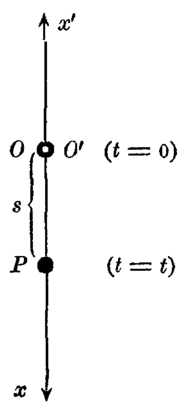
Das „homogene“ Gravitationsfeld und die Lorentztransformation.

(Bemerkung zur Untersuchung von Hrn. Karl Bollert.)

Von **Stjepan Mohorovičić** in Zagreb (Jugoslavien).

Mit einer Abbildung. (Eingegangen am 14. August 1922.)

Vor einiger Zeit[1]) habe ich eine elementare Theorie der Gravitation entwickelt, indem ich angenommen habe, daß vom mathematischen Standpunkte die Beschleunigung und Gravitation gleichwertig sind, und daß sich ein Körper im Raume mit größerer Geschwindigkeit als Lichtgeschwindigkeit nicht bewegen kann. Ich habe nicht nur ein „homogenes“ Gravitationsfeld betrachtet, sondern auch das zentrischsymmetrische, wo ich ein neues Attraktionsgesetz gefunden habe. Aus allen Bewegungsgesetzen in meiner Theorie kann man in erster Annäherung die Bewegungsgesetze der Newtonschen Mechanik ableiten, indem wir für die Lichtgeschwindigkeit einen unendlich großen Wert annehmen. Es hat sich dabei gezeigt, daß es gerade nicht notwendig war, den Zeitbegriff zu relativisieren und die vierdimensionale Raumzeitmannigfaltigkeit einzuführen.



Unlängst hat aber in dieser Zeitschrift Herr Karl Bollert das „homogene“ Gravitationsfeld vom Standpunkte der speziellen und der allgemeinen Relativitätstheorie untersucht[2]), und es scheint (natürlich nur auf den ersten Blick), daß er zu ganz abweichenden Resultaten gekommen sei. Es ist deshalb meine Absicht, hier die beiden Theorien zu vergleichen, da entweder meine früher zitierte Theorie Herrn Bollert unbekannt war, oder sie hat ihm gerade den Anlaß zu seiner Untersuchung gegeben.

1. Vergleich mit der speziellen Theorie. Fällt ein Körper (s. Figur) aus O bzw. O' nach P, so wird nach der klassischen Mechanik der zurückgelegte Weg

$$s = x = -x' = \frac{1}{2}\gamma t^2. \qquad \left\{\begin{array}{ll}\text{El. Gr. Th.} & (5)\\ \text{H. Gr. F.} & (1)\end{array}\right.$$

[1]) S. Mohorovičić, Eine elementare Theorie der Gravitation. Naturw. Wochenschr. (N. F.) **21**, 145—153, 1922, Nr. 11. Diese Arbeit bezeichne ich hier kurz mit El. Gr. Th.

[2]) Karl Bollert, Das homogene Gravitationsfeld und die Lorentztransformation. ZS. f. Phys. **10**, 256—266, 1922. Hier kurz mit H. Gr. F. bezeichnet.

Herr K. Bollert betont ganz richtig, daß dies in der speziellen Relativitätstheorie für beliebige t ganz unmöglich ist, „da dann die Geschwindigkeit dieser materiellen Punkte P über jede Grenze hinauswachsen würde“ (H. Gr. F., S. 257). In meiner Mitte März laufenden Jahres erschienenen Arbeit El. Gr. Th.[1] sage ich (El. Gr. Th., S. 145): „Dieses Ergebnis der Newtonschen Mechanik müssen wir hier etwas umändern, da sich in der Tat die Geschwindigkeit v nach einem anderen Gesetze als in der klassischen Mechanik ändert; sie darf nie größer als die Lichtgeschwindigkeit c werden, d. h. für $t = \infty$ ist $v = c$.“ Für die Geschwindigkeit v habe ich auch die in der Einsteinschen Relativitätstheorie bekannte Formel verwendet:

$$v = \frac{g t}{\sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}}}. \qquad \text{El. Gr. Th. (7)}$$

