}\psi_2^+(z) + \cdots + \frac{\alpha_{n\varkappa}(z)}{(z-z_0)^p}\psi_n^+(z)$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots n.$$

Die beiden Probleme $(\overset{*}{\text{I}})$ und $(\overset{*}{\text{II}})$ führen auf analoge Integralgleichungen wie (I) und (II). Es sind nur überall die Koeffizienten $\alpha_{\varkappa\lambda}(z)$ durch $\dfrac{\alpha_{\varkappa\lambda}(z)}{(z-z_0)^p}$, $\alpha'_{\varkappa\lambda}(z)$ folglich durch $(z-z_0)^p\,\alpha'_{\varkappa\lambda}(z)$ zu ersetzen, wodurch die Voraussetzungen der Stetigkeit und Differentiierbarkeit nicht verletzt werden. Diese zu (4), (5) und (6), (7) analogen Integralgleichungen — $(\overset{*}{4})$, $(\overset{*}{5})$ und $(\overset{*}{6})$, $(\overset{*}{7})$ mögen sie heißen — haben jetzt die bemerkenswerte Eigenschaft, nur Lösungen von $(\overset{*}{\text{I}})$ bezw. $(\overset{*}{\text{II}})$ zu liefern, da die entsprechenden begleitenden Probleme $(\overset{*}{\text{I}}{}')$ und $(\overset{*}{\text{II}}{}')$ ohne Lösung sind. Aus einer Lösung des Problems $(\overset{*}{\text{I}})$ wird man nun sofort eine Lösung des ursprünglichen Problems (I) erhalten, indem man als Außenfunktionen $\varphi_\varkappa^-(z)$ die Funktionen $(z-z_0)^p\,\overset{*}{\varphi}{}_\varkappa^-(z)$ nimmt, die Innenfunktionen $\varphi_\varkappa^+(z)$ aber beibehält. Die so erhaltenen Lösungen sind im Unendlichen im allgemeinen nicht regulär, sondern besitzen daselbst einen Pol höchstens p^{ter} Ordnung.

Die gleichzeitige Betrachtung der Probleme $\overset{*}{\mathrm{I}}$, $\overset{*}{\mathrm{I}}'$, $\overset{*}{\mathrm{II}}$, $\overset{*}{\mathrm{II}}'$ gibt uns nun nicht nur die Existenz der Lösung des verallgemeinerten Riemannschen Problems (I), sondern gibt direkt ein „Fundamentalsystem" von n linear unabhängigen Lösungen, durch welche jede weitere Lösung von (I) linear mit in z rationalen Koeffizienten darstellbar ist.

Die Existenz des Fundamentalsystems folgt aus dem merkwürdigen Umstand, daß die Integralgleichung $(\overset{*}{4})$ bedingungslos lösbar ist, wie man die konstanten Werte $\overset{*}{c}_1, \overset{*}{c}_2, \ldots \overset{*}{c}_n$, welche die Funktionen $\overset{*}{\varphi}{}_1^-(z), \overset{*}{\varphi}{}_2^-(z), \ldots \overset{*}{\varphi}{}_n^-(z)$ im Unendlichen annehmen sollen, auch wählt. Dies wird feststehen, wenn wir zeigen, daß bei etwaiger Lösbarkeit der homogenen Integralgleichung $(\overset{*}{7})$ die Integralbedingungen für die Lösbarkeit von $(\overset{*}{4})$ von selbst erfüllt sind. Es sei zu diesem Behufe $\overset{*}{\psi}(z)$ eine Lösung der homogenen Integralgleichung $(\overset{*}{6})$. An den einzelnen übereinander liegenden Kurven hat $\overset{*}{\psi}(z)$ die Werte $\psi_1^+(z), \psi_2^+(z), \ldots \psi_n^+(z)$, welche die Integralgleichungen $(\overset{*}{7})$ lösen und wegen der Unlösbarkeit des begleitenden Problems, wie bereits gesagt, $(\overset{*}{\mathrm{II}})$ lösen, also Randwerte regulärer Innenfunktionen sind. Die Integralbedingung für die Lösbarkeit der nichthomogenen Integralgleichung $(\overset{*}{5})$ lautet

$$(\overset{*}{6}) \qquad \int\limits_{K_1 \ldots K_n} \overset{*}{c}(z)\, \overset{*}{\psi}(z)\, dz = 0,$$

wobei das Integral über alle Kurven erstreckt wird. Zerlegt man nun das Integral auf die den einzelnen Kurven entsprechenden Teile und berücksichtigt die Bedeutung von $\overset{*}{c}(z)$ und $\overset{*}{\psi}(z)$, so lautet diese Bedingung

$$\overset{*}{c}_1 \int \psi_1^+(z)\, dz + \overset{*}{c}_2 \int \psi_2^+(z)\, dz + \cdots + \overset{*}{c}_n \int \psi_n^+(z)\, dz = 0.$$

Diese Gleichung ist nun bei ganz willkürlichen Konstanten $\overset{*}{c}_1, \overset{*}{c}_2, \ldots \overset{*}{c}_n$ erfüllt, weil die darin enthaltenen Integrale nach dem Cauchyschen Integralsatze sämtlich identisch verschwinden, denn die Funktionen $\psi_\varkappa^+(z)$ sind stetige Randwerte, denen regulär analytische Funktionen des Innengebietes am Rande sich stetig anschließen.[1] Da diese Bedingung für jede Lösung $\overset{*}{\psi}(z)$ der homogenen

[1] Zur Giltigkeit des Cauchyschen Satzes ist die Voraussetzung der Differentiierbarkeit der Randwerte nicht erforderlich.

adjungierten Integralgleichung $(\overset{*}{6})$ erfüllt ist, ist die Lösbarkeit von $(\overset{*}{4})$ bei willkürlichen Konstanten $\overset{*}{c}_1, \overset{*}{c}_2, \ldots \overset{*}{c}_n$ dargetan.

Von diesem Umstande machen wir nun Gebrauch und treffen n verschiedene Wahlen für das System der Konstanten $\overset{*}{c}_1, \overset{*}{c}_2, \ldots \overset{*}{c}_n$, indem wir im $\varkappa^{\text{ten}}$ System nur $\overset{*}{c}_\varkappa = 1$ setzen, alle übrigen Konstanten gleich Null annehmen. Die n Systeme von Konstanten lauten also

$$\begin{array}{c} 1, 0, \ldots . 0 \\ 0, 1, \ldots . 0 \\ \ldots\ldots\ldots \\ 0, 0, \ldots . 1 \end{array} \tag{8}$$

und jedem entspricht eine Lösung des Problems $(\overset{*}{\mathrm{I}})$. Wenn die Außenfunktionen einer solchen Lösung mit $\overset{*}{\varphi}{}_1^-(z), \overset{*}{\varphi}{}_2^-(z), \ldots \overset{*}{\varphi}{}_n^-(z)$ bezeichnet werden, so verschwinden im $\varkappa^{\text{ten}}$ System im Unendlichen alle Funktionen, mit Ausnahme von $\overset{*}{\varphi}{}_\varkappa^-(z)$, welche den Wert 1 annimmt.

Aus diesen Lösungen bekommt man nach dem oben Gesagten unmittelbar Lösungen des Problems I, wenn man die Außenfunktionen $\overset{*}{\varphi}{}^-(z)$ mit $(z-z_0)^p$ multipliziert, also $\varphi^-(z) = (z-z_0)^p \overset{*}{\varphi}{}^-(z)$ setzt. Man bekommt so genau n Lösungen von (I), welche durch

$$\begin{array}{l} \varphi^{(1)}(z) = \left[\varphi_1^{(1)}(z),\ \varphi_2^{(1)}(z), \ldots \varphi_n^{(1)}(z)\right] \\ \varphi^{(2)}(z) = \left[\varphi_1^{(2)}(z),\ \varphi_2^{(2)}(z), \ldots \varphi_n^{(2)}(z)\right] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \varphi^{(n)}(z) = \left[\varphi_1^{(n)}(z),\ \varphi_2^{(n)}(z), \ldots \varphi_n^{(n)}(z)\right] \end{array} \tag{9}$$

bezeichnet werden mögen. Aus ihrer Herkunft folgt, daß die n Lösungen $\varphi^{(1)}(z), \varphi^{(2)}(z), \ldots \varphi^{(n)}(z)$ im Unendlichen genau einen Pol p^{ter} Ordnung haben, weil in der Lösung $\varphi^{(\varkappa)}(z)$ die Entwicklung der Funktion $\varphi_\varkappa^{(\varkappa)}(z)$ mit dem Gliede $z^p + \cdots$ beginnt, während in den übrigen Funktionen von $\varphi^{(\varkappa)}(z)$ ein Glied der p^{ten} Ordnung nicht vorkommt.

Es ist natürlich nicht ausgeschlossen, daß das Problem (I) auch solche Lösungen besitzt, welche im Unendlichen nur in einer niedrigeren Ordnung als der p^{ten} unendlich werden oder selbst eine Nullstelle besitzen. Solche Lösungen würden sich aus den Lösungen der homogenen Integralgleichung $(\overset{*}{5})$ $\overset{*}{c}_\varkappa(z) = 0$ ergeben, umgekehrt führt jede Lösung von (I), wenn sie im Unendlichen niedrigerer Ordnung als der p^{ten} ist, auf eine im Unendlichen verschwindende Lösung von $(\overset{*}{\mathrm{I}})$ und mithin auf eine Lösung der homogenen Integralgleichung $(\overset{*}{5})$. Die Anzahl linear unabhängiger Lösungen der homogenen Integralgleichung $(\overset{*}{5})$ ist nur eine endliche, woraus dann folgt, daß es nur eine endliche Anzahl linear unabhängiger Lösungen von (I) gibt, welche im Unendlichen eine niedrigere als die p^{te} Ordnung haben.

3.

Die gefundenen n Lösungen (9) des Problems (I), nämlich $\varphi^{(1)}(z), \varphi^{(2)}(z), \ldots \varphi^{(n)}(z)$, haben die Eigenschaft, daß es keine Relation der Form

$$(10) \qquad 0 = R_1(z) \, . \, \varphi^{(1)}(z) + R_2(z) \, \varphi^{(2)}(z) + \cdots + R_n(z) \, \varphi^{(n)}(z)$$

gibt, worin $R_1(z), R_2(z), \ldots R_n(z)$ ganze rationale Funktionen von z sind, die nicht sämtlich identisch verschwinden. Man hat, um dies zu zeigen, nur nacheinander z im $1^{\text{ten}}, 2^{\text{ten}}, \ldots n^{\text{ten}}$ Blatt zu nehmen, d. h. den $\varphi^{(\lambda)}(z)$ einen unteren Index $\varkappa$ zu geben; so ergeben sich dann n Gleichungen für $R_1(z), R_2(z), \ldots R_n(z)$, welche, weil die Determinante $|\varphi_\lambda^{(\varkappa)}(z)|$ nicht identisch Null ist, nach den $R(z)$ aufgelöst werden können und alle $R(z)$ identisch Null ergeben. Das Nichtverschwinden von $|\varphi_\lambda^{(\varkappa)}(z)|$ ergibt sich schon aus dem Verhalten der Funktionen $\varphi_\lambda^{(\varkappa)}(z)$ im Unendlichen.

