INTORNO ALLA TEORIA GENERALE DELLE MATRICI DI RIEMANN E AD ALCUNE SUE APPLICAZIONI.

Memoria di **Gaetano Scorza** (Catania).

Adunanza del 27 agosto 1916.

La teoria delle funzioni abeliane (con che si intende alludere, nel tempo stesso, a tutto l'insieme delle quistioni analitiche che più o meno direttamente vi si riconnettono) e alcune delle più elevate teorie della geometria algebrica presentano analogie così frequenti e affinità tanto spiccate che, chiunque le esamini un pò da vicino, è condotto, quasi spontaneamente, a presumere, che esse debbano innestarsi tutte sopra una medesima teoria generale, e che in questo fatto debba ravvisarsi la spiegazione migliore dei vincoli numerosi e stretti che le collegano.

E poichè al fondo di ogni ricerca istituita su quegli argomenti sta sempre, in modo più o meno esplicito, una certa « tabella di periodi », la quale, come è noto, in nessun caso è una matrice qualsivoglia, vien fatto subito di pensare che appunto le proprietà di questa matrice debbano rispondere in quelle teorie a un ufficio essenziale.

Vero è che fino a qualche tempo addietro lo studio diretto delle tabelle in discorso era stato così poco approfondito che l'osservazione ora fatta, anche a ritenerla significativa, bisognava rassegnarsi a lasciarla cadere; ma in questi ultimi anni le cose sembrano mutate.

A traverso lavori, più o meno recenti, che verremo a mano mano ricordando, esse sono divenute ormai così numerose e hanno acquistato tanto rilievo, che mi è parso si imponesse, per ragioni teoriche e di fatto, la necessità di comporne una trattazione organica e ordinata, al tutto indipendente dalle varie interpretazioni concrete di cui esse sono suscettibili.

Questo appunto ho tentato di fare nella prima parte di questa Memoria, nella quale pongo la nozione di *matrice riemanniana* e inizio lo studio sistematico di quelle fra le sue proprietà che restano inalterate di fronte alla relazione di *isomorfismo* o, in particolare, di *equivalenza*.

La ragione intima del limite che così vien posto alla ricerca apparisce subito manifesta.

Una matrice riemanniana non è altra cosa, in sostanza, che una matrice la quale possa esser pensata come tabella di periodi primitivi per un corpo di funzioni abeliane, e, secondo le definizioni qui poste, il dire che due matrici riemanniane sono *isomorfe* val quanto affermare che ciascuna funzione abeliana del corpo relativo all'una, premessa, ove occorra, una sostituzione lineare omogenea sulle variabili, è algebricamente legata a funzioni del corpo relativo all'altra; e il dire che due matrici riemanniane sono *equivalenti* è quanto asserire che i corpi di funzioni abeliane ad esse relativi si possono portare a coincidere effettuando, al più, sulle funzioni di uno dei due un conveniente cambiamento lineare di variabili. E allora è chiaro che, dato il nostro scopo, le sole proprietà di una matrice riemanniana che interessi considerare sono quelle che non mutano quando ad essa venga sostituita una matrice equivalente o soltanto una matrice isomorfa.

*
* *

Dal punto di vista di questa Memoria i caratteri fondamentali di una matrice riemanniana che occorre tener presenti sono tre: il primo è la sua caratteristica, che qui, per ragioni evidenti di opportunità, vien detta il suo *genere,* gli altri due sono quelli che chiamo *indici di singolarità* e *di moltiplicabilità.*

Come è noto, perchè un quadro di numeri possa riguardarsi come una matrice riemanniana occorre e basta che esista una forma bilineare alternata a coefficienti (interi, o soltanto) razionali, in rapporto alla quale gli elementi della matrice soddisfacciano a due condizioni assegnate da Riemann e da Weierstrass. Di queste, la prima si traduce in un sistema di eguaglianze; la seconda in una diseguaglianza.

Ora si supponga di non imporre alla forma bilineare la restrizione di essere alternata e di lasciar cadere la seconda condizione, ma si tenga sempre ferma la prima; si giunge così alla nozione di ciò che dico una *forma di* Riemann della matrice.

Ebbene gli indici di moltiplicabilità e di singolarità della matrice sono semplicemente le dimensioni delle totalità lineari minime a cui appartengono *tutte* le sue forme di Riemann o, soltanto, tutte le sue forme di Riemann alternate.

Accanto a codesti caratteri riguardanti una sola matrice riemanniana ve n'è un altro relativo a una coppia di matrici riemanniane e che chiamo il loro *carattere simultaneo.*

Salvo una leggera differenza, esso è definito in maniera analoga alla precedente partendo da quelle che vengon dette *forme simultanee di* Riemann delle due matrici, e nel caso che le due matrici coincidano (o siano soltanto isomorfe) esso si riduce al loro comune indice di moltiplicabilità aumentato di 1.

*
* *

Il primo a riconoscere la necessità di considerare tutte le forme riemanniane alternate della tabella dei periodi per poter comporre una teoria completa e soddisfacente della trasformazione (in particolare, della moltiplicazione complessa) delle funzioni abeliane, e quindi, in sostanza, a introdurre la nozione di indice di singolarità è stato lo

HUMBERT [1]), che ha studiato a fondo il caso delle due variabili; e dei due significati geometrici che codesto indice assume, quando si trasporti nel campo delle superficie iperellittiche o delle curve algebriche, uno è stato messo in luce da BAGNERA e DE FRANCHIS [2]) e l'altro dal ROSATI [3]).

Ma per lo scopo a cui or ora si è alluso non basta limitarsi alle forme riemanniane alternate; occorre, in realtà, considerarle tutte. Lo stesso HUMBERT, infatti, sebbene non arrivi alla distinzione netta fra indice di singolarità e indice di moltiplicabilità, nel caso particolare che egli considera è costretto a parlare di « relazioni singolari » fra i periodi e di « altre relazioni ».

Qui vi è luogo, anzi, a un'osservazione importante.

La lacuna della teoria classica della moltiplicazione complessa, rilevata dallo HUMBERT, discende dal fatto che essa ha bisogno di presupporre per la tabella dei periodi l'esistenza, a meno di un fattore di proporzionalità razionale, di una sola forma riemanniana alternata; basta, pertanto, che ciò non sia, perchè essa risulti incompleta. Ora, per l'appunto, quando le variabili sono due, lo HUMBERT ha fatto vedere che non c'è moltiplicazione complessa se di quelle forme non ve n'è almeno due distinte, e quindi, in sostanza, per il caso in discorso, la teoria classica fa un'ipotesi che non può essere mai realizzata.

Come dimostrerò in un altro lavoro, l'importante teorema dello HUMBERT, ora ricordato, non vale per tutti i casi; per es. non vale per le funzioni abeliane a tre variabili, come, ed è notissimo, non vale per le funzioni ellittiche. Possono dunque esservi casi di moltiplicazione complessa che rispondano all'ipotesi della teoria classica: *ma allora,* eccettuato il caso delle funzioni ellittiche, *il tipo di moltiplicazione complessa che si incontra è di natura estremamente particolare;* nè questa conseguenza di quella ipotesi è stata mai rilevata.

Cosicchè, da qualunque lato si guardi, l'assetto logico di codesta teoria è tutt'altro che soddisfacente: essa, invero, o fa un'ipotesi non realizzabile, o non ne approfondisce le conseguenze. Gli è che a chiarir le cose e a metterle nella loro vera luce è appunto necessario, come abbiamo detto, distinguere nettamente tra indice di singolarità e indice di moltiplicabilità.

Il primo a imbattersi nella nozione di indice di moltiplicabilità, benchè in maniera al tutto diversa da quella qui seguita, è stato lo HURWITZ [4]), il quale, introducendo il *numero base* per le corrispondenze (algebriche) situate sopra una curva algebrica ha, in

1) G. HUMBERT, *Sur les fonctions abéliennes singulières* [Journal de Mathématiques pures et appliquées, 5^me série, t V (1899), pp. 233-350; e t. VI (1900), pp. 279-386].

2) G. BAGNERA e M. DE FRANCHIS, *Le nombre ρ de M.* PICARD *pour les surfaces hyperélliptiques et pour les surfaces irrégulières de genre zéro* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXX (2° semestre 1910), pp. 185-238].

3) C. ROSATI, loc. cit. 7) *b*) e *c*).

4) A. HURWITZ, *Über algebraische Correspondenzen und das verallgemeinerte Correspondenzprincip* [Mathematische Annalen, Bd. XXVIII (1886), pp. 561-585].

altri termini, introdotto l'indice di moltiplicabilità per le matrici riemanniane legate alle curve, una volta che la differenza dei due caratteri è semplicemente 1; e il SEVERI [5]), osservando che la teoria della base delle corrispondenze poteva essere estesa anche a curve algebriche distinte, si è imbattuto per il primo nella nozione di carattere simultaneo per matrici riemanniane legate a curve.

Si osservi, per altro, che se pure è facile trovar traccia di codesti tre caratteri in ricerche anteriori, qui per la prima volta essi vengono considerati in modo esplicito, simultaneo e generale e qui per la prima volta si dà tutta una serie di teoremi che li riguardi [6]).

*
* *

Per alcune questioni relative alle matrici riemanniane (per es., gran parte di quelle che rispondono alla teoria della moltiplicazione complessa) l'aspetto sotto cui occorre considerare le loro forme di RIEMANN è quello strettamente aritmetico; ma per altre (ad es., per talune considerazioni che ricorrono nello studio degli integrali abeliani riducibili) il far questo non è necessario, anzi è inopportuno, bastando considerarle sotto l'aspetto algebrico.

Dal primo punto di vista si presenta la necessità di fissare l'attenzione in modo particolare sulle forme di RIEMANN a coefficienti interi, e fra queste su quelle *primitive,* sui valori dei loro determinanti, sulle loro *basi minime,* ecc.; dal secondo [che, se non erro, è stato accentuato soltanto da poco, da lavori miei e del ROSATI [7])], una volta

---

[5]) F. SEVERI, *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e sopra certe classi di superficie* [Memorie della Reale Accademia delle Scienze di Torino, serie II, t. LIV (1903), pp. 1-49], n° 16.

[6]) Si veggano, in particolare, i teoremi generali che possono dedursi da queste ricerche intorno ai numeri base di HURWITZ e SEVERI, di cui finora erano noti soltanto i limiti superiori (HURWITZ, SEVERI) e i valori che il primo può assumere nel caso classico delle curve ellittiche e nel caso delle curve di genere 2, trattato a fondo dal ROSATI [loc. cit. [7]) *b*) e *c*)].

[7]) G. SCORZA, *a*) *Sulle funzioni iperellittiche singolari* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXIII (2° semestre 1914), pp. 566-572]; *b*) *Sugli integrali abeliani riducibili,* Note I e II [ibid., serie 5ª, vol. XXIV (1° semestre 1915), pp. 412-418; e pp. 645-654]; *c*) *Le varietà algebriche con indice di singolarità massimo,* Note I e II [ibid., serie 5ª, vol. XXIV (2° semestre 1915), pp. 279-284 e pp. 333-338]; *d*) *Sugli integrali abeliani riducibili* [ibid., serie 5ª, vol. XXIV (2° semestre 1915), pp. 393-400]; *e*) *Sulle varietà algebriche con sistemi regolari isolati di integrali riducibili* [ibid., serie 5ª, vol. XXIV (2° semestre 1915), pp. 445-453]; *f*) *Sulle varietà algebriche con infiniti sistemi regolari di integrali riducibili* [ibid., serie 5ª, vol. XXIV (2° semestre 1915), pp. 603-610]; *g*) *Sulle varietà algebriche con sistemi regolari di integrali riducibili* [ibid., serie 5ª, vol. XXV (1° semestre 1916), pp. 289-296]; *h*) *Il teorema fondamentale per le funzioni abeliane singolari* [Memorie di Matematica e di Fisica della Società Italiana delle Scienze, detta dei XL, serie 3ª, t. XIX (1916), pp. 139-183].

C. ROSATI, *a*) *Sugli integrali abeliani riducibili* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. L (1914-1915), pp. 685-694]; *b*) *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare fra i punti di una curva di genere due* [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol XXIV (2° semestre 1915), pp. 182-184]; *c*) *Sulle corrispondenze fra i punti di una curva algebrica e in particolare fra i punti di una curva di genere due* [Annali di Matematica pura ed applicata, serie 3ª, vol. XXV che l'algebra delle sostituzioni lineari equivale alla geometria proiettiva (ordinaria o iperspaziale), si affaccia spontanea l'idea di sostituire all'insieme delle forme di RIEMANN di una matrice un insieme di reciprocità o, in particolare, di sistemi nulli.

Di qua una rappresentazione geometrica delle matrici riemanniane mediante *imagini,* e l'introduzione di quelle che chiamo *reciprocità, omografie* o *sistemi nulli riemanniani* di codeste matrici. Con ciò oltre a guadagnare una visione limpida e netta dei problemi che si trattano, che è un vantaggio di ordine estetico e di ordine pratico non disprezzabile, si soddisfa anche all'esigenza teorica di non trattare con metodi aritmetici questioni che, in sostanza, sono di geometria proiettiva.

E in talune di queste il carattere proiettivo è così spiccato, e la convenienza di passare dal *discontinuo* al *continuo* è tanto manifesta, che ho creduto di non dovermi limitare alle sole reciprocità od omografie riemanniane, ma di introdurre quelle che chiamo semplicemente reciprocità od omografie di una matrice di RIEMANN; le quali ultime sono *tutti* gli elementi delle totalità lineari determinate dalle prime.

Questa osservazione mi si era presentata già da qualche tempo [8]) e ne avevo tratto partito fin dal settembre dell'anno scorso per risolvere alcune questioni che qui si trovano discusse per via diversa e più rapida [9]); ma poi, e per la constatazione del fatto che in quei casi conveniva meglio non valersene e perchè attratto da altre ricerche, avevo finito per lasciarla cadere.

Anche qui essa non è introdotta che tardi, per il desiderio di ordine, diremmo quasi *didattico,* di sfruttare prima, nel modo più possibilmente completo, i mezzi più elementari e più semplici; ma sulla sua fecondità non credo che sia ancora il caso di nutrir dubbi.

Per essa, infatti, il problema della determinazione di tutti i possibili tipi, ad es., di corpi di funzioni abeliane a p variabili indipendenti viene a dipendere, in ultima analisi, dalla determinazione degli spazi lineari di un S_{p^2-1} che da una determinata trasformazione cremoniana di punti in iperpiani, ivi stabilita, sono mutati in stelle di iperpiani!

Per ragioni di brevità e perchè voglio aspettare di aver fissata meglio la teoria in cui esso si inquadra — la teoria degli *pseudo-assi* di una matrice riemanniana — io non

(1915), pp. 1-32]; *d) Sulle corrispondenze plurivalenti fra i punti di una curva algebrica* [Atti della R. Accademia delle Scienze di Torino, vol. LI (1915-1916), pp. 991-1014].

[8]) SCORZA, loc. cit [7]) *b*), n° 59.

[9]) Di ciò è dato cenno al luogo citato in [8]). Si trattava della classificazione che qui è data al n° 56 (Parte I^a); della proposizione sulle varietà algebriche con integrali ellittici che qui si trova al n° 54 (Parte I^a) e della questione delle *lacune* per l'indice di singolarità. Particolarmente per quest'ultima l'antica via si rivelò disadatta; mi bastò passare dal caso del genere 3 a quello del genere 4, perchè essa si manifestasse, almeno a primo aspetto, impraticabile. Un'allusione a quell'antica via si trova anche nella prefazione della mia Nota: *Le varietà di* VERONESE *e le forme quadratiche definite* [Rendiconto della R. Accademia delle Scienze Fisiche e Matematiche di Napoli, serie 3^a, vol. XXI (1915), pp. 297-305].

mi fermo qui ad utilizzare il teorema, cui or ora è stato alluso, se non per alcune delle sue prime conseguenze; ma esso è certo suscettibile di approfondimenti più notevoli, e sembra che, almeno per i più bassi valori del genere, possa essere applicato con successo alla classificazione delle matrici riemanniane.

È quanto in parte mi propongo di fare in un prossimo lavoro che sarà dedicato al caso del genere 3.

*
* *

Poichè i risultati della prima parte di questa Memoria, all'infuori di quelli del § 12, o sono stati già annunziati in una recente Nota preventiva accolta nei *Rendiconti dei Lincei* [10]), o sono già apparsi altrove per disteso e qui sono soltanto rimaneggiati e riassunti [11]), non credo necessario diffondermi minutamente su di essi; basti aver chiarito lo scopo che si propongono e lo spirito che li informa. Mi permetterò soltanto di richiamare l'attenzione del lettore sui §§ 6, 7, ..., 11 che contengono lo studio delle matrici *impure* (cioè, ad es., delle classi di integrali abeliani con sistemi regolari di integrali riducibili) e sul già nominato § 12; in quelli, tutti i teoremi già noti di PICARD, POINCARÉ, BOLZA, DE FRANCHIS e SEVERI [12]) vengono inquadrati con quelli nuovi in una teoria che la semplicità e l'armonia delle linee generali rendono degna, mi sembra, di considerazione; e in questo si fa vedere come le idee direttive dello studio delle matrici impure possano essere utilizzate anche per le matrici *pure*, e quindi esso fornisce teoremi validi in senso assolutamente generale.

---

[10]) SCORZA, loc. cit. [7]) *g*).

[11]) SCORZA, loc. cit. [7]), *b*), *c*), *d*), *e*), *f*).

[12]) É. PICARD, *a*) *Sur l'intégration algébrique d'une équation analogue à l'équation d'*EULER [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. XCII (1er semestre 1881), pp. 506-509]; *b*) *Sur quelques exemples de réduction d'intégrales abéliennes aux intégrales elliptiques* [ibid., t. XCIII (2^{e} semestre 1881), pp. 1126-1128]; *c*) *Sur la réduction du nombre des périodes des intégrales abéliennes, et, en particulier, dans le cas des courbes du second genre* [Bulletin de la Société mathématique de France, t. XI (1883), pag. 25-53].

H. POINCARÉ, *a*) *Sur la réduction des intégrales abéliennes* [Comptes rendus hebdomadaires des séances de l'Académie des Sciences (Paris), t. XCIX (2^{e} semestre 1884), pp. 853-855]; *b*) *Sur la réduction des intégrales abéliennes* [ibid., t. CII (1er semestre 1886), pp. 915-916]; *c*) *Sur les fonctions abéliennes* [American Journal of Mathematics, t. VIII (1886), pp. 289-342].

O. BOLZA, *Über die Reduction hyperelliptischer Integrale erster Ordnung und erster Gattung auf elliptische, insbesondere über die Reduction durch eine Transformation vierten Grades*, (Inaug.-Diss., Göttingen 1886). Il risultato cui si allude nel testo si trova anche in A. KRAZER, *Lehrbuch der Thetafunktionen* (Teubner, Leipzig, 1903), pag. 489.

M. DE FRANCHIS, *Le varietà algebriche con infiniti integrali ellittici* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXXVIII (2^{o} semestre 1914), pag. 192].

F. SEVERI, *Sugli integrali abeliani riducibili*, Note I e II [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5^{a}, vol. XXIII (1^{o} semestre 1914), pp. 581-587 e pp. 641-651].

* * *

La seconda parte della Memoria applica i concetti e le proposizioni della prima allo studio del gruppo delle trasformazioni birazionali di una superficie iperellittica [13]) in sè.

Quest'argomento ha già formato oggetto degli ultimi capitoli di una delle Memorie dianzi citate dello HUMBERT; ma era necessario tornare a considerarlo *ex novo,* perchè la trattazione dello HUMBERT si limita notoriamente a studiare soltanto quelle superficie iperellittiche che oggi si dicono *jacobiane* o che rappresentano le coppie di punti di due curve ellittiche; e del resto, anche in questo campo più ristretto essa è frammentaria, lacunosa e inadatta alle applicazioni [14]). Dei numerosi aspetti che possono esser presentati dal gruppo delle trasformazioni birazionali in sè di una di quelle superficie, che sia singolare, tre soltanto, insomma, sono stati studiati a fondo dallo HUMBERT.

Comunque sia di ciò, l'aver ripreso quel problema non è stato inutile; ne è venuto fuori uno studio che mentre illustra e pone in rilievo la fecondità e l'importanza della teoria generale, presenta di per sè stesso un interesse non piccolo.

Distinte le superficie iperellittiche in nove tipi diversi, secondo una classificazione che, in sostanza, è dovuta al ROSATI [15]), assegno tipo per tipo le proprietà fondamentali del relativo gruppo di trasformazioni.

In ordine a teoremi generali esso consta sempre di schiere ∞^2 di trasformazioni; ma il numero di codeste schiere è finito solo per quattro dei nove tipi e allora esso non può essere che:

$$2, \quad 4, \quad 6, \quad 8, \quad 12 \quad \text{o} \quad 24.$$

Negli altri cinque casi è infinito e la struttura del loro insieme è, a volta a volta, minutamente studiata.

Notevole in tutto questo il rilievo che vengono ad assumere alcune superficie iper-

---

[13]) Chiamo semplicemente *superficie iperellittica* ciò che, secondo una nomenclatura introdotta da ENRIQUES e SEVERI, dovrebbe dirsi superficie iperellittica *di rango* 1. Faccio questo per brevità di discorso, ma mi sembra del resto che non convenga chiamare superficie iperellittica *ogni* superficie rappresentabile parametricamente per funzioni abeliane a due variabili, una volta che nessuno chiama curva *ellittica qualsiasi* curva rappresentabile parametricamente per funzioni ellittiche.

E lo stesso dicasi per quelle che chiamo semplicemente *varietà abeliane,* anzi che varietà abeliane di rango 1.

[14]) Si pensi, ad es., che nessun aiuto essenziale hanno potuto trarre da questa parte delle Memorie dello HUMBERT, ENRIQUES e SEVERI, BAGNERA e DE FRANCHIS nei loro classici lavori sulle superficie rappresentabili parametricamente per funzioni abeliane a due argomenti; mentre se la trattazione delle HUMBERT fosse stata completa essa avrebbe di molto agevolato le loro ricerche.

[15]) ROSATI, loc. cit. [7]) *b*) e *c*). La classificazione del ROSATI riguarda veramente le curve di genere 2, cioè le superficie jacobiane; ma poichè è fatta in base a criteri invarianti rispetto alla relazione di isomorfismo essa ha valore per tutte le superficie iperellittiche.

ellittiche particolari, e precisamente, quelle che chiamo di JACOBI-HUMBERT e JACOBI-BOLZA [16]), cioè le superficie jacobiane collegate ai radicali quadratici

$$\sqrt{x^5+1}, \qquad \sqrt{x(x^4+1)};$$

quelle che chiamo superficie iperellittiche *armoniche* o *equianarmoniche,* cioè le varietà delle coppie di punti di due curve ellittiche entrambe armoniche o entrambe equianarmoniche, e infine quella che rappresenta le coppie di punti di due curve ellittiche di cui una è armonica e l'altra equianarmonica.

In particolare quest'ultima è appunto *la sola superficie iperellittica che sia dotata di un numero finito di schiere* ∞^2 *di trasformazioni e che ne possegga precisamente* 24.

Notevole anche il fatto che qui per la prima volta viene determinata, caso per caso, in modo preciso la natura aritmetica dei moltiplicatori di una sostituzione lineare sui parametri atta a determinare una trasformazione birazionale sopra una superficie iperellittica di cui sia assegnata la rappresentazione parametrica; con che viene ad aversi per le varietà abeliane a due dimensioni un insieme di risultati che è l'analogo per questa teoria di quello che nella teoria delle curve ellittiche è immediata conseguenza di un classico teorema di ABEL.

*
* *

Un'ultima avvertenza.

Come è stato detto, gli studi della prima parte si riferiscono tutti alle matrici riemanniane astrattamente considerate; quindi essi possono ricevere, in generale [17]), altrettante interpretazioni concrete per quante sono le teorie analitiche e geometriche cui più sopra è stato alluso. Per non andar troppo in lungo, nel testo, io non mi fermo affatto su ciò; solo vi dedico qua e là qualche nota a piè di pagina, quando mi è parso che la chiarezza dell'esposizione o l'interesse delle cose lo richiedessero [18]). E così dedico pure qualcuna di queste note, nella seconda parte, al raffronto delle mie considerazioni con talune di quelle dello HUMBERT; dal che riesce sviscerato e illuminato il senso intimo di quest'ultime.

---

[16]) Veramente le superficie jacobiane con trasformazioni birazionali in sè periodiche e che mutino in sè il sistema delle funzioni Θ sono state enumerate tutte dal BOLZA {O. BOLZA, *On binary sextics with linear transformations into themselves* [American Journal of Mathematics, vol. 10 (1888), pp. 47-70]}; ma mi è parso, legando a una di esse il nome di HUMBERT di rendere più spiccata la distinzione e nel tempo stesso di rendere un doveroso omaggio a chi per il primo ne ha studiato il gruppo completo delle trasformazioni birazionali in sè.

[17]) Diciamo «in generale» perchè, ad es., per ragioni ben note, i teoremi di esistenza non possono essere senz'altro applicati al caso delle curve.

[18]) La *traduzione* dei teoremi astratti in teoremi riguardanti le curve algebriche esige che si tenga presente la bella interpretazione geometrica della teoria Hurwitziana delle corrispondenze dovuta al ROSATI [loc. cit. [7]), *b*) e *c*)]; e quella in teoremi relativi alle varietà algebriche con sistemi regolari di integrali riducibili si compie in base a una osservazione che si trova in una delle mie Note già ricordate [loc. cit. [7]), *b*), Nota I, n° 5 e 6].

PARTE PRIMA.

LE MATRICI DI RIEMANN.

---

§ 1.

Definizioni preliminari.

1. Una matrice, a p righe e q colonne,

$$\mu' \equiv |\mu'_{j,1}, \mu'_{j,2}, \ldots, \mu'_{j,q}| \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

si dirà dedotta mediante un'*operazione* A, o mediante un'*operazione* B dalla matrice dello stesso tipo

$$\mu \equiv |\mu_{j,1}, \mu_{j,2}, \ldots, \mu_{j,q}|,$$

secondo che si ha

$$\mu'_{j,r} = \sum_{l}^{1\ldots p} \lambda_{j,l}\mu_{l,r} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p;\ r = 1, 2, \ldots, q),$$

con

$$|\lambda_{j,l}| \neq 0;$$

oppure

$$\mu'_{j,r} = \sum_{s}^{1\ldots q} h_{r,s}\mu_{j,s},$$

le $h_{r,s}$ essendo numeri razionali, ed essendo inoltre

$$|h_{r,s}| \neq 0.$$

Così, ad es., il cambiare in una matrice l'ordine delle righe o il moltiplicare gli elementi di una stessa riga per uno stesso numero non nullo equivale ad applicare ad essa un'operazione A; e il cambiare l'ordine delle colonne o il moltiplicare gli elementi di una colonna per uno stesso numero razionale non nullo equivale ad applicare un'operazione B.

Se la matrice μ' è dedotta dalla matrice μ mediante un'operazione A o B, anche μ è deducibile da μ' con un'operazione A o B; e l'applicazione successiva a una matrice di due o più operazioni A (o B) equivale all'applicazione di una sola operazione A (o B) *prodotto* di quelle.

Cosicchè, se diciamo *isomorfe* due matrici quando una sia deducibile dall'altra mediante operazioni A e B, la relazione di isomorfismo così stabilita risulta riflessiva, simmetrica e transitiva [19]).

2. Un'operazione B si dirà *intera,* se per essa le $h_{r,s}$ sono numeri interi; e se è intera si dirà poi *unimodulare* o *modulare,* secondo che per essa si ha:

$$|h_{r,s}| = \pm 1 \qquad \text{oppure} \qquad |h_{r,s}| = 1.$$

Due matrici si diranno *equivalenti* quando una può esser dedotta dall'altra ricorrendo soltanto ad operazioni A e ad operazioni B unimodulari.

Matrici equivalenti sono anche isomorfe, ma non viceversa.

La relazione di equivalenza è poi, come quella di isomorfismo, riflessiva, simmetrica e transitiva.

3. Siano ora date due matrici μ e μ', aventi rispettivamente p e p' righe e q e q' colonne:

$$\mu \equiv |\mu_{j,1}, \mu_{j,2}, \ldots, \mu_{j,q}|, \qquad \mu' \equiv |\mu'_{l,1}, \mu'_{l,2}, \ldots, \mu'_{l,q'}| \qquad (j = 1, 2, \ldots, p;\ l = 1, 2, \ldots, p').$$

Allora una forma bilineare *a coefficienti razionali*

$$\sum_r^{1\ldots q} \sum_s^{1\ldots q'} a_{r,s} x_r y_s$$

nelle due serie di variabili

$$x_1, \quad x_2, \ldots, x_q \qquad \text{e} \qquad y_1, \quad y_2, \ldots, y_{q'}$$

si dirà una loro *forma simultanea di* RIEMANN, se si ha, per $j = 1, 2, \ldots, p$ ed $l = 1, 2, \ldots, p'$

$$\sum_r^{1\ldots q} \sum_s^{1\ldots q'} a_{r,s} \mu_{j,r} \mu'_{l,s} = 0.$$

Combinando linearmente ed omogeneamente secondo numeri razionali forme simultanee di RIEMANN di due matrici, si ottengono ancora forme sì fatte; in base a ciò, diremo che λ è il *carattere simultaneo* di due matrici, se λ è il massimo numero di forme linearmente indipendenti che possono esser scelte tra le loro forme simultanee di RIEMANN.

Se $\lambda > 0$, le due matrici si diranno *vincolate;* se $\lambda = 0$, cioè se le due matrici non ammettono alcuna forma simultanea riemanniana non identicamente nulla, le matrici si diranno *non vincolate.*

4. La definizione precedente non esclude che le matrici μ e μ' possano coincidere; ove questo avvenga e ove non occorra considerarle come distinte, ogni loro forma simultanea di RIEMANN si dirà una *forma di* RIEMANN di una qualunque di esse.

5. Sia

$$\omega \equiv |\omega_{j,1}, \omega_{j,2}, \ldots, \omega_{j,2p}| \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

---

[19]) Restringiamo dunque ulteriormente, per ragioni di opportunità manifestatesi con lo sviluppo della teoria, il significato di questa parola introdotta per la prima volta (e soltanto per le matrici riemanniane) nella nostra Nota citata in [7]) *f*), e poi ristretto già nella Nota citata in [7]) *g*).

una matrice a p righe e $2p$ colonne, e pongasi

$$\Omega_r^{(\lambda)} = \lambda_1 \omega_{1,r} + \lambda_2 \omega_{2,r} + \cdots + \lambda_p \omega_{p,r}$$

e

$$\Omega_r^{(\lambda)} = \xi_r^{(\lambda)} + i \eta_r^{(\lambda)} \qquad (i = \sqrt{-1},\ \xi_r \text{ e } \eta_r \text{ reali}),$$

le λ essendo numeri reali o complessi, non tutti nulli, ma del resto qualunque.

Allora si dirà che ω è una *matrice riemanniana* o di RIEMANN di genere p, se esiste per essa una forma di RIEMANN *alternata*

$$(1) \qquad \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s} x_r y_s \qquad (c_{r,s} + c_{s,r} = 0),$$

sì che si abbia

$$(2) \qquad R^{(\lambda)} \equiv \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s} \xi_r^{(\lambda)} \eta_s^{(\lambda)} \neq 0$$

per ognuno dei sistemi di valori non tutti nulli delle λ.

Notisi che, per definizione, l'intero p è $\geqq 1$.

La (2) esclude che la forma (1) possa essere identicamente nulla, anzi porta, come vedremo, che il suo determinante $|c_{r,s}|$ è diverso da zero; ed essa esclude pure, che essendo non tutte nulle le λ, possano esser tutte nulle, per $r = 1, 2, \ldots, 2p$, le $\Omega_r^{(\lambda)}$ o le $\xi_r^{(\lambda)}$ o le $\eta_r^{(\lambda)}$.

Da quest'ultima osservazione segue che:

La caratteristica di una matrice riemanniana eguaglia il suo genere;

e che:

Gli elementi di una qualunque combinazione lineare omogenea secondo numeri non tutti nulli delle righe di una matrice riemanniana non possono essere nè tutti reali, nè tutti imaginari puri; cosicchè, in particolare, non possono essere nemmeno tutti nulli.

Se la matrice ω di cui sopra si discorre, è una matrice riemanniana, una sua forma di RIEMANN alternata (1), che soddisfaccia rispetto ad essa alla condizione (2), si dirà una sua forma riemanniana (alternata) *principale*.

A questo proposito si osservi che dall'essere $R^{(\lambda)} \neq 0$ per ogni sistema di valori non tutti nulli delle λ, segue che per questi stessi sistemi di valori è sempre $R^{(\lambda)} > 0$ o sempre $R^{(\lambda)} < 0$; anzi, di queste due alternative si può far verificare quella che si vuole, cambiando, ove occorra, i segni di tutte le $c_{r,s}$.

6. Il carattere simultaneo λ di una matrice riemanniana e sè stessa è, per definizione, non inferiore ad 1. Ebbene, posto

$$\lambda = h + 1$$

per modo che sarà $h \geqq 0$, diremo che h è *l'indice di moltiplicabilità* di ω.

Invece diremo che k è *l'indice di singolarità* della matrice riemanniana ω, se $k+1$ è il massimo numero delle sue forme riemanniane alternate linearmente indipendenti.

Come è chiaro, si ha in ogni caso

$$0 \leqq k \leqq h.$$

Una matrice riemanniana si dice poi *singolare* o *non singolare* secondo che per essa si ha $k > 0$ oppure $k = 0$.

7. Se le due matrici μ' e ν' sono rispettivamente isomorfe alle due matrici μ e ν, il carattere simultaneo di μ' e ν' eguaglia quello di μ e ν; e se la matrice ω' è isomorfa alla matrice riemanniana ω, anche ω' è riemanniana ed ha per indici di singolarità e moltiplicabilità quelli di ω. In altri termini:

Le nozioni di carattere simultaneo di due matrici, di matrice riemanniana e di indici di singolarità e moltiplicabilità di una tal matrice sono invarianti di fronte alla relazione di isomorfismo (in particolare, di equivalenza);

nella quale osservazione è implicita naturalmente l'altra, che lo stesso vale per la proprietà di una forma riemanniana alternata di una matrice di RIEMANN espressa col dire che essa è una forma principale.

A questo proposito è opportuno, poi, osservare che se le matrici μ' e ν' provengono da μ e ν mediante sole operazioni A, le forme riemanniane simultanee di μ' e ν' coincidono con quelle di μ e ν; e se μ e μ' sono, insieme, riemanniane, lo stesso accade per le loro forme di RIEMANN principali [20]).

---

[20]) Ad ogni varietà algebrica dotata di integrali semplici di 1ª specie (curva algebrica non razionale, o varietà algebrica superficialmente irregolare), ad ogni corpo di funzioni abeliane, ad ogni sistema *regolare* [denominazione introdotta dal SEVERI, loc. cit. [12])] di integrali abeliani riducibili è legata una matrice riemanniana o meglio una classe di matrici riemanniane equivalenti; quindi la maggior parte della nomenclatura introdotta per le matrici riemanniane può essere opportunamente estesa a ciascuno di quegli enti. In particolare si avrà per ciascuno di essi un indice di singolarità e un indice di moltiplicabilità.

A questo proposito giova fissare fin da ora le seguenti osservazioni, sebbene alcune di esse discendano da considerazioni che saranno fatte soltanto più tardi:

1) *Una funzione abeliana è o non è a moltiplicazione complessa, secondo che il suo indice di moltiplicabilità* (donde la denominazione) *è positivo o nullo;*

2) *Il numero base delle corrispondenze algebriche intercedenti fra due curve algebriche non razionali (distinte o no) eguaglia il loro carattere simultaneo;* quindi:

3) *Le corrispondenze algebriche intercedenti fra curve algebriche non razionali, distinte e non vincolate sono tutte a valenza zero;*

4) *L'indice di singolarità di una curva algebrica non razionale, ove sia aumentato di 1, dà il numero base delle corrispondenze simmetriche appartenenti alla curva;*

5) *Se due varietà abeliane appartengono a tabelle di periodi isomorfe ognuna delle due è birazionalmente identica a una involuzione segnata sull'altra. E se le tabelle sono equivalenti, le varietà sono addirittura birazionalmente identiche;*

6) *Condizione necessaria e sufficiente perchè due curve di genere $p > 0$ siano birazionalmente identiche, è che siano equivalenti le tabelle dei periodi di due loro qualunque sistemi di p integrali di 1ª specie linearmente indipendenti*

Notisi espressamente che secondo la nomenclatura adottata una curva algebrica (non razionale) possiede o no corrispondenze prive di valenza secondo che è positivo o nullo il suo indice di moltiplicabilità; mentre è *singolare* solo quando possegga corrispondenze *simmetriche* prive di valenza.

