

Zur allgemeinen Theorie der Curven und Flächen.

Von A. BECK in Riga.

Die allgemeine Theorie der ebenen Curven und der Flächen gründet sich wesentlich auf die Betrachtung der Polarcurven resp. Polarflächen. Es lassen sich aber, wie im Folgenden gezeigt werden soll, einzelne Resultate auf einem Wege ableiten, welcher die Theorie der Polaren nicht voraussetzt.

Das Verfahren ist demjenigen nachgebildet, nach welchem Steiner im 49. Bande des Crelle'schen Journals in der Abhandlung: „Ueber algebraische Curven und Flächen“ die Anzahl der Normalen bestimmte, die von einem Punkt aus an eine ebene Curve gezogen werden können. Lässt man die Curve sich um diesen Punkt herum um einen unendlich kleinen Winkel drehen, so geben die Schnittpunkte der beiden Curven die Fusspunkte jener Normalen, deren Anzahl also, wenn n die Ordnungszahl der Curve bezeichnet, $= n^2$ ist, vorausgesetzt, dass die Curve keine Doppel- und Rückkehrpunkte besitze.

I. Um für eine ebene Curve n^{ter} Ordnung die Classenzahl zu erhalten, braucht man nur anstatt einer Drehung der Curve eine unendlich kleine Verschiebung derselben in beliebiger Richtung in der Ebene auszuführen, denn die Berührungspunkte der Tangenten, die man in jener Richtung an die Curve legen kann, stellen sich offenbar als Schnittpunkte der beiden Curven dar. — Von der Gesammtheit dieser Schnittpunkte sind aber abzurechnen:

- 1) Die n Punkte, welche die beiden Curven auf der unendlich fernen Geraden gemein haben, da diese bei der Verschiebung ihre Lage nicht ändern.
- 2) Die Schnittpunkte, die durch das Vorhandensein von Doppel- und Rückkehrpunkten entstehen. Seien \mathcal{A} , \mathcal{B} die beiden Curvenäste, die durch den Doppelpunkt gehen, \mathcal{A}' , \mathcal{B}' ihre beiden Verschiebungen, so schneiden sich \mathcal{A} und \mathcal{B}' sowie \mathcal{B} und \mathcal{A}' in zwei dem Doppelpunkt unendlich nahen Punkten, die der Aufgabe offenbar fremd sind. Denkt man sich einen Rückkehrpunkt aus einem Doppelpunkt dadurch entstanden, dass

die Schleife sich immer mehr verkleinerte, so folgt, dass beim Verschwinden der Schleife nothwendig noch ein dritter Schnittpunkt, welcher der Aufgabe ebenfalls fremd ist, dem Rückkehrpunkt unendlich benachbart wird. —

So ergibt sich die *erste* Plücker'sche Gleichung:

$$m = n(n-1) - 2d - 3k,$$

wenn d und k die Anzahl der Doppel- resp. Rückkehrpunkte bezeichnen.

So wie diese Gleichung für einen unendlich fernen Punkt abgeleitet wurde, lässt sich die *zweite* Plücker'sche Gleichung mit Hülfe derselben Verschiebung für eine specielle Gerade, die unendlich ferne, aufstellen. Doch wird man besser die Verschiebung durch die entsprechende allgemeinere Transformation, nämlich eine centrische Collineation ersetzen. — Um die Anzahl der Tangenten zu bestimmen, die von einem Punkt C aus an die Curve gezogen werden können, nehme man diesen Punkt als Mittelpunkt einer centrischen Collineation und wähle die Collineationsaxe c ganz beliebig. Nimmt man dann noch zu einem Punkt P der Curve den entsprechenden P' beliebig auf dem Strahl CP an, so ist die collineare Beziehung bestimmt und der gegebenen Curve entspricht eine andere, die nach Ordnung, Classe u. s. w. mit der erstern übereinstimmt und durch dieselben n Punkte auf der Collineationsaxe hindurchgeht. Lässt man dann den Punkt P' sich immer mehr dem Punkte P nähern, so gehen die Schnittpunkte beider Curven schliesslich in die Berührungspunkte der gesuchten Tangenten über, mit Ausnahme 1) der n Punkte, in welchen die Collineationsaxe von beiden Curven geschnitten wird, 2) der $2d$ und $3k$ Punkte, die von den Doppel- und Rückkehrpunkten herühren.