Aus der Linearität des Problems (I) folgt, daß, wenn $\varphi^{(1)}(z), \varphi^{(2)}(z), \ldots \varphi^{(n)}(z)$ Lösungen des Problems (I) sind, auch jeder Ausdruck

$$(11) \qquad R_1(z) \, \varphi^{(1)}(z) + R_2(z) \, \varphi^{(2)}(z) + \cdots + R_n(z) \, \varphi^{(n)}(z),$$

worin die Koeffizienten irgend welche r a t i o n a l e Funktionen von z sind, ebenfalls eine Lösung von (I) ist. Wir können aber zeigen, daß auch jede Lösung des Problems (I), wenn sie höchstens polar unendlich wird, durch einen Ausdruck (11) gegeben ist.

Um dies zu zeigen, sei $\varphi(z) = [\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots \varphi_n(z)]$ irgend eine Lösung von (I), welche im Unendlichen einen Pol $(p+\nu)^{\text{ter}}$ Ordnung hat, wobei daselbst die höchsten Glieder in den Entwicklungen der Funktionen $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots \varphi_n(z)$ die folgenden sind:

$$a_1 z^{p+\nu} + \cdots, \quad a_2 z^{p+\nu} + \cdots, \quad \ldots a_n z^{p+\nu} + \cdots.$$

Die Lösung

$$a_1 z^\nu \varphi^{(1)}(z) + a_2 z^\nu \, . \, \varphi^{(2)}(z) + \cdots + a_n z^\nu \, . \, \varphi^{(n)}(z)$$

hat nun genau dieselben Anfangsglieder, so daß also die Differenz

$$\varphi(z) - [a_1 z^\nu \varphi^{(1)}(z) + a_2 z^\nu \varphi^{(2)}(z) + \cdots + a_n z^\nu \varphi^{(n)}(z)]$$

eine neue Lösung des Problems (I) ist, die aber im Unendlichen einen Pol höchstens $(p+\nu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung hat. Daraus folgt, daß man einen Ausdruck (11) bestimmen kann, welcher mit $\varphi(z)$ im Unendlichen in allen Gliedern, die die $(p-1)^{\text{te}}$ Ordnung überschreiten, übereinstimmt. Diese durch die Funktionen (9) in der Form (11) darstellbare Lösung bezeichne ich kurz mit $\{\varphi(z)\}$. Die Lösung $\varphi(z)-\{\varphi(z)\}$ hat nach der Konstruktion von $\{\varphi(z)\}$ im Unendlichen höchstens einen Pol $(p-1)^{\text{ter}}$ Ordnung. Man bilde sich nach demselben Verfahren die Lösungen

$$(12)\quad \varphi(z)-\{\varphi(z)\},\ z\varphi(z)-\{z\varphi(z)\},\ z^2\varphi(z)-\{z^2\varphi(z)\}\dots$$

wodurch man eine unbegrenzte Reihe von solchen Lösungen bekommt, welche im Unendlichen niedriger als p^{ter} Ordnung unendlich sind. Da es nun nur eine endliche Anzahl solcher linear unabhängiger Lösungen von (I) gibt, so muß zwischen einer endlichen Anzahl der ersten Glieder der Reihe (12) eine lineare Relation

$$0=A_0\left[\varphi(z)-\{\varphi(z)\}\right]+A_1\left[z\varphi(z)-\{z\varphi(z)\}\right]+\cdots$$
$$+A_\mu\left[z^\mu\varphi(z)-\{z^\mu\varphi(z)\}\right]$$

mit konstanten Koeffizienten $A_0 A_1\dots A_\mu$ bestehen. Aus dieser Relation folgt nun, wenn $R(z)=A_0+A_1(z)+\cdots+A_\mu z^\mu$ gesetzt wird, für die Lösung $\varphi(z)$ eine Relation der Form

$$(13)\quad R(z).\varphi(z)=R_1(z).\varphi^{(1)}(z)+R_2(z)\varphi^{(2)}(z)+\cdots+R_n(z)\varphi^{(n)}(z),$$

worin $R(z)$, $R_1(z)$, $R_2(z)$, $\dots R_n(z)$ ganze rationale Funktionen von z sind. Dadurch ist die lineare Darstellbarkeit jeder Lösung durch das Fundamentalsystem (9) mit Hilfe in z rationaler Koeffizienten nachgewiesen.

Statt des Fundamentalsystems (9) kann man irgend welche n Lösungen $F^{(1)}(z)$, $F^{(2)}(z)$, $\dots F^{(n)}(z)$ zur Darstellung verwenden, wenn sie derart linear unabhängig sind, daß zwischen ihnen keine Relation der Form

$$0=R_1(z).F^{(1)}(z)+R_2(z)F^{(2)}(z)+\cdots+R_n(z)F^{(n)}(z)$$

bei in z ganzen rationalen Koeffizienten existiert. Diese Lösungen sind nämlich durch das obige Fundamentalsystem (9) linear darstellbar

$$(14)\quad \begin{aligned} F^{(1)}(z)&=r_{11}(z).\varphi^{(1)}(z)+r_{21}(z)\varphi^{(2)}(z)+\cdots+r_{n1}(z)\varphi^{(n)}(z)\\ F^{(2)}(z)&=r_{12}(z).\varphi^{(1)}(z)+r_{22}(z)\varphi^{(2)}(z)+\cdots+r_{n2}(z)\varphi^{(n)}(z)\\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\ F^{(n)}(z)&=r_{1n}(z).\varphi^{(1)}(z)+r_{2n}(z)\varphi^{(2)}(z)+\cdots+r_{nn}(z)\varphi^{(n)}(z),\end{aligned}$$

wobei die Determinante $|r_{\varkappa\lambda}(z)|$ nicht identisch Null sein kann, weil sonst daraus nach einem bekannten Determinantensatze eine lineare Relation zwischen $F^{(1)}(z), F^{(2)}(z), \ldots F^{(n)}(z)$ mit in z rationalen Koeffizienten fließen würde. Die Gleichungen (14) sind nach $\varphi^{(1)}(z), \varphi^{(2)}(z), \ldots \varphi^{(n)}(z)$ umkehrbar, so daß also jede Lösung von (I) auch durch $F^{(1)}(z), F^{(2)}(z), \ldots F^{(n)}(z)$ sich linear darstellen läßt.

Es hat ein Interesse, aus den unendlich vielen möglichen Fundamentalsystemen ein solches herauszunehmen, welches von allem Nebensächlichen möglichst frei ist und somit durch die Problemstellung nach Tunlichkeit eindeutig festgelegt ist. Aus diesem Grunde bestimmen wir ein Fundamentalsystem $F^{(1)}(z), F^{(2)}(z), \ldots F^{(n)}(z)$, so daß durch dasselbe jede Lösung des verallgemeinerten Riemannschen Problems, wenn sie im Endlichen überall regulär ist, schon mit in z ganzen rationalen Koeffizienten sich linear ausdrückt. Dieses Fundamentalsystem wird folgendermaßen bestimmt:

Man nehme als $F^{(1)}(z)$ eine im Endlichen reguläre Lösung des Problems (I), welche im Unendlichen die kleinstmögliche Ordnung ν_1 hat. Die Zahl ν_1 ist dann in eindeutiger Weise bestimmt, denn es gibt nicht zu jeder noch so großen negativen Ordnung (d. h. Nullstelle positiver Ordnung) Lösungen des Problems I. Hierauf nehme man eine zweite von $F^{(1)}(z)$ verschiedene Lösung $F^{(2)}(z)$ von der kleinsten noch möglichen Ordnung ν_2, weiter bestimme man eine dritte durch $F^{(1)}(z)$ und $F^{(2)}(z)$ linear nicht darstellbare Lösung $F^{(3)}(z)$, wieder von niedrigster Ordnung im Unendlichen u. s. w. Das Verfahren wird nach n Schritten n linear unabhängige Lösungen $F^{(1)}(z), F^{(2)}(z), \ldots F^{(n)}(z)$ von den bezüglichen Ordnungen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ liefern. Die ganzen Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ sind in eindeutiger Weise bestimmt und bilden eine nicht fallende Reihe $\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \ldots \nu_n \leqq \nu_n$.

Aus der Konstruktion dieser Lösungen $F^{(1)}(z), F^{(2)}(z), \ldots F^{(n)}(z)$, welche als linear unabhängig ein Fundamentalsystem bilden, folgt der Umstand, daß ein linearer Ausdruck

$$A_1 F^{(1)}(z) + A_2 F^{(2)}(z) + \cdots + A_n F^{(n)}(z)$$

bei nicht identisch verschwindenden Konstanten $A_1, A_2, \ldots A_n$ nirgends in einem endlichen Punkte z_0 einen Nullpunkt hat. Setzt man nämlich $A_1 F^{(1)}(z) + A_2 F^{(2)}(z) + \cdots + A_n F^{(n)}(z) = (z - z_0) F(z)$, so hat man in $F(z)$ eine Lösung von (I), welche im Unendlichen gewiß eine niedrigere Ordnung hat als das letzte $F^{(\varkappa)}(z)$, welches noch einen nicht verschwindenden Koeffizienten $A_\varkappa$ hat. Da sich nunmehr $F^{(\varkappa)}(z)$ durch $F^{(1)}(z), \ldots F^{(\varkappa-1)}(z)$ und $F(z)$ ausdrücken läßt, somit $F^{(\varkappa)}(z)$ durch $F(z)$, welches von niedrigerer Ordnung ist, vertreten ließe, hätte man hierin einen Widerspruch mit der Herstellung des Fundamentalsystems $F^{(1)}(z), F^{(2)}(z), \ldots F^{(n)}$.

Lauten diese Lösungen

$$
(15) \qquad \begin{aligned}
F^{(1)}(z) &= \left[F_1^{(1)}(z),\ F_2^{(1)}(z), \ldots F_n^{(1)}(z)\right] \\
F^{(2)}(z) &= \left[F_1^{(2)}(z),\ F_2^{(2)}(z), \ldots F_n^{(2)}(z)\right] \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
F^{(n)}(z) &= \left[F_1^{(n)}(z),\ F_2^{(n)}(z), \ldots F_n^{(n)}(z)\right],
\end{aligned}
$$

so ist die Determinante

$$
(16) \qquad \left| F_\lambda^{(\varkappa)}(z) \right|
$$

in jedem im Endlichen liegenden Punkte endlich und von Null verschieden. Würde nämlich diese Determinante für $z = z_0$ verschwinden, so könnte man ein System nicht sämtlich verschwindender Konstanten $A_1 A_2 \ldots A_n$ aus den Gleichungen

$$
A_1 F_\varkappa^{(1)}(z_0) + A_2 F_\varkappa^{(2)}(z_0) + \cdots + A_n F_\varkappa^{(n)}(z_0) = 0
$$
$$
\varkappa = 1, 2, \ldots n
$$

bestimmen, so daß die Lösung

$$
A_1 F^{(1)}(z) + A_2 F^{(2)}(z) + \cdots + A_n F^{(n)}(z)
$$

in z_0 einen Nullpunkt hätte — ein Widerspruch.

Der unendlich ferne Punkt macht hier eine Ausnahme. Bezeichnet man jedoch wie oben $\nu_\varkappa$ die Ordnung der Lösung $F^{(\varkappa)}(z)$ im Unendlichen, dann ist die Determinante

$$
(16') \qquad \left| \frac{F_\lambda^{\varkappa}(z)}{(z - z_0)^{\nu_\varkappa}} \right|
$$

im Unendlichen von Null verschieden, so daß also die Sonderstellung des unendlich fernen Punktes sofort beseitigt werden kann, wenn irgend ein anderer Punkt z_0 ausgezeichnet wird. Der Beweis des Nichtverschwindens der Determinante (16′) im Unendlichen wird genau wie vorhin geführt; die gegenteilige Annahme steht im Widerspruche mit der Definition des Fundamentalsystems (15).