Notisi ancora che il teorema (6) discende subito da una bella proposizione del compianto

8. Due matrici si diranno *coniugate* se l'una si ottiene dall'altra cambiando ogni elemento di questa nel corrispondente numero complesso coniugato.

Se due matrici hanno per carattere simultaneo λ, λ è pure il carattere simultaneo delle matrici ad esse rispettivamente coniugate; e le forme riemanniane simultanee di quelle coincidono con le forme analoghe di queste.

Se due matrici sono coniugate e una di esse è una matrice riemanniana, tale è anche l'altra e le forme riemanniane principali dell'una sono tali anche per l'altra.

A proposito di quest'ultima asserzione si badi che, se si considera una determinata forma riemanniana principale comune alle due matrici e si costruiscono le due espressioni $R^{(\lambda)}$ corrispondenti nel senso del n° 5 alla forma e alle due matrici, queste due espressioni $R^{(\lambda)}$ risultano entrambe di segno costante; ma se, fissati i segni dei coefficienti di una forma, l'una è sempre positiva, l'altra è sempre negativa.

§ 2.

Imagini, reciprocità ed omografie di RIEMANN di una matrice riemanniana.

9. Le definizioni del paragrafo precedente e le proprietà che saranno esaminate in questo e nei successivi guadagnano di chiarezza e di rilievo, ove siano accompagnate da una rappresentazione geometrica, che si è rivelata utile e feconda in questo genere di studi.

Consideriamo una matrice riemanniana ω di genere p.

Poichè gli elementi di una sua riga non possono essere mai tutti nulli (n° 5), la loro successione potrà riguardarsi come quella delle coordinate proiettive omogenee di un punto in uno spazio lineare Σ a $2p - 1$ dimensioni. In tal modo ad ogni riga della matrice viene a corrispondere un punto di Σ.

Lo spazio τ di Σ che congiunge codesti punti si dirà *l'imagine* di ω nello *spazio rappresentativo* Σ e rispetto al sistema di coordinate proiettive omogenee ivi fissato; o, brevemente, quando non vi sia possibilità di equivoci, l'imagine di ω.

Valendosi del sistema di coordinate fissato in Σ si possono distinguere i suoi punti, le sue rette, ... in *reali* o *imaginari, razionali* o *irrazionali;* allora, in base alle osservazioni del n° 5 possiamo asserire che:

a) Lo spazio τ è della dimensione $p - 1$ e non contiene alcun punto reale.

Ciò porta che τ è indipendente dallo spazio imaginario coniugato $\bar{\tau}$; e quindi:

b) Lo spazio τ (o $\bar{\tau}$) non è neppure contenuto in alcun iperpiano reale.

Di qua segue, in particolare, che:

c) Gli elementi di una colonna di una matrice riemanniana non possono essere mai tutti nulli.

Dr. R. TORELLI. Veggasi R. TORELLI, *Sulle varietà di* JACOBI, Nota I [Rendiconti della R. Accademia dei Lincei, serie 5ª, vol. XXII, 2° semestre 1913, pp. 98-103], n° 7.

Lo spazio $\overline{\tau}$, che è l'imagine della matrice $\overline{\omega}$ coniugata ad ω, si dirà *l'imagine coniugata* di ω (cosicchè τ è l'imagine coniugata di $\overline{\omega}$); e quando non occorra far distinzioni, τ e $\overline{\tau}$ si diranno, insieme, le *imagini* di ω.

Notisi che, fissato lo spazio rappresentativo e in esso il sistema di coordinate:

Le matrici di RIEMANN *che hanno la stessa imagine di una data sono tutte e sole quelle che si deducono da essa mediante operazioni A. Invece le imagini delle matrici riemanniane provenienti da una data mediante operazioni B sono tutti e soli gli spazi che si deducono dall'imagine di questa mediante le trasformazioni omografiche razionali* [21]) *e non degeneri dello spazio ambiente.*

10. Si eguagli a zero una forma di RIEMANN di una matrice riemanniana e si interpretino le sue due serie di variabili come coordinate di due punti nello spazio rappresentativo della matrice. Si ottiene un'equazione che rappresenta in questo spazio una reciprocità *razionale* rispetto a cui sono coniugati a due a due tutti i punti di ciascuna imagine della matrice.

Per esprimere questo fatto diremo che la reciprocità muta in sè ciascuna delle due imagini (concepita, una volta, come luogo di punti e, un'altra, come inviluppo di iperpiani), sebbene ciò non sia del tutto esatto se non quando la reciprocità sia non degenere.

A questo proposito non sarà inutile osservare che, per quanto risulterà tra poco, questa condizione è certo soddisfatta se la forma di RIEMANN da cui si è partiti è una forma di RIEMANN generica della matrice.

La considerazione fatta è invertibile, e quindi:

Se gli indici di moltiplicabilità e singolarità di una matrice riemanniana sono h e k, nello spazio rappresentativo della matrice esistono, rispettivamente, $h+1$ e $k+1$, e non più, reciprocità razionali e sistemi nulli razionali, linearmente indipendenti, che trasformano in sè ciascuna delle sue due imagini [22]).

Di qua segue, se p è il genere della matrice

$$0 \leqq k \leqq p^2 - 1,$$

e

$$0 \leqq k \leqq h \leqq 2p^2 - 1.$$

---

[21]) Il significato di questa frase e delle analoghe che seguono più tardi è chiaro per sè ed è noto. Veggansi del resto i lavori miei e del ROSATI cit. in [7]).

[22]) La differenza $h-k$ dei due caratteri h e k di una matrice riemanniana è il numero delle sue reciprocità di RIEMANN linearmente indipendenti che si riducono a polarità. Per convincersene basta osservare che se in un S_r si associa ad ogni reciprocità la propria inversa, concepite entrambe come connessi di punti, resta stabilita nella totalità lineare delle reciprocità di S_r una omografia involutoria i cui elementi uniti sono le polarità e i sistemi nulli; e poi tener conto del fatto che l'inversa di una reciprocità di RIEMANN di una matrice riemanniana è ancora una sua reciprocità di RIEMANN.

Le quadriche fondamentali di quelle polarità sono le quadriche degli elementi incidenti delle reciprocità di RIEMANN della matrice che non si riducono a sistemi nulli.

Notevole è il significato geometrico della differenza $h-k$ per il caso di una curva algebrica. Esso risulta dalle ricerche del ROSATI ed è espresso da ciò che per una curva la differenza $h-k$ è il numero base delle corrispondenze che il ROSATI chiama *emisimmetriche.*

Notisi che per $p = 1$ (nel qual caso la matrice si dirà *ellittica*) risulta $k = 0$ e $0 \leqq h \leqq 1$; e si ha $h = 0$ od $h = 1$, secondo che nello spazio rappresentativo, che è adesso una retta, non esiste o esiste una proiettività razionale non identica avente per punti uniti i punti imagini della matrice. Cosicchè:

Una matrice riemanniana ellittica è certo non singolare, ed ha l'indice di moltiplicabilità 0 *o* 1, *secondo che il rapporto dei suoi elementi (necessariamente imaginario) è o no radice di un'equazione quadratica a coefficienti interi.*

Le reciprocità razionali e i sistemi nulli (o, se $p > 1$, i relativi complessi lineari) razionali qui considerati si diranno *reciprocità, sistemi nulli (complessi lineari) di* RIEMANN *della matrice.* Essi sono individuati, appena siano fissate le imagini della matrice.

Un sistema nullo (e, se $p > 1$, il relativo complesso lineare) di RIEMANN della matrice si dirà poi *principale,* se tale è la corrispondente forma di RIEMANN da cui proviene.

11. In un S_{2p-1} si considerino due S_{p-1} indipendenti α e α' e si scriva l'equazione della più generale reciprocità rispetto a cui ciascun punto di α (di α') è coniugato ad ogni punto di α (di α'), assumendo α e α' come due spazi opposti della piramide fondamentale delle coordinate.

Allora si vede subito che se la reciprocità concepita come operazione sui punti dello S_{2p-1} è singolare, lo spazio luogo dei suoi punti singolari, o, come si dice, il suo *primo asse* o giace per intero in α o α', o congiunge uno spazio contenuto in α con uno spazio contenuto in α'.

E lo stesso può dirsi per il suo *secondo asse,* cioè per lo spazio (avente la stessa dimensione del primo asse) secondo cui si intersecano gli iperpiani omologhi nella reciprocità ai punti non singolari dello spazio ambiente.

Di qua si trae che, se una reciprocità *reale* di un S_{2p-1} muta in sè due S_{p-1} imaginari coniugati di specie p, τ e $\bar{\tau}$, la reciprocità non può essere degenere se non a patto di avere per assi degli S_{2q-1} *reali* (con $0 < q \leqq p$) appoggiati a τ e $\bar{\tau}$ secondo S_{q-1} imaginari coniugati; e quindi essa non può esser degenere se non di specie pari.

Questa osservazione, congiunta all'altra che una reciprocità razionale degenere ha per assi spazi razionali, dà luogo al seguente teorema:

Se una reciprocità di RIEMANN *di una matrice riemanniana di genere p è degenere, essa è di specie necessariamente pari e ciascuno dei suoi due assi è un S_{2q-1} razionale appoggiato secondo S_{q-1} imaginari coniugati alle due imagini della matrice.*

Notisi che se la reciprocità in discorso non è totalmente indeterminata deve essere $0 < q < p$ e quindi $p > 1$; e che se essa è un sistema nullo i suoi due assi coincidono.

12. Si riprendano per un momento le notazioni del n° 5, supponendo che la matrice ω di cui ivi si tratta sia riemanniana e del genere $p > 1$.

Allora le $\Omega_r^{(\lambda)}$ ivi considerate, per $r = 1, 2, \dots, 2p$, non sono altra cosa che le coordinate di un punto dell'imagine di ω, e le $\xi_r^{(\lambda)}$ e le $\eta_r^{(\lambda)}$ sono le coordinate di due punti reali distinti della retta reale che congiunge quel punto con l'imaginario coniugato, appartenente all'imagine coniugata di ω. Ma allora la diseguaglianza (2) esprime che il complesso lineare riemanniano principale della matrice, rappresentato dall'equazione

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\, x_r\, y_s = 0$$

non contiene alcuna retta reale appoggiata alle due imagini di ω.

Di qua segue:

Condizione necessaria e sufficiente, perchè un complesso lineare di RIEMANN *di una matrice riemanniana di genere $p > 1$ sia principale, è che nessuna delle rette reali appoggiate alle due imagini appartenga ad esso* [23]).

Ora un complesso lineare singolare contiene tutte le rette appoggiate (o, in particolare appartenenti) al suo asse, dunque, per l'osservazione ora fatta e per quel che è stato detto nel n° precedente:

Un complesso lineare di RIEMANN *principale di una matrice riemanniana di genere $p > 1$ non è certo singolare.*

Abbiamo eccettuato il caso $p = 1$, perchè allora non può parlarsi di complessi lineari di RIEMANN, ma anche per $p = 1$ vale che:

Un sistema nullo riemanniano principale di una matrice di RIEMANN *è certo non singolare.*

Segue, com'era stato preannunziato (n° 10), che:

Il sistema nullo riemanniano generico e, a fortiori, la reciprocità riemanniana generica di una matrice di RIEMANN *è non singolare.*

13. Due reciprocità di RIEMANN ρ_1 e ρ_2 di una matrice riemanniana, concepite come operazioni sui punti dello spazio rappresentativo, nell'ipotesi che ρ_2 non sia degenere, dànno luogo col loro prodotto $\rho_1\rho_2^{-1}$ a un'omografia razionale che porta ciascun punto dell'imagine (o dell'imagine coniugata) della matrice in un punto (indeterminato, o in un punto) dell'imagine stessa; o, come anche diremo, sebbene ciò sia esatto solo nel caso che non si tratti di un'omografia degenere, che muta in sè l'imagine e l'imagine coniugata della matrice.

Viceversa, una tale omografia razionale è sempre ottenibile nel modo ora considerato da due convenienti reciprocità riemanniane della matrice.

E infatti sia α l'omografia in discorso e ρ_2 una reciprocità non degenere della matrice.

Posto

$$\alpha\rho_2 = \rho_1,$$

---

[23]) Questa utile osservazione è dovuta sostanzialmente al ROSATI [loc. cit. [7]), *c*) n° 8, nota a piè di pagina]. Veggasi a questo proposito l'abile uso che il ROSATI stesso ne fa nel n° 15 della sua bella Nota citata in [7]), *d*).

anche ρ_1, per l'ipotesi fatta su α, è una reciprocità di RIEMANN della matrice; ma si ha

$$\alpha = \rho_1 \rho_2^{-1},$$

dunque α è del tipo voluto.

Un'omografia razionale come α si dirà un'*omografia di* RIEMANN della matrice considerata; e, per quanto or ora è stato detto, è chiaro che le omografie di RIEMANN di una matrice riemanniana si ottengono tutte moltiplicando a destra le sue reciprocità di RIEMANN per l'inversa di una di queste fissa e non degenere.

Ma allora:

Dire che l'indice di moltiplicabilità di una matrice riemanniana è h, equivale a dire che esistono $h+1$ omografie razionali linearmente indipendenti, e non più, dello spazio rappresentativo che mutano in sè ciascuna imagine della matrice.

Il *gruppo* (contenente l'identità e le inverse delle sue operazioni generiche) costituito dalle omografie di RIEMANN di una matrice riemanniana si dirà il suo *gruppo di moltiplicabilità.* Se non si riduce a un gruppo identico (cioè se $h > 0$), esso è senz'altro un gruppo infinito discontinuo.

Naturalmente il gruppo di moltiplicabilità di una matrice riemanniana non è fissato se non quando ne siano fissate le imagini.

Notisi che, per l'osservazione che chiude il n° 12, *l'omografia riemanniana generica di una matrice di* RIEMANN *è non degenere.*

14. Ragionando come al n° 10, oppure profittando delle osservazioni del n° precedente, si vede subito che:

Se un'omografia di RIEMANN *di una matrice riemanniana di genere p è singolare, essa è di specie necessariamente pari; inoltre il suo primo asse, cioè il luogo dei suoi punti singolari è un S_{2q-1} razionale, appoggiato secondo S_{q-1} (imaginari coniugati) alle imagini della matrice; e il suo secondo asse, cioè il luogo dei punti in cui essa porta i punti dello spazio ambiente che non sono singolari per essa è un $S_{2(p-q)-1}$ razionale, appoggiato secondo S_{p-q-1} (imaginari coniugati) alle imagini stesse* [24]).

Naturalmente, se l'omografia in discorso non è del tutto indeterminata, sarà $0 < q < p$ e quindi $p > 1$.

15. Siano ω e ω' due matrici di RIEMANN dei generi p e p' e siano τ e $\bar{\tau}$, τ' e $\bar{\tau}'$ le coppie delle loro imagini negli spazi rappresentativi Σ e Σ'.

Una considerazione analoga a quella fatta nel n° 10 conduce allora a riconoscere, che ω e ω' sono o non sono vincolate, secondo che esiste o no una reciprocità razionale fra Σ e Σ', non totalmente indeterminata (ma certo degenere se $p \neq p'$), rispetto a cui ciascun punto di τ (di $\bar{\tau}$) sia coniugato a ciascun punto di τ' (di $\bar{\tau}'$). E anzi, se λ è il carattere simultaneo di ω e ω', λ è il massimo numero di reciprocità razionali fra Σ e Σ' linearmente indipendenti per ciascuna delle quali accade che rispetto ad essa ciascun punto di τ (di $\bar{\tau}$) è coniugato a ciascun punto di τ' (di $\bar{\tau}'$). Di qua

[24]) Per il caso delle curve questo teorema è stato già stabilito dal ROSATI [loc. cit. [7]) *b*) e *c*)] per via del tutto diversa da quella del testo.

segue subito che:

$$0 \leqq \lambda \leqq 2pp'.$$

Alle reciprocità razionali di cui qui si discorre daremo il nome di *reciprocità simultanee di* RIEMANN delle matrici ω e ω'.

Supponiamo, per fissar le idee, $p \leqq p'$. Allora una reciprocità fra Σ e Σ', sarà certo degenere se $p < p'$, potrà esser degenere o no se $p = p'$; in ogni caso, chiamato suo *primo asse* il luogo degli eventuali punti singolari di Σ e suo *secondo asse* lo spazio secondo cui si intersecano gli iperpiani di Σ' omologhi ai punti non singolari di Σ, basta imitare il ragionamento fatto al n° 10 per vedere che:

Se una reciprocità simultanea di RIEMANN *delle matrici riemanniane ω e ω' coi generi p e p' non è del tutto indeterminata ed è $p \leqq p'$, il suo primo asse è un S_{2q-1} razionale ($0 \leqq q < p$), appoggiato a τ e $\bar{\tau}$ secondo S_{q-1} (imaginari coniugati); e il suo secondo asse è un $S_{2(p'-p+q)-1}$ razionale appoggiato a τ' e $\bar{\tau}'$ secondo $S_{p'-p+q-1}$ (imaginari coniugati): quindi se $p < p'$, il suo primo asse può mancare, ma il secondo esiste certo in ogni caso.*

Si moltiplichino a destra le reciprocità simultanee di RIEMANN di ω e ω' per l'inversa di una reciprocità riemanniana non degenere della matrice ω'; allora risulta subito che:

Il carattere simultaneo λ delle matrici ω e ω' è il massimo numero di trasformazioni omografiche razionali linearmente indipendenti dello spazio Σ nello spazio Σ' che portano i punti di τ (di $\bar{\tau}$) in punti di τ' (di $\bar{\tau}'$).

Le omografie razionali che godono della proprietà considerata in questo enunciato si diranno *omografie simultanee di* RIEMANN delle matrici ω e ω'.

A proposito dei loro *assi*, la cui definizione è senz'altro manifesta, vale un teorema analogo a quello enunciato più sopra per le reciprocità.

16. Si osservi che:

Due matrici riemanniane isomorfe sono anche vincolate.

Infatti se dall'una si passa all'altra con un'operazione A, le forme di RIEMANN di una qualunque di esse — fra le quali, per ipotesi, ve ne son certo di quelle non identicamente nulle — sono nel tempo stesso le loro forme simultanee di RIEMANN; e se dall'una si passa all'altra con un'operazione B, a questa risponde appunto un'omografia simultanea riemanniana (non degenere) delle due matrici.

Viceversa:

Se due matrici riemanniane dello stesso genere sono vincolate ed esiste per esse almeno una (reciprocità, o ciò che fa lo stesso una) omografia simultanea di RIEMANN *non degenere, le due matrici sono isomorfe.*

Infine si noti che:

Se due matrici riemanniane sono isomorfe, il loro carattere simultaneo, diminuito di 1, dà il loro comune indice di moltiplicabilità.

E invero, per l'ipotesi fatta, il carattere simultaneo delle due matrici eguaglia (n° 7) quello di una qualunque delle due e sè stessa.

§ 3.

Le basi minime per le forme di Riemann intere.

17. Una forma riemanniana simultanea di due matrici (distinte o no), che, per limitarci al solo caso per noi interessante, supporremo senz'altro riemanniane, si dirà *intera* se i suoi coefficienti sono tutti numeri interi. E ove sia intera, si dirà *primitiva*, se i suoi coefficienti sono anche primi fra di loro.

Se il carattere simultaneo delle due matrici è λ, esisteranno certo per esse λ forme riemanniane simultanee intere e linearmente indipendenti; se codeste forme sono

$$A_1, \ A_2, \ \ldots, \ A_\lambda, \tag{3}$$

per ogni altra forma simultanea intera B sussisterà un'identità del tipo

$$\mu B \equiv \mu_1 A_1 + \mu_2 A_2 + \cdots + \mu_\lambda A_\lambda \tag{4}$$

μ e $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\lambda$ essendo dei numeri interi ed essendo inoltre $\mu \neq 0$.

Ebbene vogliamo far vedere che:

È sempre possibile scegliere le forme (3) *in modo che nella* (4) *si possa supporre* $\mu = 1$, *qualunque sia la forma riemanniana simultanea intera* B.

Considerando i coefficienti di una forma non identicamente nulla come coordinate proiettive omogenee di un punto in uno spazio convenientemente esteso, il teorema enunciato, ove sia $\lambda > 0$, nel qual caso soltanto è significativo, si riduce evidentemente a quest'altro:

Se in un S_r *si considera un* $S_{\lambda-1}$ *razionale, si possono sempre scegliere in questo* λ *punti indipendenti a coordinate intere, così che le coordinate di ogni altro suo punto razionale, ove siano intere, si ottengano combinando linearmente ed omogeneamente secondo gli stessi* λ *numeri interi le coordinate omonime di quei* λ *punti indipendenti.*

E questo, considerando lo $S_{\lambda-1}$ come intersezione di $r-\lambda+1$ iperpiani razionali indipendenti e scrivendo le equazioni di questi iperpiani in modo che tutti i loro coefficienti siano interi, si converte in una proposizione ben nota sulle soluzioni intere di un sistema di equazioni lineari omogenee a coefficienti interi [25]).

Anzi dalla teoria di queste equazioni [25]) può dedursi un'osservazione ulteriore. Può dirsi infatti che:

Nella (4) *si può sempre supporre* $\mu = 1$ *quando, e solo quando, i minori di ordine massimo della matrice formata coi coefficienti delle* (3) *sono numeri primi fra loro; nel qual caso i loro valori assoluti non dipendono dalla scelta delle* (3).

18. Quando le (3) sono scelte in modo che nella (4) si può sempre supporre $\mu = 1$, dopo di che per l'indipendenza delle (3) gli interi $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\lambda$ sono fissati

---

[25]) Vedi, per es., E. Cahen, *Théorie des nombres* [Paris, A. Hermann, 1914], pag. 168, n° 191.
[26]) Cahen, loc. cit. [25]), pag. 168 e 169, n^{i} 193 e 194.

appena sia data B, diremo che le (3) costituiscono una *base minima* per le forme riemanniane simultanee intere delle due matrici considerate.

Allora è chiaro che:

Le forme di una base minima sono tutte primitive;

ed è poi evidente che:

Fissata una base minima, le forme riemanniane simultanee primitive si ottengono tutte combinando linearmente ed omogeneamente le forme della base minima secondo numeri interi primi fra loro.

Se le (3) costituiscono una base minima e si pone

$$A'_j \equiv \mu_{j,1} A_1 + \mu_{j,2} A_2 + \cdots + \mu_{j,\lambda} A_\lambda \qquad (j = 1, 2, \ldots, \lambda)$$

le $\mu_{j,l}$ essendo numeri interi con

$$|\mu_{j,l}| = \pm 1,$$

anche le

$$A'_1, \quad A'_2, \ \ldots, \ A'_\lambda$$

costituiscono una base minima; e inversamente. Ciò è chiaro per sè ed è ben noto.

D'altro canto si sa pure che si può sempre costruire un determinante a elementi interi ed eguale a ± 1, assegnandosi a piacere gli elementi, primi fra loro, di una sua riga (o colonna), dunque:

Ogni forma riemanniana simultanea primitiva di due matrici riemanniane fa parte di qualche base minima.

Naturalmente, in questi ultimi enunciati, è sempre supposto che sia $\lambda > 0$, cioè che le due matrici siano vincolate.

19. Le considerazioni dei n[i] 17 e 18 valgono anche per le forme di Riemann, alternate o no, di una matrice riemanniana; in particolare, si potrà dunque discorrere di forme riemanniane alternate intere di una matrice riemanniana, e tra codeste forme si potrà sempre scegliere una *base minima*. E lo stesso dicasi per le forme di Riemann *simmetriche* di una matrice riemanniana.

20. Se le

$$(5) \qquad \rho x'_r = a_{r,1} x_1 + a_{r,2} x_2 + \cdots + a_{r,2p} x_{2p} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p')$$

sono le equazioni di un'omografia riemanniana simultanea di due matrici riemanniane ω e ω' dei generi p e p' (o di un'omografia riemanniana di ω, se $\omega \equiv \omega'$), si può sempre supporre che le $a_{r,s}$ siano addirittura dei numeri interi; anzi, senza mutar l'omografia, si può verificar questa condizione in infinite maniere diverse.

In questo modo, all'omografia (5) vengono coordinate infinite sostituzioni lineari omogenee a coefficienti interi del tipo

$$x'_r = a_{r,1} x_1 + a_{r,2} x_2 + \cdots + a_{r,2p} x_{2p}$$

ognuna delle quali si dirà una *sostituzione riemanniana simultanea* delle matrici ω e ω' (o una *sostituzione riemanniana* di ω, se $\omega' \equiv \omega$).

Notisi che, se una tale sostituzione si dice *primitiva*, quando i suoi coefficienti sono interi primi fra loro, tra le infinite sostituzioni rispondenti a una stessa omografia (5) non del tutto indeterminata, ve ne sono due e due soltanto primitive, i coefficienti dell'una deducendosi da quelli dell'altra mediante un cambiamento di segni simultaneo; e che, ognuna di quelle infinite sostituzioni si può ottenere da una di queste due moltiplicandone i coefficienti per uno stesso numero intero non nullo.

Ciò posto, è chiaro che anche per le sostituzioni riemanniane simultanee delle due matrici ω e ω' si può introdurre la nozione di *base minima*. In altri termini, se λ è il carattere simultaneo di ω e ω', fra le loro sostituzioni riemanniane simultanee se ne possono scegliere λ tali, che detti

$$a^{(1)}_{r,s}, \quad a^{(2)}_{r,s}, \ldots, a^{(\lambda)}_{r,s} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p'; \; s = 1, 2, \ldots, 2p)$$

i coefficienti di quest'ultime, i coefficienti $a_{r,s}$ di ogni altra possono essere espressi sotto la forma

$$a_{r,s} = \mu_1 a^{(1)}_{r,s} + \mu_2 a^{(2)}_{r,s} + \cdots + \mu_\lambda a^{(\lambda)}_{r,s}$$

$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_\lambda$ essendo numeri interi, indipendenti da r ed s.

E lo stesso dicasi per le sostituzioni riemanniane di una qualsiasi matrice di RIEMANN [27]).

21. Occorre appena avvertire che nel n° precedente la parola sostituzione è adoperata in un senso un po' più ampio dell'ordinario, poichè p e p' in generale sono diversi.

§ 4.

Teoremi generali sulle omografie e sostituzioni riemanniane di una matrice di RIEMANN.

22. Siano

$$(6) \qquad \rho x'_r = a_{r,1} x_1 + a_{r,2} x_2 + \cdots + a_{r,2p} x_{2p} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p)$$

le equazioni di un'omografia riemanniana (non del tutto indeterminata) della matrice di RIEMANN ω di genere p.

Poichè l'omografia muta in sè l'imagine τ di ω, posto

$$\omega \equiv |\omega_{j,1}, \omega_{j,2}, \ldots, \omega_{j,2p}| \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

dovrà essere, per convenienti valori delle λ,

$$(7) \quad \lambda_{j,1}\omega_{1,r} + \lambda_{j,2}\omega_{2,r} + \cdots + \lambda_{j,p}\omega_{p,r} = a_{r,1}\omega_{j,1} + a_{r,2}\omega_{j,2} + \cdots + a_{r,2p}\omega_{j,2p};$$

---

[27]) Vale la pena di osservare che mediante le considerazioni del testo resta dimostrata in modo nuovo e più rapido l'esistenza della base minima per le corrispondenze (algebriche) situate sopra una curva algebrica non razionale o intercedenti fra due tali curve distinte. Da esse, anzi, risulta l'esistenza di una base minima anche per le sole corrispondenze simmetriche o per le sole corrispondenze emisimmetriche.

dopo di che, le $a_{r,s}$ essendo (razionali, e quindi) reali, sarà pure:

(8) $\bar{\lambda}_{j,1}\bar{\omega}_{1,r} + \bar{\lambda}_{j,2}\bar{\omega}_{2,r} + \cdots + \bar{\lambda}_{j,p}\bar{\omega}_{p,r} = a_{r,1}\bar{\omega}_{j,1} + a_{r,2}\bar{\omega}_{j,2} + \cdots + a_{r,2p}\bar{\omega}_{j,2p}$,

ove, al solito, coll'apporre a un numero un soprassegno intendiamo indicare il passaggio da quel numero al numero complesso coniugato.

Nello spazio rappresentativo Σ della matrice eseguiamo la trasformazione di coordinate definita dalla sostituzione lineare omogenea

$$x_r = \omega_{1,r}X_1 + \cdots + \omega_{p,r}X_p + \bar{\omega}_{1,r}X_{p+1} + \cdots + \bar{\omega}_{p,r}X_{2p},$$

il cui modulo, attesa l'indipendenza delle imagini τ e $\bar{\tau}$ di ω, è, come dev'essere, differente da zero.

Nelle nuove coordinate le equazioni dell'omografia diventeranno:

$$(9)\quad \begin{cases} \rho X'_1 = \lambda_{1,1}X_1 + \lambda_{2,1}X_2 + \cdots + \lambda_{p,1}X_p \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho X'_p = \lambda_{1,p}X_1 + \lambda_{2,p}X_2 + \cdots + \lambda_{p,p}X_p \\ \rho X'_{p+1} = \bar{\lambda}_{1,1}X_{p+1} + \cdots + \bar{\lambda}_{p,1}X_{2p} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \rho X'_{2p} = \bar{\lambda}_{1,p}X_{p+1} + \cdots + \bar{\lambda}_{p,p}X_{2p}. \end{cases}$$

Di qua ricaviamo subito alcune conseguenze interessanti.

In primo luogo, nel nuovo sistema di coordinate, τ e $\bar{\tau}$ sono i due spazi opposti della piramide fondamentale rappresentati rispettivamente dalle equazioni:

$$X_{p+1} = X_{p+2} = \cdots = X_{2p} = 0 \qquad \text{e} \qquad X_1 = X_2 = \cdots = X_p = 0;$$

quindi l'omografia considerata induce in τ e $\bar{\tau}$ le omografie che *ivi* sono rappresentate dalle prime p, o dalle ultime p equazioni (9).

In altri termini le prime p equazioni (9) sono le equazioni dell'omografia indotta su τ dall'omografia riemanniana (6), quando in τ si prendano come vertici della piramide fondamentale i punti dello spazio rappresentativo corrispondenti alle p righe della matrice e inoltre si scelga opportunamente il punto unità [28]).

In secondo luogo, poichè per una sostituzione lineare le radici dell'equazione caratteristica di una forma bilineare restano inalterate, posto

$$D(\rho) = |a_{r,s} - \varepsilon_{r,s}\rho|, \qquad \Delta(\rho) = |\lambda_{j,l} - \varepsilon_{j,l}\rho|, \qquad \bar{\Delta}(\rho) = |\bar{\lambda}_{j,l} - \varepsilon_{j,l}\rho|$$
$$(r,\ s = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2p;\ j,\ l = 1,\ 2,\ \ldots,\ p),$$

dove le ε con indici diversi sono tutte nulle e quelle con indici eguali sono tutte eguali a 1, sarà identicamente

$$(10)\qquad D(\rho) = \Delta(\rho)\bar{\Delta}(\rho).$$

---

[28]) Questa osservazione è continuamente utilizzata nella parte seconda della Memoria.

Ciò dimostra che:

L'equazione caratteristica di grado $2p$

$$D(\rho) = 0$$

della considerata omografia si spezza in due equazioni a coefficienti imaginari coniugati di grado p

$$\Delta(\rho) = 0 \qquad e \qquad \bar{\Delta}(\rho) = 0;$$

e quindi le sue radici si distribuiscono nei due gruppi imaginari coniugati delle radici di quest'ultime [29]).

Segue che:

Se l'equazione $D(\rho) = 0$ *ha delle radici reali, l'ordine di molteplicità di ciascuna di queste è necessariamente pari;*

e che:

Se l'equazione $\Delta(\rho) = 0$ *ammette due radici imaginarie coniugate con lo stesso ordine di molteplicità, ciascuna di queste è multipla d'ordine (doppio, e quindi) pari per l'equazione* $D(\rho) = 0$.

Dall'identità (10) si trae in particolare

$$(11) \qquad |a_{r,s}| = |\lambda_{j,l}| \cdot |\bar{\lambda}_{j,l}|$$

e quindi:

Il modulo di una omografia riemanniana di una qualsiasi matrice di RIEMANN *non può essere mai negativo.*

23. Supponiamo ora che l'omografia considerata non sia singolare e diciamo ρ_1 una radice dell'equazione $D(\rho) = 0$ ed α_1 lo spazio di punti uniti dell'omografia che ad essa corrisponde.

La caratteristica del determinante $D(\rho_1)$ eguaglia la somma delle caratteristiche di $\Delta(\rho_1)$ e $\bar{\Delta}(\rho_1)$ [30]), quindi lo spazio α_1 o giace per intero in uno dei due spazi τ, $\bar{\tau}$; o è lo spazio congiungente due spazi di punti uniti delle omografie indotte dalla data in τ e $\bar{\tau}$.

Se ρ_1 (e quindi α_1) è reale, l'alternativa che si presenta è certo questa seconda e allora α_1 è a dimensione dispari $2q - 1$ $(0 < q \leqq p)$ e si appoggia a τ e $\bar{\tau}$ secondo S_{q-1} (imaginari coniugati).

---

[29]) Questo teorema, con le sue conseguenze, era noto solo per le omografie che più avanti vengon dette *principali*. Vedi G. FROBENIUS, *Über die principale Transformation der Thetafunctionen mehrerer Variabeln* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, t. XCV (1883), pp. 264-296]. Si badi per altro che la nozione di trasformazione principale introdotta dal FROBENIUS non coincide esattamente con quella del testo di sostituzione riemanniana principale. Soltanto quest'ultima è invariante di fronte alla relazione di isomorfismo.

[30]) Per giustificare questa asserzione si scrivano le equazioni dell'omografia nella forma (9) e si imiti con le debite modificazioni un ragionamento che abbiamo già adoperato altrove. Vedi SCORZA, loc. cit. [7]) *b*), pag. 151, nota [18]) a piè di pagina.

Se le radici dell'equazione $D(\rho) = 0$ sono tutte semplici, gli spazi fondamentali dell'omografia, cioè gli spazi di punti uniti, sono $2p$ punti indipendenti di cui p apparterranno a τ e altri p a $\bar{\tau}$.

Siano $\rho_1, \rho_2, \dots, \rho_p$ le radici corrispondenti ai p punti uniti situati in τ, e siano $\Omega_{j,1}, \Omega_{j,2}, \dots, \Omega_{j,2p}$ le coordinate del punto corrispondente alla radice ρ_j.

Si potrà porre

$$\sigma_j \Omega_{j,r} = \alpha_{r,1} + \alpha_{r,2} \rho_j + \cdots + \alpha_{r,2p} \rho_j^{2p-1}$$

dove σ_j è un fattore di proporzionalità e le $\alpha_{r,s}$ sono numeri che risultano razionali e indipendenti da j, una volta che, mutando ρ_j in ρ_l, le equazioni lineari omogenee che definiscono i rapporti mutui delle $\Omega_{j,r}$ si cambiano in quelle che definiscono i rapporti delle $\Omega_{l,r}$.

Poichè non può esistere nello spazio rappresentativo della matrice un iperpiano reale che contenga i p punti uniti in discorso [n° 9, b)], il determinante $|\alpha_{r,s}|$ è certo diverso da zero; quindi [31]):

Nelle ipotesi fatte la matrice ω è isomorfa alla matrice

$$|1, \rho_j, \rho_j^2, \dots, \rho_j^{2p-1}| \qquad (j = 1, 2, \dots, p).$$

24. Un'omografia riemanniana non degenere di una matrice di RIEMANN trasforma in sè l'insieme dei sistemi nulli riemanniani principali, poichè, se il genere della matrice è 1, la cosa è senz'altro manifesta, e se quel genere è superiore a 1, l'omografia essendo reale, muta in sè l'insieme delle rette reali appoggiate alle imagini della matrice.

Se fra quei sistemi nulli ne esiste almeno uno che sia mutato in sè dall'omografia, questa si dirà *principale,* e gode allora di un'interessante proprietà posta in luce dal FROBENIUS [32]). Richiamiamola rapidamente.

Supponiamo che l'omografia di cui si discorre nei n[i] precedenti sia appunto un'omografia principale, e sia

$$(12) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s} x'_r y'_s = 0$$

l'equazione del sistema nullo principale che (essa, e quindi anche) la sua inversa muta in sè.