Ich sage weiter (El. Gr. Th., S. 145 bis 146): „Um den zurückgelegten Weg in der Richtung der negativen x'-Achse zu finden (s. Figur), müssen wir das Integral berechnen:

$$x' = -\int_0^t v\, dt, \qquad \text{El. Gr. Th. (11)}$$

wo wir für v den Wert aus (7) einsetzen müssen, und wir finden für den zurückgelegten Weg sofort:

$$x' = \frac{c^2}{g}\left[1 - \sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}}\right].\text{“} \qquad \text{El. Gr. Th. (12)}$$

Dagegen kümmert sich Herr K. Bollert nicht mehr um den zurückgelegten Weg $s = x$, sondern — und das ist ohne Zweifel sein Verdienst — er berechnet „die Ruhbeschleunigung“ γ als Funktion der Entfernung x, indem er bekommt:

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}}, \qquad \text{H. Gr. F. (2)}$$

wo γ_0 „die Ruhbeschleunigung“ im Koordinatenanfang bedeutet.

Zu dieser Relation führt uns auch meine El. Gr. Th.: Da hier $x = -x'$ ist, so können wir El. Gr. Th. (12) auch in der Form:

$$1 + \frac{g x}{c^2} = \sqrt{1 + \frac{g^2 t^2}{c^2}} \qquad \text{(I)}$$

[1]) Die Bollertsche Arbeit H. Gr. F. ist erst am 4. Juni bei der Redaktion dieser Zeitschrift eingegangen.

schreiben, wobei wir beachten müssen, daß $g = \gamma_0$, und El. Gr. Th. (7) wird, wegen (I), folgende Form erhalten:

$$v = \frac{\gamma_0 t}{1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}} = \gamma t, \tag{II}$$

und daraus folgt unmittelbar H. Gr. F. (2) oder γ als Funktion der Zeit t:

$$\gamma = \frac{\gamma_0}{\sqrt{1 + \frac{\gamma_0^2 t^2}{c^2}}} \text{ [1]}. \tag{III}$$

Herr K. Bollert verwendet bei seinen Ableitungen die Lorentzsche Kontraktion $1 : \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}$, wo v die momentane Geschwindigkeit [El. Gr. Th. (7)] bedeutet, ohne dies näher zu begründen. Dagegen habe ich dies in § 4 meiner El. Gr. Th. ausführlich untersucht und gezeigt, daß wir bei der bekannten Lorentzschen Transformation eine kleine Korrektur durchführen müssen.

2. Vergleich mit der allgemeinen Theorie. Aus meiner Relation El. Gr. Th. (18) folgt für das vierdimensionale Linienelement

$$ds^2 = A(c^2 dt^2 - dx^2) - dy^2 - dz^2, \tag{VI}$$

wo A durch El. Gr. Th. (19) gegeben ist, oder in erster Annäherung, wenn wir für kleine Entfernungen x die Glieder zweiter Ordnung nicht berücksichtigen, und da $g = \gamma_0$:

$$A = 1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2} \text{ [2]}. \tag{VII}$$

Herr K. Bollert findet dagegen als Invariante des „homogenen" Feldes:

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\gamma_0 x}{c^2}\right) c^2 d\tau_0^2 - dx^2 - dy^2 - dz^2, \quad \text{H. Gr. F. (4)}$$

[1]) Es ist vielleicht nicht unnütz, zu erwähnen, daß aus H. Gr. F. (2) und (III) folgende Relationen folgen:

$$\gamma_0 = \frac{\gamma}{1 - \frac{\gamma x}{c^2}} \tag{IV}$$

und

$$\gamma_0 = \frac{\gamma}{\sqrt{1 - \frac{\gamma^2 t^2}{c^2}}}. \tag{V}$$

[2]) Bei der Ableitung der Formeln (VI) und (VII) muß man auf das Vorzeichen sehr achtgeben.