Nunmehr beweisen wir mit Leichtigkeit, daß jede im Endlichen reguläre Lösung $\varphi(z)$ des Problems (I) durch das Fundamentalsystem (15) linear darstellbar ist, und zwar mit *in z ganzen rationalen* Koeffizienten. Die Darstellung ist jedenfalls mit rationalen Koeffizienten in der Form

$$
R(z) \,.\, \varphi(z) = R_1(z)\, F^{(1)}(z) + R_2(z)\, F^{(2)}(z) + \cdots + R_n(z)\, F^{(n)}(z)
$$

möglich, so daß $R(z), R_1(z), R_2(z), \ldots R_n(z)$ ganze rationale Funktionen von z sind, die wir ohne einen gemeinsamen Teiler voraussetzen können. Wäre nun $R(z)$ keine Konstante, so entwickeln wir sämtliche Funktionen $R_1(z), R_2(z), \ldots R_n(z)$ in der Umgebung einer Nullstelle z_0 von $R(z)$. Es ergibt sich dann, daß

$$R_1(z_0) \,.\, F^{(1)}(z) + R_2(z_0)\, F^{(2)}(z) + \cdots + R_n(z_0)\, F^{(n)}(z),$$

was ebenfalls eine Lösung von (I) ist, im Punkte $z = z_0$ einen Nullpunkt hätte, denn $R_1(z_0), R_2(z_0), \ldots R_n(z_0)$ sind in den Koeffizienten $R(z), R_1(z), \ldots R_n(z)$ der obigen Gleichung die konstanten von $(z - z_0)$ freien Teile. Daraus folgt aber, daß $R_1(z_0), R_2(z_0), \ldots R_n(z_0)$ sämtlich verschwinden, was auf das Vorhandensein eines gemeinsamen Teilers der Funktionen $R(z), R_1(z), \ldots R_n(z)$ führt, was ein Widerspruch ist. Es kann also $R(z)$ keine Nullstelle besitzen. Jede im Endlichen reguläre Lösung $\varphi(z)$ von (I) ist daher in der Form

$$(17)\quad \varphi(z) = R_1(z)\, F^{(1)}(z) + R_2(z)\, F^{(2)}(z) + \cdots + R_n(z)\, F^{(n)}(z)$$

darstellbar, wobei $R_1(z), R_2(z) \ldots R_n(z)$ ganze rationale Funktionen von z sind.

Das Fundamentalsystem (15) hat die Eigenschaft, mit konstanten Koeffizienten eine Lösung $\varphi(z)$ linear darzustellen, welche in einem irgendwie gegebenen, im Endlichen liegenden Punkte z_0 willkürlich vorgeschriebene Anfangswerte $\varphi_1(z_0), \varphi_2(z_0), \ldots \varphi_n(z_0)$ annimmt. Die Existenz einer solchen Lösung folgt aus dem Nichtverschwinden der Determinante $|F_\lambda^{(\varkappa)}(z)|$.

Man kann das Ergebnis folgendermaßen zusammenfassen:

Das verallgemeinerte Riemannsche Problem (I) besitzt stets ein Fundamentalsystem von n solchen Lösungen (15), die jede weitere Lösung des Problems, wofern sie im Endlichen überall endlich und außerhalb der Randkurve regulär ist, derart linear darstellt, daß die Koeffizienten ganze rationale Funktionen von z sind. Bei diesem Fundamentalsystem verschwindet die Determinante (16) in keinem im Endlichen liegenden Punkte, im Unendlichen sind jedoch die Elemente der Determinante (16′) sämtlich endlich, die Determinante (16′) selbst von Null verschieden.

Durch diese Untersuchung ist auch die Frage nach der allgemeinsten Lösung von (I), welche im Außen- und Innengebiete regulär sich verhält und eine endliche Anzahl von Polen besitzt, vollständig beantwortet. Sie läßt sich durch ein Fundamentalsystem, etwa durch (15), mit in z rationalen Koeffizienten linear ausdrücken. Die Frage läßt sich noch in einer sehr verallgemeinerten Form beantworten, nach den Lösungen etwa, die im Außen- und Innengebiete, wo sie existieren, regulär sind und am Rande der

Aufgabe (I) entsprechen. Aus dem Nichtverschwinden der Determinante (16) würde sich ergeben, daß auch jede solche Lösung sich durch einen Ausdruck (17) ergibt, wobei aber die Funktionen $R_1(z)$, $R_2(z)$, ... $R_n(z)$ im allgemeinen nicht rational, wohl aber im Außen- und Innengebiete eindeutig sind und auch durch die Randkurve stetig hindurchgehen, d. h. wo endlich, auch regulär analytisch sind.

4.

Das Riemannsche Problem verlangt in seiner ursprünglichen Form ein System von n Funktionen $y_1(z), y_2(z), \dots y_n(z)$, welche bei analytischer Fortsetzung um gegebene singuläre Punkte $a_1, a_2, \dots a_m$ in lineare Kombinationen ihrer selbst, und zwar mit willkürlich gegebenen konstanten Substitutionskoeffizienten, übergehen, im übrigen sich eindeutig verhalten und nirgends von unendlich hoher Ordnung unendlich werden. Um für diese Funktionen einen Bereich zu erhalten, wo sie eindeutig verlaufen, hat Riemann dem Problem eine zweite Fassung gegeben; nach dieser wird durch die singulären Punkte $a_1 a_2 \dots a_m$ eine in sich geschlossene, sich nicht schneidende Kurve K gezogen, dann werden n Funktionen $y_1^+(z), y_2^+(z), \dots y_n^+(z)$ im Innengebiete getrennt von $y_1^-(z), y_2^-(z), \dots y_n^-(z)$ im Außengebiete derart definiert, daß zwischen den Außenrandwerten $y_1^-, y_2^-, \dots y_n^-$ und Innenrandwerten $y_1^+, y_2^+, \dots y_n^+$ in gegenüberliegenden Uferpunkten der Kurve K lineare umkehrbare Relationen

$$y_\varkappa^- = c_{\varkappa 1} y_1^+ + c_{\varkappa 2} y_2^+ + \dots + c_{\varkappa n} y_n^+ \tag{18}$$

$$\varkappa = 1, 2, \dots n$$

bestehen, wobei die Substitutionskoeffizienten $c_{\varkappa\lambda}$ längs eines ganzen Kurvenstückes, welches nur je zwei aufeinanderfolgende Punkte $a_1 a_2$, $a_2 a_3$ ... $a_{m-1} a_m$, $a_m a_1$ verbindet, je ein System von gegebenen Konstanten ist.

Daß derart bestimmte Funktionen $y_1^-(z)$, $y_2^-(z)$, ... $y_n^-(z)$ bei analytischen Fortsetzungen auf geschlossenen je einen singulären Punkt einschließenden Wegen in lineare Kombinationen ihrer selbst übergehen, wird feststehen, wenn man gezeigt hat, daß die Außenfunktionen bei Vermeiden der Verzweigungspunkte überall, wo sie endlich sind, über die Kurve K analytisch fortsetzbar sind, und zwar im Innengebiete in lineare Kombinationen der Innenfunktionen übergehen. Dies läßt sich leicht folgendermaßen bestätigen: Man bilde aus den Innenfunktionen $y_1^+(z)$, $y_2^+(z)$, ... $y_n^+(z)$ die im Innengebiete definierte Funktion

$$Y_\varkappa^+(z) = c_{\varkappa 1} y_1^+(z) + c_{\varkappa 2} y_2^+(z) + \dots + c_{\varkappa n} y_n^+(z).$$

Die so bestimmte Funktion stimmt längs des Kurvenstückes von K, dem die Koeffizienten $c_{\varkappa\lambda}$ entsprechen, überall mit den Randwerten der Außenfunktion $y_{\varkappa}^{-}(z)$ überein. Die Cauchysche Integralformel zeigt dann unmittelbar, wenn sie auf ein über dieses Kurvenstück hinübergreifendes Gebiet angewandt wird, daß $Y_{\varkappa}^{+}(z)$ die analytische Fortsetzung von $y_{\varkappa}^{-}(z)$ ist, daß sich also außer in $a_1\, a_2 \ldots a_m$ die Funktionen $y_1^{-}(z)$, $y_2^{-}(z), \ldots y_n^{-}(z)$ in allen Randpunkten, wenn sie endlich sind, regulär verhalten.

Bezeichnet man die Substitution (18) zwischen zwei singulären Punkten $a_\sigma a_{\sigma+1}$ mit S_σ, die inverse mit S_σ^{-1}, so erleidet das Funktionssystem $y_1^{-}(z)$, $y_2^{-}(z) \ldots y_n^{-}(z)$ bei einer Fortsetzung um den Punkt a_σ die Substitution $\Sigma_\varkappa = S_{\varkappa-1}^{-1}\, S_\varkappa$ und zwischen den Umlaufssubstitutionen $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_m$, die den einzelnen singulären Punkten entsprechen, besteht die Relation $\Sigma_1 \Sigma_2 \ldots \Sigma_m = 1$. Jedem geschlossenen Umlauf wird eine durch die Basissubstitutionen $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_m$ ausdrückbare Substitution entsprechen, ihre Gesamtheit heißt die „Monodromiegruppe" der Funktionen $y_1, y_2, \ldots y_n$.

Obwohl das Riemannsche Problem in dieser zweiten Formulierung mit dem bereits gelösten der Form nach übereinstimmt, sind doch die Existenzsätze nicht unmittelbar anwendbar, weil das System der Koeffizienten $c_{\varkappa\lambda}$ die oben für die Koeffizienten $\alpha_{\varkappa\lambda}(z)$ geforderte Bedingung der Stetigkeit nicht erfüllen. Man wird deshalb, wie dies ja bei Randwertaufgaben häufig genug geschieht, das vorliegende Problem mit Hilfe bekannter Funktionen geeigneter Unstetigkeit auf ein nach der auseinandergesetzten Methode lösbares Problem zurückführen. Diese Funktionen bieten sich hier von selbst dar in den sogenannten kanonischen Funktionen, welche beim Umlauf um einen singulären Punkt nur einen konstanten Faktor annehmen, mithin eine bekannte analytische Gestalt haben.

Um diese Funktionen zu erklären, bezeichne ich das Resultat, welches aus einer Funktion $y(z)$ nach einem Umlauf um den singulären Punktes a_σ entsteht mit $y^1(z)$. Besitzt die Umlaufssubstitution Σ_σ das Koeffizientensystem $(\gamma_{\varkappa\lambda})$, so lautet die Substitution, welche bei dieser Fortsetzung die Funktionen $y_1(z), y_2(z) \ldots y_m(z)$ erfahren, folgendermaßen:

$$(19) \qquad y_\varkappa^1(z) = \gamma_{\varkappa 1} \cdot y_1(z) + \gamma_{\varkappa 2} y_2(z) + \cdots + \gamma_{\varkappa n} y_n(z).$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots n$$

Dabei wollen wir unter $y_1(z)$, $y_2(z), \ldots y_n(z)$ die im Außengebiete eindeutig erklärten Funktionen $y_1^{-}(z)$, $y_2^{-}(z), \ldots y_n^{-}(z)$ verstehen, indem wir der kürzeren Schreibweise halber das Zeichen $^{-}$ weglassen. Diese Funktionen sind dann natürlich auch im Innengebiete eindeutig, wenn es feststeht, wo die Fortsetzung ins Innengebiet vollzogen wurde.