Dovrà essere, indicando con σ un conveniente numero razionale non nullo

$$(13) \qquad \sigma c_{t,u} = \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s} a_{r,t} a_{s,u} \qquad (t, u = 1, 2, \dots, 2p),$$

---

31) Questo teorema, che si riconnette con una osservazione dovuta a KRONECKER e WEBER (v. KRAZER, loc. cit. [12]), pag. 235), è utilissimo nelle applicazioni. Si vegga l'uso che ne è stato fatto da BAGNERA e DE FRANCHIS {*Le superficie algebriche le quali ammettono una rappresentazione parametrica mediante funzioni iperellittiche di due argomenti* [Memorie di Matematica e di Fisica della Società italiana delle Scienze, detta dei XL, serie 3ª, t. XV (1908), pp. 251-343], n[i] 25 e 26} e la frequenza con cui viene adoperato, per scopi analoghi, nella seconda parte di questa Memoria.

32) Loc. cit. [29]).

e quindi sarà intanto

$$\sigma^{2p}|c_{r,s}| = |c_{r,s}|\cdot|a_{r,s}|^2,$$

cioè

(14) $$\sigma^{2p} = |a_{r,s}|^2,$$

una volta che, per l'ipotesi fatta,

$$|c_{r,s}| \neq 0.$$

Posto

(15) $$H_{j,l} = -\frac{1}{2i}\sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}\,\omega_{j,r}\,\overline{\omega}_{l,s} \qquad (i=\sqrt{-1}),$$

consideriamo la forma bilineare

(16) $$H \equiv \sum_{j,l}^{1\ldots p} H_{j,l}\,\mu'_j\,\nu'_l$$

nelle due serie di variabili μ'_j e ν'_l.

Come è noto, il sistema nullo considerato essendo principale, questa forma, ove vi si supponga $\nu'_j = \overline{\mu}'_j$, diventa una forma Hermitiana definita.

Se le μ'_j e ν'_l si considerano come le coordinate in τ e $\overline{\tau}$ dei punti di τ e $\overline{\tau}$ che hanno in Σ le coordinate

$$\mu'_1\omega_{1,r} + \cdots + \mu'_p\omega_{p,r} \qquad \text{e} \qquad \nu'_1\overline{\omega}_{1,r} + \cdots + \nu'_p\overline{\omega}_{p,r} \qquad (r=1,2,\ldots,2p),$$

la forma bilineare (16) eguagliata a zero rappresenta semplicemente la reciprocità indotta fra τ e $\overline{\tau}$ dal sistema nullo (12).

Ma allora il fatto che la nostra omografia muta in sè il sistema nullo (12), porta che (l'omografia e quindi anche) la sua inversa porta in sè questa reciprocità, e quindi la forma (16) non può mutare che di un fattore numerico ove si eseguiscano sulle μ' e ν' le sostituzioni lineari date da:

(17) $$\mu'_j = \lambda_{1,j}\mu_1 + \cdots + \lambda_{p,j}\mu_p \quad \text{e} \quad \nu'_l = \overline{\lambda}_{1,l}\nu_1 + \cdots + \overline{\lambda}_{p,l}\nu_p \qquad (j,l=1,2,\ldots,p).$$

Indichiamo con

$$K \equiv \sum_{j,l}^{1\ldots p} K_{j,l}\,\mu_j\,\nu_l$$

la trasformata di (16) mediante le (17). Con un facile calcolo si trova, badando alle (13),

$$K_{j,l} = \sigma H_{j,l}$$

e quindi il fattor numerico in discorso è appunto σ.

Ora K, per estensione alle forme Hermitiane della legge d'inerzia di SYLVESTER, per $\nu_j = \overline{\mu}_j$, è definita positiva (negativa), se tale è H, dunque σ è positivo. Ma (n° 22) è tale anche $|a_{r,s}|$, dunque la (14) dà, intanto,

(18) $$\sigma^p = |a_{r,s}|.$$

Poi, il ragionamento fatto dimostra che le sostituzioni lineari

(19) $$\mu'_j = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}(\lambda_{1,j}\mu_1 + \cdots + \lambda_{p,j}\mu_p) \quad \text{e} \quad \nu'_l = \frac{1}{\sqrt{\sigma}}(\overline{\lambda}_{1,l}\nu_1 + \cdots + \overline{\lambda}_{p,l}\nu_p) \quad (j,l=1,2,\ldots,p)$$

mutano H esattamente in sè stessa, quindi le corrispondenti equazioni caratteristiche hanno i divisori elementari tutti lineari e le loro radici hanno tutte per modulo 1.

Segue che:

L'equazione caratteristica dell'omografia principale considerata,

$$D(\rho) = 0,$$

è a divisori elementari tutti lineari e le sue radici hanno tutte per modulo $\sqrt{\sigma}$.

In altri termini, ma con minor precisione:

Un'omografia riemanniana principale di una qualsiasi matrice di RIEMANN *è sempre generale e i suoi invarianti assoluti hanno sempre tutti per modulo* 1.

25. Una sostituzione riemanniana (non degenere) di una matrice di RIEMANN si dirà *principale,* se risponde a un'omografia riemanniana principale, cioè se, a meno di un fattore numerico σ, muta in sè una forma di RIEMANN alternata principale della matrice.

Se, come può ben supporsi, questa forma è intera e primitiva, quel fattore σ (che è positivo) è pure intero; e se p è il genere della matrice, si ha sempre che σ^p eguaglia il modulo della sostituzione.

Se la sostituzione è modulare risulta quindi $\sigma = 1$; e allora tutte le radici della sua equazione caratteristica hanno per modulo 1.

Ma questa equazione è a coefficienti interi ed ha eguale a 1 il coefficiente della potenza più elevata dell'incognita, dunque, per un importante teorema di KRONECKER [33]), quelle radici son tutte radici dell'unità e la sostituzione è periodica.

Abbiamo così che:

Ogni sostituzione riemanniana principale di una matrice di RIEMANN, *che sia modulare, è anche periodica.*

Viceversa:

Ogni sostituzione riemanniana periodica di una matrice di RIEMANN *è (modulare e) principale* [34]).

E infatti, se è periodica, le radici della sua equazione caratteristica sono tutte radici dell'unità; e quindi il termine noto dell'equazione, che eguaglia il modulo della sostituzione, e perciò è intero e positivo, è senz'altro eguale a 1. Poi, se f è una forma riemanniana principale della matrice, ed

$$f_1 = f, \quad f_2, \ldots, f_n$$

sono le forme riemanniane principali in cui f è portata dalle operazioni del gruppo ciclico d'ordine n generato dalle potenze della sostituzione, la forma riemanniana (certo non identicamente nulla)

$$f_1 + f_2 + \cdots + f_n$$

33) L. KRONECKER, *Zwei Sätze über Gleichungen mit ganzzahligen Coefficienten* [Journal für die reine und angewandte Mathematik, Bd. LIII (1857), pp. 173-175].

34) Di queste due proposizioni soltanto la prima fu già osservata dal FROBENIUS [loc. cit. [29])].

è principale ed è mutata in sè dalle operazioni del gruppo, dunque la nostra sostituzione è anche principale.

Notisi che se $r_1, r_2, \ldots, r_t$ sono gli esponenti *distinti* a cui appartengono le radici dell'unità che costituiscono le radici dell'equazione caratteristica della sostituzione in discorso, il suo periodo n è il minimo multiplo comune di $r_1, r_2, \ldots, r_t$, e il primo membro della sua equazione caratteristica si spezza in un prodotto di potenze dei primi membri delle equazioni (irriducibili) che dànno le radici primitive dell'unità $r_1^{me}, r_2^{me}, \ldots, r_t^{me}$. Ma, allora, se p è il genere della matrice e φ è, secondo il solito, il segno della nota funzione indicatrice di EULERO, deve essere, per convenienti valori interi e positivi delle $m_1, m_2, \ldots, m_t$:

$$m_1\varphi(r_1) + m_2\varphi(r_2) + \cdots + m_t\varphi(r_t) = 2p.$$

Ciò dà modo, per ogni assegnato valor di p, di indicare tutti i valori, in numero finito, che n può eventualmente assumere. Così, per es., prescindendo sempre dal caso triviale dell'identità, se $p = 2$ si trova che n può essere soltanto

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 8,\ 10,\ 12;$$

e se $p = 3$ si trova che n può essere soltanto

$$2,\ 3,\ 4,\ 5,\ 6,\ 7,\ 8,\ 9,\ 10,\ 12,\ 14,\ 15,\ 18,\ 20,\ 24,\ 30.$$

A questo proposito è utile osservare che i fattori primi dei valori possibili per n possono essere pienamente caratterizzati.

Si ponga

$$n = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$$

con $a, b, c, \ldots$ numeri primi.

Allora l'esistenza della sostituzione riemanniana principale considerata col periodo n porta l'esistenza di sostituzioni riemanniane principali coi periodi $a, b, c, \ldots$

Per ciascuna di queste, per es. per una di quelle a periodo a, i relativi numeri r_j o si riducono a uno solo eguale ad a, o sono due e due soltanto eguali il primo a 1 e il secondo ad a. Intanto

$$\varphi(a) = a - 1,$$

e quindi, o si ha

$$m_1'(a - 1) = 2p,$$

con m_1' intero positivo, o si ha

$$m_1' + m_2'(a - 1) = 2p,$$

con m_1', m_2' interi positivi ed m_1' pari (n^o 22).

Di qua risulta che:

I fattori primi del periodo di una sostituzione riemanniana principale non identica di una matrice di RIEMANN *di genere p ove siano diminuiti di* 1 *si mutano in divisori di numeri pari non superiori a* $2p$ [35]).

35) Dal teorema di FROBENIUS esposto nel testo si può far discendere con HURWITZ nel modo più diretto e più significativo il fatto ben noto che ogni trasformazione birazionale in sè di una curva

26. Sebbene si tratti di cosa manifesta per definizione, notisi esplicitamente che:

Le omografie e sostituzioni riemanniane di una matrice di RIEMANN *non singolare sono tutte necessariamente principali.*

§ 5.

Matrici di RIEMANN composte.

27. Se $\mu', \mu'', \ldots, \mu^{(n)}$ sono n matrici qualunque ($n \geqq 2$), diremo *composta* con esse la matrice μ definita da

$$\mu \equiv \begin{vmatrix} \mu' & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \mu'' & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \mu^{(n)} \end{vmatrix},$$

dove il significato della scrittura adoperata al secondo membro è noto ed è del resto chiaro per sè stesso.

Posta questa definizione si riconosce subito che se dalle matrici $\mu', \mu'', \ldots, \mu^{(n)}$, applicando a ciascuna di esse un'operazione A (o B), si passa rispettivamente alle matrici $\nu', \nu'', \ldots, \nu^{(n)}$, la matrice composta con queste è deducibile dalla matrice composta con quelle mediante un'operazione A (o B); e quindi:

Se le matrici $\nu', \nu'', \ldots, \nu^{(n)}$ *sono ordinatamente isomorfe (equivalenti) alle matrici*

---

algebrica di genere superiore a 1 è necessariamente periodica. Vedi la Memoria di A. HURWITZ, *Über diejenigen algebraischen Gebilde, welche eindeutige Transformationen in sich zulassen* [Mathematische Annalen, Bd. 32 (1888), pp. 290-308].

Combinando le osservazioni di HURWITZ con quelle del testo si ha un modo assai rapido per caratterizzare, almeno per i primi valori del genere, le trasformazioni birazionali in sè che una curva di genere $p > 1$ può possedere.

Poichè lo HURWITZ non vi si ferma, vale la pena di osservare, che se le notazioni del testo si riferiscono alla sostituzione riemanniana principale che risponde a una trasformazione birazionale in sè a periodo n (> 1) di una curva di genere $p > 1$, il numero dei punti uniti della trasformazione è dato da

$$u = 2 - m_1 \mu(r_1) - m_2 \mu(r_2) - \ldots - m_t \mu(r_t),$$

dove μ è, al solito, il segno della così detta *funzione* di MÖBIUS, e quindi $\mu(r_j)$ è *zero* se r_j ammette dei divisori quadrati diversi da 1, è $+1$, se r_j è 1 o è un prodotto di un numero pari di fattori primi differenti, ed è -1, se r_j è un prodotto di un numero dispari di fattori primi differenti.

Il ROSATI, a cui ho avuto accasione di comunicare la relazione

$$\sum m_j \varphi(r_j) = 2p.$$

mi ha scritto che ad essa egli era pervenuto per suo conto nel caso delle curve utilizzando la nozione di equazione minima di una corrispondenza. Vedi per questo importante concetto introdotto appunto dal ROSATI la sua Nota citata in [7]), *d*).

μ', μ'', $\dots$, $\mu^{(n)}$, *anche la matrice composta con quelle è isomorfa (equivalente) alla matrice composta con queste.*

28. *Una matrice composta con più matrici riemanniane è ancora una matrice di* RIEMANN.

Siano, ad es., ω' e ω'' due matrici riemanniane dei generi p' e p'' e si ponga

$$\omega \equiv \begin{vmatrix} \omega' & 0 \\ 0 & \omega'' \end{vmatrix};$$

dico che ω è una matrice riemanniana del genere $p' + p''$.

E infatti siano

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p'} c'_{r,s} x_r y_s \qquad \text{e} \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p''} c''_{r,s} x_r y_s$$

due forme riemanniane principali di ω' e ω'' rispettivamente.

Allora, adoperando per le matrici ω' e ω'' le notazioni che si ricavano da quelle del n° 5 apponendo ad esse uno o due apici rispettivamente, possiamo supporre di aver disposto dei segni delle $c'_{r,s}$ e delle $c''_{r,s}$ in modo che sia sempre

$$R'^{(\lambda')} > 0 \qquad \text{ed} \qquad R''^{(\lambda'')} > 0.$$

Ciò posto, è chiaro che la forma

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p'} c'_{r,s} x_r y_s + \sum_{r,s}^{1\dots 2p''} c''_{r,s} x_{2p'+r} y_{2p'+s}$$

è una forma alternata di RIEMANN della matrice ω, la quale rispetto ad essa soddisfa appunto alla condizione che si richiede per concludere che ω è una matrice riemanniana del genere $p' + p''$.

Viceversa:

Se una matrice riemanniana è composta con più altre, aventi ciascuna il numero delle colonne doppio del numero delle righe, anche queste sono matrici riemanniane.

E infatti se, ad es., per la matrice riemanniana ω si ha

$$\omega \equiv \begin{vmatrix} \omega' & 0 \\ 0 & \omega'' \end{vmatrix}$$

ed ω', ω'' soddisfanno alla condizione espressa dall'enunciato, basta prendere una forma riemanniana principale di ω e in essa sopprimere tutti i termini con variabili aventi un indice (almeno) superiore al numero delle colonne di ω', per riconoscere che ω' è una matrice di RIEMANN e avere nel tempo stesso una sua forma riemanniana principale.

29. *Siano ω e ω' due matrici riemanniane e la seconda sia composta con le matrici riemanniane ω'_1, ω'_2, $\dots$, ω'_n. Allora il carattere simultaneo λ di ω e ω' è dato da:*

$$\lambda = \sum_j^{1\dots n} \lambda_j, \tag{20}$$

se λ_j è quello di ω e ω'_j.

E infatti si riconosce subito che una forma bilineare è una forma riemanniana simultanea di ω e ω', quando e solo quando può spezzarsi nella somma di n forme riemanniane simultanee di ω e ω'_1, ω e ω'_2, ..., ω e ω'_n rispettivamente. Di qua segue subito la (20) quando si osservi che λ, ad es., è il numero dei parametri razionali arbitrari che compariscono linearmente ed omogeneamente nei coefficienti della più generale forma simultanea di ω e ω'.

Il teorema dimostrato dà luogo immediatamente a quest'altro:

Se le matrici riemanniane ω e ω' sono composte, la prima, con le matrici riemanniane $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ e, la seconda, con le matrici riemanniane $\omega'_1, \omega'_2, \ldots, \omega'_n$, per il carattere simultaneo λ di ω e ω', si ha:

$$\lambda = \sum_j^{1\ldots m} \sum_l^{1\ldots n} \lambda_{j,l}, \tag{21}$$

dove $\lambda_{j,l}$ è il carattere simultaneo di ω_j e ω'_l; quindi ω e ω' non sono vincolate, se non a patto che almeno una delle matrici ω_j sia vincolata ad una almeno delle matrici ω'_l.

Si supponga in questo enunciato che ω e ω' coincidano, cioè che sia $m = n$ e $\omega_j \equiv \omega'_j$. Allora, se si indica con h l'indice di moltiplicabilità di ω e con h_j quello di ω_j, si ha

$$\lambda = h + 1 \qquad \text{e} \qquad \lambda_{j,j} = h_j + 1,$$

e quindi:

Se la matrice riemanniana ω è composta con le matrici riemanniane $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ per l'indice di moltiplicabilità h di ω si ha

$$h = h_1 + h_2 + \cdots + h_n + n - 1 + 2\sum \lambda_{j,l} \tag{22}$$

dove h_j è l'indice di moltiplicabilità di ω_j, $\lambda_{j,l}$ è il carattere simultaneo di ω_j e ω_l, e il sommatorio si intende esteso a tutte le combinazioni binarie degli indici 1, 2, ..., n.

Di qua, una volta che $n \geqq 2$, segue che per ω si ha certo

$$h \geqq 1.$$

30. Al teorema precedente, riguardante l'indice di moltiplicabilità di una matrice riemanniana composta con più altre dello stesso tipo, fa riscontro, per l'indice di singolarità, quest'altro:

Se la matrice riemanniana ω è composta con le matrici riemanniane $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, indicati con k, k_j e $\lambda_{j,l}$, rispettivamente, l'indice di singolarità di ω, quello di ω_j e il carattere simultaneo di ω_j e ω_l, si ha:

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n + n - 1 + \sum \lambda_{j,l} \tag{23}$$

dove il sommatorio si intende sempre esteso a tutte le combinazioni binarie degli indici 1, 2, ..., n.

Per la dimostrazione basterà evidentemente limitarsi al caso di $n = 2$.

Sia dunque

$$\omega \equiv \begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{vmatrix},$$

e siano p_1, p_2 e $p_1 + p_2 = p$ i generi di ω_1, ω_2 e ω rispettivamente.

Se

$$(24) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p} c_{r,s} x_r y_s$$

è una forma riemanniana alternata di ω, le forme

$$(25) \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p_1} c_{r,s} x_r y_s, \qquad \sum_{r,s}^{1\dots 2p_2} c_{2p_1+r, 2p_1+s} x_r y_s$$

sono delle forme riemanniane alternate di ω_1 e ω_2 rispettivamente; inoltre

$$(26) \qquad \sum_{r}^{1\dots 2p_1} \sum_{s}^{1\dots 2p_2} c_{r,2p_1+s} x_r y_s$$

sarà una forma riemanniana simultanea di ω_1 e ω_2.

Viceversa, se le (25) sono delle forme alternate di RIEMANN di ω_1 e ω_2, e la (26) è una loro forma riemanniana simultanea, la (24) che può scriversi

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p_1} c_{r,s} x_r y_s + \sum_{r}^{1\dots 2p_1} \sum_{s}^{1\dots 2p_2} c_{r,2p_1+s} (x_r y_{2p_1+s} - x_{2p_1+s} y_r) + \sum_{r,s}^{1\dots 2p_2} c_{2p_1+r, 2p_1+s} x_{2p_1+r} y_{2p_1+s}$$

è una forma riemanniana alternata di ω; quindi, basta ricordare i significati di k, k_1, k_2 e $\lambda_{1,2}$ per concludere che

$$(27) \qquad k = k_1 + k_2 + 1 + \lambda_{1,2}.$$

La (23), poichè $n \geqq 2$, dà $k \geqq 1$ e quindi:

Una matrice riemanniana composta con matrici dello stesso tipo è senz'altro singolare.

31. Per alcune considerazioni che dovranno esser fatte in seguito è utile approfondire il significato geometrico dei teoremi precedenti per il caso di una matrice riemanniana ω del genere p, composta mediante due matrici riemanniane ω_1 e ω_2 dei generi p_1 e p_2.

Se in uno spazio rappresentativo Σ l'imagine di ω è τ, τ si appoggia, rispettivamente, secondo un S_{p_1-1} e un S_{p_2-1} indipendenti ai due spazi opposti, A_1 e A_2, della piramide fondamentale delle coordinate, che sono rappresentati dalle equazioni:

$$x_{2p_1+1} = x_{2p_1+2} = \cdots = x_{2p} = 0 \qquad \text{e} \qquad x_1 = x_2 = \cdots = x_{2p_1} = 0.$$

Anzi quello S_{p_1-1} e quello S_{p_2-1} sono proprio le imagini τ_1 e τ_2 di ω_1 e ω_2 negli spazi rappresentativi A_1 e A_2, ove in ciascuno di essi si prenda come sistema di coordinate quello indottovi dal sistema fissato in Σ.

Allora l'equazione

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p_1} c_{r,s}\, x_r\, y_s = 0,$$

che si ottiene eguagliando a zero la prima delle forme (25), è, *in* A_1, l'equazione di un sistema nullo riemanniano di ω_1, e, *in* Σ, l'equazione di un sistema nullo riemanniano di ω, singolare, di specie $\geqq 2p_2$, avente per asse A_2 o uno spazio contenente A_2; quindi, badando che se quel primo sistema nullo è non singolare, quest'ultimo è esattamente della specie $2p_2$, attribuendo ai simboli k_1 e k_2 il solito significato possiamo asserire che:

a) La matrice ω ammette $k_1 + 1$ (o $k_2 + 1$), e non più, sistemi nulli riemanniani degeneri di specie $2p_2$ (o $2p_1$), linearmente indipendenti, aventi per asse A_2 (o A_1).

Inoltre l'equazione

$$\sum_{r,s}^{1\ldots 2p_1} c_{r,s}\, x_r\, y_s + \sum_{r,s}^{1\ldots 2p_2} c_{2p_1+r,2p_1+s}\, x_{2p_1+r}\, y_{2p_1+s} = 0$$

rappresenta in Σ un sistema nullo riemanniano di ω rispetto a cui ogni punto di A_1 è coniugato a ciascun punto di A_2; e l'equazione

$$\sum_{r}^{1\ldots 2p_1} \sum_{s}^{1\ldots 2p_2} c_{r,p_1+s}\,(x_r\, y_{2p_1+s} - x_{2p_1+s}\, y_r) = 0$$

rappresenta in Σ un sistema nullo riemanniano di ω rispetto a cui sono coniugate tutte le coppie di punti di A_1 o di A_2; dunque, col solito significato di $\lambda_{1,2}$:

b) Esistono $k_1 + k_2 + 2$, e non più, sistemi nulli riemanniani, linearmente indipendenti, e non degeneri di ω rispetto a cui A_1 e A_2 sono l'uno lo spazio polare dell'altro;

c) Se $\lambda_{1,2} > 0$, esistono $\lambda_{1,2}$, e non più, sistemi nulli riemanniani, linearmente indipendenti, di ω rispetto a cui A_1 e A_2 sono spazi autoconiugati.

Notisi che tra i sistemi nulli di cui parla l'enunciato *b*) ve ne son certo di quelli principali; anzi si potrebbe far vedere che di questi ne esistono appunto $k_1 + k_2 + 2$ linearmente indipendenti.

Per mettere in luce il significato della formula (22) che, scritta per l'attuale matrice ω diventa

$$h = h_1 + h_2 + 1 + 2\lambda_{1,2}, \tag{28}$$

si può seguire una doppia via, considerando le reciprocità o le omografie di RIEMANN delle matrici ω, ω_1 e ω_2.

Scegliamo per il suo maggiore interesse la seconda e siano

$$\rho x'_r = a_{r,1} x_1 + a_{r,2} x_2 + \cdots + a_{r,2p} x_{2p} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p) \tag{29}$$

le equazioni della più generale omografia di RIEMANN della matrice ω.

Per essa ogni punto di τ deve andare in un punto di τ; quindi se nei secondi membri delle (29) si pongono le coordinate di un punto di τ_1, delle quali sono nulle tutte quelle con indice superiore a $2p_1$, nei primi membri dovranno venire le coordinate di un punto di τ, delle quali le prime $2p_1$ sono combinazioni lineari omogenee delle prime $2p_1$ coordinate di p_1 punti indipendenti di τ_1.

Ma allora, *entro* A_1, le equazioni

$$\rho x'_r = a_{r,1} x_1 + \cdots + a_{r,2p_1} x_{2p_1} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p_1) \tag{30}$$

saranno quelle di un'omografia riemanniana della matrice ω_1; e, per una ragione analoga, le equazioni

$$\rho x'_{2p_1+r} = a_{2p_1+r,2p_1+1} x_{2p_1+1} + \cdots + a_{2p_1+r,2p} x_{2p} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p_2) \tag{31}$$

saranno, *entro* A_2, quelle di un'omografia riemanniana della matrice ω_2.

Inoltre le equazioni

$$\rho x'_{2p_1+r} = a_{2p_1+r,1} x_1 + \cdots + a_{2p_1+r,2p_1} x_{2p_1} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p_2) \tag{32}$$

e

$$\rho x'_r = a_{r,2p_1+1} x_{2p_1+1} + \cdots + a_{r,2p} x_{2p} \qquad (r = 1, 2, \ldots, 2p_1) \tag{33}$$

rappresenteranno, rispettivamente, delle omografie riemanniane simultanee di ω_1, ω_2 e ω_2, ω_1.

Il discorso fatto è invertibile, e quindi si ha intanto una conferma della formula (28); ma poi, basta riguardare le (30), (31), (32) e (33) come equazioni di omografie in Σ, per avere i seguenti teoremi:

d) Esistono $h_1 + 1$ (o $h_2 + 1$), e non più, omografie riemanniane linearmente indipendenti di ω che siano singolari di specie $2p_2$ (o $2p_1$) e abbiano per primo asse A_2 (o A_1) e secondo asse A_1 (o A_2);

e) Se $\lambda_{1,2} > 0$, esistono $\lambda_{1,2}$, e non più, omografie riemanniane linearmente indipendenti di ω che abbiano per primo asse A_2 (o A_1) o uno spazio passante per esso, e per secondo asse uno spazio contenuto in A_2 (in A_1).

§ 6.

Matrici di Riemann pure ed impure.

32. Una matrice riemanniana del genere p si dirà *pura* od *impura*, secondo che nel suo spazio rappresentativo non esistono o esistono spazi razionali S_{2q-1} $(0 < q < p)$, appoggiati alle sue imagini secondo S_{q-1} (imaginari coniugati). Ogni S_{2q-1} sì fatto, ove esista, si dirà poi un *asse* della matrice.

Per una matrice impura è certo $p > 1$, quindi:

Una matrice ellittica è necessariamente pura.

Una matrice riemanniana composta con due o più matrici riemanniane è, per quanto si è visto, certamente impura; ma risulterà tra poco che questa osservazione è in un certo senso invertibile, poichè si vedrà che ogni matrice impura è isomorfa a una matrice composta. Quindi, in particolare, si avrà allora che:

Una matrice impura è certo singolare.

Così pure risulta da quanto è detto nei n[i] 11 e 14 che una matrice di RIEMANN dotata di reciprocità od omografie riemanniane degeneri (ma non del tutto indeterminate) è senz'altro impura; ed anche quest'osservazione è, come vedremo, invertibile [n° 41, *b*), *d*)] [36]).

33. Due matrici riemanniane isomorfe sono insieme pure o insieme impure; e quando siano entrambe impure, le configurazioni dei loro assi sono proiettivamente identiche.

34. Le definizioni ora poste e i teoremi dei n[i] 15 e 16 dànno subito le seguenti proposizioni:

a) *Se due matrici riemanniane sono vincolate e non hanno lo stesso genere, quella di genere maggiore è certo impura;*

b) *Se due matrici riemanniane sono pure, ogni loro eventuale omografia simultanea di* RIEMANN, *non del tutto indeterminata, è non singolare; quindi esse o non sono vincolate o sono (vincolate ed) isomorfe;*

da cui si trae in particolare che:

c) *Matrici pure vincolate a una stessa matrice pura sono vincolate fra di loro.*

Notisi che il teorema *c*) per matrici riemanniane non tutte pure in generale non sussiste. Per es., se ω_1 e ω_2 sono matrici di RIEMANN non vincolate fra di loro, esse, pur essendo tali, sono entrambe vincolate alla matrice composta

$$\omega \equiv \begin{vmatrix} \omega_1 & 0 \\ 0 & \omega_2 \end{vmatrix}.$$

La differenza che qui si manifesta fra le matrici pure e quelle impure si collega

36) Se una matrice riemanniana si riferisce a una funzione abeliana, essa è *pura* od *impura* secondo che questa, *mediante una sostituzione lineare omogenea sulle variabili e una trasformazione (lineare o no) sui periodi,* non può o può esser ridotta a una combinazione razionale di funzioni abeliane dipendenti ciascuna da un minor numero di variabili.

Se si riferisce a una varietà algebrica, essa è pura od impura secondo che questa non possiede o possiede sistemi regolari di integrali (semplici, di 1ª specie) riducibili.

Se, in particolare, si riferisce a una curva algebrica, si può anche dire che essa è pura od impura secondo che la curva non contiene o contiene corrispondenze (algebriche) *speciali.* Per questa denominazione introdotta dal ROSATI vedi le sue Note più volte citate.

L'osservazione che una matrice riemanniana di genere 2 è impura quando e solo quando ammette forme di RIEMANN alternate (non nulle, ma) degeneri è stata fatta per la prima volta dal POINCARÉ [loc. cit. [12]) *a*)], salvo una leggera imperfezione nell'enunciato. L'imperfezione consiste nel fatto che il POINCARÉ suppone implicitamente non nullo il coefficiente del termine che, nelle sue notazioni, è dato da $GG' - H^2$.

col fatto che il prodotto di due omografie degeneri può essere indeterminato senza che siano tali le due omografie considerate [37]).

35. Dalla definizione di asse di una matrice impura e dal fatto che spazi razionali sono congiunti da spazi razionali e, ove non siano indipendenti, si secano secondo spazi razionali, segue subito che:

Se due assi di una matrice impura non sono indipendenti, la loro intersezione è ancora un asse della matrice; e se lo spazio che li congiunge non è quello rappresentativo, anch'esso è un asse della matrice [38]).

Un asse di una matrice impura si dirà *puro* od *impuro*, secondo che non contiene o contiene assi della matrice di dimensione inferiore alla propria. Quindi:

Due assi puri o sono indipendenti o coincidono; e un asse puro e un asse impuro o sono indipendenti o si appartengono.

36. Due o più assi indipendenti di una matrice impura si diranno *complementari* [39]), se lo spazio che li congiunge coincide con lo spazio rappresentativo della matrice.

L'interesse di questa definizione risulta dal fatto che:

Per ogni asse di una matrice impura ne esiste sempre un altro (almeno) che è ad esso complementare [40]).

E infatti sia A un asse della matrice ω di genere p (> 1), con le imagini τ e $\bar{\tau}$. Lo spazio A sarà, per definizione, un S_{2q-1} razionale $(0 < q < p)$, appoggiato a τ e $\bar{\tau}$ secondo S_{q-1}.

Sia, inoltre, σ un sistema nullo riemanniano principale di ω, e A' lo spazio polare di A rispetto a σ.

Poichè A e σ sono razionali, e poichè A si appoggia a τ e $\bar{\tau}$, che sono mutati in sè da σ, secondo S_{q-1}, anche A' è razionale ed è un $S_{2(p-q)-1}$, appoggiato a τ e $\bar{\tau}$ secondo S_{p-q-1}; sicchè, intanto, A' è, al pari di A, un asse di ω.

Ma è facile vedere che A' è anche indipendente da A, e che quindi A e A' sono complementari.

Infatti ove A e A' non fossero indipendenti, si taglierebbero secondo un asse S_{2l-1}

---

37) In particolare:

Se due curve algebriche non razionali distinte non posseggono sistemi regolari di integrali di 1ª specie riducibili, o i loro generi sono disuguali e allora le corrispondenze (algebriche) intercedenti fra di esse sono tutte a valenza zero, o hanno lo stesso genere e allora il numero base di quelle corrispondenze eguaglia i numeri base delle corrispondenze (algebriche) situate su ciascuna di esse.

38) Questa osservazione riferita alla teoria degli integrali abeliani riducibili si converte in un noto teorema di SEVERI [loc. cit. [12])].

39) Denominazione desunta da quella introdotta dal SEVERI nella sua Nota ora citata per i sistemi regolari di integrali riducibili.

40) È questo, in sostanza, il famoso teorema di POINCARÉ [loc. cit. [12]) *c*)] che generalizza una osservazione fatta per la prima volta dal PICARD nella sua Nota citata in [12]) *a*). La dimostrazione del testo è quella che si trova nella mia Nota II citata in [7]) *b*), con la semplificazione che le proviene dall'uso dell'osservazione del ROSATI di cui alla nota [23]).

e tutte le rette di quest'asse apparterrebbero al complesso lineare corrispondente al sistema nullo σ; mentre, per quanto sappiamo (n° 12), questo è certo impossibile per le rette reali dello S_{2l-1} appoggiate a τ e $\bar{\tau}$.

37. Se un asse A di una matrice impura è impuro, due o più assi contenuti in esso si diranno *complementari in* A se sono indipendenti e hanno per spazio congiungente A. Allora sussiste sempre che:

Per ogni asse B *contenuto (in senso stretto) in* A *ne esiste sempre un altro (almeno)* B', *che è complementare a* B *in* A.

E infatti si ha subito un tale asse B' intersecando A con un asse della matrice complementare a B.

Di qua, ove si osservi che, se un asse è impuro, esso contiene per definizione qualche asse puro, segue che:

Per ogni matrice impura esiste sempre un insieme (almeno) di assi complementari puri.

Un tale insieme si dirà per la matrice un *gruppo fondamentale di assi puri;* ed è chiaro che per ogni asse puro della matrice esiste almeno un gruppo fondamentale che lo contiene.

Gruppo fondamentale di assi puri di un asse impuro è un insieme di assi puri in esso complementari.

Per estensione si chiamerà poi *gruppo fondamentale* di un asse puro l'asse stesso [41]).

38. Adesso facciamo vedere che:

Se una matrice impura ω *del genere* p *ammette* n *assi complementari* $A_1, A_2, \ldots, A_n$ $(n \geqq 2)$ *delle dimensioni rispettive* $2p_1 - 1, 2p_2 - 1, \ldots, 2p_n - 1$, *cosicchè*

$$p_1 + p_2 + \cdots + p_n = p,$$

la matrice ω *è isomorfa a una matrice composta con* n *matrici riemanniane dei generi* $p_1, p_2, \ldots, p_n$.

Si indichi con α_j lo S_{p_j-1} secondo cui l'asse A_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ si appoggia all'imagine τ di ω; gli spazi $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ saranno indipendenti e avranno τ per spazio congiungente.

Ciò posto, con un'operazione A si incominci dal mutare ω in una matrice ω', che abbia ordinatamente per righe le successioni delle coordinate, entro lo spazio rappresentativo Σ, di p_1 punti indipendenti di α_1, p_2 punti indipendenti di $\alpha_2, \ldots, p_n$ punti indipendenti di α_n. Poi, con una omografia razionale non degenere dello spazio Σ, si portino, come è certo possibile, $A_1, A_2, \ldots, A_n$ negli spazi $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ della piramide fondamentale che ne congiungono rispettivamente i gruppi di vertici

$$1, 2, \ldots, 2p_1; \quad 2p_1 + 1, 2p_1 + 2, \ldots, 2(p_1 + p_2); \ldots; 2(p_1 + p_2 + \cdots + p_{n-1}) + 1, \ldots, 2p.$$

---

[41]) Scorza, loc. cit. [7]) *f*).

A questa omografia risponderà un'operazione B che muta ω' in una matrice riemanniana ω'', avente per imagine la trasformata di τ mediante l'omografia, cioè un S_{p-1} appoggiato, secondo gli $S_{p_1-1}, S_{p_2-1}, \ldots, S_{p_n-1}$ trasformati di $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ (e siano $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$), agli spazi $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ della piramide fondamentale.

Ma allora ω'' è appunto composta mediante n matrici riemanniane $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ dei generi $p_1, p_2, \ldots, p_n$, che, negli spazi rappresentativi $A'_1, A'_2, \ldots, A'_n$ hanno per imagini $\alpha'_1, \alpha'_2, \ldots, \alpha'_n$.

39. Il procedimento or ora adoperato comporta una certa arbitrarietà. E invero l'operazione A di cui in esso si discorre può essere effettuata in infiniti modi diversi (badando, per altro, che se tutte le p_j sono eguali a 1 gli elementi di ogni riga di ω' non possono variare che per un fattore di proporzionalità); e lo stesso dicasi per la successiva operazione B.

Ma è evidente che, comunque si proceda nella scelta di queste operazioni A e B, di fronte alla relazione di isomorfismo, le matrici $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ a cui si perviene, sono nettamente individuate. E lo stesso accade per una di queste matrici, per es. per la ω_1, se tenendo fermo l'asse A_1 si considera un altro qualunque insieme di assi complementari di cui esso, eventualmente, fa parte, diverso dall'insieme $A_1, A_2, \ldots, A_n$.