und es scheint auf den ersten Blick, daß die beiden Theorien hier abweichen, besonders, da Herr K. Bollert zu demselben Resultat auch auf Grund der allgemeinen Relativitätstheorie gelangt. Es wird deshalb dringend notwendig, seine diesbezüglichen Ausführungen zu kontrollieren. Herr K. Bollert berechnet die Einsteinschen Gravitationsgleichungen (H. Gr. F., S. 266):

$$R_{kl} = \frac{\partial}{\partial x_l}\begin{Bmatrix} k\,m \\ m \end{Bmatrix} - \frac{\partial}{\partial x_m}\begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} k\,n \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} l\,m \\ n \end{Bmatrix} - \begin{Bmatrix} k\,l \\ m \end{Bmatrix}\begin{Bmatrix} m\,n \\ n \end{Bmatrix} = 0,$$

wo R_{kl} der bekannte Riemann-Christoffelsche Tensor (oder Krümmungstensor) ist. Da $g_{11} \neq 0$, $g_{22} = g_{33} = -1$, $g_{44} = [V(x_1)]^2$ und sämtliche andere $g_{ik} = 0$ sind, so bekommt er:

$$R_{11} = \frac{\partial \frac{V'}{V}}{\partial x_1} - \left(\frac{g'_{11}}{2\,g_{11}} - \frac{V'}{V}\right)\frac{V'}{V} = 0, \tag{VIII}$$

$$R_{44} = \frac{\partial \frac{V V'}{g_{11}}}{\partial x_1} - \left(\frac{V'}{V} - \frac{g'_{11}}{2\,g_{11}}\right)\frac{V V'}{g_{11}} = 0, \tag{IX}$$

und alle übrigen R_{ik} verschwinden. Aus (VIII) und (IX) berechnet Herr K. Bollert die Relation:

$$V'' - \frac{g'_{11}}{2\,g_{11}} V' = 0; \tag{X}$$

er betont, daß man hier entweder g_{11} oder $V = \sqrt{g_{44}}$ willkürlich wählen kann, und er nimmt $g_{11} = -1$, um die Invariante H. Gr. F. (4) zu bekommen. Da im „homogenen“ Gravitationsfelde die Euklidsche Geometrie nicht mehr gilt[1]), so müssen wir die Bollertsche Annahme $g_{11} = -1$ verwerfen, da g_{11} eine Funktion von x_1 sein wird. Darum handelt es sich aber, um die richtige Annahme für g_{11} zu machen, und ich denke, daß die einfachste Annahme

$$g_{11} = g_{44} = V^2 \tag{XI}$$

sein wird, da dann die Gravitationsgleichungen (VIII) und (IX) folgende Form annehmen werden:

$$R_{11} \equiv R_{44} = \frac{\partial}{\partial x_1}\left(\frac{V'}{V}\right) = 0, \tag{XII}$$

und die Gleichung (X) wird sich auf

$$V V'' - V'^2 = 0 \tag{XII^a}$$

---

[1]) In den §§ 3 und 6 meiner El. Gr. Th. habe ich darüber ausführlicher gesprochen.

reduzieren, und diese Relation (XII[a]) ist mit der Relation (XII) identisch. Ihre Lösung lautet:

$$V(x_1) = e^{a x_1}, \tag{XIII}$$

wo a eine Konstante bedeutet. Daraus folgt, wegen (XI), für das vierdimensionale Linienelement:

$$d s^2 = e^{2a} (d x_4^2 - d x_1^2) - d x_2^2 - d x_3^2, \tag{XIV}$$

oder in erster Annäherung — da in der allgemeinen Relativitätstheorie ein unendlich großes homogenes Gravitationsfeld nicht existieren kann[1]) — bekommen wir

$$g_{11} = g_{44} = 1 + 2 a x_1. \tag{XI'}$$

Bei der entsprechenden Wahl der Richtung der Koordinatenachsen und für kleine Entfernungen $x_1 = x$ (bzw. für kleine t) wird, mit Rücksicht auf (VI) und (VII), wenn wir $c = 1$ setzen und wenn wir $g = \gamma_0$ [2]) berücksichtigen:

$$a = \frac{\gamma_0}{2}. \tag{XV}$$

Somit sind wir zur Überzeugung gekommen, daß unsere Annahme (XI) richtig ist.

Wegen weiterer Einzelheiten verweise ich auf meine El. Gr. Th.

Zagreb (Jugoslavien), Anfang August 1922.

---

[1]) Vgl. z. B. § 6 meiner El. Gr. Th.

[2]) Dieses $g = \gamma_0$ darf man nicht mit $g = |g_{ik}|$ verwechseln.