Aus den Funktionen $y_1(z), y_2(z), \dots y_n(z)$ wollen wir mit Hilfe konstanter Koeffizienten $c_1\, c_2 \dots c_n$ solche Funktionen

$$\eta(z) = c_1 y_1(z) + c_2 y_2(z) + \cdots + c_n y_n(z). \tag{20}$$

bestimmen, daß aus $\eta(z)$ nach analytischer Fortsetzung um a_σ die Funktion $\eta^1(z) = \lambda\eta(z)$ hervorgeht, wobei λ eine Konstante ist. Aus

$$\eta^1(z) = \lambda\eta(z) = c_1 y_1^1(z) + c_2 y_2^1(z) + \cdots + c_n y_n^1(z)$$

und den Gleichungen (19) ergibt sich zur Bestimmung der Koeffizienten $c_1\, c_2 \dots c_n$ ein System von n homogenen linearen Gleichungen, zu deren Lösbarkeit das Verschwinden ihrer Determinante, d. h.

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} - \lambda, & \gamma_{12}, & \dots \gamma_{1n} \\ \gamma_{21}, & \gamma_{22} - \lambda, & \dots \gamma_{2n} \\ \dots & \dots & \dots \\ \gamma_{n1}, & \gamma_{n2}, & \dots \gamma_{nn} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \tag{21}$$

notwendig und hinreichend ist. Aus dieser Gleichung $n$ten Grades sind die Verzweigungsfaktoren $\lambda_1, \lambda_2, \dots \lambda_n$ zu bestimmen, woraus sich dann für jedes $\lambda_\varkappa$ mindestens ein System von Koeffizienten $c_1, c_2 \dots c_n$ ergibt. Sind insbesondere die Wurzeln von (21) alle verschieden, so verschwinden gewiß nicht sämtliche Unterdeterminanten einzelner Elemente und es ergibt sich für jede Wurzel nur ein einziges System für $c_1 : c_2 : \dots : c_n$, d. h. wesentlich nur eine Funktion $\eta(z)$. Die so sich ergebenden Funktionen $\eta_1(z)$, $\eta_2(z), \dots \eta_n(z)$ sind linear unabhängig, so daß sich durch sie auch die Funktionen $y_1(z), y_2(z), \dots y_n(z)$ linear mit konstanten Koeffizienten ausdrücken lassen. Diesen einfacheren Fall behandle ich zunächst, weil sich der allgemeine darauf ohne Schwierigkeit wird erledigen lassen.

Wegen der Umkehrbarkeit der linearen Beziehungen (18) oder (19) verschwindet die Determinante $|\gamma_{\varkappa\lambda}|$ nicht, so daß die Verzweigungsfaktoren $\lambda_1\, \lambda_2 \dots \lambda_n$ sämtlich von Null verschieden sind. Wir können sie also in der Form

$$e^{2\pi i \varrho_1},\ e^{2\pi i \varrho_2}, \dots e^{2\pi i \varrho_n} \tag{22}$$

annehmen, wobei jedoch die „Verzweigungsexponenten" $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ durch die gegebenen Substitutionen infolge der Periodizität der Exponentialfunktion nur bis auf additive ganze Zahlen bestimmt sind.

Die analytische Form von $\eta_\varkappa(z)$, welches den Verzweigungsfaktor $e^{2\pi i \varrho_\varkappa}$ besitzt, ist an der Stelle a_σ die folgende:

$$(23) \qquad \eta_\varkappa(z) = \left(\frac{z - a_\sigma}{z - a_{\sigma-1}}\right)^{\rho_\varkappa} . \mathfrak{P}_\varkappa(z\,|\,a_\sigma),$$

wobei für die in a_σ eindeutige Funktion $\mathfrak{P}_\varkappa(z\,|\,a_\sigma)$ wegen der Forderung, daß die gesuchten Funktionen nicht in unendlich hoher Ordnung unendlich werden sollen, eine in a_σ reguläre Potenzreihe genommen werden kann.

Den im allgemeinen vieldeutigen Funktionen $\left(\frac{z - a_\sigma}{z - a_{\sigma-1}}\right)^{\rho_\varkappa}$ erteilen wir längs des Kurvenstückes $\widehat{a_{\sigma-1}a_\sigma}$ zu beiden Ufern denselben erlaubten Wert, wodurch eine eindeutige Bestimmungsweise für das Außen- und Innengebiet getroffen wurde. Auf dem Kurvenstücke $\widehat{a_\sigma a_{\sigma+1}}$ unterscheiden sich die Werte von $\left(\frac{z - a_\sigma}{z - a_{\sigma-1}}\right)^{\rho_\varkappa}$ zu beiden Ufern um den Faktor $e^{2\pi i \rho_\varkappa}$. Es folgt daraus

$$(24) \qquad \begin{aligned} \eta_\varkappa^- &= \eta_\varkappa^+ && \text{auf } \widehat{a_{\sigma-1}a_\sigma} \\ \eta_\varkappa^- &= e^{2\pi i \rho_\varkappa} . \eta_\varkappa^+ && \text{,, } \widehat{a_\sigma a_{\sigma+1}} \end{aligned}$$

Durch die kanonischen Funktionen $\eta_1(z), \eta_2(z), \ldots \eta_n(z)$ lassen sich nun sowohl die Außenfunktionen $y_1^-(z), y_2^-(z) \ldots y_n^-(z)$ als auch die Innenfunktionen $y_1^+(z), y_2^+(z), \ldots y_n^+(z)$ linear ausdrücken. Diese Darstellung sei

$$(25) \qquad \begin{aligned} y_\varkappa^- &= a_{\varkappa 1}\eta_1^- + a_{\varkappa 2} . \eta_2^- + \cdots + a_{\varkappa n}\eta_n^- \\ y_\varkappa^+ &= b_{\varkappa 1}\eta_1^+ + b_{\varkappa 2}\;\eta_2^+ + \cdots + b_{\varkappa n}\eta_n^+, \end{aligned}$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots n$$

und es verschwindet keine der Determinanten $|a_{\varkappa\lambda}|$ und $|b_{\varkappa\lambda}|$. Diese Gleichungen müssen den Gleichungen (18), d. h.

$$(18) \qquad y_\varkappa^- = c_{\varkappa 1} y_1^+ + c_{\varkappa 2} y_2^+ + \cdots + c_{\varkappa n} y_n^+$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots n$$

vollkommen gleichwertig sein, d. h. sie müssen aus (25) durch Eliminationen der η^- und η^+ hervorgehen, wobei die Gleichungen (24) zwischen $\eta_\varkappa^-$ und $\eta_\varkappa^+$ zu berücksichtigen sind. Daraus folgt, daß die Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$ und $b_{\varkappa\lambda}$ mit den Koeffizienten $c_{\varkappa\lambda}$ folgendermaßen zusammenhängen:

$$
(26) \qquad \begin{aligned} c_{\varkappa 1} \cdot b_{1\lambda} + c_{\varkappa 2} \cdot b_{2\lambda} + \cdots + c_{\varkappa n} b_{n\lambda} &= a_{\varkappa\lambda} \quad \text{längs } \widehat{a_{\sigma-1}\, a_\sigma} \\ &= e^{2\pi i \rho_\lambda} \cdot a_{\varkappa\lambda} \quad \text{„} \quad \widehat{a_\sigma\, a_{\sigma+1}}, \end{aligned}
$$

wobei natürlich die Konstanten $c_{\varkappa\lambda}$ im ersten Falle dem Kurvenstücke $\widehat{a_{\sigma-1} a_\sigma}$, in zweiten $\widehat{a_\sigma a_{\sigma+1}}$ entnommen werden.[1])

Substituiert man in (25) die Werte (23) für die kanonischen Funktionen $\eta_\varkappa(z)$, so bekommen die Funktionen $y_\varkappa^-(z)$ und $y_\varkappa^+(z)$ die Gestalt

$$
y_\varkappa^-(z) = a_{\varkappa 1} \left(\frac{z^- - a_\sigma}{z^- - a_{\sigma-1}}\right)^{\rho_1} \mathfrak{P}_1(z|a_\sigma) + \cdots + a_{\varkappa n} \left(\frac{z^- - a_\sigma}{z^- - a_{\sigma-1}}\right)^{\rho_n} \cdot \mathfrak{P}_n(z|a_\sigma)
$$

bezw.

$$
y_\varkappa^+(z) = b_{\varkappa 1} \left(\frac{z^+ - a_\sigma}{z^+ - a_{\sigma-1}}\right)^{\rho_1} \mathfrak{P}_1(z|a_\sigma) + \cdots + b_{\varkappa n} \left(\frac{z^+ - a_\sigma}{z^+ - a_{\sigma-1}}\right)^{\rho_n} \cdot \mathfrak{P}_n(z|a_\sigma)
$$

und analoge Entwicklungen hätte man für die Umgebung der anderen singulären Punkte.

Die ganzen Zahlen in den Verzweigungsexponenten, über welche wir noch freie Verfügung haben, wählen wir nun ein- für allemal so, daß die Realteile der $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ negativ und absolut > 1 ausfallen, womit die Faktoren der Funktionen $\mathfrak{P}_\varkappa(z|a_\sigma)$ in der obigen Gleichung in a_σ stärker als von der ersten Ordnung unendlich werden; sie bleiben aber sonst ausnahmslos endlich. Eine gleiche Bestimmungsweise treffen wir für die sämtlichen singulären Punkte.

Die Funktionen $\mathfrak{P}_\varkappa(z|a_\sigma)$ sind an der Stelle a_σ stetig. Wir wollen nun $y_1^-(z), y_2^-(z), \ldots y_n^-(z)$ sowie die Funktionen $y_1^+(z)$, $y_2^+(z), \ldots y_n^+(z)$, durch solche Funktionen $\varphi_1(z), \varphi_2(z), \ldots \varphi_n(z)$ darstellen, welche sich in allen singulären Punkten an die dortigen Potenzreihen $\mathfrak{P}_\varkappa(z|a_\sigma)$ in hinreichender Weise anschmiegen. Zu diesem Zwecke setzen wir

$$
(27) \qquad \begin{aligned} y_\varkappa^-(z) &= A_{\varkappa 1}(z)\, \varphi_1^-(z) + A_{\varkappa 2}(z)\, \varphi_2^-(z) + \cdots + A_{\varkappa n}(z)\, \varphi_n^-(z) \\ y_\varkappa^+(z) &= B_{\varkappa 1}(z)\, \varphi_1^+(z) + B_{\varkappa 2}(z)\, \varphi_2^+(z) + \cdots + B_{\varkappa n}(z)\, \varphi_n^+(z) \end{aligned}
$$

$$
\varkappa = 1, 2, \ldots n
$$

---

[1]) Man wird den Index λ nicht mit dem Verzweigungsfaktor $\lambda_\varkappa = e^{2\pi i \rho_\varkappa}$ verwechseln.

und erreichen den Zweck mit einem Schlage, wenn

$$(28)\quad \begin{aligned} A_{\varkappa\lambda}(z) &= \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} a^{\sigma}_{\varkappa\lambda}\left(\frac{z^{-}-a_{\sigma}}{z^{-}-a_{\sigma-1}}\right)^{\rho^{\sigma}_{\lambda}} \\ B_{\varkappa\lambda}(z) &= \sum_{\sigma=1}^{\sigma=m} b^{\sigma}_{\varkappa\lambda}\left(\frac{z^{+}-a_{\sigma}}{z^{+}-a_{\sigma-1}}\right)^{\rho^{\sigma}_{\lambda}} \end{aligned}$$

wobei die Summation sich über je ein Glied jeder der singulären Stellen a_σ erstreckt, der obere Index σ in $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$, ρ_λ also die Zugehörigkeit zur singulären Stelle a_σ anzeigt.