Cosicchè, insomma, di fronte alla relazione di isomorfismo, la matrice ω_1 è individuata dall'asse A_1, e non dipende nè dall'insieme di assi complementari di cui A_1 fa parte (di tali insiemi esistendone sempre almeno uno), nè, dopo la scelta di questo insieme, dalla scelta delle operazioni A e B, di cui sopra.

Per render ragione di questo fatto anche con la nomenclatura potremmo estendere la definizione di matrice riemanniana, sì da poter considerare α_1 e A_1 come imagine e spazio rappresentativo di una matrice riemanniana isomorfa ad ω_1; ma preferiamo tener ferma quella definizione e attribuire invece all'asse A_1 la nomenclatura introdotta per la matrice ω_1. Quindi A_1 avrà un *genere,* un *indice di singolarità* o *moltiplicabilità* e per A_1 si avranno *reciprocità* o *sistemi nulli riemanniani,* ecc.; quei caratteri saranno i caratteri omonimi di ω_1 e queste reciprocità, ad es., saranno le reciprocità razionali di A_1 che mutano in sè lo spazio α_1.

In conformità di ciò, il *carattere simultaneo* di due assi A_1 e B_1 di ω sarà il massimo numero di trasformazioni omografiche razionali linearmente indipendenti di A_1 in B_1 che portano i punti di A_1 comuni a τ in punti di B_1 situati egualmente su τ. I due assi si diranno poi *vincolati* o *non vincolati* secondo che questo loro carattere simultaneo è positivo o nullo; e se sono vincolati e una (almeno) delle omografie razionali, in discorso, non è degenere, si diranno anche *isomorfi.*

Dopo ciò è visibile senz'altro in qual senso parleremo di *carattere simultaneo* di assi appartenenti a matrici riemanniane diverse; e che cosa intenderemo dire chiamandoli *vincolati* o *non vincolati, isomorfi* o *non isomorfi.*

40. Sul procedimento adoperato nel n° 38 notiamo ancora quanto segue.

L'operazione B di cui in esso si discorre si può supporre in ogni caso intera; ma in generale non sarà modulare. Però giova far vedere che:

A portare un solo asse, per es. A_1, in uno spazio della piramide fondamentale vi si può sempre riuscire con omografie rispondenti a operazioni B modulari [42]).

Infatti con una tale omografia si può in primo luogo portare un punto razionale di A_1 nel vertice 1 della piramide fondamentale, perchè asserir questo equivale ad asserire che si può costruire un determinante a elementi interi ed eguale a 1 in cui gli elementi della prima colonna siano numeri interi, primi fra loro, assegnati ad arbitrio; poi, per una ragione analoga, con una omografia della specie voluta e che lasci fermi il vertice 1 e la faccia ad esso opposta nella piramide fondamentale, si può portare nel vertice 2 un punto razionale della nuova posizione di A_1 situato su quella faccia; e così via. L'operazione B modulare corrispondente all'omografia prodotto di tutte queste omografie soddisfa appunto allo scopo voluto;

41. Dalle osservazioni del n° 39, congiunte a quelle dei n[i] 29, 30 e 31 discendono senz'altro i seguenti teoremi [43]).

a) Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $B_1, B_2, \ldots, B_m$ sono due insiemi di assi complementari delle due matrici impure ω e ω', rispettivamente, per il carattere simultaneo λ di ω e ω' si ha:

$$\lambda = \sum_j^{1..n} \sum_l^{1...m} \Lambda_{j,l} \tag{34}$$

dove $\Lambda_{j,l}$ è il carattere simultaneo di A_j e B_l; e la stessa formula vale se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ e $B_1, B_2, \ldots, B_m$ sono due insiemi di assi contenuti in due assi impuri A e B di ω e ω', rispettivamente, e ivi complementari, purchè si supponga che λ sia il carattere simultaneo di A e B;

a') Se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono n assi complementari di una matrice impura, se k e h sono gli indici di singolarità e moltiplicabilità della matrice, k_j e h_j quelli dell'asse A_j e infine $\lambda_{j,l}$ è il carattere simultaneo di A_j e A_l si ha:

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_n + n - 1 + \sum \lambda_{j,l} \tag{35}$$

$$h = h_1 + h_2 + \cdots + h_n + n - 1 + 2\sum \lambda_{j,l} \tag{36}$$

col solito significato dei sommatori; e le stesse formule sussistono, se $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sono n assi contenuti in un asse impuro B e ivi complementari, purchè si intenda che k e h siano gli indici di singolarità e moltiplicabilità di B;

Dati due assi complementari A_1 e A_2 di una matrice impura e conservate per essi le notazioni del teorema a') (dove, adesso, $n = 2$):

b) esistono $k_2 + 1$ $(k_1 + 1)$, e non più, sistemi nulli riemanniani degeneri della matrice aventi per asse A_1 (A_2) e linearmente indipendenti;

c) esistono $k_1 + k_2 + 2$, e non più, sistemi nulli riemanniani indipendenti non degeneri della matrice rispetto a cui A_1 e A_2 sono mutuamente polari;

---

42) Questa proposizione è ben nota. È stata accolta nel testo solo per uniformità e chiarezza di esposizione.

43) SCORZA, loc. cit. 7) *d*) e *g*).

d) *esistono* $h_2 + 1$ ($h_1 + 1$), *e non più, omografie riemanniane indipendenti e degeneri della matrice che abbiano per primo asse* A_1 (A_2) *e per secondo asse* A_2 (A_1);

e) *se* $\lambda_{1,2} > 0$ *esistono* $\lambda_{1,2}$, *e non più, sistemi nulli riemanniani indipendenti della matrice rispetto a cui* A_1 *e* A_2 *sono spazi autoconiugati;*

f) *se* $\lambda_{1,2} > 0$ *esistono* $\lambda_{1,2}$, *e non più, omografie di* Riemann *degeneri e indipendenti della matrice che abbiano per primo asse* A_1 (A_2) *o uno spazio passante per esso, e per secondo asse uno spazio contenuto in* A_1 (*in* A_2).

Il teorema *b*) contiene implicitamente il fatto che se l'asse A_1 ammette più di un asse complementare, l'indice di singolarità di questo è però individuato; ma le formule (35) e (36) per $n = 2$ dànno:

(37) $$k = k_1 + k_2 + 1 + \lambda_{1,2}$$

(38) $$h = h_1 + h_2 + 1 + 2\lambda_{1,2}$$

quindi è pure individuato $\lambda_{1,2}$ e poi h_2; dunque:

g) *Se un asse di una matrice impura ammette assi complementari distinti, questi hanno tutti gli stessi indici di singolarità e moltiplicabilità;*

e:

i) *Il carattere simultaneo di due assi complementari di una matrice impura è individuato appena sia dato uno dei due assi.*

In base a quest'ultima proposizione, il carattere simultaneo di due assi complementari di una matrice impura l'abbiamo anche chiamato, altrove, *coefficiente di immersione* di uno qualunque di essi [44]).

Allora la formula (37), posta a riscontro col teorema *c*) e col ragionamento del n° 36, mostra che:

Un asse di una matrice impura ammette un solo asse complementare o infiniti assi complementari distinti secondo che il suo coefficiente di immersione è nullo o positivo.

Secondo che si verifica la prima o la seconda alternativa di questo enunciato, l'asse si dirà isolato o non isolato.

Se un asse è isolato, tale è pure il suo complementare.

Se un asse non è isolato, basta considerare un suo complementare e gli spazi polari di questo rispetto ai sistemi nulli riemanniani non singolari della matrice, per accorgersi che esso fa parte di una totalità infinita discontinua di assi della matrice aventi tutti lo stesso genere e gli stessi indici di singolarità e moltiplicabilità.

Queste osservazioni sono tutte precisate dal teorema che si troverà al n° 43.

---

[44]) Scorza, loc. cit. [7]) *d*).

§ 7.

Limiti superiori per gli indici di singolarità e moltiplicabilità di una matrice pura.

42. Sia ω una matrice riemanniana di genere p e supponiamo che per essa le notazioni Σ, τ, $\bar{\tau}$, k e h abbiano i soliti significati.

Consideriamo la totalità lineare $\infty^{p(2p-1)-1}$ dei sistemi nulli di Σ e riferiamola omograficamente a quella dei punti di uno spazio lineare proiettivo S, della dimensione $p(2p-1)-1$, fissando in S un sistema di coordinate proiettive omogenee e facendo poi corrispondere al sistema nullo di Σ rappresentato dall'equazione:

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} \gamma_{r,s} x_r y_s = 0 \qquad (\gamma_{r,s} + \gamma_{s,r} = 0)$$

il punto di S che ha per coordinate (in un ordine fissato) le $\gamma_{r,s}$ per cui $r < s$.

Allora i sistemi nulli reali o razionali di Σ si riflettono in punti reali o razionali di S e inversamente.

La totalità dei sistemi nulli singolari di Σ si rispecchia in un'ipersuperficie F di S dell'ordine p. I sistemi nulli di Σ che hanno un punto singolare in un punto (di Σ) assegnato costituiscono, se $p > 1$, un sistema lineare della dimensione $p(2p-3)$; quindi, corrispondentemente agli ∞^{2p-1} punti di Σ, F è solcata da ∞^{2p-1} spazi lineari della dimensione $p(2p-3)$, di cui ne passano ∞^1 per ogni suo punto generico. Fra questi $S_{p(2p-3)}$ sono poi razionali quelli, e soltanto quelli, che provengono dai punti razionali di Σ.

I punti di S rispondenti ai sistemi nulli riemanniani di ω sono tutti e soli i punti razionali di un certo spazio razionale μ che ha la dimensione k.

Allora si supponga che sia $k \geqq 2p-1$, e quindi $p > 1$.

In tal caso, ognuno degli $S_{p(2p-3)}$ razionali di F sega μ in uno spazio razionale della dimensione t con

$$t \geqq p(2p-3)+k-p(2p-1)+1 \geqq p(2p-3)+2p-1-p(2p-1)+1=0,$$

e quindi per ogni punto razionale di Σ esiste almeno un sistema nullo riemanniano degenere di ω (non del tutto indeterminato) che ha in esso un punto singolare. Ciò porta che ω è, nell'ipotesi fatta, necessariamente impura e che per ogni punto razionale di Σ passa almeno un suo asse; cioè che essa ammette infiniti assi distinti, dal momento che un asse di ω o un numero finito dei suoi assi non possono mai contenere tutti i punti razionali di Σ.

Di qua deduciamo che:

Una matrice riemanniana del genere p con l'indice di singolarità non inferiore a $2p-1$ è impura ed ammette infiniti assi distinti;

e quindi:

Una matrice riemanniana pura del genere p ha al massimo per indice di singolarità $2p-2$ [45]).

Si consideri, adesso, il sistema lineare ∞^{4p^2-1} di tutte le omografie di Σ e si noti che quelle fra di esse aventi un punto singolare in un punto assegnato formano un sistema lineare della dimensione $4p^2-2p-1$. Allora, procedendo in maniera analoga a quella or ora adoperata, si trova che:

Una matrice riemanniana del genere p con l'indice di moltiplicabilità non inferiore a $2p$ *è impura ed ammette infiniti assi distinti;*

e quindi:

Una matrice riemanniana pura del genere p ha al massimo l'indice di moltiplicabilità $2p-1$ [46]).

§ 8.

La configurazione degli assi di una matrice impura.

43. *Se due assi* A_1 *e* A'_1 *di una matrice impura hanno uno stesso complementare* A_2, A_1 *e* A'_1 *sono isomorfi* [47]).

E infatti siano σ e σ' due sistemi nulli riemanniani non singolari della matrice, tali che rispetto ad essi A_2 abbia per spazi polari A_1 e A'_1 rispettivamente. Il prodotto $\sigma\sigma'^{-1}$ è un'omografia riemanniana non singolare della matrice che porta A_1 in A'_1; quindi A_1 e A'_1 sono isomorfi.

Segue, in particolare, che:

Il carattere simultaneo di A_1 *e* A'_1 *è uguale al loro comune indice di moltiplicabilità aumentato di* 1.

44. *Se due assi complementari* A_1 *e* A_2 *di una matrice impura sono isolati, ogni altro eventuale asse della matrice o giace in* A_1 *(in* A_2*), o congiunge un asse contenuto in* A_1 *con un asse contenuto in* A_2 [48]).

Infatti ogni sistema nullo riemanniano della matrice, data l'ipotesi fatta, è linearmente dipendente da quelli che sono degeneri e hanno l'asse in A_1 o in A_2; e allora esso non può essere a sua volta degenere se non a patto di avere per asse uno spazio contenuto in A_1 (in A_2), o uno spazio congiungente uno spazio contenuto in A_1 con uno spazio contenuto in A_2 [49]).

Ma allora il teorema è da riguardare come dimostrato, perchè ogni asse di una matrice impura è asse [n° 41, *b*)] di qualche suo sistema nullo riemanniano degenere.

---

[45]) SCORZA, loc. cit. [7]) *c*), Nota II.

[46]) SCORZA, loc. cit. [7]), *g*).

[47]) SCORZA, loc. cit. [7]), *f*).

[48]) SCORZA, loc. cit. [7]), *e*).

[49]) Per la giustificazione di questa osservazione vedi la mia Nota ricordata in [48]).

Di qua discende subito che:

Se una matrice riemanniana ammette un asse isolato A_1, *ogni ulteriore asse indipendente da* A_1 *appartiene all'asse complementare di* A_1;

e quindi:

Se una matrice impura ammette degli assi $B_1, B_2, \ldots, B_m$ *e poi un asse* A_1, *indipendente da ciascuno di quelli ma non dall'asse che li congiunge, la matrice ammette senz'altro infiniti assi isomorfi ad* A_1 [50]).

E infatti, date le ipotesi, A_1, in virtù del penultimo enunciato, non può essere isolato; e quindi [n° 41 in fine, e n° 43] esistono infiniti assi isomorfi ad A_1.

45. Se un asse di una matrice impura è impuro, un asse ivi contenuto può essere *in esso* isolato o non isolato, cioè avere in esso un solo o infiniti assi complementari distinti. Ebbene:

Se l'asse A_1 *di una matrice impura è isolato, ogni asse contenuto in* A_1 *è isolato per la matrice se tale è in* A_1.

Infatti sia A_2 *il* complementare di A_1, B_1 un asse contenuto (in senso stretto) in A_1 e B_1' un complementare di B_1 *in* A_1. Per ipotesi A_2 non è vincolato ad A_1, quindi [n° 41, *a*)] non può neppure essere vincolato a B_1 o a B_1'; ma allora, poichè l'asse B_1 è complementare all'asse congiungente A_2 con B_1', il carattere simultaneo di B_1 e quest'asse eguaglia quello di B_1 e B_1', e quindi tali caratteri sono insieme nulli o insieme positivi. Di qua segue, in particolare, il teorema enunciato.

46. *Se una matrice impura è priva di assi isolati, i suoi assi puri (che sono senz'altro infiniti) sono tutti isomorfi fra di loro* [51]).

Supponiamo, se è possibile, che ciò non sia e indichiamo con A un asse puro della nostra matrice di dimensione minima ($\geqq 1$).

Ciascun sistema puro A_1 della matrice, non isomorfo ad A, non può essere indipendente da un qualsiasi asse complementare di A. E invero, o A_1 è di dimensione superiore a quella di A e allora, per ragioni di dimensione, la cosa è senz'altro manifesta; o A_1 ha la stessa dimensione di A, e allora A e A_1, non essendo isomorfi, non possono avere uno stesso complementare.

Ma un asse puro giace per intero in ogni asse che non è da esso indipendente, dunque ciascun complementare di A contiene *tutti* gli assi puri della matrice non isomorfi ad A.

Chiamiamo B l'asse della matrice di dimensione minima che, in virtù di quanto è stato detto, contiene tutti gli assi puri della matrice non isomorfi ad A.

Per ipotesi B non è isolato, quindi la matrice ammette infiniti assi isomorfi a B e ciascuno di questi contiene una configurazione di assi puri non isomorfi ad A proiet-

---

[50]) Questo teorema dà luogo, per la teoria degli integrali abeliani riducibili, alla proposizione di SEVERI [loc. cit. [12])] che generalizza il teorema di POINCARÉ contenuto nella Nota di questo Autore citata in [12]) *a*). Veramente l'enunciato del testo è più generale di quello corrispondente del SEVERI, ma si tratta, come già osservammo altra volta [loc. cit. [7]) *e*)], di una differenza non essenziale.

[51]) SCORZA, loc. cit. [7]) *f*).

tivamente identica a quella analoga contenuta in B. Ora questa conseguenza contrasta con la definizione stessa di B, dunque il teorema è dimostrato.

47. Da esso discendono conseguenze interessanti.

In primo luogo sia p il genere della matrice considerata, q quello di un suo qualunque asse puro A, n ($\geqq 2$) il numero degli assi di un suo gruppo fondamentale di assi puri.

Dovrà essere

$$nq = p$$

e quindi *q sarà un divisore di p (inferiore a p) ed n sarà indipendente dal gruppo fondamentale considerato.*

Inoltre siano k e h gli indici di singolarità e moltiplicabilità della matrice e k_1 e h_1 quelli di A. Il carattere simultaneo di due assi puri qualunque della matrice sarà allora $h_1 + 1$ e quindi applicando le formule (35) e (36) a un qualunque gruppo fondamentale della matrice si trae:

$$k = nk_1 + \frac{n(n-1)}{2} h_1 + \frac{(n-1)(n+2)}{2}, \tag{39}$$

$$h = n^2(h_1 + 1) - 1. \tag{40}$$

Ma $n = \dfrac{p}{q}$ e inoltre, essendo A puro,

$$k_1 \leqq 2q - 2, \qquad h_1 \leqq 2q - 1,$$

dunque

$$k \leqq (p-1)\left(\frac{p}{q} + 1\right), \tag{41}$$

$$h \leqq 2\frac{p^2}{q} - 1. \tag{42}$$

48. *Se una matrice impura possiede due assi complementari isolati B_1 e B_2, ogni suo gruppo fondamentale di assi puri*

$$A_1, \quad A_2, \ \ldots, \ A_n$$

si scinde in due gruppi parziali, di cui uno è gruppo fondamentale di assi puri per B_1 e l'altro è gruppo fondamentale di assi puri per B_2; di più assi appartenenti a gruppi parziali diversi sono certo non vincolati (o non isomorfi) tra di loro.

E infatti ogni asse A_j, in quanto è puro, non potendo essere lo spazio congiungente un asse contenuto in B_1 con un asse contenuto in B_2, giace per intero in B_1 o in B_2 (n° 44); quindi è senz'altro evidente che gli assi A_j debbono distribuirsi fra B_1 e B_2. Ed è poi chiaro, per ragioni di dimensione, che essi non possono stare tutti in B_1 o tutti in B_2, e che quelli che giacciono in B_1 (in B_2) formano ivi un gruppo fondamentale di assi puri.

Infine, una volta che il carattere simultaneo di B_1 e B_2 è nullo, deve esser tale quello di due assi A_j situati l'uno in B_1 e l'altro in B_2.

Inversamente, è chiaro che:

Se un gruppo fondamentale

$$A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$$

di assi puri di una matrice impura può scindersi in due gruppi parziali

$$A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_m; \qquad A_{m+1},\ A_{m+2},\ \dots,\ A_n$$

sì che ciascun asse di un gruppo non sia isomorfo ad alcun asse dell'altro, gli assi B_1 e B_2 congiungenti rispettivamente gli assi dei due gruppi sono complementari e isolati.

49. Ciò posto, si consideri una qualsiasi matrice impura di genere p, sia

$$(43) \qquad A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_n$$

un suo gruppo fondamentale di assi puri, e si prenda di mira in questo l'asse A_1.

Può darsi che A_1 non sia vincolato, o, ciò che fa lo stesso, isomorfo ad alcun altro asse A_j; ma può darsi anche che di questi assi ne esistano. Comunque sia, si indichi con

$$(44) \qquad A_1,\ A_2,\ \dots,\ A_{n_1} \qquad (1 \leqq n_1 \leqq n)$$

l'insieme di tutti gli assi del gruppo isomorfi ad A_1.

Adesso, se $n_1 < n$, si ripeta per un asse A_j che non sia nel gruppo parziale (44) il ragionamento fatto per A_1; e così si continui. Si giungerà alla fine a scindere il gruppo fondamentale (43) in m gruppi parziali ($m \geqq 1$), contenenti successivamente $n_1,\ n_2,\ \dots,\ n_m$ assi, così che due assi appartenenti a uno stesso gruppo parziale sono isomorfi tra di loro, mentre due assi appartenenti a gruppi diversi sono certo non isomorfi tra di loro.

Naturalmente sarà

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_m = n$$

e per ciascuna delle n_l sarà

$$1 \leqq n_l \leqq n.$$

Se $m = 1$, la matrice è, per quanto precede, priva di assi isolati e si ricade in fatti ormai noti; supponiamo dunque $m \geqq 2$.

Allora la matrice considerata non può ammettere altri assi isolati all'infuori di quelli che congiungono tutti gli assi A_j appartenenti a uno o a più degli m gruppi parziali in discorso; e poichè questi sono realmente isolati, si conclude che nell'ipotesi attuale gli assi isolati della matrice sono tutti e soli:

a) gli assi $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_m$ congiungenti rispettivamente gli assi puri dei singoli gruppi parziali;

b) e poi gli assi che congiungono $C_1, C_2, \dots, C_m$ a due a due, a tre a tre, ..., a $m-1$ a $m-1$ in tutte le maniere possibili.

Il numero totale degli assi isolati della matrice è dunque:

$$\binom{m}{1} + \binom{m}{2} + \cdots + \binom{m}{m-1} = 2^m - 2.$$

Notisi che $m \leqq n$ e che $n \leqq p$; quindi:

Se una matrice impura ammette assi isolati, il numero di questi è finito e del tipo $2^m - 2$ $(0 < m \leqq p)$, *ed essi son tutti forniti da certi m assi complementari* $C_1, C_2, \ldots, C_m$, *nessuno dei quali contiene assi isolati (in esso o per la matrice) di dimensione inferiore alla propria, e poi dagli assi che li congiungono a due a due, a tre a tre, ..., a* $m-1$ *a* $m-1$ *in tutte le maniere possibili. Inoltre ogni gruppo fondamentale di assi puri della matrice si ottiene associando fra di loro m gruppi fondamentali di* $C_1, C_2, \ldots, C_m$ *rispettivamente.*

Ora un gruppo fondamentale di un asse C_l, una volta che questo è privo di assi isolati in esso, o coincide con C_l, se C_l è puro, o consta di assi puri tutti isomorfi e può esser scelto in infinite maniere diverse, i suoi assi puri essendo però sempre di *un* tipo determinato rispetto alla relazione di isomorfismo, quindi:

Una matrice impura di genere p o contiene un solo gruppo fondamentale di assi puri, e allora il numero dei suoi assi è finito ed è del tipo $2^m - 2$ *(con* $0 < m \leqq p$*), o ne contiene infiniti; ma in questa seconda ipotesi i vari gruppi fondamentali contengono tutti lo stesso numero di assi puri, per ogni asse dell'uno esistendo in qualsiasi altro gruppo un asse isomorfo a quello, e inoltre in ogni gruppo appariscono necessariamente assi (puri) isomorfi* [52]).

50. Nelle considerazioni che ci hanno condotti all'ultimo teorema enunciato sono implicitamente contenuti questi altri [53]):

Una matrice impura priva di assi isolati è sempre isomorfa a una matrice composta del tipo:

$$(45) \qquad \begin{vmatrix} \omega & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \omega & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \omega \end{vmatrix}$$

la matrice ω *essendo pura;*

e:

Una matrice impura con assi isolati è sempre isomorfa a una matrice del tipo

$$(46) \qquad \begin{vmatrix} \omega_1 & 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & \omega_2 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 0 & \omega_m \end{vmatrix}$$

dove le matrici $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_m$ *sono due a due non vincolate e inoltre ciascuna di esse o è pura o ha l'aspetto* (45).

Il primo di questi dà poi subito che:

---

[52]) SCORZA, loc. cit. [7]) *e*), *f*).

[53]) I quali implicano, a loro volta, e generalizzano i teoremi di BOLZA e DE FRANCHIS ricordati in [12]).

Allorquando una matrice impura è priva di assi isolati, due suoi assi qualunque sono isomorfi appena hanno lo stesso genere (o la stessa dimensione);
con che resta generalizzato il teorema del n° 46.

§ 9.

Teoremi ulteriori sulle matrici impure con assi isolati.

51. *Se una matrice riemanniana impura di genere p contiene assi isolati e fra questi m ($\geqq 2$) è il numero di quelli che non contengono assi isolati di dimensione inferiore alla propria* [54]*, per gli indici di singolarità e moltiplicabilità k e h della matrice si ha:*

$$k \leqq (p-m+1)^2 + m - 2 \qquad \text{e} \qquad h \leqq 2(p-m+1)^2 + 2m - 3.$$

E infatti siano $A_1, A_2, \ldots, A_m$ gli assi isolati in discorso e siano q_j, k_j e h_j il genere e gli indici di singolarità e moltiplicabilità dell'asse A_j ($j = 1, 2, \ldots, m$).

Poichè gli assi $A_1, A_2, \ldots, A_m$ sono complementari e a due a due non vincolati si ha:

$$q_1 + q_2 + \cdots + q_m = p, \tag{47}$$

$$k = k_1 + k_2 + \cdots + k_m + m - 1, \tag{48}$$

$$h = h_1 + h_2 + \cdots + h_m + m - 1. \tag{49}$$

Ma

$$k_j \leqq q_j^2 - 1 \qquad \text{e} \qquad h_j \leqq 2q_j^2 - 1, \tag{50}$$

dunque:

$$k \leqq q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_m^2 - 1 \qquad \text{e} \qquad h \leqq 2(q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_m^2) - 1. \tag{51}$$

Allora tutto si riduce a far vedere che, in base alla relazione (47) fra i numeri interi positivi q_j si ha necessariamente:

$$q_1^2 + q_2^2 + \cdots + q_m^2 \leqq (p-m+1)^2 + m - 1. \tag{52}$$

Ora questa è un'osservazione aritmetica elementare che si giustifica subito.

Infatti si ha

$$q_j q_l = (q_j - 1)(q_l - 1) + q_j + q_l - 1;$$

quindi, estendendo i sommatori a tutte le combinazioni binarie (j, l) degli indici $1, 2, \ldots, m$:

$$\sum q_j q_l = (m-1)p - \frac{m(m-1)}{2} + \sum (q_j - 1)(q_l - 1),$$

---

54) Il teorema è valido per ogni insieme di m assi complementari isolati. Ma prendendo per m, come si fa nel testo, il *massimo* valore possibile si ottiene il teorema nella sua forma più significativa.

e di qua

$$(53)\quad q_1^2+q_2^2+\cdots+q_m^2=p^2-2\sum q_j q_l=(p-m+1)^2+m-1-2\sum(q_j-1)(q_l-1).$$

Ma le differenze q_j-1 sono tutte nulle o positive, quindi segue senz'altro la (52).

Si osservi che, essendo $2 \leqq m \leqq p$, si ha:

$$(p-m+1)^2+m-2=(p-1)^2-(m-2)(2p-m-1)\leqq(p-1)^2$$

e

$$2(p-m+1)^2+2m-3=2(p-1)^2+1-2(m-2)(2p-m-1)\leqq 2(p-1)^2+1;$$

dunque:

Una matrice impura del genere p con assi isolati ha l'indice di singolarità non superiore a $(p-1)^2$ e quello di moltiplicabilità non superiore a $2(p-1)^2+1$.

Notisi inoltre che se gli assi A_j sono puri, cioè se la matrice contiene soltanto un numero finito di assi, si ha:

$$k_j \leqq 2q_j-2 \qquad \text{e} \qquad h_j \leqq 2q_j-1;$$

quindi

$$(54)\qquad k\leqq 2p-m-1 \qquad \text{e} \qquad h\leqq 2p-1.$$

Di queste diseguaglianze la seconda non insegna nulla di nuovo (n° 42); invece la prima, ricordando che $m \geqq 2$, dà, in particolare:

$$(55)\qquad k\leqq 2p-3.$$

Dunque:

Una matrice impura del genere p che contenga soltanto un numero finito di assi ha un indice di singolarità non superiore a $2p-3$ [55]).

52. Se fra le q_j del n° precedente ve ne sono r $(\geqq 2)$ maggiori di 1, e non più, le disuguaglianze ivi date per k ed h possono esser precisate.

Le q_j maggiori di 1 siano $q_1, q_2, \ldots, q_r$ e si supponga $q_1 \leqq q_2 \leqq \cdots \leqq q_r$: allora

$$q_{r+1}=q_{r+2}=\cdots=q_m=1 \qquad \text{e} \qquad q_1+q_2+\cdots+q_r=p-m+r \quad (r\leqq m).$$

Poi si ha:

$$\begin{aligned}
&\sum(q_j-1)(q_l-1)\\
&=(q_1-1)(p-q_1-m+1)+(q_2-1)(p-q_1-q_2-m+2)+\cdots\\
&\qquad\cdots+(q_{r-1}-1)(p-q_1-q_2-\cdots-q_{r-1}-m+r-1)\\
&\geqq(p-m-1)+(p-m-q_1)+(p-m-q_1-q_2+1)+\cdots\\
&\qquad\cdots+(p-m-q_1-q_2-\cdots-q_{r-2}+r-3)\\
&=(r-1)(p-m)+\frac{(r-1)(r-4)}{2}-(r-2)q_1-(r-3)q_2-\cdots-2q_{r-3}-q_{r-2}.
\end{aligned}$$

Se $r=2$, nell'ultimo membro di questa espressione apparisce semplicemente $p-m-1$.

---

55) SCORZA, loc. cit. 7) *e*)

Sia, adesso, $r > 2$ e dispari. Si suppongano scritti i termini della somma

$$(r-2)q_1 + (r-3)q_2 + \cdots + 2q_{r-3} + q_{r-2}$$

in $r-2$ orizzontali di cui la prima contenga la somma $q_1 + q_2 + \cdots + q_{r-2}$; la seconda la somma $q_1 + q_2 + \cdots + q_{r-3}$; ..., l'$(r-2)^{\text{ma}}$ soltanto il termine q_1. Si aggiunga alla somma della prima orizzontale quella dell'$(r-3)^{\text{ma}}$ dopo aver cambiato i termini q_1 e q_2 di questa in q_{r-1} e q_r; alla somma della seconda quella dell'$(r-4)^{\text{ma}}$ dopo aver cambiato i termini q_1, q_2 e q_3 di questa in q_{r-2}, q_{r-1}, q_r e così via. Verrà:

$$(r-2)q_1 + (r-3)q_2 + \cdots + 2q_{r-3} + q_{r-2} \leqq \frac{r-3}{2}(q_1 + q_2 + \cdots + q_r)$$
$$+ q_1 \leqq \frac{r-3}{2}(p-m+r) + \frac{p-m+r}{r}.$$

Se invece r è pari e > 2, procedendo come or ora, di coppie di orizzontali, esclusa la $(r-2)^{\text{ma}}$, se ne possono formare $\frac{r-4}{2}$, e poi resta l'orizzontale $\left(\frac{r}{2}-1\right)^{\text{ma}}$ che porta $q_1 + q_2 + \cdots + q_{\frac{r}{2}}$. Dunque:

$$(r-2)q_1 + (r-3)q_2 + \cdots + 2q_{r-3} + q_{r-2} \leqq \frac{r-4}{2}(p-m+r) + \frac{1}{2}(p-m+r) + \frac{p-m+r}{r}$$
$$= \frac{r-3}{2}(p-m+r) + \frac{p-m+r}{r}.$$

Si ha cioè qualunque sia r $(\geqq 2)$

$$(r-2)q_1 + (r-3)q_2 + \cdots + 2q_{r-3} + q_{r-2} \leqq \frac{r-3}{2}(p-m+r) + \frac{p-m+r}{r},$$

poichè se $r=2$ entrambi i membri di questa espressione sono nulli.

Ma allora viene:

$$\sum (q_j - 1)(q_l - 1) \geqq \frac{r^2+r-2}{2r}(p-m) - r + 1$$

e quindi:

$$k \leqq (p-m+1)^2 - \frac{r^2+r-2}{r}(p-m) + 2r + m - 4$$

e:

$$h \leqq 2(p-m+1)^2 - 2\frac{r^2+r-2}{r}(p-m) + 2m + 4r - 7.$$

§ 10.

Sviluppo di alcuni esempi.

53. Abbiamo già osservato che se una matrice riemanniana è ellittica essa è necessariamente pura; e per i suoi soliti indici k e h si ha:

(I) $$k = 0 \quad \text{e} \quad h = 0,$$

oppure

(II) $$k = 0 \quad \text{e} \quad h = 1.$$

Se la matrice si suppone ridotta con un'operazione A all'aspetto

$$|1, \alpha|$$

(con α imaginario) si verifica il caso (I) o il caso (II) secondo che α non è od è un numero quadratico.

Se due matrici ellittiche sono vincolate, esse sono anche isomorfe; e il loro carattere simultaneo λ è dato da

$$\lambda = 1 \quad \text{o} \quad \lambda = 2,$$

secondo che sono entrambe del tipo (I) o entrambe del tipo (II).

54. Di qua, tenendo presenti le formule (39) e (40) del n° 47, si ha subito che:

Se una matrice impura del genere p (> 1) non possiede assi isolati e i suoi assi puri sono tutti (del genere 1 o) ellittici, per i suoi indici k e h o si ha:

(I) $$k = \frac{(p-1)(p+2)}{2} \quad e \quad h = p^2 - 1;$$

o si ha

(II) $$k = p^2 - 1 \quad e \quad h = 2p^2 - 1.$$

In entrambi i casi la matrice è isomorfa a una matrice avente l'aspetto:

$$\begin{vmatrix} 1 & \alpha & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \alpha & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 1 & \alpha \end{vmatrix}$$

e si verifica il caso (I) *o il caso* (II) *secondo che α non è o è un numero (imaginario) quadratico* [56]).

Quest'ultima osservazione (che segue subito dal n° 50) rende senz'altro manifesta l'esistenza delle matrici in discorso.

55. L'enumerazione dei vari tipi di matrici riemanniane del genere 2 è stata già compiuta dal Rosati [57]) e sarà ritrovata più innanzi dal punto di vista attuale.

Da essa risulta che per una matrice pura di genere 2 gli indici k e h possono presentare le seguenti quattro alternative:

$$k = 0 \text{ e } h = 0; \quad k = 1 \text{ e } h = 1; \quad k = 1 \text{ e } h = 3; \quad k = 2 \text{ e } h = 3;$$

mentre per quelle impure si hanno le cinque alternative:

$$k = 1 \text{ e } h = 1; \quad k = 1 \text{ e } h = 2; \quad k = 1 \text{ e } h = 3;$$
$$k = 2 \text{ e } h = 3; \quad k = 3 \text{ e } h = 7.$$

---

56) Scorza, loc. cit. 7) *f*). Ivi il teorema si trova soltanto enunciato, ma non vi si tiene conto dei valori di h perchè allora non avevo ancora introdotto l'indice di moltiplicabilità. L'enunciato completo apparisce però nella Nota preventiva citata in 7), *g*).

57) Loc. cit. 7), *b*) e *c*).

Quest'ultime si ricavano subito osservando che qui gli assi non possono essere che ellittici e che quindi per il calcolo di k e h si possono adoperare le formule (37) e (38), ove sarà da fare in ogni caso $k_1 = k_2 = 0$ e poi $h_1 = 0, 1$, $h_2 = 0, 1$ e $\lambda_{1,2} = 0, 1, 2$, badando che, allorchè si pone per $\lambda_{1,2}$ un valore non nullo, h_1 e h_2 debbono eguagliare entrambi $\lambda_{1,2} - 1$.

Ma allora le formule (39) e (40) del n° 47 dànno che:

Una matrice impura del genere p priva di assi isolati e i cui assi puri siano tutti del genere 2 (cosicchè p è un numero pari, ≥ 4) non può presentare che quattro aspetti differenti, tutti realizzabili, e caratterizzati dalle seguenti coppie di valori per gli indici k e h:

$$\text{(I)} \qquad k = \frac{(p-2)(p+4)}{8} \quad e \quad h = \frac{p^2}{4} - 1;$$

$$\text{(II)} \qquad k = \frac{p^2 + 2p - 4}{4} \quad e \quad h = \frac{p^2}{2} - 1;$$

$$\text{(III)} \qquad k = \frac{p^2 - 2}{2} \quad e \quad h = p^2 - 1;$$

$$\text{(IV)} \qquad k = \frac{(p-1)(p+2)}{2} \quad e \quad h = p^2 - 1.$$

56. Come ultimo esempio calcoliamo gli indici k e h per una matrice impura del genere 3.

Un gruppo fondamentale di assi puri di una tal matrice o contiene un asse ellittico e un asse di genere 2; o contiene tre assi ellittici.