Dasselbe geometrische Hilfsmittel liefert die Ordnungszahl n einer Enveloppe von bestimmter Classe m . Man nimmt die gerade Linie c , deren Schnittpunkte mit der Enveloppe gefunden werden sollen; als Axe, einen beliebigen Punkt C als Mittelpunkt einer centrischen Collineation und ordnet einer beliebigen Tangente t eine Gerade t' zu, die sich mit t auf c schneidet und die man allmählig unendlich benachbart zu t werden lässt. Auf diese Weise ergibt sich durch dualistische Uebersetzung der vorigen Betrachtung, wenn t und i die Anzahl der Doppel- resp. Inflectionstangenten bezeichnen:

$$n = m(m-1) - 2t - 3i.$$

II. Auf den Raum übertragen, führt das Verfahren zu einigen der bekannten Formeln in Bezug auf eine Fläche n^{ter} Ordnung. Soll die *Ordnungszahl* des Berührungskegels von einem Punkt C aus bestimmt werden, so nimmt man diesen Punkt als Mittelpunkt einer

centrischen räumlichen Collineation, eine beliebige Ebene γ als Collineationsebene derselben und ordnet einem Punkt P der Fläche einen unendlich benachbarten P' auf dem Strahl CP als entsprechenden zu. Die Berührungscurve des Kegels ergibt sich dann als Durchdringungscurve der beiden Flächen. Letztere werden aber von der Collineationsebene in derselben Curve n^{ter} Ordnung \mathfrak{C} geschnitten, deren Punkte nicht die genannte Bedeutung haben, da sie bei der Transformation keine Verschiebung erleiden. Von der Gesamtdurchdringungscurve bleibt also als eigentliche Berührungscurve noch eine Raumcurve \mathfrak{C} von der Ordnung $n(n-1)$ übrig und der Berührungskegel ist somit ebenfalls von der Ordnung $n(n-1)$.

Um die *Classenzahl* der Fläche zu bestimmen, wiederhole man das Vorige für ein zweites Centrum C_1 und eine beliebige zweite Collineationsebene γ_1 . Dadurch erhält man auf der Fläche eine zweite Durchdringungscurve von der Ordnung n^2 , die wieder in eine ebene Curve n^{ter} Ordnung \mathfrak{C}_1 und eine Raumcurve $n(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung \mathfrak{C}_1 zerfällt. Die n^3 Schnittpunkte der 3 in Betracht kommenden Flächen liefern offenbar die Berührungspunkte der Tangentialebenen, welche man durch die Gerade CC_1 an die Fläche legen kann. Als der Aufgabe fremd sind von diesen Punkten abzurechnen die $n(n-1)$ Punkte, in welchen die Curve \mathfrak{C} von der Curve \mathfrak{C}_1 , die $n(n-1)$ Punkte, in welchen die Curve \mathfrak{C}_1 von der Curve \mathfrak{C} und endlich die n Punkte, in welchen die Fläche von der Schnittlinie beider Collineationsebenen oder die Curve \mathfrak{C} von der Curve \mathfrak{C}_1 geschnitten wird. Die Classenzahl der Fläche wird hiernach:

$$= n^3 - 2n(n-1) - n,$$

d. h.

$$= n(n-1)^2.$$

Dieselbe Methode lässt uns auch die Anzahl der *Haupttangente*n der Fläche bestimmen, welche durch einen beliebigen Punkt C gehen. Zu diesem Zweck transformire man die Fläche F durch zwei räumliche Collineationen, welche beide den Punkt C zum Centrum, dagegen zwei beliebige Ebenen γ, γ_1 als Collineationsebenen haben. Man lasse ferner, um die beiden collinearen Beziehungen vollständig zu bestimmen, dem Punkt P zwei Punkte P', P_1' entsprechen, die auf dem Strahl CP etwa zu beiden Seiten von P und unendlich benachbart zu demselben liegen, wodurch aus der gegebenen Fläche zwei neue Flächen n^{ter} Ordnung F', F_1' abgeleitet werden. Die gesuchten Berührungspunkte von Haupttangente)n durch C müssen offenbar gemeinsame Punkte dieser drei Flächen sein.

Die Frage, wie viele der n^3 Punkte als der Aufgabe fremd abzurechnen sind, erfordert hier eine nähere Untersuchung. Soll ein solcher Schnittpunkt P zu einer der gesuchten Haupttangente)n gehören,

so muss er nothwendig mit seinen beiden entsprechenden Punkten P' , P_1' eine Gruppe von drei *verschiedenen* Punkten repräsentiren. Fallen dagegen zwei oder gar alle drei Punkte der Gruppe zusammen, so kann der Punkt keine Lösung der Aufgabe enthalten. Indem wir wieder die vorhin benützte Bezeichnung für die auf F liegenden Curven anwenden, ergeben sich folgende Punkte, die von der Gesamtheit der Schnittpunkte abzurechnen sind:

- 1) P fällt mit P' zusammen; dies sind die Punkte auf \mathfrak{C} . \mathfrak{C} und \mathfrak{C}_1 schneiden sich in $n(n-1)$ Punkten.
- 2) P fällt mit P_1' zusammen; dies sind die Punkte auf \mathfrak{C}_1 . \mathfrak{C}_1 und \mathfrak{C} schneiden sich in $n(n-1)$ Punkten.
- 3) P' fällt mit P_1' zusammen. Die Systeme der P' und P_1' sind zu einander ebenfalls collinear und zwar centrisch mit dem Centrum C . Die Collineationsebene γ' für diese neue collineare Beziehung geht durch die Schnittlinie der beiden andern Collineationsebenen γ , γ_1 hindurch und enthält alle sich selbst entsprechenden Punkte $P' P_1'$. Die beiden Curven \mathfrak{C} und \mathfrak{C}_1 liegen also auf F so, dass sie von der Ebene γ' in denselben $n(n-1)$ Punkten geschnitten werden. Das Auftreten dieser Punkte hängt wesentlich damit zusammen, dass die beiden Collineationen dasselbe Centrum haben, während vorhin bei der Bestimmung der Classenzahl zwei verschiedene Centren angenommen werden mussten. Die drei Flächen haben einen gemeinschaftlichen Berührungskegel. Je zwei derselben schneiden sich in einer ebenen Curve n^{ter} Ordnung, auf welcher $n(n-1)$ Schnittpunkte von zweien der drei Raumcurven $n(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung liegen.
- 4) P , P' und P_1' fallen zusammen; dies sind die n Punkte, in welchen sich die drei ebenen Curven schneiden oder in welchen die Fläche von der Schnittlinie der Collineationsebenen getroffen wird.

Hiernach ist nun die Anzahl der Haupttangente der Fläche, die durch einen beliebigen Punkt gehen:

$$= n^3 - 3n(n-1) - n,$$

d. h.

$$= n(n-1)(n-2).$$

Wir unterlassen die Durchführung der dualistisch entsprechenden Aufgabe für die allgemeine Fläche m^{ter} Classe, wodurch wir auf die Anzahl der Inflexionstangenten des ebenen Schnittes geführt würden. Dagegen möge noch darauf aufmerksam gemacht werden, dass die vorhin behandelte Frage nach den Haupttangente, so sehr sie eine rein theoretische zu sein scheint, in der darstellenden Geometrie grosses praktisches Interesse gewinnt.

Wenn C als leuchtender Punkt gedacht wird und der Eigenschatten und ebene Schlagschatten der Fläche construirt werden soll, so wird ersterer als Berührungscurve \mathfrak{B} , letzterer als ebene Spur \mathfrak{S} des Berührungskegels von C aus gefunden. Gleichzeitig tritt aber noch eine andere Curve \mathfrak{D} auf, nämlich die Grenzlinie des Schlagschattens, welchen die Fläche auf sich selbst wirft und welche die Durchdringungscurve der Fläche mit ihrem Berührungskegel ist. Die Punkte, welche den beiden Curven \mathfrak{B} und \mathfrak{D} gemeinschaftlich sind, haben offenbar die Eigenschaft, dass die nach ihnen hingehenden Lichtstrahlen drei unendlich benachbarte Punkte mit der Fläche gemein haben, also Haupttangente sind. Andererseits sieht man sofort ein, dass in jedem solchen Punkt die beiden Curven den Lichtstrahl zur gemeinschaftlichen Tangente haben müssen. Denn seien $P_1 P_2 P_3$ die drei unendlich benachbarten Punkte, so muss der Lichtstrahl eine Tangente von \mathfrak{B} sein, weil die Combination $P_1 P_2$ einen Punkt und die Combination $P_2 P_3$ einen zweiten auf dem Lichtstrahl unendlich benachbart liegenden Punkt von \mathfrak{B} repräsentirt; ebenso aber stellen die drei Punkte, je nachdem man $P_1 P_2$ als Berührungspunkt und P_3 als weitem Schnittpunkt oder $P_2 P_3$ als Berührungspunkt und P_1 als weitem Schnittpunkt des Lichtstrahls mit der Fläche annimmt, zwei unendlich benachbarte Punkte von \mathfrak{D} dar. Die beiden Curven \mathfrak{B} und \mathfrak{D} haben also die Eigenschaft, dass man an sie von C aus Tangenten ziehen kann. Daraus folgt weiter, dass diese Tangenten stationäre Erzeugende des Berührungskegels sein müssen und endlich, dass der Schlagschatten einer Fläche im Allgemeinen Rückkehrpunkte besitze.

Allerdings treten diese Rückkehrpunkte, auch wenn sie reell sind, nie sichtbar auf, da sie ihrer Entstehung nach immer in das Innere des Schlagschattens fallen müssen. Schon wesentlich deutlicher dagegen kommen sie zum Vorschein bei der Aufgabe des Umrisses einer Fläche; hier kann der Rückkehrpunkt und einer der in ihm zusammenstossenden Curvenäste sichtbar werden.

Wenn auch bei diesen praktischen Aufgaben der darstellenden Geometrie schon in den ältern französischen Werken (Leroy, de la Gournerie) und neuerdings in dem Fiedler'schen Werke auf die betreffende theoretische Frage hingewiesen worden ist, so möchte doch dieser Beitrag nicht ganz ohne Interesse sein.

Riga, im Mai 1878.