Die Beziehungen zwischen den Funktionen $\varphi^{-}_{\varkappa}$ und $\varphi^{+}_{\varkappa}$ ergeben sich aus (18) und (27) in der Form

$$(29)\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} A_{\varkappa\lambda}(z)\cdot\varphi^{-}_{\lambda}(z) = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \Big[c_{\varkappa 1}B_{1\varkappa}(z) + c_{\varkappa 2}B_{2\lambda}(z) + \\ + \cdots + c_{\varkappa n}B_{n\lambda}(z)\Big]\varphi^{+}_{\lambda}(z) \\ \varkappa = 1, 2, \ldots n, \end{aligned} \right.$$

wofür man auch identisch schreiben kann

$$(29')\quad \left\{ \begin{aligned} \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} A_{\varkappa\lambda}(z)\left[\varphi^{-}_{\lambda}(z) - \varphi^{+}_{\lambda}(z)\right] = \sum_{\lambda=1}^{\lambda=n} \Big[[c_{\varkappa 1}B_{1\lambda}(z) + c_{\varkappa 2}B_{2\lambda}(z) + \\ + \cdots + c_{\varkappa n}B_{n\lambda}(z) - A_{\varkappa\lambda}(z)\Big]\varphi^{+}_{\lambda}(z). \\ \varkappa = 1, 2, \ldots n. \end{aligned} \right.$$

Daraus folgen durch Auflösung nach $\varphi^{-}_{n}(z)$ Gleichungen der Form

$$(30)\quad \varphi^{-}_{\varkappa}(z) = \alpha_{\varkappa 1}(z)\,\varphi^{+}_{1}(z) + \alpha_{\varkappa 2}(z)\,\varphi^{+}_{2}(z) + \cdots + \alpha_{\varkappa n}(z)\,\varphi^{+}_{n}(z),$$
$$\varkappa = 1, 2, \ldots n,$$

wobei aber die Koeffizienten $\alpha_{\varkappa\lambda}(z)$ nunmehr selbst in den sigulären Punkten stetig und einmal differentiierbar sind.

Um die Stetigkeit der Koeffizienten $\alpha_{\varkappa\lambda}(z)$ einzusehen, beachte man, daß rechts in (29') die Koeffizienten von $\varphi^{+}_{\varkappa}(z)$ ausnahmslos auch in allen singulären Stellen endlich bleiben. Diese Tatsache ergibt sich aus der Bedeutung (28) von $A_{\varkappa\lambda}(z)$ und $B_{\varkappa\lambda}(z)$ an der Hand der Relationen (26), welche zwischen den Konstanten $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$, $c_{\varkappa\lambda}$ bestehen. Zugleich wird man bei der Auflösung von (29') nach den $(z-a_\sigma)^{\rho_\lambda}[\varphi^{-}_{\lambda}(z) - \varphi^{+}_{\lambda}(z)]$ erkennen, daß in der Umgebung von a_σ die Koeffizienten $\alpha_{\varkappa\varkappa}(z)$ sich gleich Eins und alle $\alpha_{\varkappa\lambda}(z)$, wo $\varkappa \neq \lambda$, gleich Null ergeben bis auf Größen, welche mindestens die Kleinheit von $(z-a_\sigma)^{-\rho_\lambda}$ haben. Daraus ergibt sich auch leicht, daß der Quotient $\frac{\alpha_{\varkappa\lambda}(z_2)-\alpha_{\varkappa\lambda}(z_1)}{z_2-z_1}$ in a_σ höchstens die Größenordnung von $(z-a_\sigma)^{-\rho_\lambda-1}$ hat, mögen die beiden Punkte z_1 und z_2 von der gleichen oder verschiedenen Seite von a_σ längs der Kurve unbegrenzt sich nähern. Der Differentialquotient verschwindet in a_σ bei unserer Bestimmungsweise der $\rho_\varkappa$.

Die Determinante $|\alpha_{\varkappa\lambda}(z)|$ hat in den singulären Punkten den Wert Eins. Die Pole dieser Determinante fallen, wie aus (29) folgt, in die Nullstellen von $|A_{\varkappa\lambda}(z)|$. Diese besitzen keine Häufungsstelle, wie aus den Werten (28) der $A_{\varkappa\lambda}(z)$ sofort ersichtlich ist. Desgleichen sind die Nullstellen der Determinante $|\alpha_{\varkappa\lambda}(z)|$ nur in endlicher Zahl vorhanden, so daß man ohne weiteres annehmen kann, daß die Kurve K so durch die Punkte $a_1\, a_2 \ldots a_m$ gelegt wurde, daß kein Nullpunkt von $|\alpha_{\varkappa\lambda}(z)|$ auf der Kurve liegt, so daß die Gleichung (30) längs der Kurve K überall umkehrbar ist.

Nunmehr erledigen wir in Kürze den Fall, daß die Gleichung (21), der die Verzweigungsfaktoren genügen, mehrfache Wurzeln hat. Wenn $\lambda = e^{2\pi i\varrho}$ eine μ-fache Wurzel ist, dann existieren gemäß der Theorie der linearen Substitutionen genau μ durch $y_1\, y_2 \ldots y_n$ linear darstellbare Funktionen $\eta_1^*, \eta_2^*, \ldots \eta_\mu^*$, die zwar in der Regel nicht sämtlich bei einer Fortsetzung um a_σ sich nur um den konstanten Faktor ändern, doch folgendes einfache Verhalten zeigen: Die Funktionen $\eta_1^*\, \eta_2^* \ldots \eta_\mu^*$ lassen sich in eine Anzahl solcher Ketten bringen, daß die ν linear unabhängigen Funktionen, nennen wir sie $\eta_1^*\, \eta_2^* \ldots \eta_\nu^*$, die eine solche ν-gliedrige Kette bilden, miteinander in folgenden Beziehungen stehen.

$$(31)\quad \overset{1}{\eta_1^*}-\lambda\eta_1^*=0,\quad \overset{1}{\eta_2^*}-\lambda\eta_2^*=\lambda\eta_1^*,\quad \overset{1}{\eta_3^*}-\lambda\eta_3^*=\lambda\eta_2^*,\ldots\quad \overset{1}{\eta_\nu^*}-\lambda\eta_\nu^*=\lambda\eta_{\nu-1}^*.$$

Genau solche Beziehungen bestehen zwischen den η^* der weiteren Ketten, wenn solche noch vorkommen, wobei sämtliche η^* aus allen Ketten, μ an der Zahl, untereinander linear unabhängig sind.

Um die analytische Form dieser Funktionen zu bestimmen, setzen wir

$$(32)\qquad u = \frac{1}{2\pi i}\lg\frac{z-a_\sigma}{z-a_{\sigma-1}}$$

und erteilen u auf beiden Ufern von $\widehat{a_{\sigma-1}\, a_\sigma}$ denselben erlaubten Wert, so daß

$$(33)\qquad \begin{aligned} u^- - u^+ &= 0 \quad \text{auf } a_{\sigma-1}\, a_\sigma \\ u^- - u^+ &= 1 \quad\ \text{„}\ \ a_\sigma\, a_{\sigma+1} \end{aligned}$$

wird. Wenn man dann durch $\eta_1\,\eta_2\ldots\eta_\nu$ wieder solche Funktionen bezeichnet, welche sich beim Umlauf um a_σ nur um den Faktor λ ändern, so daß wieder $\overset{1}{\eta}=\lambda\,\eta$ besteht, bezw., was dasselbe ist,

$$(34)\qquad \begin{aligned}\eta^- &= \eta^+ \quad \text{längs } \widehat{a_{\sigma-1}\,a_\sigma}\\ \eta^- &= \lambda\,\eta^+ \quad \text{,,} \quad \widehat{a_\sigma\,a_{\sigma+1}}\end{aligned}$$

gilt, dann drücken sich die Funktionen $\eta_1^*\,\eta_2^*\ldots\eta_\nu^*$ wie folgt aus:

$$(35)\qquad \begin{aligned}\eta_1^* &= \eta_1\\ \eta_2^* &= \binom{u}{1}\eta_1+\eta_2\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ \eta_\nu^* &= \binom{u}{\nu-1}\eta_1+\binom{u}{\nu-2}\eta_2+\cdots+\binom{u}{1}\eta_{\nu-1}+\eta_\nu.\end{aligned}$$

Die Relationen (31) wird man bestätigt finden, wenn man (33) und (34) berücksichtigt und die Eigenschaft $\binom{u+1}{i}-\binom{u}{i}=\binom{u}{i-1}$ des Binomialkoeffizienten ins Auge faßt.

Wir bekommen also auch hier im ganzen genau eine der Vielfachheit μ der Wurzel λ gleichkommende Anzahl von Funktionen $\eta_1\,\eta_2\ldots\eta_\mu$, die sich beim Umlaufe um a_σ nur multiplikativ ändern.

Die Funktionen $y_\varkappa^-$ und $y_\varkappa^+$ werden sich auch hier mit konstanten Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$ in der Form (25) ausdrücken lassen, wobei aber an der Stelle des $\eta_\varkappa$ überall $\eta_\varkappa^*$ steht. Die Gleichungen (35) gestatten die η^* durch die η darzustellen, wonach man für $y_\varkappa^-$ und $y_\varkappa^+$ die Gleichungen bekommt

$$(36)\qquad \begin{aligned}y_\varkappa^- &= a_{\varkappa 1}(u^-)\,.\,\eta_1^- + a_{\varkappa 2}(u^-)\,.\,\eta_2^- + \cdots + a_{\varkappa n}(u^-)\,.\,\eta_n^-\\ y_\varkappa^+ &= b_{\varkappa 1}(u^+)\,.\,\eta_1^+ + b_{\varkappa 2}(u^+)\,.\,\eta_2^+ + \cdots + b_{\varkappa n}(u^+)\,.\,\eta_n^+\\ &\qquad \varkappa=1,2,\ldots n,\end{aligned}$$

wobei die Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}(u)$ und $b_{\varkappa\lambda}(u)$ noch u enthalten und z. B. bei der obigen ν-gliedrigen Kette die Werte haben:

$$(37)\qquad \begin{aligned}a_{\varkappa 1}(u) &= a_{\varkappa 1}+\binom{u}{1}a_{\varkappa 2}+\cdots+\binom{u}{\nu-1}a_{\varkappa\nu},\quad\ldots,\\ &\qquad a_{\varkappa,\nu-1}(u)=a_{\varkappa,\nu-1}+\binom{u}{1}a_{\varkappa\nu},\quad a_{\varkappa,\nu}(u)=a_{\varkappa\nu}\\ b_{\varkappa 1}(u) &= b_{\varkappa 1}+\binom{u}{1}b_{\varkappa 2}+\cdots+\binom{u}{\nu-1}b_{\varkappa\nu},\quad\ldots,\\ &\qquad b_{\varkappa,\nu-1}(u)=b_{\varkappa,\nu-1}+\binom{u}{1}b_{\varkappa,\nu},\quad b_{\varkappa\nu}(u)=b_{\varkappa\nu}\\ &\qquad \varkappa=1,2,\ldots n.\end{aligned}$$

Der weitere Vorgang zeigt nichts Neues. Überall treten an die Stelle der $a_{\varkappa\lambda}$, $b_{\varkappa\lambda}$ die Koeffizienten $a_{\varkappa\lambda}(u)$, $b_{\varkappa\lambda}(u)$, so in den Gleichungen (26) und (28), welche den Stetigkeitsbeweis vermitteln.