Nella prima alternativa i due assi del gruppo sono certo (non vincolati fra di loro, cioè) isolati; nella seconda sono tutti e tre isolati o non isolati, oppure è isolato uno solo.

Nel primo caso sugli indici k e h di un asse possono esser fatte due ipotesi differenti e su quelli dell'altro ne possono esser fatte quattro; dunque si avranno complessivamente 8 tipi differenti coi seguenti valori per k e h:

$$(\alpha) \quad \begin{cases} k=1, \; h=1; \quad k=2, \; h=2; \quad k=2, \; h=4; \quad k=3, \; h=4; \\ k=1, \; h=2; \quad k=2, \; h=3; \quad k=2, \; h=5; \quad k=3, \; h=5. \end{cases}$$

Nel secondo caso, se nessuno dei tre assi è isolato, si trovano i due tipi del n° 54 per cui si ha:

$$(\beta) \qquad k=5, \; h=8; \qquad \text{oppure} \qquad k=8, \; h=17;$$

se un asse è isolato e gli altri due no, sul primo possono esser fatte due ipotesi diverse e lo stesso vale per il suo complementare che risulta un asse di genere 2 impuro e privo di assi isolati; dunque si hanno altri 4 tipi, per cui è successivamente:

$$(\gamma) \quad k=3, \; h=4; \quad k=4, \; h=8; \quad k=3, \; h=5; \quad k=4 \;\; \text{e} \;\; h=9;$$

se gli assi sono tutti e tre isolati si hanno altri 4 tipi differenti secondo che l'indice h è 0 (o 1) per tutti e tre gli assi, oppure è 0 per uno e 1 per due, oppure è 0 per due e 1 per il terzo, alle quale ipotesi corrispondono per k e h le coppie di valori

$$(\delta) \qquad k=2,\quad h=2;\qquad k=2,\quad h=5;\qquad k=2,\quad h=4;\qquad k=2 \ \text{ e } \ h=3;$$

dunque:

Una matrice impura del genere 3 *può presentare* 18 *aspetti diversi e tutti realizzabili.*

57. Da quanto è detto nel n° 55 risulta che per $p=2$ l'indice h può assumere il massimo valore di cui allora è capace, cioè 7, ma non può essere nè 4, nè 5, nè 6; e poichè una matrice del genere 3 con $k>4$ o $h>5$ è certo impura (n° 42), basta guardare le tabelle (α), (β), (γ), (δ) del n° precedente per persuadersi che quando $p=3$, k e h possono raggiungere i massimi valori di cui sono capaci, cioè 8 e 17 rispettivamente, ma k non può essere nè 6, nè 7, e h non può assumere nessuno dei seguenti valori:

$$6,\quad 7,\quad 10,\quad 11,\quad 12,\quad 13,\quad 14,\quad 15,\quad 16.$$

Son questi i primi esempi di fatti che tra poco si vedranno verificarsi in generale, appena è, per quanto riguarda k, $p>2$, e, per quanto riguarda h, $p>1$.

§ 11.

Sui valori massimi e sui valori lacunosi dei caratteri k, h e λ.

58. Per una matrice riemanniana del genere p è, come sappiamo,

$$(56) \qquad k \leqq p^2-1 \quad \text{e} \quad h \leqq 2p^2-1,$$

e per il teorema del n° 54 può essere effettivamente

$$k=p^2-1 \quad \text{e} \quad h=2p^2-1.$$

Ebbene facciamo vedere che:

Se $p>1$, *nelle* (56) *valgono insieme i segni superiori o insieme i segni inferiori, e quest'ultima circostanza si verifica quando e solo quando la matrice è impura, è priva di assi isolati e i suoi assi puri sono tutti ellittici e con l'indice di moltiplicabilità* 1.

Infatti per $p>1$ è

$$p^2-1>2p-2 \quad \text{e} \quad 2p^2-1>2p-1$$

e quindi se è $k=p^2-1$, oppure $h=2p^2-1$ la matrice è certo impura e contiene infiniti assi puri distinti (n° 42).

Ma per $p>1$ è anche

$$p^2-1>(p-1)^2 \quad \text{e} \quad 2p^2-1>2(p-1)^2+1,$$

dunque, se $k=p^2-1$ oppure $h=2p^2-1$, la matrice (n° 51) è anche priva di assi isolati, cioè il k e l'h debbono esser dati da formule come le (39) e (40) e debbono soddisfare a diseguaglianze come le (41) e (42). Ma i secondi membri di queste sono certo inferiori a $p^2 - 1$ e $2p^2 - 1$, rispettivamente, se vi si suppone $q > 1$, dunque se $k = p^2 - 1$, oppure $h = 2p^2 - 1$, la matrice è impura, è priva di assi isolati e i suoi assi puri sono tutti ellittici.

Ma allora, per il teorema del n° 54, l'asserzione fatta si può considerare come giustificata.

Ad essa il caso $p = 1$ fa veramente eccezione, perchè allora k è sempre 0, mentre h può essere 0 o 1.

59. Consideriamo una matrice riemanniana del genere $p > 1$ a indici massimi, cioè con $k = p^2 - 1$ e $h = 2p^2 - 1$.

Da ogni punto razionale del suo spazio rappresentativo parte almeno un suo asse (n° 42); e questo è pure, come si vede subito, a indici massimi. Ma allora anche da un qualsiasi punto razionale di quest'asse, ove non sia ellittico, parte un asse della matrice ad indici massimi, che è contenuto in esso ed è di genere inferiore; quindi, ripetendo, ove occorra, questa deduzione, in ogni caso si può concludere che per ciascun punto razionale dello spazio rappresentativo passa un asse ellittico della matrice.

Abbiamo così il teorema:

Se una matrice riemanniana del genere $p > 1$ è ad indici massimi, ogni retta reale appoggiata alle sue imagini può considerarsi come retta limite di assi ellittici della matrice.

Viceversa:

Se ogni retta reale appoggiata alle imagini di una matrice riemanniana di genere $p > 1$ è limite di assi ellittici della matrice, la matrice è ad indici massimi [58]).

Intanto è chiaro che la matrice ha infiniti assi ellittici ed è priva di assi isolati, poichè se ammettesse due assi complementari isolati A e B, gli assi ellittici sarebbero tutti contenuti in A e B e il loro insieme non potrebbe avere per rette limiti tutte le rette reali appoggiate alle imagini. Quindi per essa si ha:

$$k = \frac{(p-1)(p+2)}{2} \quad \text{e} \quad h = p^2 - 1,$$

---

[58]) Questi ultimi due teoremi rivestono il loro maggiore interesse quando si riferiscano alle varietà algebriche con integrali ellittici. Vedi SCORZA, loc. cit. [7]) *c*) ove i teoremi furono enunciati per la prima volta e dimostrati per via diversa da quella attuale. Un'altra dimostrazione, per l'uno e per l'altro, è stata data dal DE FRANCHIS nella sua recente Nota: *Sulle varietà con infiniti integrali ellittici* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XL (2° semestre 1915), pp. 187-193].

A proposito di questi teoremi possono interessare i seguenti esempi.

La quartica di KLEIN

$$x_1 x_2^3 + x_2 x_3^3 + x_3 x_1^3 = 0,$$

e la quartica di DICK

$$x_1^4 + x_2^4 + x_3^4 = 0,$$

sono del genere 3 e ammettono terne di integrali ellittici indipendenti a moltiplicazione complessa e vincolati [v. H. F. BAKER, *An introduction to the theory of multiply periodic functions* (Cambridge, University Press, 1907), n^{i} 74 e 75]; dunque esse sono ad indici massimi, ossia il loro indice di singolarità è 8 e quello di moltiplicabilità è 17.

oppure

$$k = p^2 - 1 \quad \text{e} \quad h = 2p^2 - 1.$$

Ma allora il teorema sarà senz'altro dimostrato se facciamo vedere che nelle ipotesi attuali la prima alternativa deve essere esclusa; e per questo ci basterà stabilire il fatto, per sè stesso interessante, che:

Quando essa si verifica le rette assi della matrice segnano sulle sue imagini coppie di punti omologhi in una proiettività e quindi appartengono a una V_p^p *razionale normale* [59]).

Se $p = 2$, la cosa è manifesta, perchè allora, risultando $k = 2$, i sistemi nulli riemanniani della matrice stanno tutti in una rete e quindi le rette assi della matrice sono contenute in una schiera rigata ordinaria avente per direttrici le rette imagini della matrice. Per estendere il teorema agli altri casi basterà allora far ricorso al metodo di induzione matematica osservando che gli assi (impuri) della matrice di genere $p - 1, p - 2, \ldots, 2$ presentano tutti lo stesso suo tipo; che due suoi assi distinti di genere $p - 1$ si tagliano in un asse di genere $p - 2$ e che esiste sempre una ed una sola omografia tra due S_r che subordini proiettività assegnate tra due loro coppie di iperpiani, purchè queste inducano la stessa proiettività sugli S_{r-2} intersezioni delle due coppie di iperpiani.

60. Allorchè una matrice riemanniana è ad indici massimi (e col genere $\geqq 1$), ciascun punto razionale dello spazio rappresentativo ha per coniugato armonico rispetto alle sue imagini un punto che è pure razionale; quindi le sue imagini sono gli spazi dei punti uniti di un'omografia razionale involutoria dello spazio ambiente che risulta, evidentemente, una sua omografia riemanniana. E la stessa cosa sta per tutte le omografie razionali del fascio individuato da codesta omografia involutoria e dall'identità.

L'osservazione fatta può essere invertita e quindi:

In un assegnato S_{2p-1} $(p \geqq 1)$ *le imagini delle matrici riemanniane a indici massimi sono tutte e sole le coppie di* S_{p-1} *imaginari coniugati indipendenti che possono considerarsi come spazi fondamentali di omografie razionali non identiche.*

Consideriamo, adesso, una matrice di Riemann e il suo gruppo di moltiplicabilità.

Questo induce su ciascuna delle due imagini della matrice un gruppo di omografie che è ad esso isomorfo. Se l'isomorfismo non è oloedrico, esiste nel gruppo di moltiplicabilità qualche omografia che senza essere identica subordina sulle imagini l'identità. Ma allora, per quanto precede, la matrice è ad indici massimi.

In questo caso, poi, l'isomorfismo è veramente non oloedrico, dunque:

Il gruppo di moltiplicabilità di una matrice riemanniana induce sulle sue imagini dei gruppi di omografie a cui esso è oloedricamente isomorfo, eccettuato soltanto il caso in cui la matrice sia ad indici massimi [60]).

---

59) Questa osservazione, salva la forma dell'enunciato, apparisce già nella mia Nota citata in 7), *f*). Vedi ivi n° 10, *a*).

60) A proposito del gruppo di moltiplicabilità di una matrice riemanniana giova osservare che,

61. Anche il teorema del n° 51 può essere adesso precisato; noi possiamo cioè domandarci se e quando accade che nelle relazioni ivi scritte

$$k \leqq (p - m + 1)^2 + m - 2, \qquad h \leqq 2(p - m + 1)^2 + 2m - 3$$

valgano i segni di eguaglianza.

Evidentemente ciò non può avvenire se non quando sia, mantenendo le notazioni allora adoperate,

$$\sum (q_j - 1)(q_l - 1) = 0 \tag{57}$$

e poi nel primo o nel secondo gruppo delle (50) valgano sempre i segni di eguaglianza.

Ora la (57) porta che tutte le q_j debbono essere uguali a 1, tranne al più una che per la (47) deve essere allora uguale a $p - m + 1$, dunque:

Perchè nelle relazioni considerate si abbia per k o per h il segno di uguaglianza occorre e basta che uno degli assi A_j sia del genere $p - m + 1$ e gli altri siano tutti ellittici, e poi che essi siano tutti a indice massimo di singolarità o, rispettivamente, di moltiplicabilità.

In particolare risulta di qui che per una matrice di genere p con assi isolati i valori massimi di k e h sono proprio (cfr. n° 51) $(p - 1)^2$ e $2(p - 1)^2 + 1$, rispettivamente.

62. E ora dimostriamo che:

Se una matrice riemanniana è del genere $p > 3$, il suo indice di singolarità k non può essere uguale ad alcun numero della serie

$$(p - 1)^2 + 1, \qquad (p - 1)^2 + 2, \ldots, p^2 - 2.$$

In altri termini dobbiamo far vedere che, se $p > 3$, è assurdo supporre:

$$(p - 1)^2 < k < p^2 - 1.$$

E infatti se fosse $k > (p - 1)^2$ sarebbe pure, visto che è anche $p > 3$, $k > 2p - 2$, cioè la matrice sarebbe intanto (n° 42) impura, e poi (n° 51) essa sarebbe anche priva di assi isolati. Se i suoi assi puri fossero ellittici, essendo, per ipotesi, $k < p^2 - 1$, dovrebbe essere

$$k = \frac{(p - 1)(p + 2)}{2},$$

e se i suoi assi puri fossero di genere $q > 1$ sarebbe

$$k \leqq p - 1 + \frac{p^2 - p}{q} \leqq p - 1 + \frac{p^2 - p}{2} = \frac{(p - 1)(p + 2)}{2},$$

---

se questa è impura, il gruppo opera sull'insieme dei suoi assi puri in modo assolutamente transitivo quando e solo quando la matrice è priva di assi isolati. Si tengano presenti per ciò i n[i] 43 e 46 e si badi che due assi distinti equivalenti rispetto al gruppo di moltiplicabilità sono vincolati e quindi non possono essere isolati.

dunque, in ogni caso, si avrebbe

$$k \leqq \frac{(p-1)(p+2)}{2}$$

e quindi

$$(p-1)^2 + 1 \leqq \frac{(p-1)(p+2)}{2},$$

cioè

$$(p-2)(p-3) \leqq 0.$$

Ora questo è impossibile, se, come si è supposto, $p > 3$.

Se $p = 3$ la serie dei valori di k presenta ancora, come sappiamo, delle *lacune,* ma queste sono soltanto due e non tre, come darebbe questo teorema, ove sussistesse per $p = 3$.

In modo perfettamente analogo si vede che:

Se $p > 1$, l'indice di moltiplicabilità di una matrice riemanniana di genere p non può assumere alcun valore della serie

$$2(p-1)^2 + 2, \qquad 2(p-1)^2 + 3, \ldots, 2p^2 - 2.$$

63. Non è da credere che i teoremi precedenti diano tutte le lacune di k e h per ogni valore di p; così per esempio potremmo far vedere che:

Se $p > 6$ sono lacunosi per k tutti i valori della serie

$$(p-2)^2 + 4, \qquad (p-2)^2 + 5, \ldots, (p-1)^2 - 1,$$

e se $p > 9$ sono lacunosi per k anche tutti i numeri della serie

$$(p-3)^2 + 9, \quad (p-3)^2 + 10, \ldots, (p-2)^2 - 1;$$

e qualcosa di analogo potremmo stabilire per h. Ma poichè non potremmo assegnarli tutti per ogni valore di p, preferiamo non entrare in particolari minuti che, sotto quella restrizione, non sarebbero, poi, interessanti.

Osserveremo piuttosto che:

Se $p > 1$, ogni valore della serie

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots, 2p - 1$$

può essere effettivamente assunto da k.

Intanto è fuori dubbio che k può assumere, qualunque sia p, il valor zero; e ci è pur noto che il teorema è vero per $p = 2$ e per $p = 3$. Cosicchè per dimostrarlo in generale possiamo supporre $p > 3$ e supporre inoltre che il teorema sia vero per tutti i valori del genere inferiori a p.

Allora l'indice di singolarità di una matrice di genere $p - 1$ potrà assumere ciascun valore della serie

$$0, \quad 1, \quad 2, \ldots, 2p - 3$$

e quindi l'indice di singolarità di una matrice riemanniana di genere p, composta con una matrice ellittica e una matrice di genere $p - 1$ non vincolate fra loro, potrà bene assumere i valori

$$1,\ 2,\ 3, \ldots, 2p-2.$$

Inoltre essendo $p > 3$ si può spezzare p nella somma di due numeri interi q_1 e q_2 maggiori entrambi di 1; e allora basta considerare una matrice di genere p composta con due matrici riemanniane non vincolate dei generi q_1 e q_2, con gli indici di singolarità $2q_1 - 1$ e $2q_2 - 1$, per avere una matrice di genere p con l'indice di singolarità $2p - 1$.

Allo stesso modo si vede che:

Qualunque sia p, ogni valore della serie

$$0,\ 1,\ 2, \ldots, 2p-1$$

può essere effettivamente assunto dall'indice h.

64. Passiamo ora ad alcune semplici considerazioni sul carattere simultaneo λ di due matrici riemanniane ω e ω' dei generi p e p'.

Se ω e ω' non sono vincolate si ha senz'altro $\lambda = 0$.

Se sono vincolate e sono entrambe pure, è necessariamente $p = p'$ e λ eguaglia l'indice di moltiplicabilità di ω e ω' aumentato di 1. Ma questo indice (n° 42) è inferiore a $2p$, dunque:

$$\lambda \leqq 2p.$$

Se sono vincolate e sono una pura e l'altra impura, supposto che quella pura sia ω, si ha senz'altro $p < p'$. Poi, una volta che ω e ω' sono vincolate, in un qualsiasi gruppo fondamentale di assi puri di ω' esiste un gruppo parziale ed uno solo (che può anche coincidere col gruppo totale) di assi puri di genere p vincolati (o isomorfi) fra loro e vincolati (o isomorfi) ad ω; dove, beninteso, la frase « gruppo parziale » è adoperata nello stesso senso che nel n° 49. Detto m il numero di questi assi puri e h il loro indice di moltiplicabilità eguale a quello di ω, risulta [n° 41, a)]

$$\lambda = m(h+1).$$

Ora $mp \leqq p'$ e $h \leqq 2p - 1$, dunque

$$\lambda \leqq 2p'.$$

Supponiamo infine che ω e ω' siano vincolate ed entrambe impure.

Allora in un qualsiasi gruppo fondamentale di assi puri di ω esistono uno o più gruppi parziali, diciamo, di $m_1, m_2, \ldots, m_j$ assi puri dei generi $q_1, q_2, \ldots, q_j$, tali che gli assi di ciascun gruppo sono vincolati fra di loro e vincolati a quelli di *un* gruppo parziale analogo di un gruppo fondamentale di ω'. Detti rispettivamente $m'_1, m'_2, \ldots, m'_j$ i numeri degli assi di questi ultimi gruppi parziali, assi che risultano degli stessi generi $q_1, q_2, \ldots, q_j$, avremo:

$$\lambda = \sum_t^{1\ldots j} m_t m'_t (h_t + 1) \leqq 2 \sum_t^{1\ldots j} m_t m'_t q_t,$$

dove h_t sta ad indicare l'indice di moltiplicabilità comune degli assi puri dei t^{mi} gruppi parziali considerati.

Supponiamo, come è lecito, $m'_1 \geqq m'_2 \geqq \cdots \geqq m'_j$; allora

$$\lambda \leqq 2\, m'_1 \sum_{l}^{1\ldots j} m_l q_l \leqq 2\, m'_1 p.$$

Ma $m'_1 \leqq \frac{p'}{q_1}$, dunque

$$\lambda \leqq \frac{2\, p p'}{q_1}.$$

Se $q_1 \geqq 2$, il che accade certo se almeno una delle due matrici è priva di assi ellittici, di qua si trae

$$\lambda \leqq p p'.$$

Se $q_1 = 1$, basta che sia $m'_1 \leqq p' - 1$ perchè venga

$$\lambda \leqq 2\, p (p' - 1).$$

Se $q_1 = 1$ ed $m'_1 = p'$, ω' è priva di assi isolati e quindi $j = 1$ e per λ si ha:

$$\lambda = m_1 m'_1 (h_1 + 1) = m_1 p' (h_1 + 1).$$

Qui poi $h_1 \leqq 1$; se $h_1 = 0$, viene

$$\lambda = m_1 p' \leqq p p',$$

e quindi, una volta che per ipotesi $p' > 1$, è ancora *a fortiori*

$$\lambda \leqq 2\, p (p' - 1);$$

se $h_1 = 1$ viene

$$\lambda = 2\, m_1 p' \leqq 2\, p p',$$

verificandosi il segno di uguaglianza solo se $m_1 = p$, nel qual caso ω e ω' sono entrambe a indici massimi.

Riassumendo, possiam dunque asserire che:

Se λ è il carattere simultaneo di due matrici riemanniane ω e ω' dei generi p e p', secondo che ω e ω' sono entrambe pure, o sono la prima pura e la seconda impura, si ha $\lambda \leqq 2\, p$, oppure $\lambda \leqq 2\, p'$. Se sono entrambe impure si ha $\lambda = 2\, p p'$ quando, e solo quando, ω e ω' sono vincolate ed entrambe a indici massimi; se sono entrambe impure e almeno una non possiede assi ellittici si ha $\lambda \leqq p p'$; se sono entrambe impure e almeno una, per es. la ω', non è ad indici massimi, si ha $\lambda \leqq 2\, p (p' - 1)$.

In particolare, se $\lambda > 0$, viene $\lambda = 2\, p p'$ o quando ω e ω' sono entrambe impure e ad indici massimi; o quando sono entrambe pure, ma $p = p' = 1$ e il comune indice di moltiplicabilità è 1, o quando la prima è pura con $p = 1$ ed $h = 1$ e la seconda è impura ad indici massimi. Dunque:

Il carattere simultaneo di due matrici riemanniane vincolate dei generi p e p' raggiunge il massimo valore di cui è suscettibile, cioè il valore $2\, p p'$, quando e solo quando esse sono a indici massimi.

E risulta ancora facilmente che:

Se $p' \geqq p > 1$, *sono certo delle lacune per* λ *tutti i numeri della serie*

$$2p(p'-1)+1, \quad 2p(p'-1)+2, \ldots, 2pp'-1.$$

Basta osservare che se $p' \geqq p > 1$ si ha:

$$2p(p'-1) \geqq 2p'(p-1) \geqq pp' \geqq 2p' \geqq 2p.$$

§ 12.

Gli pseudo-assi delle matrici riemanniane.

65. Le ricerche esposte fin qui si riferiscono di preferenza alle matrici impure, ma esse suggeriscono spontaneamente una estensione che porta a considerazioni valide per tutte le matrici riemanniane. Riserbandoci di tornarvi in avvenire per dare ad esse un aspetto meno incompiuto, vale la pena di chiarire fin da ora il punto di partenza.

66. Si consideri una matrice riemanniana e si prendano di mira, per es., i suoi sistemi nulli riemanniani. Essi individuano una totalità lineare che ha per dimensione l'indice di singolarità della matrice.

Ebbene, se per molte delle questioni riguardanti la matrice, i sistemi di questa totalità che occorre considerare sono soltanto quelli riemanniani, cioè quelli razionali, per altre, invece, giova considerarli *tutti;* noi li diremo i *sistemi nulli* della matrice.

Fra di essi quelli, per altro, che più interessa di tener presenti sono i sistemi nulli *reali.* Appena l'indice di singolarità della matrice supera lo zero, fra questi, come vedremo, ne esistono necessariamente di quelli che sono anche singolari e la configurazione dei loro assi riveste, per lo studio delle proprietà della matrice, una particolare importanza.

Un sistema nullo *reale* della matrice si dirà *principale* se, all'infuori del fatto che esso non è, eventualmente, razionale, si comporta rispetto ad essa come un sistema nullo riemanniano principale.

Un tal sistema nullo sarà dunque certo non singolare e, se la matrice è di genere superiore a 1, il complesso lineare che esso definisce non conterrà alcuna delle rette reali appoggiate alle imagini della matrice.

Accanto ai sistemi nulli della matrice introdurremo anche le sue *reciprocità* ed *omografie* (riemanniane o no), alla cui definizione si perverrà procedendo allo stesso modo che più sopra. Sì le une, che le altre costituiscono una totalità lineare avente per dimensione l'indice di moltiplicabilità della matrice.

67. Per la chiarezza di quanto dovrà esser detto fra poco giova richiamare alcune semplici nozioni sui sistemi nulli di uno spazio lineare nell'ipotesi, che sola ci interessa, che la dimensione di questo spazio sia dispari.

Consideriamo dunque un S_{2p-1} Σ $(p \geqq 1)$ e stabiliamo in esso, al solito modo, un sistema di coordinate proiettive omogenee per i punti e gli iperpiani. Poi prendiamo una forma bilineare alternata, non identicamente nulla, in due serie di $2p$ variabili indipendenti e poniamola uguale a zero.

Interpretando le due serie di variabili come le successioni delle coordinate di due punti o di due iperpiani di Σ, l'equazione così ottenuta darà luogo, a seconda del caso, a un connesso di punti o a un connesso di iperpiani, che si dirà, rispettivamente, un *sistema nullo luogo* o *un sistema nullo inviluppo*.

Ove sia $p > 1$, un sistema nullo luogo definisce in Σ un complesso lineare di rette, mediante le rette che congiungono coppie di punti *coniugati;* e un sistema nullo inviluppo definisce un complesso lineare di S_{2p-3}, mediante gli S_{2p-3} secondo cui si intersecano coppie di iperpiani *coniugati*.

Supposto sempre $p > 1$, può accadere che un sistema nullo luogo o inviluppo sia singolare di specie (necessariamente pari) $2l$. Nel primo caso l'*asse* del sistema sarà lo S_{2l-1} luogo dei punti singolari; nel secondo, si dirà invece *asse* del sistema lo $S_{2(p-l)-1}$ per cui passano (tutti e soli) gli iperpiani singolari.

Un sistema nullo luogo, rappresentato dall'equazione

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} a_{r,s} x_r y_s = 0 \qquad (a_{r,s} + a_{s,r} = 0), \tag{58}$$

e un sistema nullo inviluppo, rappresentato dall'equazione

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} \alpha_{r,s} \xi_r \eta_s = 0 \qquad (\alpha_{r,s} + \alpha_{s,r} = 0) \tag{59}$$

si dicono *coniugati* allorchè si ha:

$$\sum_{r,s}^{1\dots 2p} a_{r,s} \alpha_{r,s} = 0. \tag{60}$$

In particolare, supposto $p > 1$, se il sistema nullo (58) è dotato di un S_{2p-3}-asse, la (60) esprime che quest'asse appartiene al complesso lineare di S_{2p-3} definito da (59); e se il sistema (59) è dotato di una retta asse, la (60) esprime che questa appartiene al complesso lineare di rette definito da (58).

Un sistema nullo non singolare di Σ, nel senso ordinario della parola, dà luogo a un sistema nullo luogo e ad un sistema nullo inviluppo, ove si riguardi una volta come connesso di punti e un'altra come connesso di iperpiani. Questi ultimi due sistemi risultano entrambi non singolari e si individuano a vicenda; noi diremo perciò che l'uno *aderisce* all'altro.

68. Ciò premesso, diciamo ω una matrice riemanniana di genere p, con gli indici k e h, e indichiamo, al solito, con Σ, τ e $\bar{\tau}$ il suo spazio rappresentativo e le sue imagini.

La totalità Π dei sistemi nulli di ω è, in sostanza, la totalità lineare dei sistemi nulli luogo di Σ individuata dai sistemi nulli luogo *razionali* rispetto a cui τ e $\bar{\tau}$ sono autoconiugati.

Ebbene, chiamiamo Π' la totalità lineare dei sistemi nulli inviluppo di Σ congiungente i sistemi nulli inviluppo *razionali* rispetto a cui τ e $\bar{\tau}$ (concepiti come sostegni di stelle di iperpiani) sono autoconiugati, e facciamo vedere che:

L'elemento generico di Π' *è il sistema nullo inviluppo aderente all'elemento generico di* Π;

per modo che, in particolare, Π' *avrà,* come Π, *la dimensione* k.

Indichiamo con

$$A_0 = 0, \quad A_1 = 0, \ldots, A_k = 0$$

le equazioni di $k+1$ sistemi razionali indipendenti di Π e con

$$A'_0 = 0, \quad A'_1 = 0, \ldots, A'_{k'} = 0$$

le equazioni di $k'+1$ sistemi razionali indipendenti di Π', ove, per il momento, k' sta a rappresentare la dimensione di Π'.

L'equazione di un sistema qualunque di Π sarà del tipo

$$\lambda_0 A_0 + \lambda_1 A_1 + \cdots + \lambda_k A_k = 0 \tag{61}$$

e quella di un sistema qualunque di Π' avrà l'aspetto

$$\mu_0 A'_0 + \mu_1 A'_1 + \cdots + \mu_{k'} A'_{k'} = 0. \tag{62}$$

Ciò posto, troviamo l'equazione del sistema nullo inviluppo aderente al sistema nullo luogo (61), nell'ipotesi che le λ siano numeri generici assegnati, e scriviamo le condizioni necessarie e sufficienti, perchè questa equazione possa ridursi, per una conveniente scelta dei parametri μ, all'equazione (62).

Si otterranno nelle μ $p(2p-1)-1$ equazioni lineari omogenee i cui coefficienti saranno polinomi nelle λ del grado $p-1$.

Ora che il sistema nullo inviluppo aderente al sistema nullo luogo *razionale* generico di Π appartenga a Π' è evidente, per la definizione stessa di Π'; quindi, codeste equazioni lineari, se le λ sono numeri razionali generici risultano compatibili e permettono di determinare univocamente i rapporti mutui delle μ. Ma allora le due circostanze si debbono verificare anche se le λ sono numeri generici qualunque, e quindi il teorema è dimostrato.

Insomma, con espressione meno precisa ma più suggestiva, possiamo dire che:

I sistemi nulli di una matrice riemanniana costituiscono una totalità lineare sia che si riguardino come connessi di punti, sia che si riguardino come connessi di iperpiani.

Occorre appena avvertire che questo teorema è significativo solo nel caso in cui sia $p \geq 3$; poichè se $p=1$ la distinzione fra sistemi nulli luogo e sistemi nulli inviluppo è priva di valore, e se $p=2$ qualunque totalità lineare di sistemi nulli generalmente non degeneri è tale, sia che essi si riguardino come sistemi nulli luogo, sia che essi si riguardino come sistemi nulli inviluppo.

69. Prima di procedere innanzi osserviamo che per le reciprocità di ω, premesse considerazioni analoghe a quelle del n° 67, sussiste lo stesso teorema che più sopra è stato enunciato per i sistemi nulli. Inoltre un ragionamento della stessa natura di quello fatto nel n° precedente permette di asserire che:

La totalità lineare delle omografie di ω è anche un gruppo (continuo ad h parametri).

In queste proposizioni, per quanto esse siano semplici e quasi immediate, son da ravvisare le proprietà fondamentali delle totalità di enti ora introdotte per ogni matrice riemanniana. Ciò è ben chiaro *a priori;* ma è confermato dalle considerazioni che seguono, nelle quali vien presa di mira soltanto la totalità dei sistemi nulli.

Questa limitazione è consigliata da varie ragioni; *ma, segnatamente, dal fatto che quando sia nota la configurazione dei sistemi nulli degeneri di una matrice riemanniana, si ha in questo il mezzo più semplice e più potente per caratterizzare i vari aspetti che possono essere assunti dal gruppo delle sue omografie.*

Veggasi, per una conferma di questa asserzioue mediante un esempio, il § 3 della Parte Seconda.

70. Adesso consideriamo tutti i sistemi nulli luogo e inviluppo dello spazio rappresentativo Σ di ω, rispetto a cui τ e $\bar{\tau}$ sono autoconiugati, e riferiamoli omograficamente *in modo reale*, ai punti e agli iperpiani di un S_{p^2-1}, Σ', sì che un punto e un iperpiano di Σ' si appartengano quando, e solo quando, sono imagini di un sistema nullo luogo e di un sistema nullo inviluppo fra loro coniugati. Inoltre, per limitarci al solo caso interessante, supponiamo senz'altro che sia $p > 1$.

Allora sorgeranno entro Σ' due serie di varietà, l'una di punti

$$F^{(1)}, \quad F^{(2)}, \ldots, F^{(p-1)},$$

l'altra di iperpiani

$$\Phi^{(1)}, \quad \Phi^{(2)}, \ldots, \Phi^{(p-1)},$$

delle quali $F^{(l)}$ sarà l'imagine dei sistemi nulli luogo dotati di un asse avente la dimensione $\geqq 2l - 1$, e $\Phi^{(l)}$ sarà l'imagine dei sistemi nulli inviluppo dotati di un asse avente la dimensione $\leqq 2(p-l) - 1$. Ognuno di questi assi sarà poi un S_{2m-1} appoggiato a τ e $\bar{\tau}$ secondo S_{m-1}.

In particolare un iperpiano α di $\Phi^{(p-1)}$ risponderà a un sistema nullo inviluppo dotato di retta asse e questa retta sarà appoggiata a τ e $\bar{\tau}$ in due punti A e $\bar{A}'$; e quindi per un'osservazione del n° 67 e per il modo usato nella rappresentazione, i punti di α risponderanno ai sistemi nulli luogo i cui relativi complessi lineari contengono la retta $A\bar{A}'$.

Ma allora, se si tien conto di quanto è detto al n° 15 della Memoria citata in [7]) *h*), si può supporre che le varietà $F^{(l)}$ e $\Phi^{(l)}$ ora introdotte coincidano con quelle ivi indicate con gli stessi simboli e quindi possiamo valerci per esse di tutte le proprietà ivi stabilite.

71. In particolare ricordiamo che $F^{(1)}$ è un'ipersuperficie d'ordine p; che le varietà $F^{(2)}, F^{(3)}, \ldots, F^{(p-1)}$, delle quali ciascuna contiene quelle che le seguono, sono le varietà dei suoi punti doppî, tripli, ..., $(p-1)$-pli; che $F^{(p-1)}$ è una varietà di Segre di 2ª specie, con gli indici $(p-1, p-1)$, e che $F^{(p-2)}, F^{(p-3)}, \ldots, F^{(1)}$ sono le varietà riempite dalle corde, dai piani trisecanti, ..., dagli S_{p-2} $(p-1)$-secanti di $F^{(p-1)}$.

La $F^{(p-1)}$ contiene poi una schiera $[j]$ della dimensione $2(j+1)(p-j-1)$ di varietà $L^{(j)}$ $(j = 0, 1, \ldots, p-2)$, ciascuna delle quali è ancora una varietà di

SEGRE (di 2ª specie, con gli indici eguali a j, se $j > 0$); e al variare di $L^{(j)}$ entro $[j]$ il suo spazio di appartenenza $\sigma^{(j)}$ descrive la varietà $F^{(p-j-1)}$.

Uno spazio $\sigma^{(j)}$, avente la dimensione $(j+1)^2-1$, è l'imagine, entro Σ', dei sistemi nulli luogo di Σ, che mutano in sè τ e $\bar{\tau}$ e hanno per asse uno stesso $S_{2(p-j)-3}$, appoggiato a τ e $\bar{\tau}$ secondo S_{p-j-2}, oppure uno spazio passante per esso.

Per le varietà $\Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \ldots, \Phi^{(p-1)}$ valgono le considerazioni duali, e quindi, in particolare, si avrà per $\Phi^{(p-1)}$ una schiera $\{j\}$ di varietà $\lambda^{(j)}$, avente per essa lo stesso significato che la schiera $[j]$ delle $L^{(j)}$ ha per $F^{(p-1)}$.

La stella cui appartiene una $\lambda^{(j)}$ si dirà una $s^{(j)}$, e lo spazio sostegno di una $s^{(j)}$ si dirà un $S^{(j)}$.

Al variare di $\lambda^{(j)}$ entro $\{j\}$, la stella $s^{(j)}$ descrive la varietà $\Phi^{(p-j-1)}$, e una stella $s^{(j)}$ è l'imagine, entro Σ', dei sistemi nulli che hanno per asse uno stesso S_{2j+1}, appoggiato a τ e $\bar{\tau}$ secondo un S_j, oppure uno spazio contenuto in esso.

Lo spazio tangente ad $F^{(p-j-1)}$ in un suo punto generico A tocca la varietà in tutti i punti dello spazio $\sigma^{(j)}$ che passa per A; ed esso è, da una parte uno spazio $S^{(p-j-2)}$ — per modo che $\Phi^{(j+1)}$ è la varietà degli iperpiani tangenti ad $F^{(p-j-1)}$ — e, dall'altra, lo spazio tangente ad $F^{(p-1)}$ *lungo* la varietà $L^{(j)}$ appartenente a quel $\sigma^{(j)}$, cioè lo spazio congiungente gli spazi tangenti ad $F^{(p-1)}$ nei singoli punti di $L^{(j)}$. Anzi lo spazio $\sigma^{(j)}$ e la stella $s^{(p-j-2)}$ che ha per sostegno lo $S^{(p-j-2)}$ tangente in esso ad $F^{(p-j-1)}$ rispondono, nei modi chiariti più sopra, a uno *stesso* $S_{2(p-j)-3}$, appoggiato a τ e $\bar{\tau}$ secondo S_{p-j-2}.

Infine ricordiamo che dai punti reali di $F^{(1)}$ si può staccare una parte, quella che diciamo la *prima falda* di $F^{(1)}$, la quale è atta a dividere in due regioni i punti reali dello spazio ambiente che non appartengono ad essa.

I punti interni a questa prima falda sono le imagini dei sistemi nulli luogo reali di Σ, i cui relativi complessi lineari di rette non contengono alcuna delle rette reali appoggiate a τ e $\bar{\tau}$. In particolare, dunque, saranno punti interni alla prima falda di $F^{(1)}$ tutti i punti imagini dei sistemi nulli principali di ω (concepiti come connessi di punti).

72. Ciò posto, consideriamo in Σ un sistema nullo non degenere che muti in sè τ e $\bar{\tau}$.

Riguardandolo una volta come connesso di punti e un'altra come connesso di iperpiani, resteranno coordinati ad esso, in base alla rappresentazione di cui sopra, un punto P e un iperpiano π di Σ'.

Ebbene è facile riconoscere che:

Il punto P ha per iperpiano polare rispetto a $F^{(1)}$ l'iperpiano π;

o che:

L'iperpiano π ha per polo rispetto a $\Phi^{(1)}$ il punto P.

Quindi:

La corrispondenza (fra punti e iperpiani) che si ottiene in Σ' coordinando a ciascun *punto il suo iperpiano polare rispetto ad* $F^{(1)}$ *è generalmente biunivoca, ossia è una trasformazione cremoniana, che indicheremo con* T.

I due sistemi omaloidici di ipersuperficie luogo e inviluppo, cui dà origine T, sono, nello spazio di punti, il sistema delle prime polari di $F^{(1)}$ e, nello spazio di iperpiani, il sistema delle prime polari di $\Phi^{(1)}$. Cosicchè, nei due spazi, gli elementi eccezionali di T sono dati dai punti di $F^{(2)}$ (in particolare di $F^{(3)}$, $F^{(4)}$, ..., $F^{(p-1)}$) e dagli iperpiani di $\Phi^{(2)}$ (in particolare, di $\Phi^{(3)}$, $\Phi^{(4)}$, ..., $\Phi^{(p-1)}$).

73. La considerazione della corrispondenza T introdotta nel n° precedente è fondamentale per la determinazione dei varî aspetti che, per un dato valor di p, può presentare il sistema II.

Se $p = 2$, nel qual caso, d'accordo con un'osservazione precedente, T è una polarità ordinaria non degenere, non vi è luogo, veramente, ad alcun problema, perchè allora k può assumere tutti i valori di cui è suscettibile, e per ogni valor di k, il sistema II non può presentare, dal punto di vista proiettivo, che un aspetto e un aspetto solo. Ma non è così quando $p > 2$, perchè allora l'indice k presenta delle lacune e per uno stesso valor di k possono aversi per II tipi proiettivamente diversi.

Ora da quanto è stato detto, badando che se μ e μ' sono lo spazio lineare e la stella di iperpiani di Σ' rispondenti ai sistemi II e II' di Σ, μ' è la trasformata di μ nella corrispondenza T, segue appunto che:

La determinazione degli aspetti possibili proiettivamente distinti per il sistema II *dipende innanzi tutto dalla determinazione degli spazi lineari di* Σ' *che dalla corrispondenza cremoniana* T *sono mutati in stelle di iperpiani.*

Questa osservazione può essere utilizzata in più modi; qui ce ne serviamo soltanto per dedurre una proprietà generale del sistema II, nella quale è da ravvisare l'intimo fondamento di tutta la teoria delle matrici impure.

Per questo ci è necessario esaminare, in primo luogo, il comportamento degli elementi eccezionali di T.

74. Consideriamo, pertanto, in Σ' un punto A che appartenga ad $F^{(l)}$, ma non ad $F^{(l+1)}$ (se $l < p - 1$), cioè un punto che sia l-plo e non più che l-plo per $F^{(1)}$, e vediamo come esso si comporta rispetto alla corrispondenza T. Naturalmente supponiamo qui che sia $p > 2$, poichè in caso contrario non vi sarebbe luogo a parlare di punti eccezionali.

Se $l = 1$, A è un punto semplice di $F^{(1)}$; quindi non è eccezionale per T e l'iperpiano che ad esso corrisponde in T è l'iperpiano ivi tangente ad $F^{(1)}$. Anzi codesto iperpiano (che appartiene a $\Phi^{(p-1)}$) corrisponde non solo ad A ma a tutti i punti dello spazio $\sigma^{(p-2)}$ di $F^{(1)}$, passante per A, che risultano semplici per $F^{(1)}$.

Se $l > 1$, A è un punto multiplo di $F^{(1)}$, cioè un punto eccezionale per T e allora per trovare la varietà di iperpiani che ad esso corrisponde gioverà procedere nel modo che segue.

Si dica α lo spazio tangente ad $F^{(l)}$ in A. Lo spazio α toccherà $F^{(l)}$ in tutti i punti dello spazio $\sigma^{(p-l-1)}$, diciamo $\sigma_a^{(p-l-1)}$, che passa per A; sarà il sostegno di una stella

$s^{(l-1)}$ di iperpiani appartenenti a $\Phi^{(p-l)}$, toccherà $F^{(p-1)}$ in tutti i punti della sua $L^{(p-l-1)}$, diciamola $L_a^{(p-l-1)}$, appartenente a $\sigma_a^{(p-l-1)}$ e avrà infine la dimensione $p^2 - l^2 - 1$.

Fra le prime polari di $F^{(1)}$, che passano tutte per $F^{(l)}$ e hanno in $F^{(l)}$ una varietà $(l - 1)$-pla, consideriamo quelle che passano per un punto infinitamente vicino ad A in una direzione non contenuta in α, cioè che hanno in A un incontro l-punto con una retta t, passante per A ma non situata in α. Esse formano un sistema lineare ∞^{p^2-2} e l'iperpiano contenente i loro poli sarà l'iperpiano omologo in T al punto di t infinitamente vicino ad A.

Ora la polare $(p - l)^{ma}$ di A rispetto ad $F^{(1)}$, cioè il cono osculatore ad $F^{(1)}$ nel suo punto l-plo A, è un cono di vertice α, cioè ha un punto l-plo in ogni punto di α, quindi la prima polare di ogni punto di α ha un punto l-plo in A. Segue che fra le prime polari sopra considerate compaiono certo quelle dei punti di α, e quindi l'iperpiano corrispondente in T al punto di t infinitamente vicino ad A passa per α, cioè è un iperpiano di $\Phi^{(p-l)}$.

Poichè una prima polare di $F^{(1)}$ ha in A un punto $(l - 1)$-plo e ha per cono osculatore in A un cono di vertice α, basta che essa abbia incontro l-punto con t, perchè abbia un incontro analogo con ogni retta uscente da A e situata nello $S_{p^2-l^2}$ che da α proietta t; quindi gli infiniti iperpiani omologhi in T al punto A restano, intanto, biunivocamente coordinati agli $S_{p^2-l^2}$ della stella α, e questo implica che essi sono tutti e soli gli iperpiani di $\Phi^{(p-l)}$ appartenenti alla stella α.

Ma le cose possono essere ulteriormente precisate.

In primo luogo il cono osculatore ad $F^{(1)}$ in A, in quanto è la polare $(p - l)^{ma}$ di A rispetto ad $F^{(1)}$, passa semplicemente per la varietà $F^{(p-l+1)}$, che è $(p - l + 1)$-pla per $F^{(1)}$. D'altro canto se $L_1^{(l-1)}$ è una $L^{(l-1)}$ di $F^{(p-1)}$ *complementare* ad $L_a^{(p-l-1)}$, l'*ipersuperficie congiunta* ad $L_1^{(l-1)}$ [61]) appartiene ad $F^{(p-l+1)}$ ed ha l'ordine l, dunque quel cono è nient'altro che il cono proiettante da α questa ipersuperficie, cioè è la polare mista di $p - l$ punti generici qualunque di $L_a^{(p-l-1)}$, o anche un cono, diciamolo $V_{p-l}^{(a)}$, del sistema che nella Memoria più volte citata è detto sistema $[V_{p-l}]$. In particolare si noti che $V_{p-l}^{(a)}$ è, nella stella di centro α, concepita come totalità dei suoi $S_{p^2-l^2}$, un'ipersuperficie della stessa natura di $F^{(1)}$ e quindi un $S_{p^2-l^2}$ della stella corrisponde al suo iperpiano polare rispetto a $V_{p-l}^{(a)}$ in una trasformazione cremoniana $T^{(a)}$ della stessa natura di T.

Ora si supponga che mediante T allo $S_{p^2-l^2}\alpha t$, passante per α, resti coordinato l'iperpiano ρ. La prima polare del punto generico P di ρ, che ha in $F^{(l)}$ una varietà $(l - 1)$-pla, ha in A un cono osculatore d'ordine $l - 1$, che, nella stella α, è semplicemente la prima polare dello $S_{p^2-l^2}\alpha P$ rispetto a $V_{p-l}^{(a)}$; e di più quel cono osculatore ha uno $S_{p^2-l^2}$ generatore nello spazio αt. Ma allora ρ è l'iperpiano polare di αt rispetto a $V_{p-l}^{(a)}$, ossia $T^{(a)}$ è appunto la trasformazione che T induce fra gli $S_{p^2-l^2}$ e gli iperpiani della stella α.

---

[61]) Per queste denominazioni vedi la Memoria citata in [7]) *h*), n^i 12 e 13.

Riassumendo abbiamo:

Nella corrispondenza T *al punto* A *di* $F^{(l)}$ *corrispondono, se* $l \geqq 2$, *infiniti iperpiani. Essi sono gli iperpiani della stella* $s^{(l-1)}$ *di* $\Phi^{(p-l)}$ *avente per vertice* α *e quindi non mutano al mutare di* A *entro* $\sigma_a^{(p-l-1)}$. *Ognuno di essi è poi coordinato mediante* T *a un* $S_{p^2-l^2}$ *uscente da* α, *e la corrispondenza che per tal modo* T *stabilisce nella stella* α *è la corrispondenza cremoniana* $T^{(a)}$, *della stessa natura di* T, *ivi fissata dal cono* $V_{p-l}^{(a)}$.

Di qua deduciamo una conseguenza importante.

Fra gli iperpiani di $\Phi^{(p-l)}$ passanti per α ve ne sono di quelli che appartengono anche a $\Phi^{(p-l+1)}$, o $\Phi^{(p-l+2)}$, ..., o $\Phi^{(p-1)}$; ma, applicando a $T^{(a)}$ le considerazioni fatte per T si riconosce che a uno $S_{p^2-l^2}$ della stella α corrisponde un iperpiano di $\Phi^{(p-1)}$, oppure infiniti iperpiani di $\Phi^{(p-2)}$ o di $\Phi^{(p-3)}$, ..., o di $\Phi^{(p-l+1)}$ secondo che esso è uno spazio generatore semplice oppure uno spazio generatore doppio, triplo, ..., o $(l-1)$-plo di $V_{p-l}^{(a)}$; quindi a uno $S_{p^2-l^2}$ della stella α che non appartenga a $V_{p-l}^{(a)}$ corrisponde certo un iperpiano che appartiene a $\Phi^{(p-l)}$ ma non a $\Phi^{(p-l+1)}$.

In tale condizione si trovano, in particolare, *gli* $S_{p^2-l^2}$ *che vanno da* α *ai punti reali interni alla prima falda di* $F^{(l)}$, poichè questi sono anche interni alla prima falda di $V_{p-l}^{(a)}$.

Per quel che segue giova enunciare una parte dei risultati conseguiti guardando, anzi che allo spazio Σ', alle totalità di sistemi nulli che esso rappresenta. Badando alla penultima osservazione del n° 71 si ottiene così il teorema:

Si considerino le due totalità lineari dei sistemi nulli luogo e inviluppo di Σ *che mutano in sè* τ *e* $\bar{\tau}$ *e si chiamino omologhi due elementi delle due totalità allorchè uno aderisce all'altro. Sorge allora fra le due totalità una trasformazione cremoniana nella quale ad ogni sistema nullo luogo non degenere corrisponde uno ed un solo sistema nullo inviluppo non degenere, mentre ad un sistema nullo luogo dotato di asse corrispondono gli infiniti sistemi nulli inviluppo degeneri che hanno lo stesso suo asse, oppure che hanno per assi spazi contenuti in esso.*

75. Ciò posto, riprendiamo a considerare le imagini μ e μ' di Π e Π' nello spazio Σ'.

La stella μ' è, in T, la trasformata dello spazio lineare μ: di più, corrispondentemente ai sistemi nulli principali di ω, lo spazio μ contiene certo dei punti interni alla prima falda di $F^{(1)}$; quindi, in base alle osservazioni fatte:

Per ogni eventuale sistema degenere di Π *esiste almeno un sistema degenere di* Π' *che ha per asse lo stesso suo asse (e non uno spazio di dimensione inferiore ivi contenuto); e viceversa.*

È questa la proprietà generale di Π cui più sopra abbiamo alluso e che ci condurrà subito a conseguenze interessanti.

76. Chiamiamo *pseudo-asse* della matrice ω ogni asse di un suo sistema nullo *reale* e degenere. Esso è in ogni caso un S_{2q-1} reale appoggiato a τ e $\bar{\tau}$ secondo S_{q-1} imaginari coniugati, e se è razionale è addirittura un *asse* della matrice.

Inoltre diciamo *complementari* due o più pseudo-assi indipendenti di ω quando lo spazio che li congiunge coincide con lo spazio rappresentativo di ω.

77. Una matrice riemanniana non singolare è naturalmente priva di pseudo-assi, ma invece si vede subito che:

a) *Se una matrice riemanniana è singolare essa è certo dotata di pseudo-assi.*

E infatti se la matrice ω, di cui si è discorso fin qui, è singolare, il sistema Π ha almeno la dimensione 1; quindi lo spazio μ di Σ', imagine di Π, ha almeno la dimensione 1, è reale e contiene punti interni alla prima falda di $F^{(1)}$.

Ma allora μ taglia certo $F^{(1)}$ in punti reali, e questo significa appunto che la nostra matrice è, nell'ipotesi fatta, dotata di *pseudo-assi.*

b) *Per ogni pseudo-asse di una matrice singolare ne esiste almeno un altro che è ad esso complementare.*

Sia A uno pseudo-asse della matrice ω e sia $2q-1$ la sua dimensione $(0<q<p)$.

Per definizione esiste un sistema nullo reale (almeno) di Π avente per asse A; diciamolo σ_1. Poi chiamiamo σ un sistema nullo riemanniano principale di ω e costruiamo il sistema lineare $\sigma^{-1}\Pi\sigma$ trasformato di Π mediante σ. Esso è un sistema lineare di sistemi nulli inviluppo che coincide evidentemente con Π'; quindi in particolare apparterrà a Π' il sistema nullo inviluppo $\sigma^{-1}\sigma_1\sigma$, trasformato di σ_1 mediante σ.

Ora $\sigma^{-1}\sigma_1\sigma$ è un sistema nullo inviluppo singolare di specie $2q$; quindi il suo asse è uno spazio A' della dimensione $2(p-q)-1$, che sarà nel tempo stesso lo spazio polare di A rispetto a σ. Ciò porta intanto, per una ragione già addotta altrove (n° 36), che A' è (uno spazio reale) indipendente da A.

Ma poi, per il teorema del n° 75, esiste almeno un sistema nullo di Π che ha per asse A', e questo, come subito si vede, si può supporre reale, dunque A' è veramente uno pseudo-asse di ω complementare ad A.

Poichè, nel ragionamento fatto, l'ipotesi che σ sia riemanniano può esser sostituita senza danno dall'altra che esso sia soltanto reale, e l'ipotesi che sia principale serve soltanto ad assicurare che A e A' risultino indipendenti possiamo dire che:

c) *Lo spazio polare di uno pseudo-asse di ω rispetto a un qualsiasi sistema nullo reale di ω non degenere è ancora un suo pseudo-asse.*

Viceversa:

d) *Se A e A' sono due pseudo-assi complementari di ω, esistono infiniti sistemi nulli di ω, non degeneri, rispetto a cui A e A' sono mutuamente polari.*

Per convincersene basta considerare il fascio di Π individuato da due sistemi nulli reali che abbiano per assi A e A' rispettivamente. All'infuori di questi due, niun altro sistema del fascio è degenere e rispetto a ciascuno di questi A e A' sono spazi polari reciproci.

e) *L'intersezione di due pseudo-assi non indipendenti di ω è ancora uno pseudo-asse di ω.*

E infatti se A e B sono due tali pseudo-assi e σ_a, σ_b sono due sistemi nulli reali di Π che li hanno per assi, il sistema nullo reale generico del fascio individuato da σ_a e σ_b ha appunto per asse l'intersezione di A e B.

f) *Lo spazio congiungente due pseudo-assi di ω, ove non coincida con lo spazio rappresentativo di ω, è ancora un suo pseudo-asse.*

E infatti se A e B sono gli pseudo-assi considerati, si chiamino A' e B' gli spazi polari di A e B rispetto a un sistema nullo principale di ω. Lo spazio congiungente A e B avrà per spazio polare rispetto a questo sistema nullo l'intersezione di A' e B'; ma allora poichè A' e B' sono, per c), pseudo-assi di ω, tale, per e), è la loro intersezione e tale è, di nuovo per c), lo spazio congiungente A e B; supposto, beninteso, che quest'ultimo non sia lo spazio rappresentativo di ω.

78. Uno pseudo-asse della matrice ω si dirà *isolato* se non ammette che un solo complementare.

Se A è uno pseudo-asse isolato e A' è il suo complementare, A e A' sono polari l'uno dell'altro rispetto ad ogni sistema nullo non degenere di Π e quindi anche A' è isolato. Inoltre il sistema Π, se non può concepirsi come il sistema congiungente due totalità lineari di sistemi nulli aventi per assi A e A' rispettivamente [come sarebbe il caso, se A e A' fossero addirittura degli *assi* di ω (n° 44)], è certo contenuto in un tal sistema congiungente, dunque per il ragionamento fatto al n° ora richiamato:

Se uno pseudo-asse di una matrice riemanniana è isolato, tale è pure il suo complementare e ogni altro eventuale pseudo-asse della matrice o sta in uno di quei due o congiunge uno pseudo-asse contenuto nell'uno con uno pseudo-asse contenuto nell'altro.

79. Anche gli pseudo-assi di una matrice riemanniana possono esser distinti come gli assi in *puri* od *impuri,* secondo che non contengono o contengono pseudo-assi di dimensione inferiore alla propria. E quindi si può introdurre anche la nozione di *gruppo fondamentale di pseudo-assi puri* per una matrice riemanniana o per un suo pseudo-asse.

Non entreremo su ciò in particolari: ci limitiamo a segnalare su tal proposito l'importante teorema che segue e la cui dimostrazione (cfr. n° 46) non offre alcuna difficoltà:

Se una matrice singolare è priva di pseudo-assi isolati, tutti i suoi pseudo-assi puri (che sono certo infiniti) hanno la stessa dimensione.

80. Se uno pseudo-asse di una matrice riemanniana è addirittura un suo asse, esso è isolato come asse se è tale come pseudo-asse, e viceversa; quindi:

Se una matrice riemanniana è singolare, ma è priva di pseudo-assi isolati, appena ammette un asse ne ammette infiniti.

81. Riserbandoci di riprendere in modo più completo questa teoria degli pseudo-assi che promette di esser feconda di risultati, ci accontenteremo qui di illustrarne soltanto la conseguenza a cui dà luogo per le matrici riemanniane *semplicemente singolari,* cioè per le matrici che hanno l'indice di singolarità k eguale a 1.

Una tal matrice in quanto è singolare, ammette certo due pseudo-assi complementari; ma in quanto $k = 1$ non ne può ammettere più di due [cfr. il ragionamento fatto per dimostrare il teorema d) del n° 77], dunque essa ha due e due soli pseudo-assi (complementari, isolati).

Se il genere della matrice è dispari, le dimensioni di questi due pseudo-assi sono certo differenti tra di loro; se quel genere è invece pari, le dimensioni stesse possono essere diverse o uguali.

Ma quando le dimensioni in discorso sono differenti i due pseudo-assi sono razionali, cioè sono degli assi, dunque:

Una matrice riemanniana semplicemente singolare non può esser pura se non a patto che il suo genere sia pari e che i suoi due (soli) pseudo-assi (complementari) abbiano la stessa dimensione. Se almeno una di queste due circostanze non si verifica, la matrice è necessariamente impura; ma non è detto che essa sia senz'altro pura, se le due circostanze sono entrambe verificate [62]).

Questo teorema caratterizza nettamente per $k = 1$ gli aspetti proiettivi possibili per il sistema indicato più sopra con II.

Esso è dunque il primo anello di una catena di teoremi di cui potremmo dare qualche altro esempio; ma per ora preferiamo astenercene, perchè speriamo di potere approfondire ulteriormente le nostre considerazioni.

PARTE SECONDA.

LE TRASFORMAZIONI BIRAZIONALI DI UNA SUPERFICIE IPERELLITTICA IN SÈ.

§ 1.

Considerazioni introduttive.

1. Prima di passare allo studio particolareggiato delle trasformazioni birazionali di una superficie iperellittica in sè, crediamo opportuno premettere alcune osservazioni preliminari riferendole a una varietà abeliana a un numero qualunque di dimensioni.

2. Sia, dunque, V_p una varietà abeliana a p dimensioni, cioè una varietà (necessariamente algebrica) che ammette una rappresentazione parametrica mediante funzioni

[62]) Perchè, dunque, il teorema riguardante l'equazione (30) del n° 60 della Memoria citata in [7]) *b*) diventi più significativo, giova riferirlo a una funzione abeliana singolare qualunque e a una sua qualunque coppia di forme di RIEMANN alternate, al cui fascio appartenga una forma principale. Se la funzione è solo una volta singolare, le radici dell'equazione (30) si riducono, in ordine al teorema del testo, a due sole radici distinte.

abeliane a p variabili indipendenti $u_1, u_2, \ldots, u_p$, appartenenti a una stessa tabella di periodi primitivi

$$\omega \equiv |\omega_{j,1}, \omega_{j,2}, \ldots, \omega_{j,2p}| \qquad (j = 1, 2, \ldots, p);$$

la rappresentazione essendo tale che ad ogni punto della varietà risponda, a meno di periodi, un solo gruppo di valori per le variabili u_j.

Se $p = 1$, V_p è una curva ellittica, se $p = 2$, V_p è una superficie iperellittica. In ogni caso gli integrali semplici di 1ª specie di V_p sono dati dalle $u_1, u_2, \ldots, u_p$ e dalle loro combinazioni lineari.

Supponiamo ora che la nostra V_p ammetta una trasformazione birazionale in sè, la quale porti il punto $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ nel punto $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$.

Poichè u'_j è un integrale semplice di 1ª specie di V_p *al posto* $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$, deve essere, indicando con le $\lambda_{j,l}$ e le c_j delle costanti opportune:

$$(1) \qquad u'_j = \lambda_{j,1} u_1 + \lambda_{j,2} u_2 + \cdots + \lambda_{j,p} u_p + c_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p);$$

e poichè le u_j debbono potersi esprimere allo stesso modo per mezzo delle u'_j, sarà

$$|\lambda_{j,l}| \neq 0.$$

Aumentando le u_j di un periodo, le (1) debbono indurre un aumento analogo sulle u'_j, dunque debbono esistere degli interi $a_{r,s}$ per modo che si abbia

$$(2) \qquad \lambda_{j,1} \omega_{1,r} + \lambda_{j,2} \omega_{2,r} + \cdots + \lambda_{j,p} \omega_{p,r} = a_{r,1} \omega_{j,1} + a_{r,2} \omega_{j,2} + \cdots + a_{r,2p} \omega_{j,2p}$$
$$(j = 1, 2, \ldots, p;\ r = 1, 2, \ldots, 2p).$$

Di qua si deduce intanto che:

$$(3) \qquad x'_r = a_{r,1} x_1 + a_{r,2} x_2 + \cdots + a_{r,2p} x_{2p}$$

è una sostituzione riemanniana della (matrice ω o della) varietà V_p, e che le

$$(4) \qquad \rho x'_r = a_{r,1} x_1 + a_{r,2} x_2 + \cdots + a_{r,2p} x_{2p}$$

sono le equazioni di una omografia riemanniana della varietà V_p.

Come è noto, il valore del determinante

$$|a_{r,s}| = |\lambda_{j,l}| \cdot |\bar{\lambda}_{j,l}|$$

che è (I, n° 22) [63]) un intero positivo, rappresenta il numero dei punti $(u_1, u_2, \ldots, u_p)$ corrispondenti mediante le (1) al punto $(u'_1, u'_2, \ldots, u'_p)$ [64]), dunque nel caso nostro deve essere

$$|a_{r,s}| = 1,$$

e la sostituzione (3) è modulare.

---

63) D'ora innanzi quando occorre richiamare un n° della Memoria, questo n°, ove appartenga alla prima parte sarà preceduto dal segno I.

64) Vedi, per il caso $p = 2$, HUMBERT, loc. cit. [1]), 2ᵐᵉ Mémoire, pag. 289 n° 143. Il ragionamento dello HUMBERT si estende subito, per altro, ad ogni valor di p.

Viceversa, se la (3) è una sostituzione riemanniana modulare della varietà V_p, le (2) individuano le $\lambda_{j,l}$, e dopo ciò le (1) dànno effettivamente una trasformazione birazionale di V_p in sè stessa per ogni sistema di valori attribuiti alle costanti c_j.

Possiamo dunque asserire che:

Ad ogni trasformazione birazionale della V_p in sè stessa risponde una ed una sola sostituzione riemanniana modulare della varietà; viceversa, ad ogni tale sostituzione risponde una schiera ∞^p di trasformazioni birazionali della varietà in sè stessa.

3. Fra le sostituzioni riemanniane di V_p due che siano modulari esistono certo in ogni caso. Esse sono quelle nei cui moduli tutti gli elementi sono nulli, tranne gli elementi principali, che per l'una sono tutti eguali a $+1$, e per l'altra sono tutti eguali a -1.

Quindi la V_p ammette intanto due schiere ∞^p di trasformazioni rappresentate le une da equazioni del tipo

$$u'_j = u_j + c_j$$

e le altre da equazioni del tipo

$$u'_j = -u_j + c_j.$$

Come è ben noto esse si dicono, rispettivamente, le trasformazioni di V_p di 2ª e di 1ª specie [65]), e quelle di 2ª specie formano da sole un gruppo continuo abeliano a p parametri.

Se per la V_p considerata l'indice di moltiplicabilità è nullo, cioè il gruppo di moltiplicabilità è identico, la V_p non ammette altre sostituzioni riemanniane modulari all'infuori di quelle ora ricordate e quindi:

Una varietà abeliana può ammettere schiere ∞^p di trasformazioni birazionali in sè, diverse dalle due schiere delle trasformazioni di 1ª e 2ª specie, solo quando il suo indice di moltiplicabilità sia positivo.

4. Nella schiera ∞^p delle trasformazioni birazionali in sè di V_p corrispondenti a una sua determinata sostituzione riemanniana modulare g, ve n'è una ed una sola che porti un punto dato di V_p in un altro punto di V_p egualmente assegnato; in particolare, ce n'è una sola, e diciamola γ, che lasci in sè il punto $(0, 0, \ldots, 0)$.

In questo modo al gruppo delle sostituzioni riemanniane modulari di V_p, che diremo G, viene a corrispondere il gruppo, che diremo Γ, delle trasformazioni birazionali di V_p in sè stessa, che lasciano tutte fermo il punto $(0, 0, \ldots, 0)$, ad ogni operazione di G corrispondendo una ed una sola operazione di Γ.

A questo proposito osserviamo subito che:

Se alle operazioni γ' e γ'' di Γ rispondono le operazioni g' e g'' di G, al prodotto $\gamma'\gamma''$ risponde il prodotto $g''g'$.

---

65) Veramente non tutti gli scienziati che si sono occupati di questo argomento adottano la stessa nomenclatura. Tutti si accordano a chiamarle insieme *trasformazioni ordinarie,* ma poi alcuni chiamano trasformazioni di 1ª specie quelle che altri dice di 2ª specie, e viceversa. Nel testo è seguita la nomenclatura che oggi sembra più diffusa.

Infatti supponiamo che γ' e γ'' siano rappresentate, rispettivamente, dalle equazioni

$$u'_j = \lambda'_{j,1} u_1 + \lambda'_{j,2} u_2 + \cdots + \lambda'_{j,p} u_p$$

e

$$u'_i = \lambda''_{j,1} u_1 + \lambda''_{j,2} u_2 + \cdots + \lambda''_{j,p} u_p.$$

Il prodotto $\gamma'\gamma''$ sarà rappresentato dalle altre

$$u'_j = \mu_{j,1} u_1 + \mu_{j,2} u_2 + \cdots + \mu_{j,p} u_p$$

dove

$$\mu_{j,l} = \sum_n^{1\ldots p} \lambda''_{j,n} \lambda'_{n,l}.$$

Ora se le $a'_{r,s}$, $a''_{r,s}$ e $b_{r,s}$ sono, successivamente, i coefficienti di g', g'' e della operazione g di G corrispondente a $\gamma'\gamma''$, si ha:

$$\sum_n^{1\ldots p} \lambda'_{j,n} \omega_{n,r} = \sum_s^{1\ldots 2p} a'_{r,s} \omega_{j,s},$$

$$\sum_n^{1\ldots p} \lambda''_{j,n} \omega_{n,r} = \sum_s^{1\ldots 2p} a''_{r,s} \omega_{j,s},$$

$$\sum_n^{1\ldots p} \mu_{j,n} \omega_{n,r} = \sum_s^{1\ldots 2p} b_{r,s} \omega_{j,s};$$

quindi, per un facile calcolo, sarà

$$\sum_s^{1\ldots 2p} b_{r,s} \omega_{j,s} = \sum_{s,t}^{1\ldots 2p} a'_{r,t} a''_{t,s} \omega_{j,s}.$$

Di qua si trae

$$b_{r,s} = \sum_t^{1\ldots 2p} a'_{r,t} a''_{t,s},$$

e questo dimostra appunto che

$$g = g'' g'.$$

In particolare, all'operazione γ'^{α} risponde g'^{α}, dunque, atteso che all'operazione identica di Γ risponde quella identica di G:

Una operazione di Γ e la corrispondente operazione di G sono insieme aperiodiche o insieme periodiche con lo stesso periodo.

5. Le trasformazioni di V_p di una determinata schiera ∞^p si ottengono tutte moltiplicando a destra la trasformazione γ che essa contiene per le varie trasformazioni di 2ª specie; quindi il gruppo Γ è oloedricamente isomorfo al gruppo complementare del gruppo di *tutte* le trasformazioni birazionali in sè di V_p rispetto al suo sottogruppo costituito dalle trasformazioni di 2ª specie.

Infine si osservi che ogni schiera ∞^p di trasformazioni birazionali in sè di V_p è, come V_p, una varietà abeliana, quando si concepiscano come suoi elementi le trasformazioni che essa contiene.

§ 2.

Le varietà abeliane armoniche ed equianarmoniche.

6. A titolo di esempio, e per alcune considerazioni che dovranno esser fatte in appresso, vediamo se è possibile che per la nostra V_p esista una trasformazione γ del gruppo Γ che sia rappresentata da formule del tipo

$$(5) \qquad u'_j = \alpha u_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

con $\alpha \neq \pm 1$.

Se ciò accade, dette τ e $\bar{\tau}$ le imagini (di ω, cioè) di V_p, esiste evidentemente nel gruppo di moltiplicabilità di V_p una omografia riemanniana non identica, che subordina su τ e $\bar{\tau}$ l'identità; dunque (I, n° 60) V_p è senz'altro ad indici massimi.

Inoltre l'equazione caratteristica della sostituzione riemanniana *modulare* corrispondente a γ ha come radici p-ple α e $\bar{\alpha}$ (I, n° 22), dunque α e $\bar{\alpha}$ sono radici di un'equazione di 2° grado coi coefficienti interi e i coefficienti estremi uguali a ± 1. Sia, questa, l'equazione:

$$(6) \qquad z^2 + az \pm 1 = 0.$$

Poichè $\alpha\bar{\alpha}$ è positivo, nell'ultimo termine di questa equazione deve valere intanto il segno superiore; poi da $|\alpha| = 1$ e $\alpha \neq \pm 1$ segue che α e $\bar{\alpha}$ sono numeri imaginari (coniugati), dunque l'intero a è nullo, oppure è uguale a ± 1. Ma allora:

$$\alpha = \pm i, \qquad \text{oppure} \qquad \alpha = \pm \varepsilon, \quad \pm \varepsilon^2,$$

essendo, al solito $i = \sqrt{-1}$ e poi $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

7. Se $p = 1$, le considerazioni fatte mostrano che V_p è una curva ellittica armonica od equianarmonica; se $p > 1$, ricorrendo, ove occorra, a una sostituzione lineare omogenea sulle u_j, che non altera la forma delle (5) e non altera α, γ o Γ, si può supporre che le u_j siano altrettanti integrali ellittici di V_p, e allora le equazioni:

$$u_j = \text{cost.} \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

definiscono su V_p p fasci ellittici di varietà a $p-1$ dimensioni, ciascun fascio essendo trasformato in sè dall'operazione γ. Segue che questi fasci sono insieme armonici o insieme equianarmonici e che, per conseguenza, alla tabella cui appartiene V_p può darsi intanto l'aspetto

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & \rho & 0 & \ldots & 0 \\ \omega_{2,1} & \omega_{2,2} & \omega_{2,3} & \ldots & \omega_{2,2p} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{p,1} & \omega_{p,2} & \omega_{p,3} & \ldots & \omega_{p,2p} \end{array}\right|$$

ove $\rho = i$ se $\alpha = \pm i$, $\rho = \varepsilon$ se $\alpha = \pm \varepsilon$, $\pm \varepsilon^2$, e le $\omega_{r,s}$ sono della forma

$$\alpha_{r,s} + \rho \beta_{r,s},$$

con le $\alpha_{r,s}$ e $\beta_{r,s}$ numeri interi.

In ogni caso, alla sostituzione

$$u'_j = \rho u_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p),$$

risponde certo una trasformazionale birazionale di V_p in sè stessa (che è γ, γ^2 o il prodotto di γ o γ^2 per la trasformazione di 1ª specie definita da $u'_j = - u_j$); quindi una volta che

$$1, \quad \omega_{2,1}, \ldots, \omega_{p,1}$$

è un sistema di periodi simultanei di $u_1, u_2, \ldots, u_p$, deve esser tale anche

$$\rho, \quad \rho\omega_{2,1}, \ldots, \rho\omega_{p,1}.$$

Indicando con le a_r degli interi deve essere dunque;

$$\rho\omega_{2,1} = \omega_{2,2} + a_3\omega_{2,3} + \cdots + a_{2p}\omega_{2,2p}$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$\rho\omega_{p,1} = \omega_{p,2} + a_3\omega_{p,3} + \cdots + a_{2p}\omega_{p,2p};$$

e quindi la tabella cui appartiene V_p con un'operazione B modulare può ridursi a quest'altra:

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & \rho & 0 & \ldots & 0 \\ \omega_{2,1} & \rho\omega_{2,1} & \omega_{2,3} & \ldots & \omega_{2,2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{p,1} & \rho\omega_{p,1} & \omega_{p,3} & \ldots & \omega_{p,2p} \end{array}\right|.$$

Adesso facciamo il cambiamento di parametri

$$v_1 = u_1$$

$$v_j = \omega_{j,1} u_1 - u_j \qquad (j = 2, 3, \ldots, p);$$

le $v_1, v_2, \ldots, v_p$ saranno ancora degli integrali ellittici (tutti armonici, o tutti equianarmonici) e la nuova tabella cui apparterrà V_p diventerà

$$\left|\begin{array}{ccccc} 1 & \rho & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & \omega'_{2,3} & \ldots & \omega'_{2,2p} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & \omega'_{p,3} & \ldots & \omega'_{p,2p} \end{array}\right|,$$

ove

$$\omega'_{j,r} = - \omega_{j,r} \qquad (j = 2, 3, \ldots, p;\ r = 3, 4, \ldots, 2p).$$

Giunti a questo punto non vi è più bisogno di spendere altre parole per far comprendere che alla tabella cui appartiene V_p può darsi in definitiva l'aspetto:

$$\left|\begin{array}{cccccccc} 1 & \rho & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \rho & 0 \ldots & 0 & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \ldots & 0 & 1 & \rho \end{array}\right|.$$

Viceversa, è chiaro che sopra ogni V_p appartenente a questa tabella, la sostituzione sui parametri $u_1, u_2, \ldots, u_p$ rappresentata da

$$u'_j = \rho u_j \qquad (j = 1, 2, \ldots, p)$$

(ove $\rho = i$, oppure $\rho = \varepsilon$) genera effettivamente una corrispondenza birazionale.