Das Riemannsche Problem läßt sich stets auf das in den Abschnitten 1 und 2 gelöste zurückführen.

Für die Folge wird uns noch wichtig sein, den Wert der Determinante $|y_\varkappa^{(\lambda)}|$, die aus n Funktionssystemen

$$y_1^{(\lambda)},\ y_2^{(\lambda)},\ \dots\ y_n^{(\lambda)} \qquad (\lambda = 1, 2, \dots n)$$

sich ergibt, in der Umgebung einer singulären Stelle a_σ zu kennen. Diese Determinante hat nach (36) und (37) für die Außenfunktionen den Wert

$$|y_\varkappa^{(\lambda)}| = |a_{\varkappa\lambda}(u)| \cdot |\eta_\varkappa^{(\lambda)}| = |a_{\varkappa\lambda}| \cdot |\eta_\varkappa^{(\lambda)}|, \tag{38}$$

so daß sie sich von der Determinante $|\eta_\varkappa^{(\lambda)}(z)|$ der kanonischen Funktionen nur um den konstanten Faktor $|a_{\varkappa\lambda}|$ unterscheidet, auch wenn mehrfache Verzweigungsfaktoren auftreten.

5.

Durch die Zurückführung des ursprünglichen Riemannschen Problems auf das bereits gelöste (30), ist auch die Lösbarkeit dargetan. Es existiert auch hier ein Fundamentalsystem von n Lösungen

$$\begin{aligned} y^{(1)} &= \left[y_1^{(1)}(z),\ y_2^{(1)}(z), \dots y_n^{1}\ (z)\right] \\ y^{(2)} &= \left[y_1^{(2)}(z),\ y_2^{(2)}(z), \dots y_n^{(2)}(z)\right] \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{(n)} &= \left[y_1^{(n)}(z),\ y_2^{(n)}(z), \dots y_n^{(n)}(z)\right]. \end{aligned} \tag{39}$$

Diese gehen aus einem Fundamentalsystem $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots \varphi^{(n)}$ von (30), dessen Existenz feststeht, durch die Gleichungen (27) hervor. Wegen des Nichtverschwindens der Determinante $|A_{\varkappa\lambda}(z)|$ oder $|B_{\varkappa\lambda}(z)|$ würde sich aus einer linearen Relation zwischen den Lösungen $y^{(1)}, y^{(2)}, \dots y^{(n)}$ eine lineare Relation zwischen $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots \varphi^{(n)}$ ergeben, und zwar mit denselben Koeffizienten. Durch das Fundamentalsystem (39) ist nun auch jede Lösung des Riemannschen Problems darstellbar. Die Auflösung der Gleichungen (27) nach φ^- und φ^+ zeigt nämlich, daß jede Lösung des Riemannschen Problems auf eine Lösung von (30) führt, die wegen der endlichen Anzahl der Nullstellen von $|A_{\varkappa\gamma}(z)|$ und $|B_{\varkappa\lambda}(z)|$ nur eine endliche Anzahl von Polen hat und nötigenfalls nach Multiplikation mit einer geeigneten rationalen Funktion im Endlichen überall endlich bleibt. Diese Lösung ist durch das Fundamentalsystem $\varphi^{(1)}, \varphi^{(2)}, \dots \varphi^{(n)}$ mit in z rationalen Koeffizienten linear darstellbar, woraus dann aus (27) wieder folgt, daß die Lösung des Riemannschen Problems linear darstellbar ist durch jene Lösungen, die aus $\varphi^{(1)} \varphi^{(2)} \ldots \varphi^{(n)}$ hervorgehen, d. h. durch das Fundamentalsystem (39).

Diese Reduktion zeigt gleichfalls, daß solche Lösungen, die außerhalb der Verzweigungspunkte $a_1 a_2 \ldots a_m$ keine Pole haben und in den Punkten a_σ nicht stärker unendlich werden, als die oben zur Reduktion verwendeten der Stelle a_σ entsprechenden Verzweigungsexponenten $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n$ es angeben, im Unendlichen nicht eine beliebig hohe Ordnung des Verschwindens haben können.

Bei diesem Problem Riemanns hat es ein besonderes Interesse, das Fundamentalsystem möglichst einfach zu gestalten, indem man es von allem Unwesentlichen befreit und so einrichtet, daß außer $a_1 a_2 \ldots a_m$ kein Punkt der Ebene, auch nicht der unendlich ferne, eine Ausnahmsstellung einnimmt.

Um ein solches Fundamentalsystem herzustellen, fixieren wir in den Verzweigungspunkten die Exponenten $\rho_1 \rho_2 \ldots \rho_n$, welche durch die Monodromiegruppe nur bis auf additive ganze Zahlen bestimmt sind, durch eine bestimmte Wahl dieser Zahlen und betrachten nur jene Lösungen des Riemannschen Problems, welche in den singulären Punkten auf kanonische Funktionen führen, welche daselbst keinen niedrigeren Verzweigungsexponenten besitzen als der entsprechende durch die vorherige Wahl festgesetzte. Wenn wir zunächst dem unendlich fernen Punkte noch eine Ausnahmsstellung einräumen, so gibt es gewiß ein Fundamentalsystem solcher Lösungen; denn es würde sich ein solches aus jedem anderen durch Multiplikation mit geeigneten rationalen Funktionen ergeben. Nachdem die Existenz solcher Lösungen feststeht, wollen wir ein möglichst einfaches Fundamentalsystem bestimmen, welches den unendlich fernen Punkt auszeichnet, uns aber die Bestimmung des „primitiven" Fundamentalsystems in einfacher Weise vermittelt.

Dieses vermittelnde Fundamentalsystem bestimmen wir nach der bereits befolgten Methode (Abschnitt 3), indem wir nacheinander n, Lösungen $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(n)}$ bestimmen, jede von allen vorangehenden linear unabhängig und im Unendlichen von einer möglichst niedrigen Ordnung $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$. Diese Ordnungen sind eindeutig bestimmt und bilden eine nicht fallende Reihe ganzer Zahlen

$$\nu_1 \leqq \nu_2 \leqq \cdots \leqq \nu_n .$$

Das so bestimmte Fundamentalsystem — es sei (39) schon ein solches — hat die Eigenschaft, mit konstanten Koeffizienten keine Lösung linear darzustellen, welche in irgend einem Punkte z_0 einen Nullpunkt hätte. Wäre nämlich in

$$c_1 y^{(1)} + c_2 y^{(2)} + \cdots + c_n y_n = (z - z_0) Y \tag{40}$$

$Y = [y_1 y_2 \ldots y_n]$ eine in z_0 reguläre Lösung oder, wenn z_0 ein Verzweigungspunkt wäre, doch so beschaffen, daß ihre Verzweigungsexponenten die oben festgesetzte Bedingung erfüllen, so würde diese Gleichung zur Konstruktion des Fundamentalsystems $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(n)}$

in einem Widerspruche stehen, da doch Y im Unendlichen von einer niedrigeren Ordnung ist, als das letzte $y^{(\varkappa)}$, welches in der Gleichung (40) noch eine von Null verschiedene Konstante $c_\varkappa$ hat.

Aus diesem Umstande folgert man, daß die Determinante

$$|\, y_\varkappa^{(\lambda)} \,|$$

in keinem regulären Punkte verschwindet.

In den singulären Punkten herrschen ähnliche Verhältnisse: Man drücke in einem Verzweigungspunkte a die Funktionen $y_1^{(\lambda)}, y_2^{(\lambda)}, \dots y_n^{(\lambda)}$ durch die kanonischen Funktionen nach (36) aus:

$$y_\varkappa^{(\lambda)} = a_{\varkappa 1}(u)\, \eta_1^{(\lambda)} + a_{\varkappa 2}(u)\, \eta_2^{(\lambda)} + \cdots + a_{\varkappa n}(u)\, \eta_n^{(\lambda)}. \tag{36}$$

Weil nun die Verzweigungsexponenten $\eta_\varkappa^{(\lambda)}$ nicht unter die entsprechenden Zahlen $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ gehen, haben die kanonischen Funktionen $\eta_\varkappa^{(\lambda)}$ in a folgende Anfänge der Entwicklung

$$\begin{array}{l} (z-a)^{\varrho_1}[C_1^{(1)} + \cdots],\ (z-a)^{\varrho_2}[C_2^{(1)} + \cdots], \dots (z-a)^{\varrho_n}[C_n^{(1)} + \cdots] \\ (z-a)^{\varrho_1}[C_1^{(2)} + \cdots],\ (z-a)^{\varrho_2}[C_2^{(2)} + \cdots], \dots (z-a)^{\varrho_n}[C_n^{(2)} + \cdots] \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (z-a)^{\varrho_1}[C_1^{(n)} + \cdots],\ (z-a)^{\varrho_2}[C_2^{(n)} + \cdots], \dots (z-a)^{\varrho_n}[C_n^{(n)} + \cdots], \end{array} \tag{41}$$

wobei in jeder Horizontalreihe die kanonischen Funktionen $\eta_1^{(\lambda)}, \eta_2^{(\lambda)} \dots \eta_n^{(\lambda)}$ stehen, die durch (36) eine Lösung des Problems geben. Die Konstanten $C_\varkappa^{(\lambda)}$ können zum Teile verschwinden, jedenfalls verschwindet die Determinante nicht, d. h. wir haben

$$|\, C_\varkappa^{(\lambda)} \,| \neq 0. \tag{42}$$

Wenn nämlich die Determinante in (42) Null wäre, so könnte man nach einem Determinantensatze durch Multiplikation der Horizontalreihen mit geigneten Konstanten und Addition zu den entsprechenden Elementen einer Horizontalreihe in dieser Reihe lauter Nullen erhalten. Daraus folgt aber, daß durch Multiplikation der Horizontalreihen in (41) mit geeigneten Konstanten und Addition untereinanderstehender Größen sich kanonische Funktionen ergeben, in denen überall der Verzweigungsexponent erhöht werden könnte. Aus diesen kanonischen Funktionen ergibt sich deshalb nach (36) eine Lösung, die durch $(z-a)$ dividiert werden darf, was eine Relation (40) gibt, und dies ist ein Widerspruch.

Durch das so bestimmte Fundamentalsystem läßt sich jede Lösung, deren Verzweigungsexponenten in keinem der singulären Punkte unter die entsprechenden fixierten Zahlen $\rho_1, \rho_2, \dots \rho_n$ gehen und die im Endlichen überall regulär ist, mit in z ganzen rationalen Koeffizienten linear ausdrücken; es läßt sich sogar schon mit konstanten Koeffizienten stets eine, und zwar einzige Lösung $y_1(z), y_2(z), \ldots y_n(z)$ finden, welche in einem regulären Punkte z_0 beliebig gewählte Anfangswerte $y_1(z_0), y_2(z_0) \ldots y_n(z)$ bekommt oder in einem singulären Punkte in den kanonischen Entwicklungen vorgeschriebene Anfangskoeffizienten besitzt. Dies folgt aus dem Nichtverschwinden der Determinante $|y_\varkappa^{(\lambda)}|$ bezw. der Determinante $|C_\varkappa^{(\lambda)}|$ in (42).