Chiamando *armonica* o *equianarmonica* una varietà abeliana di dimensione $p\,(p \geqq 1)$ birazionalmente identica alle p-ple di punti estratte da p curve ellittiche tutte armoniche o tutte equianarmoniche, abbiamo dunque il seguente teorema:

La varietà abeliana V_p ammette una trasformazione birazionale γ del gruppo Γ rappresentata da equazioni del tipo (5) con $\alpha \neq \pm 1$ quando, e solo quando, è armonica o equianarmonica. E allora si ha, rispettivamente,

$$\alpha = \pm i \quad \textit{oppure} \quad \alpha = \pm \varepsilon, \quad \pm \varepsilon^2,$$

essendo $i = \sqrt{-1}$ ed $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$ [66]).

§ 3.

I valori dei caratteri k e h per una superficie iperellittica.

8. Il problema che ora vogliamo risolvere è quello di approfondire lo studio dei gruppi G e Γ nel caso in cui sia $p = 2$, cioè nel caso in cui la varietà abeliana considerata sia una superficie iperellittica V_2.

Per questo è necessario partire da una classificazione in tipi delle V_2, che, sostanzialmente, è stata già compiuta dal ROSATI e che abbiamo già richiamata al n° 55 della Parte Prima.

Il ROSATI ha determinati i vari tipi possibili e ne ha dimostrata l'esistenza effettiva con un notevole metodo diretto.

Tralasciando questa seconda parte della ricerca, che qui sarebbe resa in gran parte inutile dagli esempi che incontreremo, riprendiamo la prima, per trattarla dal punto di vista di questa Memoria; tanto più che vi saremo condotti da osservazioni che, in ogni caso, non potremmo omettere per quello che dovrà esser detto nel seguito.

9. L'indice di singolarità k di una V_2 non può essere che 0, 1, 2 o 3.

Si tratta di vedere per ogni ipotesi fatta su k quali sono i valori che possono essere assunti dall'indice di moltiplicabilità h.

Poichè sappiamo già (I, n° 58) che se $k = 3$ è necessariamente $h = 7$, ci basterà discutere separatamente i casi in cui k è 0, 1 o 2.

---

[66]) Per $p = 1$ il teorema è notissimo e classico; per $p = 2$ esso implica le proposizioni stabilite da BAGNERA e DE FRANCHIS, per via al tutto diversa da quella qui seguita, nei n^i 11 e 12 della loro Memoria citata in [31]). Per $p = 2$ BAGNERA e DE FRANCHIS hanno anche dimostrato la razionalità delle involuzioni generate, sulle superficie che le posseggono, dalle trasformazioni birazionali γ di cui si parla su nel testo. Questa circostanza è valida qualunque sia p ($\geqq 1$) e si può stabilire molto semplicemente.

10. *Il caso* $k = 0$.

Poichè $k = 0$, il gruppo delle omografie di V_2 deve mutare in sè il suo unico sistema nullo (riemanniano e principale). Ciò porta che ogni eventuale omografia di V_2, diversa dall'identità, è omologica o biassiale [67]).

Esista ora, se è possibile una omografia *riemanniana* di V_2 che non sia identica: una volta che le imagini di V_2 non contengono punti reali nè stanno in piani reali, essa non potrà essere omologica e quindi sarà certo biassiale. Inoltre le sue rette di punti uniti o saranno le imagini τ e $\bar{\tau}$ di V_2 (che sono due rette imaginarie coniugate di 2ª specie), o saranno due rette a e b appoggiate a τ e $\bar{\tau}$.

La prima alternativa va esclusa, perchè altrimenti (I, n° 60) V_2 sarebbe ad indici massimi; e la seconda va esclusa, per il fatto che ove essa si verificasse ogni complesso di rette, lineare e razionale, passante per la congruenza lineare razionale con gli assi a e b sarebbe un complesso riemanniano di V_2 e per V_2 sarebbe $k > 0$; dunque, nell'ipotesi fatta, non esistono omografie riemanniane di V_2 diverse dall'identità, e quindi si ha necessariamente $h = 0$.

Insomma:

L'indice di moltiplicabilità di una V_2 non singolare è necessariamente nullo.

11. *Il caso* $k = 1$.

Poichè qui $k = 1$, la V_2 considerata ammette due e due soli pseudo-assi complementari che sono due rette reali sghembe a e b appoggiate a τ e $\bar{\tau}$.

Ogni omografia di V_2 deve mutare in sè il fascio dei sistemi nulli di V_2, quindi o tiene ferma ciascuna delle due rette a e b o le permuta fra di loro.

Ma una omografia di V_2 che nasca dal prodotto di un suo sistema nullo per l'inversa di un altro (non degenere) lascia ferme a e b, e il gruppo continuo delle omografie di V_2 deve indurre sull'imagine di V_2 un gruppo continuo di proiettività (che deve essere anche un sistema lineare), dunque *ogni* omografia di V_2 lascia ferme a e b e ha quattro punti uniti nei punti in cui a e b si appoggiano alle imagini τ e $\bar{\tau}$ di V_2.

Questi quattro punti sono i vertici di un tetraedro, dunque è intanto

$$h \leqq 3.$$

Ma è pure $h \geqq k$, quindi h non può essere che 1, 2 o 3.

Adesso osserviamo che il sistema lineare ∞^3 delle omografie di un S_3 aventi per punti uniti i vertici di un tetraedro può supporsi costituito dalle omografie date da

$$\rho x'_j = \alpha_j x_j \qquad (j = 1, 2, 3, 4)$$

al variare delle α_j, e che una rete di questo sistema è un *piano* nello spazio $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$, cioè è rappresentata da una equazione del tipo

$$\mu_1 \alpha_1 + \mu_2 \alpha_2 + \mu_3 \alpha_3 + \mu_4 \alpha_4 = 0.$$

---

67) R. Bonola, *Sistemi lineari di omografie piane e spaziali che formano gruppo* [Atti della Società dei Naturalisti e Matematici di Modena, serie IV, vol. X (1908)].

Se codesta rete ha da essere anche un gruppo deve contenere l'identità e poi accanto all'omografia $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$ deve contenere tutte le sue potenze, dunque, in particolare, ha da essere:

$$\begin{aligned}\mu_1 + \mu_2 + \mu_3 + \mu_4 &= 0\\ \mu_1\alpha_1 + \mu_2\alpha_2 + \mu_3\alpha_3 + \mu_4\alpha_4 &= 0\\ \mu_1\alpha_1^2 + \mu_2\alpha_2^2 + \mu_3\alpha_3^2 + \mu_4\alpha_4^2 &= 0\\ \mu_1\alpha_1^3 + \mu_2\alpha_2^3 + \mu_3\alpha_3^3 + \mu_4\alpha_4^3 &= 0,\end{aligned}$$

cioè

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1\\ \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4\\ \alpha_1^2 & \alpha_2^2 & \alpha_3^2 & \alpha_4^2\\ \alpha_1^3 & \alpha_2^3 & \alpha_3^3 & \alpha_4^3 \end{vmatrix} = 0.$$

Ciò porta che due delle α_i debbono essere uguali, e quindi *nel considerato sistema* ∞^3 *di omografie non esistono che sei reti di omografie formanti gruppo; ciascuna di queste reti è poi formata dalle omografie assiali che hanno la retta dei punti uniti in uno spigolo del tetraedro e la retta dei piani uniti nello spigolo opposto.*

Applicando questa osservazione al caso nostro, si vede che se per la V_2 considerata è $h = 2$, la sua omografia riemanniana generica è assiale ed ha le rette a e b per rette di punti o piani uniti.

Ma allora le rette a e b sono entrambe razionali, cioè a e b sono due *assi* di V_2, e V_2 è necessariamente impura.

Riassumendo e ricordando la formula (38) della Parte Prima, possiamo dire che:

Se per una V_2 *è* $k = 1$ *e la* V_2 *è pura, per essa o è* $h = 1$, *o è* $h = 3$. *Se invece* $k = 1$ *e la* V_2 *è impura, per essa è* $h = 1$, 2 *o* 3 *secondo che dei due (soli) integrali ellittici che essa possiede nessuno, uno o due sono a moltiplicazione complessa.*

Se è $k = h = 1$ *l'omografia generica di* V_2 *è biassiale avendo per rette di punti (e piani) uniti i due pseudo-assi (o assi) di* V_2. *Se è* $k = 1$ *e* $h = 2$ *l'omografia generica di* V_2 *è assiale, avendo la retta dei punti uniti nell'asse di* V_2 *rispondente all'integrale ellittico che non è a moltiplicazione complessa e quella dei piani uniti nell'asse di* V_2 *rispondente all'integrale ellittico a moltiplicazione complessa; se è* $k = 1$ *ed* $h = 3$ *l'omografia generica di* V_2 *ha soltanto quattro punti uniti nei punti comuni alle imagini e agli pseudo-assi.*

In tutti i casi le omografie di V_2 *sono a due a due permutabili.*

12. *Il caso* $k = 2$.

Qui i sistemi nulli di V_2 costituiscono una rete e gli pseudo-assi sono le rette reali di una schiera rigata ordinaria avente per direttrici le imagini di V_2.

Come prima si vede subito che esistono omografie di V_2 inducenti sull'imagine τ una proiettività con due punti uniti nei due punti ove τ incontra due qualunque pseudo-assi di V_2; quindi, per una ragione addotta, il gruppo indotto su τ dal gruppo delle omografie di V_2 è necessariamente il gruppo di tutte le proiettività di τ in sè stessa. Segue che $h \geqq 3$; ma se fosse $h > 3$ sarebbe addirittura (I, n° 62) $h = 7$ e quindi (I, n° 58) $k = 3$, dunque, aggiungendo qualche altra facile considerazione complementare:

Se per una V_2 è $k = 2$, per essa è necessariamente $h = 3$; e la V_2 o è pura o è impura e contiene infiniti integrali ellittici dei quali nessuno è a moltiplicazione complessa. In ogni caso, l'omografia generica di V_2 è biassiale, le rette dei suoi punti (e piani) uniti essendo due generatrici (qualunque) della schiera rigata contenente gli pseudo-assi.

13. Raccogliendo tutte le osservazioni fatte, possiamo enunciare il seguente teorema:

Le superficie iperellittiche possono esser distinte in nove tipi fondamentali, nel modo che segue:

TIPO I) $k = 0$ *ed* $h = 0$;

TIPO II) $k = 1$, $h = 1$ *e non esiste alcun integrale ellittico;*

TIPO III) $k = 1$, $h = 1$ *ed esistono due (soli) integrali ellittici nessuno dei quali è a moltiplicazione complessa;*

TIPO IV) $k = 1$, $h = 2$ *ed esistono due (soli) integrali ellittici di cui uno solo è a moltiplicazione complessa;*

TIPO V) $k = 1$, $h = 3$ *e non esiste alcun integrale ellittico;*

TIPO VI) $k = 1$, $h = 3$ *ed esistono due (soli) integrali ellittici a moltiplicazione complessa;*

TIPO VII) $k = 2$, $h = 3$ *e non esiste alcun integrale ellittico;*

TIPO VIII) $k = 2$, $h = 3$ *ed esistono infiniti integrali ellittici, nessuno dei quali è a moltiplicazione complessa;*

TIPO IX) $k = 3$, $h = 7$ *ed esistono infiniti integrali ellittici, ognuno dei quali è a moltiplicazione complessa.*

Come abbiamo già detto i nove tipi sono tutti realizzabili; per quelli che risultano di V_2 impure la cosa è immediata, per gli altri risulterà dagli esempi che saranno effettivamente incontrati o che potrebbero essere facilmente costruiti.

§ 4.

Teoremi generali sulle trasformazioni birazionali di una superficie iperellittica in sè.

14. Alla descrizione dei gruppi G e Γ per i singoli tipi di superficie iperellittiche giova premettere le seguenti considerazioni generali.

Sia V_2 una superficie iperellittica singolare con l'indice di singolarità k $(\geqq 1)$ e siano

$$A_j \equiv \sum_{r,s}^{1\ldots 2p} c_{r,s}^{(j)} x'_r y'_s \qquad (j = 0, 1, \ldots, k)$$

$k + 1$ sue forme riemanniane alternate intere (primitive) linearmente indipendenti, costituenti una *base minima* (I, n° 19) per l'insieme delle sue forme riemanniane alternate intere.

Indicato con δ_j lo pfaffiano del determinante (emisimmetrico) di A_j e con $I_{j,l}$ l'invariante simultaneo di A_j e A_l, cioè posto:

$$\delta_j = c^{(j)}_{1,2}\,c^{(j)}_{3,4} + c^{(j)}_{1,3}\,c^{(j)}_{4,2} + c^{(j)}_{1,4}\,c^{(j)}_{2,3}$$

e

$$I_{j,l} = c^{(j)}_{1,2}\,c^{(l)}_{3,4} + c^{(j)}_{1,3}\,c^{(l)}_{4,2} + c^{(j)}_{1,4}\,c^{(l)}_{2,3} + c^{(j)}_{3,4}\,c^{(l)}_{1,2} + c^{(j)}_{4,2}\,c^{(l)}_{1,3} + c^{(j)}_{2,3}\,c^{(l)}_{1,4};$$

lo pfaffiano della forma riemanniana alternata intera generica di V

$$A \equiv \sum_j^{0\ldots k} \mu_j A_j \tag{7}$$

ove le μ_j sono interi qualunque sarà dato da:

$$\delta = \delta_0 \mu_0^2 + \cdots + \delta_k \mu_k^2 + I_{0,1}\mu_0\mu_1 + \cdots + I_{k-1,k}\,\mu_{k-1}\mu_k . \tag{8}$$

Ciò posto, supponiamo che

$$x'_r = a_{r,1}x_1 + a_{r,2}x_2 + a_{r,3}x_3 + a_{r,4}x_4 \qquad (r = 1, 2, 3, 4) \tag{9}$$

sia una sostituzione riemanniana modulare di V_2.

Per effetto di essa la forma A_j va in una forma riemanniana alternata intera di V_2, dunque, indicati con le $\rho_{j,l}$ degli interi convenienti, la trasformata di A_j mediante la (9) sarà una forma del tipo

$$\sum_l^{0\ldots k} \rho_{j,l} A_l .$$

Allora la trasformata di (7) mediante (9) sarà la forma

$$A' \equiv \sum_j^{0\ldots k} \mu'_j A_j ,$$

ove

$$\mu'_j = \sum_l^{0\ldots k} \rho_{l,j}\,\mu_l .$$

Poichè la sostituzione (9) è modulare, i determinanti delle forme A e A' debbono essere uguali, quindi i relativi pfaffiani, almeno in valore assoluto sono eguali.

Ma per effetto di (9) le forme riemanniane principali (non principali) di V_2 si convertono in forme che pure sono principali (non principali), dunque, per un ben noto teorema dei sig^{ri}. Bagnera e De Franchis [68]), codesti pfaffiani sono eguali anche per il segno.

Ciò porta che $|\rho_{l,j}|$ è il modulo di una sostituzione lineare a coefficienti interi atta a mutare in sè la forma quadratica (8), cioè di una sostituzione *(unimodulare)* del gruppo automorfo della forma quadratica (8).

---

[68]) Loc. cit. [2]), n° 5.

Adunque:

Il gruppo G delle sostituzioni riemanniane modulari della nostra V_2 è isomorfo a un sottogruppo del gruppo aritmetico riproduttivo di una forma quadratica (a coefficienti interi) a $k+1$ variabili indipendenti [69]).

Osservisi subito che codesto isomorfismo è certo in ogni caso meriedrico, perchè due operazioni di G differenti solo per i segni dei coefficienti inducono sulla (8) la stessa sostituzione unimodulare.

Se k è dispari, una considerazione fatta più sopra può essere ulteriormente precisata; si può asserire, cioè, che:

Quando k è dispari è necessariamente

$$|\rho_{l,j}| = +1.$$

E infatti se $k=1$, la (9) induce nello S_1 dei sistemi nulli reali di V_2 una proiettività reale concorde, una volta che per essa sistemi nulli principali vanno in sistemi nulli principali, mentre i due che sono degeneri restano fermi; e se $k=3$, la (9) induce nello S_3 dei sistemi nulli reali di V_2 una proiettività reale che muta in sè la quadrica dei sistemi nulli degeneri, lasciando singolarmente invariate le due schiere degli S_1 (imaginari) di codesta quadrica.

Notisi infine che la forma quadratica (8) è in ogni caso a discriminante non nullo e indefinita; ed è una forma *annullantesi* o no, secondo che la V_2 è impura o pura.

15. Supponiamo ancora che V_2 sia una superficie iperellittica singolare e consideriamo un fascio di suoi sistemi nulli che contenga (due, e quindi) infiniti sistemi nulli

---

[69]) Grazie alle ricerche di BAGNERA e DE FRANCHIS sulla base delle curve (algebriche) tracciate sopra una superficie iperellittica [loc. cit. [2])], questo teorema è, per il caso delle superficie iperellittiche, l'analogo di quello che SEVERI stabilisce per tutte le superficie regolari nel n° 6 della sua Memoria: *Complementi alla teoria della base per la totalità delle curve di una superficie algebrica* [Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, t. XXX (1° semestre 1910), pp. 265-288].

Le considerazioni del testo sono visibilmente estendibili al caso di una varietà abeliana qualunque.

Qui vi è luogo a un'osservazione ulteriore.

Tra le forme A_j se ne prenda di mira una, per es. A_0. Allora ad ogni sostituzione riemanniana (9) si possono associare i $k+1$ interi $\rho_{0,l}$ che sono univocamente determinati dalla sostituzione quando sia fissata la base $(A_0, A_1, \ldots, A_k)$ e in essa la forma A_0. Se $k=1$ i due numeri che così si ottengono sono quelli che HUMBERT chiamerebbe *indici* non della sostituzione considerata, ma della sostituzione *aggiunta*.

Questa osservazione mentre chiarisce il concetto dello HUMBERT, introdotto da questo scienziato in modo puramente algoritmico, pone in luce la sua poca suscettibilità ad esser posto a base della presente teoria. Da una parte codesti *indici* non dipendono dalla sola sostituzione, ma da essa e da elementi che possono esser scelti con grande arbitrarietà; e dall'altra si vede che, se mai, a voler esser conseguenti, come nel caso $k=1$ si introducono *due* indici, nei casi in cui $k=2$ o $k=3$ bisognerebbe introdurre *tre* o *quattro* indici rispettivamente.

Comunque, se per la teoria attuale il concetto dello HUMBERT non è molto raccomandabile, per altre questioni può riuscire utile. Sopratutto per questo mi è parso conveniente di chiarirlo ed illustrarlo.

riemanniani; di più supponiamo che i due (soli) sistemi nulli degeneri appartenenti al fascio, distinti o no, abbiano per assi le rette a e b.

Moltiplicando, a destra, i sistemi nulli riemanniani del fascio per l'inversa di uno fisso fra di essi, non degenere, si ottengono infinite omografie riemanniane di V_2 che hanno altrettante rette unite nelle rette della congruenza lineare (speciale o no) avente per direttrici a e b; anzi esse sono *tutte* le omografie riemanniane di V_2 che godano di questa proprietà, perchè il prodotto di una tale omografia per un sistema nullo riemanniano del nostro fascio è ancora un sistema nullo riemanniano del fascio.

Adesso consideriamo le sostituzioni riemanniane di V_2 corrispondenti a queste omografie riemanniane (contenute tutte in uno stesso fascio); e nel loro insieme scegliamone due che costituiscano *per esso* una base minima [70]). I moduli di queste sostituzioni siano

$$|a'_{r,s}| \quad \text{e} \quad |a''_{r,s}| \qquad (r, s = 1, 2, 3, 4),$$

e le omografie riemanniane di V_2 ad esse corrispondenti siano α' e α''.

Il modulo di un'altra qualsiasi sostituzione dell'insieme considerato sarà

$$(10) \qquad |\mu' a'_{r,s} + \mu'' a''_{r,s}|,$$

le μ' e μ'' essendo due numeri interi (non entrambi nulli).

Per quel che è stato detto, è possibile scegliere nel fascio considerato tre sistemi nulli riemanniani di V_2, π, π' e π'' così che sia:

$$(11) \qquad \alpha' = \pi'\pi^{-1} \quad \text{e} \quad \alpha'' = \pi''\pi^{-1}.$$

Siano

$$\sum_{r,s}^{1\ldots4} c'_{r,s} x_r y_s = 0 \quad \text{e} \quad \sum_{r,s}^{1\ldots4} c''_{r,s} x_r y_s = 0$$

le equazioni di π' e π'' considerati come connessi di punti, e

$$\sum_{r,s}^{1\ldots4} C_{r,s} \xi_r \eta_s = 0$$

l'equazione di π considerato come connesso di piani, le c', c'', C essendo tutte, come è lecito supporre, dei numeri interi.

Grazie alle (11), dovrà essere indicando con l' ed l'' degli interi opportuni,

$$l' a'_{r,s} = \sum_t^{1\ldots4} C_{r,t} c'_{t,s}, \qquad l'' a''_{r,s} = \sum_t^{1\ldots4} C_{r,t} c''_{t,s},$$

e quindi sarà

$$(12) \qquad \mu' a'_{r,s} + \mu'' a''_{r,s} = \sum_t^{1\ldots4} C_{r,t} \left(\frac{\mu'}{l'} c'_{t,s} + \frac{\mu''}{l''} c''_{t,s} \right).$$

Adesso indichiamo con δ', δ'', δ gli pfaffiani di $|c'_{r,s}|$, $|c''_{r,s}|$ e $|C_{r,s}|$ e con I l'inva-

[70]) L'esistenza di tale base minima è manifesta dopo quel che è stato detto nel § 3 della Parte Prima.

riante simultaneo

$$c'_{1,2}c''_{3,4} + c'_{1,3}c''_{4,2} + c'_{1,4}c''_{2,3} + c'_{3,4}c''_{1,2} + c'_{4,2}c''_{1,3} + c'_{2,3}c''_{1,4}.$$

In base alle (12), il determinante (10) è uguale al prodotto di $|C_{r,s}|$ per il determinante $\left|\frac{\mu'}{l'}c'_{r,s} + \frac{\mu''}{l''}c''_{r,s}\right|$, dunque

$$|\mu' a'_{r,s} + \mu'' a''_{r,s}| = \delta^2\left(\frac{\delta'}{l'^2}\mu'^2 + \frac{I}{l'l''}\mu'\mu'' + \frac{\delta''}{l''^2}\mu''^2\right)^2.$$

Segue che nell'insieme considerato esisteranno tante sostituzioni modulari quante sono le soluzioni in numeri interi μ' e μ'' delle equazioni

$$(13) \qquad \frac{\delta\delta'}{l'^2}\mu'^2 + \frac{\delta I}{l'l''}\mu'\mu'' + \frac{\delta\delta''}{l''^2}\mu''^2 = \pm 1$$

dove, occorre appena avvertirlo, i coefficienti delle incognite sono certo dei numeri interi.

Ciascuna delle equazioni (13) presenta il caso ellittico, il caso parabolico o il caso iperbolico, secondo che

$$(14) \qquad I^2 - 4\delta'\delta''$$

è negativo, nullo o positivo; dunque si presenta il primo, il secondo o il terzo caso secondo che le rette a e b sono distinte e imaginarie coniugate, coincidenti o distinte e reali.

Se le rette a e b coincidono, esse coincidono in una retta razionale; se le rette a e b sono distinte, esse sono razionali solo quando l'espressione (14) è un quadrato perfetto (non nullo).

Allora basta osservare che una almeno delle equazioni (13) ammette soluzioni intere, perchè nell'insieme considerato esiste certo la sostituzione identica, e ricordare teoremi classici della teoria dei numeri per concludere che:

Nell'insieme di sostituzioni riemanniane considerato ne esistono certo di quelle che sono anche modulari; ma queste sono in numero finito se le rette a e b sono distinte e imaginarie coniugate o distinte e razionali, sono invece infinite se le rette a e b sono distinte, reali e non razionali oppure coincidono in un'unica retta (razionale).

Siccome l'insieme di sostituzioni considerato è evidentemente un gruppo, quando le sostituzioni modulari che esso contiene sono in numero finito esse saranno tutte periodiche e principali.

Infine si osservi che il caso delle rette a e b coincidenti non può presentarsi se non quando l'indice di singolarità della V_2 sia 2 o 3, e la V_2 sia impura [71]).

---

[71]) Si supponga di considerare una V_2 con $k = h = 1$. Allora ogni omografia riemanniana non degenere α della V_2 è data da un'eguaglianza del tipo

$$\alpha = \pi'\pi^{-1},$$

dove π e π' sono due sistemi nulli riemanniani non degeneri della V_2 e dove, per es., π' si può sup

§ 5.

I gruppi G e Γ per le superficie iperellittiche dei tipi I) e II).

16. Qui e nel seguito si indicherà sempre con V_2 la superficie iperellittica considerata, con τ e $\bar{\tau}$ le sue imagini, con G il gruppo delle sue sostituzioni riemanniane modulari, con Γ il gruppo delle sue trasformazioni birazionali che hanno un punto unito nel punto $u = v = 0$ di V_2, u e v essendo gli argomenti delle funzioni iperellittiche che dànno la rappresentazione parametrica di V_2, e con (Γ) il gruppo delle sostituzioni lineari omogenee sui parametri u e v corrispondenti alle operazioni di Γ.

---

porre fisso. Si può domandare allora come deve esser scelto π perchè il prodotto

$$\pi' \pi^{-1}$$

risulti un'omografia rispondente a una sostituzione modulare.

Per questo si può procedere così.

Intanto per ricerche classiche di FROBENIUS, l'equazione di π', premettendo, ove occorra, un'operazione B modulare, si può supporre dell'aspetto

$$(x_1 y_3 - x_3 y_1) + \delta'(x_2 y_4 - x_4 y_2) = 0$$

con δ' intero. Sia poi

$$\sum_{r,s}^{1\ldots4} c_{r,s} x_r y_s = 0$$

l'equazione di π, con le $c_{r,s}$ intere e prime tra loro.

Le formule dell'omografia α sono allora

$$\begin{aligned}
\rho x_1' &= c_{2,4} x_1 + \delta' c_{3,2} x_2 + \quad . \quad + \delta' c_{3,4} x_4 ,\\
\rho x_2' &= c_{4,1} x_1 + \delta' c_{1,3} x_2 + c_{4,3} x_3 + \quad . \quad ,\\
\rho x_3' &= \quad . \quad + \delta' c_{2,1} x_2 + c_{2,4} x_3 + \delta' c_{4,1} x_4 ,\\
\rho x_4' &= c_{1,2} x_1 + \quad . \quad + c_{3,2} x_3 + \delta' c_{1,3} x_4 .
\end{aligned}$$

Il massimo comun divisore dei coefficienti è, si vede subito, quello m dei numeri

$$c_{1,2},\ c_{1,4},\ c_{2,3},\ c_{2,4},\ c_{3,4},\ \delta' ;$$

e quindi il modulo della sostituzione riemanniana rispondente ad α (individuata a meno dei segni dei coefficienti) è dato da

$$\frac{\delta'^2 \delta^2}{m^4}$$

essendo δ lo pfaffiano di $|c_{r,s}|$.

Intanto m divide δ e δ', dunque perchè questo modulo risulti eguale a 1 occorre e basta che *i tre numeri δ, δ', m coincidano in valore assoluto.*

Se $\delta' = \pm 1$, cioè se la V_2 è una superficie jacobiana (degenere o no), la cosa si semplifica. Allora occorre e basta che sia $\delta = \pm 1$.

È questo il risultato che, sebbene non apparisca mai esplicitamente, sta al fondo delle considerazioni dello HUMBERT.

Al ragionamento ora fatto si possono collegare interessanti considerazioni aritmetiche che forse avremo occasione di riprendere.

Notisi, a questo proposito, che quel punto, e quindi Γ, non muta, per qualsiasi sostituzione lineare omogenea eseguita sulle variabili u e v.

La trasformazione di 2^a specie appartenente a Γ è l'identità; *la* trasformazione di 1^a specie appartenente a Γ sarà indicata sempre con γ_1, e la corrispondente operazione di G sarà sempre indicata con g_1.

La sostituzione (γ_1) di (Γ) corrispondente a γ_1 è

$$u' = -u, \quad v' = -v;$$

e le operazioni γ_1, g_1 e (γ_1) sono permutabili con ogni operazione di Γ, G e (Γ) rispettivamente.

Allorchè l'indice di singolarità di V_2 è 1, premessa ove occorra una sostituzione lineare omogenea sui parametri, si può supporre che gli integrali u e v di V_2 abbiano per *imagini* i due pseudo-assi (o assi) di V_2; con questa scelta degli argomenti u e v tutte le operazioni di (Γ) si ridurranno, simultaneamente, all'aspetto

$$u' = \lambda u, \quad v' = \mu v.$$

Ciò posto, vediamo, in questo paragrafo e nei successivi, quel che può dirsi dei gruppi G e Γ secondo le varie ipotesi che possono esser fatte sul tipo a cui V_2 appartiene.

17. TIPO I).

In questo caso, essendo $h = 0$, il gruppo di moltiplicabilità di V_2 è identico, e quindi G e Γ sono i gruppi ciclici del 2^o ordine generati da g_1 e γ_1 rispettivamente.

18. TIPO II).

In questo caso $k = h = 1$ e V_2 è priva di integrali ellittici: essa ha, cioè, due (e soltanto due) pseudo-assi, che non sono certo degli assi.

Il teorema del n° 15 assicura allora immediatamente che i gruppi G e Γ sono (discontinui) infiniti, e il teorema del n° 14 fornisce che G è meriedricamente isomorfo a un sottogruppo del gruppo aritmetico riproduttivo di una forma binaria quadratica a discriminante positivo e non quadrato.

Per far vedere che nel caso attuale il grado di meriedria di codesto isomorfismo è proprio 2, basterà dimostrare che:

Due sostituzioni riemanniane modulari della nostra V_2, rispondenti a due sue omografie riemanniane distinte non possono indurre nel fascio dei suoi sistemi nulli una stessa proiettività.

E infatti se ciò avvenisse per le sostituzioni g' e g'', il prodotto $g'g''^{-1}$ sarebbe per la V_2 una sostituzione modulare non identica e principale, o, ciò che fa lo stesso, periodica. D'altra parte al prodotto $g'g''^{-1}$ corrisponde un'omografia riemanniana non identica di V_2 che, essendo biassiale (n° 11) e con le rette dei punti uniti reali, non può esser periodica se non a patto di essere a periodo 2; dunque le radici dell'equazione caratteristica di $g'g''^{-1}$ (dovendo esser radici dell'unità e reali) sarebbero necessariamente $+1$ e -1, e gli pseudo-assi di V_2 sarebbero, contro l'ipotesi, razionali.

Allora basta ricordare la struttura del gruppo aritmetico riproduttivo di una binaria quadratica a discriminante positivo non quadrato, per concludere che:

Per una V_2 del tipo II) *i gruppi G e Γ sono (discontinui) infiniti; inoltre si può sempre scegliere in G un'operazione (aperiodica) g_2 (corrispondente a un'omografia riemanniana biassiale), così che detta γ_2 la corrispondente operazione di Γ, le operazioni di G e Γ siano tutte date dalle formule*

$$g_1^m g_2^n, \quad \gamma_1^m \gamma_2^n$$

dove m è 0 *o* 1, *ed n è un intero che percorre tutti i valori possibili da $-\infty$ a $+\infty$.*

Per conseguenza, le operazioni del gruppo (Γ) *si possono sempre supporre date da formule del tipo*

$$u' = \pm \alpha^n u, \quad v' = \pm \beta^n v,$$

dove i segni sono concordi, n è un intero qualunque e α e β sono le due radici reali e non razionali di un'equazione quadratica del tipo:

$$z^2 + az \pm 1 = 0,$$

con a intero.

§ 6.

I gruppi G e Γ per le superficie iperellittiche del tipo V).

19. Qui si ha $k = 1$, $h = 3$; e la V_2 non possiede integrali ellittici. Quindi essa ha ancora due (e due soli) pseudo-assi a e b che non sono certo degli assi.

Ciò porta subito che G e Γ sono ancora infiniti, poichè ciascuno di essi contiene certo come sottogruppo un gruppo della stessa natura di quello incontrato per le V_2 del tipo II); ma si tratta ora di vedere se essi possano essere più ampi di questi loro sottogruppi.

Troveremo, e in questo consiste il teorema più riposto della presente teoria, che ciò non può accadere se non per alcune delle superficie iperellittiche che sono birazionalmente identiche a involuzioni (di ordine $\geqq 1$) segnate sulla superficie di Jacobi corrispondente al radicale quadratico

$$\sqrt{x^5 + 1}.$$

Per esse i gruppi G e Γ possono presentare due nuovi aspetti distinti che saranno pienamente caratterizzati.

Poichè il comportamento eccezionale di cotesta superficie di Jacobi era stato già segnalato dallo Humbert nelle sue ricerche sulle trasformazioni birazionali in sè di una superficie iperellittica *jacobiana*, la chiameremo la superficie di Jacobi-Humbert.

20. Una sostituzione riemanniana modulare della nostra V_2 corrisponde a un'omografia riemanniana di V_2 che ha certo quattro punti uniti nei punti ove a e b si appoggiano a τ e $\bar{\tau}$. Poi, una volta che V_2 è pura, questa omografia non può certo esser soltanto assiale; quindi o ha due rette di punti uniti nelle rette a e b, o ha quattro e soltanto quattro punti uniti.

Per comodità di discorso, chiamiamo g_s le operazioni di G per cui si presenta la prima alternativa, e g_t quelle per cui si verifica, eventualmente, la seconda.

Poichè di operazioni g_s ne esistono sempre infinite, formanti un gruppo la cui costituzione ci è nota, supponiamo che la nostra V_2 ammetta una g_t, che diremo g_t^*, e vediamo a quali conseguenze conduce codesta ipotesi.

Naturalmente, occorre appena avvertirlo, se di operazioni g_t ne esiste una, ne esistono senz'altro infinite: per es. i suoi prodotti per tutte le g_s.

21. Grazie alle considerazioni del n° 14, e al teorema, già invocato, sulla struttura del gruppo aritmetico riproduttivo di una binaria quadratica a discriminante positivo e non quadrato, l'operazione g_t^* e una qualsiasi operazione g_s inducono nel fascio dei sistemi nulli di V_2 due trasformazioni che sono potenze di una stessa proiettività; e quindi esiste una potenza di g_t^*, diciamola g_t^{*m}, che induce nel fascio dei sistemi nulli di V_2 la stessa proiettività indottavi da una conveniente g_s, poniamo g_s^*. Ma allora

$$g_t^{*m} g_s^{*-1}$$

è un'operazione g principale, cioè periodica (o, in particolare, identica).

Di qua, una volta che per ogni V_2 con $k = 1$, le operazioni g, γ o (γ) sono a due a due permutabili, segue l'esistenza di un esponente n per cui risulta

$$g_t^{*mn} = g_s^{*n} = \text{una } g_s.$$

Ciò posto, sia l il minimo esponente positivo (certo > 1) per cui accade che:

$$g_t^{*l} = \text{una } g_s.$$

Come sarà dimostrato l'esponente l non può essere che 5.

22. Supponiamo di aver scelto gli integrali u, v di V_2 nel modo indicato al n° 16 e sia

$$u' = \lambda u, \quad v' = \mu v$$

l'operazione di (Γ) rispondente all'operazione g_t^*. Allora l'operazione di (Γ)

$$u' = \lambda^l u, \quad v' = \mu^l v$$

risponderà alla g_s che è uguale a g_t^{*l}.

Poniamo, per comodità di scrittura

$$\lambda^l = \alpha, \quad \mu^l = \beta.$$

Le radici dell'equazione caratteristica di g_t^* sono imaginarie e tutte distinte, dunque i numeri λ e μ sono imaginari non coniugati (I, n° 22) e radici di un'equazione del tipo:

$$\rho^4 + A\rho^3 + B\rho^2 + C\rho + 1 = 0 \tag{15}$$

con A, B, C interi.

Invece le quattro radici dell'equazione caratteristica della g_s uguale a g_t^{*l} o si riducono a due radici reali doppie distinte o (se quella g_s è identica oppure co ncide con g_1) si riducono alla radice quadrupla 1. In tutti i casi, i numeri α e β saranno dunque reali e radici di un'equazione del tipo

$$z^2 + az \pm 1 = 0, \tag{16}$$

con a intero.