Um die Sonderstellung des unendlich fernen Punktes zu beseitigen, hat man zunächst, wenn die ganzen Zahlen $\nu_1, \nu_2, \ldots \nu_n$ der Reihe nach die Ordnungen der Lösungen (39) sind, diese Lösungen durch Division mit $(z-a_\sigma)^{\nu_1}, (z-a_\sigma)^{\nu_2}, \ldots (z-a_\sigma)^{\nu_n}$ im Unendlichen endlich und von Null verschieden zu machen, wobei natürlich, weil a_σ einer der singulären Punkte sein soll, die Verzweigungsexponenten in diesem Punkte eine Änderung erfahren. Man erhält so ein neues Fundamentalsystem $\frac{y^{(1)}}{(z-a_\sigma)^{\nu_1}}, \frac{y^{(2)}}{(z-a_\sigma)^{\nu_2}}, \ldots \frac{y^{(n)}}{(z-a_\sigma)^{\nu_n}}$, aus dem das gesuchte primitive sich unschwer ergeben wird.

Man kann zunächst behaupten, daß die Determinante

$$\left| \frac{y_\varkappa^{(\lambda)}(z)}{(z-a_\sigma)^{\nu_\lambda}} \right|$$

in jedem von $a_1 a_2 \ldots a_n$ verschiedenem Punkte, selbst im Unendlichen endlich und von Null verschieden ist. Daß auch im Unendlichen die Determinante nicht Null ist, ergibt sich aus der Konstruktionsweise des Fundamentalsystems $y^{(1)}, y^{(2)}, \ldots y^{(n)}$; im Endlichen verschwindet schon $|y_\varkappa^{(\lambda)}|$ nicht. Dieses neue Fundamentalsystem wird auf kanonische Funktionen führen, welche aus denen in (41) durch bloße Division jeder λ^{ten} Reihe durch das entsprechende $(z-a_\sigma)^{\nu_\lambda}$ hervorgehen. Für alle von a_σ verschiedenen singulären Punkte werden die Verzweigungsexponenten $\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_n$ dadurch nicht tangiert; die Anfangskoeffizienten werden zeilenweise durch die Konstanten $(a-a_\sigma)^{\nu_\lambda}$ dividiert, wonach die zu (42) analoge Determinante $\left| \frac{C_\varkappa^{(\lambda)}}{(a-a_\sigma)^{\nu_\lambda}} \right|$ ebenfalls von Null verschieden ist.

An der singulären Stelle a_σ ist noch eine Betrachtung erforderlich. Die kanonischen Entwicklungen sollen in a_σ lauten

$$(43) \quad \begin{array}{l} (z-a_\sigma)^{r_1}[A_1^{(1)}+\cdots], (z-a_\sigma)^{r_2}[A_2^{(1)}+\cdots], \ldots (z-a_\sigma)^{r_n}[A_n^{(1)}+\cdots] \\ (z-a_\sigma)^{r_1}[A_1^{(2)}+\cdots], (z-a_\sigma)^{r_2}[A_2^{(2)}+\cdots], \ldots (z-a_\sigma)^{r_n}[A_n^{(2)}+\cdots] \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ (z-a_\sigma)^{r_1}[A_1^{(n)}+\cdots], (z-a_\sigma)^{r_2}[A_2^{(n)}+\cdots], \ldots (z-a_\sigma)^{r_n}[A_n^{(n)}+\cdots], \end{array}$$

wobei die Exponenten $r_1, r_2, \ldots r_n$ schon so vorausgesetzt werden können, daß in keiner Vertikalreihe die Koeffizienten A sämtlich Null sind, sonst könnte der entsprechende Exponent erhöht werden.

Wenn nun in (43) die Determinante $|A_\varkappa^{(\lambda)}|$ von Null verschieden ausfällt, so sind wir am Ziele; das Fundamentalsystem verhält sich in allen singulären Punkten ähnlich.

Wenn jedoch die Determinante $|A_\varkappa^{(\lambda)}|$ verschwindet, so ist noch eine Änderung des Fundamentalsystems notwendig. In diesem Falle werden sich aber in (43) durch Multiplikation der Horizontalreihen mit geeigneten Konstanten und Addition zu einer Horizontalreihe nach untereinanderstehenden Elementen in dieser Horizontalreihe lauter verschwindende Anfangskoeffizienten ergeben. Wir können annehmen, daß dies in (43) schon in einer Horizontalreihe der Fall ist. Diese Horizontalreihe kann dann durch eine Potenz von $(z - a_\sigma)$ so dividiert werden, daß die Exponenten $r_1\, r_2 \ldots r_n$ nicht erniedrigt werden, aber mindestens einer — sagen wir r — wirklich erreicht wird, d. h. daß der entsprechende Anfangskoeffizient nicht Null ist. Die so erhaltene Lösung Y ist im Unendlichen Null. Man kann nun durch Multiplikation der Lösung Y mit einer geeigneten Konstanten und Addition in jeder Horizontalreihe es so einrichten, daß der Koeffizient jenes $(z-a_\sigma)^r$, welches in Y einen von Null verschiedenen Anfangskoeffizienten hat, Null wird. (In einer Zeile, aus der eben Y hervorgegangen ist, ist dies schon der Fall.) Man hat auf diese Weise kanonische Funktionen eines neuen Fundamentalsystems erhalten, bei dem aber ein Verzweigungsexponent r in a_σ erhöht werden kann, während die Determinante des Systems ganz ungeändert geblieben ist und die Bedingung (42) in allen übrigen singulären Punkten erhalten bleibt.

Eine solche Erhöhung des Verzweigungsexponenten kann, weil die Determinante des Fundamentalsystems von Null verschieden ist, nicht beliebig oft möglich sein.

Das Riemannsche Problem besitzt ein Fundamentalsystem von Lösungen

$$
(44) \qquad
\begin{aligned}
Y^{(1)} &= \left[Y_1^{(1)}(z),\ Y_2^{(1)}(z), \ldots\ Y_n^{(1)}(z)\right] \\
Y^{(2)} &= \left[Y_1^{(2)}(z),\ Y_2^{(2)}(z), \ldots\ Y_n^{(2)}(z)\right] \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
Y^{(n)} &= \left[Y_1^{(n)}(z),\ Y_2^{(n)}(z), \ldots\ Y_n^{(n)}(z)\right],
\end{aligned}
$$

welches primitiv genannt werden soll und die Eigenschaft hat, daß die Funktionen $Y_\varkappa^{(\lambda)}(z)$ außerhalb der Verzweigungspunkte (auch im Unendlichen) allenthalben regulär sind und eine von Null verschiedene Determinante $|Y_\varkappa^{(\lambda)}(z)|$ ergeben, während sie in den Verzweigungspunkten auf kanonische Entwicklungen (41) führen, in denen die Determinante (42) der Anfangskoeffizienten von Null verschieden ist.

Man wird bemerken, daß die ganzen Zahlen in den Verzweigungsexponenten bis auf eine singuläre Stelle beliebig fixiert werden können. An der letzten Verzweigungsstelle hat man jedoch nicht mehr die volle Freiheit der Wahl.

Nunmehr bestimmen wir die Determinante des primitiven Fundamentalsystems.

Die Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} Y_1^{(1)}, & Y_2^{(1)}, & \ldots & Y_n^{(1)} \\ Y_1^{(2)}, & Y_2^{(2)}, & \ldots & Y_n^{(2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_1^{(n)}, & Y_2^{(n)}, & \ldots & Y_n^{(n)} \end{vmatrix} \tag{45}$$

ist außerhalb der Punkte $a_1 \, a_2 \ldots a_m$ überall regulär und von Null verschieden. Um ihren Wert an der Verzweigungsstelle a zu bestimmen, wird man nach (36) die Funktionen $Y_\varkappa^{(\lambda)}(z)$ durch die kanonischen Funktionen auszudrücken haben

$$Y_\varkappa^{(\lambda)}(z) = a_{\varkappa 1}(u)(z-a)^{\varrho_1}[C_1^{(\lambda)} + \cdots] + a_{\varkappa 2}(u)(z-a)^{\varrho_2}[C_2^{(\lambda)} + \cdots] + \cdots$$
$$+ a_{\varkappa n}(u)(z-a)^{\varrho_n}[C_n^{(\lambda)} + \cdots]$$
$$\varkappa, \lambda = 1, 2, \ldots n$$

Es ergibt sich, weil die Determinante $|a_{\varkappa\lambda}(u)| = |a_{\varkappa\lambda}|$, d. h. konstant ist [siehe die Gl. (37), (38)],

$$\Delta = (z-a)^{\varrho_1+\varrho_2+\cdots+\varrho_n} \, . \, |a_{\varkappa\lambda}| \, . \, |C_\varkappa^{(\lambda)} + \cdots|,$$

woraus wegen des Nichtverschwindens von $|C_\varkappa^{(\lambda)}|$ folgt, daß an der Verzweigungsstelle a das Produkt $\Delta \, . \, (z-a)^{-\Sigma\varrho}$ regulär ist und nicht verschwindet.

Bezeihnet man nunmehr mit $\overset{a_\sigma}{\Sigma}\rho$ die Summe der Vezweigungsexponenten, die der singulären Stelle a_σ entsprechen, so ergibt sich, daß das Produkt

$$\Delta \, . \, (z-a_1)^{-\overset{a_1}{\Sigma}\rho} \, . \, (z-a_2)^{-\overset{a_2}{\Sigma}\rho} \ldots (z-a_m)^{-\overset{a_m}{\Sigma}\rho} \tag{46}$$

auch in allen singulären Punkten regulär und von Null verschieden ist. Wegen seiner Eindeutigkeit im Unendlichen und der Regularität von Δ daselbst folgt, daß die Summe $\overset{a_1}{\Sigma}\rho + \overset{a_2}{\Sigma}\rho + \cdots + \overset{a_m}{\Sigma}\rho$ eine ganze Zahl sein muß, so daß (46) auch im Unendlichen wie eine rationale Funktion sich verhält. Weil aber (46) im Endlichen weder einen Nullpunkt noch einen Pol hat, kann es nur eine Konstante sein, die Summe der Verzweigungsexponenten ist also Null.

Die Determinante (45) des primitiven Fundamentalsystems (44) hat den Wert

$$\Delta = (z-a_1)^{\overset{a_1}{\Sigma}\rho} . (z-a_2)^{\overset{a_2}{\Sigma}\rho} \ldots (z-a_m)^{\overset{a_m}{\Sigma}\rho} . \text{ const.} \tag{47}$$

und zwischen den Verzweigungsexponenten besteht die Riemannsche Relation

$$\overset{a_1}{\Sigma}\rho + \overset{a_2}{\Sigma}\rho + \cdots + \overset{a_m}{\Sigma}\rho = 0. \tag{48}$$

Durch das primitive Fundamentalsystem ist jede Lösung, deren Verzweigungsexponenten nirgends unter die entsprechenden Exponenten des Fundamentalsystems gehen und die sonst im Endlichen allenthalben regulär ist, derart linear darstellbar, daß die Koeffizienten ganze rationale Funktionen von z sind. Der Beweis ergibt sich aus der Konstruktion des primitiven Fundamentalsystems, weil wegen des Nichtverschwindens der Determinante $| Y_\varkappa^{(\varkappa)} |$ kein Ausdruck $c_1 Y^{(1)} + c_2 Y^{(2)} + \cdots + c_n Y^{(n)}$ in einem Punkte z_0 eine Nullstelle hat oder, wenn z_0 ein Verzweigungspunkt a_σ wäre, nach Division mit $(z-a_\sigma)$ in a_σ schon jeder auf niedrigere Verzweigungsexponenten führt, als es die des Fundamentalsystems sind.

Man kann leicht auch den Grad der ganzen rationalen Koeffizienten bestimmen. Aus der Tatsache, daß die Determinante $| Y_\varkappa^{(\lambda)} |$ im Unendlichen einen nichtverschwindenden endlichen Wert hat, folgt sofort, daß der Grad der rationalen Koeffizienten höchstens der Ordnung des polaren Unendlichwerdens der Lösung im Unendlichen gleichkommt.

Man wird bemerken, daß durch das primitive Fundamentalsystem (44) jede außerhalb der Punkte $a_1\, a_2 \ldots . a_m$ reguläre Lösung $y = [y_1(z), y_2(z), \ldots y_n(z)]$ in der Form

$$R(z) . y = R_1(z)\, Y^{(1)} + R_2(z) . Y^{(2)} + \cdots + R_n(z)\, Y^{(n)}$$

bei ganzen rationalen $R(z)$, $R_1(z)$, $R_2(z)$, $\ldots R_n(z)$ darstellbar ist, was, wie bisher, nur eine kürzere Schreibweise für das System der Gleichungen ist

$$R(z)\, y_\varkappa(z) = R_1(z)\, Y_\varkappa^{(1)}(z) + R_2(z)\, Y_\varkappa^{(2)}(z) + \cdots + R_n(z)\, Y_\varkappa^{(n)}(z)$$

$$\varkappa = 1, 2, \ldots n.$$

Dabei wird $R(z)$ nur die singulären Stellen $a_1 a_2 \ldots a_m$ als Nullpunkte haben können. Die Funktionen $R_1(z), R_2(z), \ldots R_n(z)$ übersteigen wegen der Regularität im Unendlichen den Grad von $R(z)$ nicht.

Würde man die Riemannsche Forderung, daß die Lösungen nicht in unendlich hoher Ordnung unendlich werden dürfen, fallen lassen, dann bliebe die lineare Darstellbarkeit durch das primitive Fundamentalsystem noch immer aufrechterhalten, die Koeffizienten $R(z)$ wären jedoch im allgemeinen nicht mehr rational, wohl aber in der ganzen Ebene, wo sie existieren, eindeutig.

Wenn man aus dem primitiven Fundamentalsystem mit konstanten Koeffizienten n andere linear unabhängige Lösungen bildet, so bekommt man wieder ein Fundamentalsystem, und zwar wieder ein primitives unter Aufrechterhaltung der Verzweigungsexponenten. Man kann dieses primitive Fundamentalsystem stets so wählen und dies auf eine einzige Weise, daß die Funktionen des Fundamentalsystems in einem regulären Punkte ganz willkürlich gegebene Anfangswerte nicht verschwindender Determinante besitzen. In einem singulären Punkte könnte man die Anfangskoeffizienten (41) $C_{\varkappa}^{(\lambda)}$, wenn nur $\left| C_{\varkappa}^{(\lambda)} \right| \neq 0$ ist, beliebig wählen. Solche primitiven Fundamentalsysteme sind vollständig eindeutig bestimmt. Man wird bemerken, daß bei allen diesen Betrachtungen eine Voraussetzung über die Irreduktibilität oder Reduktibilität der Monodromiegruppe nicht gemacht wurde.

Das primitive Fundamentalsystem bildet die Lösung eines sehr einfachen Systems linearer Differentialgleichungen.

Bezeichnen wir mit $\omega(z)$ das Produkt

$$\omega(z) = (z - a_1)(z - a_2) \ldots . (z - a_m), \tag{49}$$

so ist $\omega(z)\dfrac{d\,Y^{(\lambda)}}{d\,z}$ für jede Lösung $Y^{(\lambda)}$ ebenfalls eine Lösung des Riemannschen Problems. Da nun durch Differentiation jeder Verzweigungsexponent um eine Einheit erniedrigt wird, diese Erniedrigung aber durch den Faktor $\omega(z)$ wieder rückgängig gemacht wird, so erfüllt $\omega(z)\dfrac{d\,Y^{(\lambda)}}{d\,z}$ die den Verzweigungsexponenten des $Y^{(\lambda)}$ auferlegten Bedingungen und ist mithin durch das Fundamentalsystem (44) $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots Y^{(n)}$ mit in z ganzen rationalen Koeffizienten linear darstellbar. In Unendlichen hat $\omega(z)$ einen m-fachen Pol, $\dfrac{d\,Y^{(\lambda)}}{d\,z}$ mindestens eine doppelte Nullstelle, so daß $\omega(z)\dfrac{d\,Y^{(\lambda)}}{d\,z}$ im Unendlichen höchstens die Ordnung $m-2$ hat. Die ganzen rationalen Koeffizienten bei der linearen Darstellung durch $Y^{(1)}, Y^{(2)}, \ldots Y^{(n)}$ besitzen daher höchstens den Grad $m-2$. Das gleiche gilt von allen Lösungen

$$\omega(z)\frac{dY^{(1)}}{dz},\ \omega(z)\frac{dY^{(2)}}{dz}, \ldots \omega(z)\frac{dY^{(n)}}{dz}$$

und wir bekommen ein System von linearen Differentialgleichungen

$$\begin{aligned}
&\omega(z)\cdot\frac{dY^{(1)}}{dz} = \omega_{11}(z)\cdot Y^{(1)} + \omega_{12}(z)\cdot Y^{(2)} + \cdots + \omega_{1n}(z)\cdot Y^{(n)}\\
(50)\quad &\omega(z)\cdot\frac{dY^{(2)}}{dz} = \omega_{21}(z)\cdot Y^{(1)} + \omega_{22}(z)\cdot Y^{(2)} + \cdots + \omega_{2n}(z)\cdot Y^{(n)}\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\omega(z)\cdot\frac{dY^{(n)}}{dz} = \omega_{n1}(z)\cdot Y^{(1)} + \omega_{n2}(z)\cdot Y^{(2)} + \cdots + \omega_{nn}(z)\cdot Y^{(n)}
\end{aligned}$$

in denen $\omega(z)$ durch (49) gegeben ist, $\omega_{\varkappa\lambda}(z)$ $(\varkappa, \lambda = 1, 2 \ldots n)$ aber ganze rationale Funktionen von z sind, höchstens von $m - 2^{\text{ten}}$ Grade.

Die Koeffizienten $\omega_{\varkappa\lambda}(z)$ enthalten höchstens $(m-1).n^2$ voneinander unabhängige Konstanten. Genau die gleiche Anzahl unabhängiger Parameter enthalten im allgemeinen die m Umlaufssubstitutionen $\Sigma_1, \Sigma_2, \ldots \Sigma_m$ um die einzelnen Verzweigungspunkte $a_1\, a_2 \ldots a_m$ infolge der Beziehung $\Sigma_1\, \Sigma_2 \ldots \Sigma_m = 1$. Daraus folgt auch, daß das primitive Fundamentalsystem, dessen Existenz oben nachgewiesen wurde, eine einfachste vollständige Lösung des Riemannschen Problemes ist und im allgemeinen Falle eine weitere Vereinfachung nicht mehr möglich ist.

Unsere Untersuchung zeigt, daß bei vorliegendem Problem der funktionentheoretische Standpunkt Riemanns sich vollständig vertreten läßt. Diesem gemäß hat man aus der Definition der Funktionen durch ihre Grenz- und Unstetigkeitseigenschaften und allenfalls noch an der Hand der Existenzsätze die weiteren Eigenschaften abzuleiten. In diesem Sinne wurden hier alle Ergebnisse aus der Definition und dem Existenzbeweise direkt gefolgert; daß z. B. das Fundamentalsystem der Lösungen einem System linearer Differentialgleichungen genügt, ergibt sich zum Schlusse von selbst. Es wurde hier ein möglichst einfaches System aufgestellt, ohne irgendwie von der Theorie der linearen Differentialgleichungen Gebrauch zu machen.

6.

In bezug auf das Problem der Bestimmung von Funktionen, die auf einer gegebenen n-blättrigen Riemannschen Fläche einen eindeutigen Verlauf haben, beschränken wir uns auf kurze Bemerkungen. Statt eine Funktion y als eindeutig auf der Riemannschen Fläche zu deuten, nehme man ihre n-Zweige $y_1(z), y_2(z), \ldots y_n(z)$

und betrachte ihren Verlauf in einer Ebene, die durch sämtliche z-Werte, in denen eine Verzweigung eintritt, aufgeschnitten ist. In dieser Ebene sind die Funktionen $y_1(z), y_2(z), \ldots y_n(z)$ eindeutig, sie gehen aber Permutationen unter sich ein, wenn sie auf geschlossenen Wegen, die den Querschnitt überschreiten, fortgesetzt werden. Das System der Koeffizienten (18) $c_{\varkappa\lambda}$ bedeutet also nur eine Permutation, d. h. es ist in jeder Horizontal- und jeder Vertikalreihe nur ein Koeffizient von Null verschieden; dieser eine hat den Wert 1. Wenn man nun, um die Kurve geschlossen zu machen, auch die äußeren zwei Verzweigungspunkte verbindet, so entspricht diesem Kurvenzug ein stetiger Durchgang, die identische Permutation. Die Verzweigungsfaktoren λ bestehen bekanntlich aus Zyklen von Einheitswurzeln, die Exponenten ρ sind also rationale Zahlen. Da eine logarithmische Verzweigung nicht eintreten kann, haben wir hier immer den einfacheren Fall der Reduktion auf das Problem (30). Dem Problem genügt offenbar jede rationale Funktion. Da nun die Funktion $r(z) = \frac{1}{n}\left[y_1(z) + y_2(z) + \cdots + y_n(z)\right]$ ohne Änderung jeden geschlossenen Fortsetzungsweg verträgt, also rational ist, kann man aus jeder Lösung $y_1(z), y_2(z), \ldots y_n(z)$ eine andere $y_1(z) - r(z), y_2(z) - r(z), \ldots y_n(z) - r(z)$ herleiten, bei der die Funktionensumme Null ist. Man kann also zwischen $y_1(z), y_2(z), \ldots y_n(z)$ die Beziehung $y_1(z) + y_2(z) + \cdots + y_n(z) = 0$ festsetzen, wodurch man nur alle rationalen Lösungen ausgeschlossen, dabei aber das Problem auf ein $(n-1)$-dimensionales reduziert hat. Im primitiven Fundamentalsystem werden sich die rationalen Funktionen durch eine Konstante repräsentieren lassen. Das Fundamentalsystem setzt uns in den Stand, Lösungen herzustellen, welche in einem regulären Punkte willkürlich vorgeschriebene Werte haben. Dieser Umstand gestattet die Folgerung, daß es Funktionen gibt, die der Fläche eigentümlich angehören. Hier kann dann die Theorie algebraischer Funktionen und ihrer Integrale einsetzen. Die Verzweigungsfläche kann durch Angabe der Verzweigungspunkte und der ihnen entsprechenden Permutationen zwischen $y_1(z), y_2(z), \ldots y_n(z)$ ersetzt werden. Da diese willkürlich sind, entsprechen jeder beliebigen Galoisschen Gruppe algebraische Funktionen, die Anzahl der Verzweigungspunkte muß nur mindestens um 1 größer sein als die Minimalzahl der Permutationen, welche die Galoissche Gruppe erzeugen; der Grad ist irgend eine der Anzahlen der Elemente, durch deren Permutation die Gruppe transitiv dargestellt werden kann, ein Teiler der Gruppenordnung.