La tabella cui appartiene V_2 è (I, n° 23) isomorfa alla matrice riemanniana

$$\left\| \begin{matrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 \end{matrix} \right\|, \tag{17}$$

quindi l'indice di singolarità di questa matrice deve essere uguale a 1, cioè λ e μ debbono soddisfare a due (e soltanto a due) relazioni indipendenti a coefficienti interi del tipo:

$$L + M(\lambda+\mu) + N(\lambda^2+\lambda\mu+\mu^2) + P\lambda\mu + Q\lambda\mu(\lambda+\mu) + R\lambda^2\mu^2 = 0. \tag{18}$$

Come è chiaro, si può sempre supporre che λ e μ soddisfacciano a una relazione di questo tipo ove manchi il termine in $\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2$, e quindi possiamo supporre che le due relazioni in discorso siano quella scritta e quest'altra

$$L' + M'(\lambda + \mu) + P'\lambda\mu + Q'\lambda\mu(\lambda + \mu) + R'\lambda^2\mu^2 = 0. \tag{19}$$

23. Ciò posto, osserviamo che

$$\lambda^l \mu^l = \alpha\beta = \pm 1,$$

e facciamo vedere che *non può essere*

$$\lambda^m \mu^m = \pm 1$$

con $0 < m < l$.

Intanto è chiaro che non può essere

$$\lambda\mu = \pm 1$$

perchè altrimenti la tabella (17) ammetterebbe un sistema nullo riemanniano degenere e sarebbe impura, mentre la V_2 di cui si tratta, essendo del tipo (V), è pura; e allora non può neppure essere

$$\lambda^m \mu^m = \pm 1$$

con m positivo e inferiore ad l, perchè altrimenti si presenterebbe per la g_t^{*m}, che non è certo una g_s, il caso ora escluso per g_t^*.

Segue che

$$\lambda\mu = \eta, \tag{20}$$

dove η è una radice primitiva dell'unità d'ordine l o d'ordine $2l$ secondo che nella (16), vale il segno superiore o il segno inferiore.

24. Dico, ora, in primo luogo, che:

L'esponente l non può essere pari.

Per dimostrarlo, basterà far vedere che non può essere $l = 2$, perchè se fosse $l = 2q$ con $q > 1$ si ripeterebbe per g_i^{*q} quello che ora diremo per g_i^* nell'ipotesi che sia $l = 2$.

E infatti se fosse $l = 2$, risultando

$$\lambda^2 = \alpha \quad \text{e} \quad \mu^2 = \beta,$$

λ e μ non potrebbero essere imaginari se non a patto che fosse $\alpha < 0$ e $\beta < 0$, e quindi nella (16) varrebbe il segno superiore, cioè sarebbe

$$\lambda^2\mu^2 = 1$$

e

$$\lambda\mu = \pm 1.$$

Il che, per quel che è stato detto più sopra, è senz'altro assurdo.

25. Dico, in secondo luogo, che:

L'esponente l non può essere un multiplo di 3.

E infatti se fosse $l = 3$ (unica ipotesi che importi considerare), indicando con $\sqrt[3]{\alpha}$ e $\sqrt[3]{\beta}$ le radici cubiche reali di α e β, e posto $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$, sarebbe, una volta che λ e μ sono imaginari,

$$\lambda = \begin{cases} \varepsilon\sqrt[3]{\alpha}, \text{ oppure} \\ \varepsilon^2\sqrt[3]{\alpha} \end{cases} \qquad \mu = \begin{cases} \varepsilon\sqrt[3]{\beta}, \text{ oppure} \\ \varepsilon^2\sqrt[3]{\beta}. \end{cases}$$

Intanto, per quanto sappiamo, non può essere $\lambda\mu = \pm 1$, cioè non può essere

$$\lambda\mu = \sqrt[3]{\alpha\beta};$$

dunque dovrebbe essere

$$\lambda = \varepsilon\sqrt[3]{\alpha} \quad \text{e} \quad \mu = \varepsilon\sqrt[3]{\beta},$$

oppure

$$\lambda = \varepsilon^2\sqrt[3]{\alpha} \quad \text{e} \quad \mu = \varepsilon^2\sqrt[3]{\beta}.$$

Valga la prima alternativa.

In tal caso le quattro radici dell'equazione (15) sarebbero

$$\varepsilon\sqrt[3]{\alpha}, \quad \varepsilon^2\sqrt[3]{\alpha}, \quad \varepsilon\sqrt[3]{\beta}, \quad \varepsilon^2\sqrt[3]{\beta};$$

quindi, badando che

$$1 + \varepsilon + \varepsilon^2 = 0$$

sarebbe

$$\sqrt[3]{\alpha} + \sqrt[3]{\beta} = A, \quad \sqrt[3]{\alpha^2} + \sqrt[3]{\alpha\beta} + \sqrt[3]{\beta^2} = B;$$

cioè

$$\lambda + \mu = A\varepsilon \quad \text{e} \quad \lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = B\varepsilon^2 = -B(1 + \varepsilon).$$

Ma è pure

$$\lambda\mu = \varepsilon^2\sqrt[3]{\alpha\beta} = \pm\varepsilon^2 = \mp(1 + \varepsilon),$$

quindi, come subito si verifica, per la tabella (17) sussisterebbero quattro e non già due relazioni indipendenti del tipo (18).

Dopo ciò, resta naturalmente esclusa anche la seconda alternativa.

26. Adesso prendiamo a considerare le due relazioni (18) e (19) che legano λ e μ.

Nella (19) non può essere

$$M' + Q'\lambda\mu = 0,$$

perchè ne seguirebbe $M' = Q' = 0$, oppure $\lambda\mu$, cioè η, razionale e quindi eguale a ± 1. Ora di queste due alternative, la seconda è stata già dimostrata assurda; ma anche la prima è da respingere, perchè altrimenti resterebbe per $\lambda\mu$, cioè per η, l'equazione (non identica) a coefficienti interi:

$$L' + P'\eta + R'\eta^2 = 0,$$

e η sarebbe una radice primitiva dell'unità d'ordine 2, 4, 3 o 6 contrariamente a quel che è stato già dimostrato per l'esponente l.

Ma allora la (19), posto η per $\lambda\mu$, ci dà:

$$\lambda + \mu = -\frac{R'\eta^2 + P'\eta + L'}{Q'\eta + M'},$$

da cui segue

$$\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2 = \frac{(R'\eta^2 + P'\eta + L')^2 - \eta(Q'\eta + M')^2}{(Q'\eta + M')^2}.$$

Sostituendo questi valori nella (18) si ricava un'equazione in η che è del quarto grado e a coefficienti interi; dunque, o questa equazione è identica, o η è radice primitiva dell'unità di uno dei seguenti gradi:

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 12.$$

Che quella equazione sia identica si esclude per altro con tutta facilità.

Infatti al posto di $\lambda + \mu$ e $\lambda\mu$ si pongano nelle relazioni (18) e (19) due variabili x e y, e si chiamino $f(xy)$ e $\varphi(xy)$ i due polinomi in cui si convertono i loro primi membri.

Se quella equazione si riducesse a un'identità, sarebbe

$$f(xy) = 0$$

per *tutte* le coppie xy soddisfacenti all'equazione

$$\varphi(xy) = 0.$$

Ma nella (19), per il fatto che la matrice (17) non è impura, non può essere $Q' = R' = 0$, il che val quanto dire che il polinomio $\varphi(xy)$ è certo del 2° grado, dunque $f(xy)$ non potrebbe differire da $\varphi(xy)$ che per un fattor costante, e le relazioni (18) e (19) non sarebbero, come è stato supposto, indipendenti.

Intanto η è pure radice primitiva dell'unità d'ordine l o d'ordine $2l$, con l dispari e $\geqq 5$, dunque l, come era stato preannunziato, è *necessariamente eguale a 5, e η è radice primitiva, quinta o decima, dell'unità.*

27. Dimostrato che $l = 5$, indichiamo con $\sqrt[5]{\alpha}$ e $\sqrt[5]{\beta}$ le radici quinte reali di α e β e poniamo

$$\lambda = \theta\sqrt[5]{\alpha},$$

dove, una volta che λ è imaginario, θ è una radice quinta (imaginaria, cioè) primitiva dell'unità.

Siccome

$$\lambda\mu \neq \pm 1,$$

il moltiplicatore μ non potrà avere che uno dei tre valori

$$\theta\sqrt[5]{\beta}, \quad \theta^2\sqrt[5]{\beta}, \quad \theta^3\sqrt[5]{\beta}.$$

Fare su μ la seconda o la terza ipotesi è indifferente, perchè basterebbe in caso guardare a g_t^{*2} anzi che a g_t^* e scambiare l'ufficio di λ e μ, cioè di u e v; dunque possiamo dire che:

I) o è

$$\lambda = \theta\sqrt[5]{\alpha} \quad \text{e} \quad \mu = \theta\sqrt[5]{\beta};$$

II) o è

$$\lambda = \theta\sqrt[5]{\alpha} \quad \text{e} \quad \mu = \theta^2\sqrt[5]{\beta}.$$

Facciamo vedere che di queste due alternative la prima non può essere accettata, mentre, come si vedrà, la seconda è veramente realizzabile.

28. Se valesse l'ipotesi I) le quattro radici dell'equazione (15) sarebbero

$$\theta\sqrt[5]{\alpha}, \quad \theta^4\sqrt[5]{\alpha}, \quad \theta\sqrt[5]{\beta}, \quad \theta^4\sqrt[5]{\beta},$$

quindi sarebbe intanto

$$(1 + \theta^3)(\lambda + \mu) = -A \quad \text{e} \quad \lambda\mu(\lambda + \mu) = -\frac{C\theta^2}{1 + \theta^3}.$$

Ma

$$\lambda\mu = \theta^2\sqrt[5]{\alpha\beta} = \pm\,\theta^2,$$

dunque verrebbe

$$\lambda + \mu = -\frac{A}{1 + \theta^3} \quad \text{e} \quad \lambda + \mu = \mp\frac{C}{1 + \theta^3},$$

cioè

$$A = \pm\, C,$$

dove, come è chiaro, in queste e nelle formule che seguono valgono, sempre, insieme i segni superiori o insieme i segni inferiori.

Inoltre sarebbe

$$\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\theta^2} + (2 + \theta^2 + \theta^3)\frac{\lambda\mu}{\theta^2} = B,$$

cioè

$$\frac{\lambda^2 + \mu^2}{\theta^2} \pm (2 + \theta^2 + \theta^3) = B.$$

Ma

$$\lambda^2 + \mu^2 \pm 2\,\theta^2 = (\lambda + \mu)^2,$$

dunque verrebbe

$$\frac{A^2}{(1 + \theta^3)^2} = B\,\theta^2 \mp (\theta^4 + 1),$$

cioè

$$\mp\,\theta^4 + (B \mp 2)\theta^3 + (B \mp 2)\theta^2 \mp \theta + 2\,B - A^2 \mp 2 = 0.$$

Ora l'equazione irriducibile di 4^0 grado a coefficienti interi cui soddisfa θ è

$$x^4 + x^3 + x^2 + x + 1 = 0,$$

dunque dovrebbe essere

$$B \mp 2 = \mp\,1 \quad \text{cioè} \quad B = \pm\,1;$$

e

$$2\,B - A^2 \mp 2 = \mp\,1 \quad \text{cioè} \quad A^2 = \pm\,1.$$

Ma allora in tutte le formule scritte valgono intanto i segni superiori, poichè, essendo A intero, non può essere $A^2 = -\,1$; quindi sarebbe

$$B = 1, \quad A = C = \pm\,1, \quad \lambda\mu = \theta^2.$$

Di qua seguirebbe:

$$\sqrt[5]{\alpha} + \sqrt[5]{\beta} = \mp\,\frac{1}{\theta(1 + \theta^3)},$$

$$\sqrt[5]{\alpha\beta} = 1;$$

ma

$$\theta(1 + \theta^3) = \frac{-\,1 \pm \sqrt{5}}{2},$$

e quindi $\sqrt[5]{\alpha}$ e $\sqrt[5]{\beta}$, come subito si verifica, in nessun caso potrebbero esser reali.

L'assurdo a cui siamo pervenuti giustifica la prima parte dell'asserzione fatta più sopra.

29. Sia ora

$$\lambda = \theta\sqrt[5]{\alpha} \quad \text{e} \quad \mu = \theta^2\sqrt[5]{\beta}.$$

Allora le radici di (15) sono

$$\theta\sqrt[5]{\alpha}, \quad \theta^4\sqrt[5]{\alpha}, \quad \theta^2\sqrt[5]{\beta}, \quad \theta^3\sqrt[5]{\beta}$$

ed è $\lambda\mu = \pm\,\theta^3$; dunque risulta

$$(1 + \theta^3)\lambda + (1 + \theta)\mu = -\,A,$$

$$\theta(1 + \theta)\lambda + \theta^2(1 + \theta^2)\mu = \mp\,C,$$

cioè

$$(21) \qquad \begin{cases} \lambda = \dfrac{\theta}{5}[3A \pm 2C + (A \mp C)(\theta^2 + \theta^3)], \\ \mu = \dfrac{\theta^2}{5}[2A \pm 3C - (A \mp C)(\theta^2 + \theta^3)], \end{cases}$$

dove, per far sparire le irrazionalità dai denominatori di λ e μ si è tenuto conto dell'identità

$$(1 - \theta - \theta^3 + \theta^4)^2 = 5\,\theta^4,$$

e dove, come prima, è inteso che nelle formule scritte e in tutte quelle che seguono valgono insieme i segni superiori o insieme i segni inferiori.

Di qua si trae subito un legame fra gli interi A e C.

Infatti il prodotto dei secondi membri delle (21) è

$$\frac{\theta^3}{5}(A^2 \pm 3AC + C^2);$$

ma è pure $\lambda\mu = \pm\,\theta^3$, dunque

$$(22) \qquad A^2 \pm 3AC + C^2 = \pm 5.$$

Infine esprimendo che la somma dei prodotti a due a due delle quattro radici sopra scritte di (15) è uguale a B e tenendo conto dei valori di λ e μ dati dalle (21) si trova che:

$$(23) \qquad B = \pm(2 - AC).$$

30. Le espressioni (21) di λ e μ possono essere semplificate.

Infatti, a seconda del valore di θ,

$$\theta^2 + \theta^3 = \frac{-1 + \sqrt{5}}{2}$$

oppure

$$\theta^2 + \theta^3 = \frac{-1 - \sqrt{5}}{2},$$

quindi

$$(24) \qquad \begin{cases} \lambda = \theta\left[\dfrac{A \pm C}{2} + \dfrac{A \mp C}{10}\sqrt{5}\right], \\ \mu = \theta^2\left[\dfrac{A \pm C}{2} - \dfrac{A \mp C}{10}\sqrt{5}\right]: \end{cases}$$

oppure

$$(25) \qquad \begin{cases} \lambda = \theta\left[\dfrac{A \pm C}{2} - \dfrac{A \mp C}{10}\sqrt{5}\right], \\ \mu = \theta^2\left[\dfrac{A \pm C}{2} + \dfrac{A \mp C}{10}\sqrt{5}\right]. \end{cases}$$

31. Le formule (24) o (25) pongono in evidenza che i coefficienti di θ e θ^2 nelle espressioni di λ e μ sono, come debbono essere, reali, e le (21), quando si rifletta che sono multipli di 5 gli interi $A - C$, $3A + 2C$ e $2A + 3C$ o gli interi $A + C$, $3A - 2C$ e $2A - 3C$ secondo che nella (22) valgono i segni superiori o i segni inferiori, mostrano che, in ogni caso, λ e μ sono della forma

$$a_0 + a_1 \theta + a_2 \theta^2 + a_3 \theta^3$$

con a_0, a_1, a_2, a_3 interi.

Ma un altro fatto, ben più interessante per la nostra discussione, risulta dalle formule (21). Esse infatti possono essere scritte così:

$$\lambda = -\frac{A \mp C}{5}(1 + \theta^2) + \frac{2A \pm 3C}{5}\theta,$$

$$\mu = -\frac{A \mp C}{5}(1 + \theta^4) + \frac{2A \pm 3C}{5}\theta^2;$$

quindi provano che l'espressione di μ si può ricavare da quella di λ ponendo in questa θ^2, θ^4 e θ al posto di θ, θ^2 e θ^3. Lo stesso accadrà allora per μ^2 e λ^2, μ^3 e λ^3, dunque la matrice (17) è (vincolata, cioè, una volta che ha da essere pura, è) isomorfa alla matrice

$$(26) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \theta & \theta^2 & \theta^3 \\ 1 & \theta & \theta^4 & \theta \end{vmatrix}.$$

Come è noto, la tabella (26) è realmente una matrice riemanniana pura con $k = 1$ e $h = 3$, e le superficie iperellittiche corrispondenti (qualunque sia la radice quinta primitiva θ) sono birazionalmente identiche alla superficie di JACOBI inerente al radicale quadratico

$$\sqrt{x^5 + 1},$$

cioè alla superficie di JACOBI-HUMBERT; quindi abbiamo intanto che:

Una V_2 del tipo V) *la quale ammetta delle operazioni g_t è birazionalmente identica alla superficie di* JACOBI-HUMBERT *o ad una involuzione segnata su di essa.*

32. Per precisare questo risultato giova osservare quanto segue.

Più sopra, posto

$$\lambda = \theta \sqrt[5]{\alpha},$$

potevamo supporre

$$\mu = \theta^2 \sqrt[5]{\beta} \quad \text{oppure} \quad \mu = \theta^3 \sqrt[5]{\beta}.$$

Si è già detto che, allo scopo della discussione, era indifferente fare una ipotesi piuttosto che l'altra; e, infatti, si può verificare che se, invece di fare

$$\mu = \theta^2 \sqrt[5]{\beta},$$

si pone

$$\mu = \theta^3 \sqrt[5]{\beta}$$

si ottengono le stesse formule (21), salvo che, nella seconda, al posto del fattore esterno

θ^2 comparisce invece il fattore θ^3; ma le condizioni (22) e (23) restano le stesse, e la matrice (17) è sempre isomorfa a una matrice equivalente a (26), cioè alla matrice (26).

Ma, *fatta una delle due ipotesi, questa porta con sè una conseguenza che va subito chiarita.*

Riprendiamo la nostra V_2 con la relativa g_t^*, i moltiplicatori dell'operazione di (Γ) corrispondente a g_t^* essendo

$$\lambda = \theta \sqrt[5]{\alpha}, \quad \mu = \theta^2 \sqrt[5]{\beta}.$$

I moltiplicatori del quadrato, del cubo e della quarta potenza di questa operazione saranno

$$\lambda^2 = \theta^2 \sqrt[5]{\alpha^2}, \quad \mu^2 = \theta^4 \sqrt[5]{\beta^2}; \quad \lambda^3 = \theta^3 \sqrt[5]{\alpha^3}, \quad \mu^3 = \theta \sqrt[5]{\beta^3}; \quad \lambda^4 = \theta^4 \sqrt[5]{\alpha^4}, \quad \mu^4 = \theta^3 \sqrt[5]{\beta^4}$$

e quindi se vi è una g_t cui compete, nel senso che risulta dal discorso, la coppia ordinata di radici quinte primitive dell'unità (θ, θ^2), ve ne sono, per la nostra V_2, anche di quelle cui competono le coppie ordinate (θ^2, θ^4), (θ^3, θ), (θ^4, θ^3).

Ora con le quattro radici quinte primitive dell'unità possono formarsi in tutto *otto* coppie ordinate di radici distinte e non coniugate. Di queste, quattro sono quelle scritte; le altre quattro sono:

$$(\theta, \theta^3), \quad (\theta^2, \theta), \quad (\theta^3, \theta^4), \quad (\theta^4, \theta^2).$$

Ebbene:

La V_2 considerata non può ammettere alcuna g_t cui competa una di quest'ultime quattro coppie.

E infatti se esistesse una g_t cui rispondesse una di queste coppie, facendone le potenze, si troverebbero delle g_t cui risponderebbe una qualunque delle rimanenti tre; ma allora il prodotto di due g_t, a una delle quali competesse la coppia (θ^2, θ^4) e all'altra la coppia (θ^4, θ^2), sarebbe una g_t con la coppia (θ, θ). E ciò è stato dimostrato assurdo.

Per intenderci, chiamiamo *ciclo* ognuna delle due quaterne di coppie ordinate qui introdotte.

Allora la discussione fatta prova che *se una V_2 del tipo* V) *ammette delle g_t, e quindi ne ammette infinite, i moltiplicatori λ e μ delle corrispondenti operazioni del gruppo (Γ) sono dati, tutti, da formule che hanno necessariamente il seguente aspetto*

$$(27) \quad \begin{cases} \lambda = \dfrac{\zeta_1}{5}[3A \pm 2C + (A \mp C)(\zeta_2 + \bar{\zeta}_2)], \\ \mu = \dfrac{\zeta_2}{5}[2A \pm 3C - (A \mp C)(\zeta_2 + \bar{\zeta}_2)] \end{cases}$$

dove la coppia (A, C), secondo che valgono i segni superiori o i segni inferiori rappresenta una soluzione in numeri interi dell'equazione

$$(28) \quad x^2 + 3xy + y^2 = 5$$

o dell'equazione

$$(29) \qquad x^2 - 3xy + y^2 = -5,$$

$\bar{\zeta}_2$ *è il numero complesso coniugato di* ζ_2 *e* (ζ_1, ζ_2) *è una coppia ordinata di radici quinte dell'unità imaginarie, diverse e non coniugate, appartenente a un ben determinato ciclo.*

Viceversa:

Se nelle (27), (A, C) *è, a seconda del caso, una soluzione della* (28) *o della* (29) *e* ζ_1 *e* ζ_2 *sono due radici primitive quinte dell'unità diverse e non coniugate, esiste sempre una* V_2 *del tipo* V) *su cui la sostituzione*

$$(30) \qquad u' = \lambda u, \quad v' = \mu v$$

genera una trasformazione birazionale che è una g_t.

E invero, per le ipotesi fatte, λ e μ riescono radici complesse diverse e non coniugate dell'equazione a coefficienti interi

$$(31) \qquad \rho^4 + A\rho^3 + (2 - AC)\rho^2 + C\rho + 1 = 0,$$

o dell'equazione (a coefficienti interi)

$$(32) \qquad \rho^4 + A\rho^3 + (AC - 2)\rho^2 + C\rho + 1 = 0;$$

e la matrice

$$(33) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 \end{vmatrix},$$

risultando isomorfa alla matrice (26), è una matrice riemanniana pura con $k = 1$ ed $h = 3$; dunque esistono delle V_2 [del tipo V)] appartenenti alla tabella (33) e su queste (che sono tutte birazionalmente identiche), in virtù della (31) o della (32), la (30) dà veramente luogo a una trasformazione birazionale che non è certo una g_s una volta che λ e μ non sono reali.

Ma qui possono presentarsi due casi ben differenti.

Se una V_2 del tipo V) ammette delle g_t, ma non ammette sostituzioni riemanniane (modulari) principali diverse dall'identità e da g_1, il relativo gruppo G è sempre meriedricamente isomorfo col grado di meriedria 2 a un sottogruppo del gruppo aritmetico riproduttivo di una binaria quadratica indefinita e non annullantesi; quindi il gruppo G ha sempre per una tale V_2 la struttura indicata al n° 18 per le V_2 del tipo II), con la sola differenza che qui la sostituzione ivi indicata con g_2 è una conveniente g_t e non una conveniente g_s.

Se invece la V_2 ammette sostituzioni riemanniane (modulari) principali diverse dall'identità e da g_1, queste non saranno certo delle g_s, per il ragionamento fatto al n° 18, che qui, per le g_s, potrebbe esser ripetuto; quindi dovendo essere delle g_t avranno necessariamente per periodo 5 o 10, e, indicata una di esse a periodo 5 con g_3 (e una tale g esisterà certo nelle ipotesi fatte), *tutte* le altre saranno date dai prodotti

$$g_1^m g_3^n$$

dove m è 0 o 1 ed n è 0, 1, 2, 3 o 4, una volta che le sostituzioni di (Γ) corrispondenti a quelle a periodo 5, non potendo avere per coppie di moltiplicatori che le coppie di un determinato *ciclo*, non possono essere che *quattro*.

Allora nei moltiplicatori, del tipo (27), della operazione di (Γ) rispondente a una qualsiasi g_t della V_2 i coefficienti di ζ_1 e ζ_2 sono *da soli* i moltiplicatori di una operazione di (Γ) rispondente a una g che risulta una g_s, poichè ζ_1 e ζ_2, per quel che è stato detto, sono *certo* i moltiplicatori di una operazione di (Γ) rispondente a una g_t col periodo 5; quindi, in tal caso, il gruppo G è generato dalle tre sostituzioni riemanniane

$$g_1, \quad g_3, \quad g_2,$$

dove g_2 è una conveniente g_s.

Ora le due alternative sono entrambe possibili.

La possibilità della prima è mostrata dalla V_2 appartenente alla tabella [72])

$$\begin{vmatrix} 1 & -1+\theta-\theta^2 & -3\theta+2\theta^2-3\theta^3 & 8+8\theta^2+13\theta^3 \\ 1 & -1+\theta^2-\theta^4 & -3\theta^2+2\theta^4-3\theta & 8+8\theta+13\theta \end{vmatrix},$$

equivalente alla tabella

$$\begin{vmatrix} 1 & \theta-\theta^2 & \theta+3\theta^3 & 11\theta^3 \\ 1 & \theta^2-\theta^4 & \theta^2+3\theta & 11\theta \end{vmatrix},$$

la quale *non* ammette sostituzioni principali a periodo 5; la possibilità della seconda è mostrata immediatamente dalla superficie di JACOBI-HUMBERT.

33. Si badi che per la discussione fatta ad ogni g_t di una V_2 (che ne sia dotata) risponde una soluzione intera di una delle due equazioni (28) o (29); ma non bisogna pensare che ad ogni tale soluzione risponda una g_t di *quella stessa* V_2, qualunque sia questa V_2.

La cosa sta per altro per la superficie di JACOBI-HUMBERT, come si può verificare direttamente; cosicchè per essa può enunciarsi il seguente teorema:

Per la superficie di JACOBI-HUMBERT *appartenente alla tabella*

$$\begin{vmatrix} 1 & \theta & \theta^2 & \theta^3 \\ 1 & \theta^2 & \theta^4 & \theta \end{vmatrix}$$

le operazioni del gruppo (Γ) *sono date tutte dalle formule*

$$(34) \qquad \begin{cases} u' = \dfrac{\zeta_1}{5}[3A \pm 2C + (A \mp C)(\zeta_2 + \bar{\zeta}_2)]u, \\ v' = \dfrac{\zeta_2}{5}[3A \pm 2C + (A \mp C)(\zeta_2 + \bar{\zeta}_2)]v \end{cases}$$

---

[72]) Questa tabella si ottiene dalla (17) o (33) facendo nelle (21) $A = 4$ e $C = \pm 1$.

e

$$(35)\qquad \begin{cases} u' = \frac{1}{5}[3A \pm 2C + (A \mp C)(\zeta_2 + \bar{\zeta}_2)]u, \\ v' = \frac{1}{5}[3A \pm 2C + (A \mp C)(\zeta_2 + \bar{\zeta}_2)]v \end{cases}$$

quando vi si supponga che la coppia (ζ_1, ζ_2) *percorra il ciclo individuato da* (θ, θ^2) *e la coppia* (A, C) *percorra, secondo che valgono i segni superiori o i segni inferiori, tutte le soluzioni intere della equazione* (28) *o della equazione* (29).

Naturalmente le operazioni di (Γ) *date dalle* (34) *rispondono alle* g_1, *e quelle date dalle* (35) *rispondouo alle* g_5 *della superficie.*

34. Riassumendo la discussione fatta e limitandoci a parlare, per brevità, del solo gruppo G, abbiamo il seguente teorema:

Per una V_2 *del tipo* V) *il gruppo* G:

1) *o è generato, come per le* V_2 *del tipo* II), *da* g_1 *e da una sostituzione (aperiodica)* g_2 *rispondente a una omografia riemanniana biassiale;*

2) *o è generato da* g_1 *e da una sostituzione (aperiodica)* g_5 *rispondente a una omografia riemanniana con quattro (e soltanto quattro) punti uniti;*

3) *o è generato da* g_1, *da una sostituzione principale* g_5 *col periodo* 5 *e da una sostituzione* g_2 *rispondente a un'omografia riemanniana biassiale.*

I tre casi sono tutti realizzabili; ma gli ultimi due non possono presentarsi se non per V_2 *che siano birazionalmente identiche a involuzioni (d'ordine* $\geqq 1$) *segnate sulla superficie di* Jacobi-Humbert, *per la quale si verifica appunto l'alternativa* 3). *E in essi i moltiplicatori delle sostituzioni lineari sui parametri corrispondenti alle trasformazioni birazionali hanno una struttura aritmetica nettamente definita in relazione alle soluzioni intere delle due equazioni*

$$x^2 + 3xy + y^2 = 5 \quad e \quad x^2 - 3xy + y^2 = -5.$$

§ 7.

I gruppi G e Γ per le superficie iperellittiche dei tipi III), IV) e VI).

35. La caratterizzazione dei gruppi G e Γ per le V_2 dei tipi III), IV) e VI) è resa presso che immediata dal fatto che tutte queste superficie contengono due fasci ellittici *isolati* di curve ellittiche, per modo che ogni loro eventuale trasformazione birazionale deve mutare in sè ciascuno di questi fasci subordinandovi una corrispondenza birazionale.

Segue che, se a rappresentare parametricamente una di queste V_2 si ricorre proprio ai suoi due integrali ellittici u e v, per modo che (n° 16) ogni operazione di (Γ) è del tipo

$$(36)\qquad u' = \lambda u, \quad v' = \mu v,$$

tanto λ, quanto μ non può essere eguale che a

$$+1, \quad -1, \quad +i, \quad -i, \quad +\varepsilon, \quad -\varepsilon, \quad +\varepsilon^2 \quad \text{o} \quad -\varepsilon^2,$$

dove, al solito, $i = \sqrt{-1}$ ed $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}$.

Da ciò risulta subito, intanto, che:

I gruppi G e Γ per le V_2 dei tipi III), IV) e VI) *sono in ogni caso finiti* [73]).

Ma le cose possono essere facilmente precisate.

Si osservi che il moltiplicatore μ (e lo stesso dicasi per λ) non può assumere uno dei valori imaginari della serie di numeri sopra scritta, se non a patto che il corrispondente integrale v sia armonico o equianarmonico, nel primo caso non potendo essere che $\pm i$, e nel secondo che $\pm \varepsilon$ o $\pm \varepsilon^2$; e si osservi, inoltre, che per una V_2 del tipo VI), i due integrali ellittici u e v, pur essendo entrambi a moltiplicazione complessa, non possono essere entrambi armonici o entrambi equianarmonici, una volta che debbono essere isolati.

In conformità di ciò, se dei due integrali u e v uno solo è armonico o equianarmonico conveniamo che questo sia v; e se dei due integrali u e v uno è armonico e l'altro è equianarmonico, indichiamo il primo con u e il secondo con v.

Allora è chiaro che il gruppo (Γ), per le V_2 qui considerate, non può presentare che una delle seguenti sei alternative:

1) o è il gruppo ciclico d'ordine 2 costituito da:

$$u' = u, \quad v' = v; \quad u' = -u, \quad v' = -v:$$

2) o è il gruppo quadrinomio costituito da:

$$u' = u, \quad v' = v; \quad u' = -u, \quad v' = -v; \quad u' = u, \quad v' = -v; \quad u' = -u, \quad v' = v:$$

3) o è il gruppo d'ordine 8 generato da:

$$u' = -u, \quad v' = -v; \quad u' = u, \quad v' = iv:$$

4) o è il gruppo d'ordine 6 generato da:

$$u' = -u, \quad v' = -v; \quad u' = u, \quad v' = \varepsilon v;$$

cioè il gruppo ciclico generato da:

$$u' = -u, \quad v' = -\varepsilon v:$$

5) o è il gruppo d'ordine 12 generato da:

$$u' = -u, \quad v' = -v; \quad u' = u, \quad v' = -\varepsilon v;$$

6) o è il gruppo d'ordine 24 generato da:

$$u' = -u, \quad v' = -v; \quad u' = iu, \quad v' = \varepsilon v.$$

---

[73]) Questo fatto, naturalmente, può esser dedotto anche dal teorema del n° 15 di questa 2ª parte della Memoria.

36. Per dimostrare che queste sei alternative sono tutte realizzabili e per caratterizzare le V_2 per cui ciascuna di esse si presenta, giova ricorrere alle seguenti considerazioni.

Intanto, grazie alle ipotesi fatte sui parametri u e v, la tabella a cui appartiene una delle nostre V_2 si può sempre supporre della forma:

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & \omega'_3 & \omega'_4 \end{vmatrix}, \tag{37}$$

dove le ω' sono legate da due relazioni lineari omogenee a coefficienti interi; anzi, se il gruppo (Γ) ha da presentare l'alternativa 3), nella (37) si può supporre

$$\omega'_3 = 1, \quad \omega'_4 = i,$$

e se il gruppo (Γ) ha da presentare le alternative (4) o (5), nella (37) si può supporre

$$\omega'_3 = 1, \quad \omega'_4 = \varepsilon.$$

37. Ciò posto, supponiamo in primo luogo che nel gruppo (Γ) della V_2 appartenente alla tabella (37) appaia la sostituzione lineare

$$u' = u, \quad v' = -v.$$

Allora, giacchè questa sostituzione deve generare sulla V_2 una trasformazione birazionale, occorre che $(\omega_1, -\omega'_1)$ e $(\omega_2, -\omega'_2)$ siano due coppie di periodi simultanei per u e v; quindi debbono esistere degli interi a, b, c, d per modo che sia

$$-\omega'_1 = \omega'_1 - a\,\omega'_3 - b\,\omega'_4,$$

$$-\omega'_2 = \omega'_2 - c\,\omega'_3 - d\,\omega'_4,$$

cioè

$$\omega'_1 = \frac{a\,\omega'_3 + b\,\omega'_4}{2}, \quad \omega'_2 = \frac{c\,\omega'_3 + d\,\omega'_4}{2}.$$

Qui gli interi a, b, c, d possono essere calcolati rispetto al modulo 2; per conseguenza, si può supporre che tanto ω'_1, quanto ω'_2 sia uguale a uno dei seguenti quattro valori:

$$0, \quad \frac{\omega'_3}{2}, \quad \frac{\omega'_4}{2}, \quad \frac{\omega'_3 + \omega'_4}{2}.$$

Se ω'_1 e ω'_2 sono eguali e non sono entrambi nulli, uno dei due si può supporre ridotto a zero; dunque, nell'ipotesi fatta, salvo a cambiare qualcuna delle denominazioni per i periodi ω e ω', la tabella (37) può ridursi a uno dei tre aspetti seguenti:

$$(37') \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \omega'_1 & \omega'_2 \end{vmatrix}, \quad (37'') \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\omega'_1}{2} & \omega'_1 & \omega'_2 \end{vmatrix}, \quad (37''') \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ \dfrac{\omega'_1}{2} & \dfrac{\omega'_2}{2} & \omega'_1 & \omega'_2 \end{vmatrix}.$$

38. Supponiamo, in secondo luogo, che nel gruppo (Γ) della V_2 appartenente alla tabella (37) compaia la sostituzione lineare

$$u' = u, \quad v' = iv,$$

per modo che la (37) può essere scritta così:

$$(38) \qquad \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & 1 & i \end{vmatrix}.$$

Allora occorre che $(\omega_1, i\omega'_1)$ e $(\omega_2, i\omega'_2)$ siano due coppie di periodi simultanei per u e v; quindi deve essere

$$i\omega'_1 = \omega'_1 - a - bi,$$

$$i\omega'_2 = \omega'_2 - c - di,$$

cioè

$$\omega'_1 = \frac{(a-b)+(a+b)i}{2}, \quad \omega'_2 = \frac{(c-d)+(c+d)i}{2},$$

con a, b, c, d interi.

Siccome, rispetto al modulo 2,

$$a - b \equiv a + b \quad \text{e} \quad c - d \equiv c + d,$$

si vede che tanto ω'_1, quanto ω'_2 si può supporre eguale a uno dei numeri

$$0, \quad \frac{1+i}{2}.$$

Ma, al solito, se sono eguali e non sono entrambi nulli, uno dei due può esser ridotto a zero, dunque, nell'ipotesi attuale, la tabella (34), salvo a cambiare i significati di ω_1 e ω_2, non può presentare che uno dei seguenti due aspetti

$$(38') \quad \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{vmatrix}, \qquad (38'') \quad \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{1+i}{2} & 1 & i \end{vmatrix}.$$

39. Supponiamo, in terzo luogo, che nel gruppo (Γ) della V_2 appartenente alla tabella (37) sia contenuta la sostituzione lineare

$$u' = u, \quad v' = \varepsilon v;$$

nel qual caso la (37) si può supporre rimpiazzata da:

$$(39) \qquad \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix}.$$

Allora occorre che esistano degli interi a, b, c, d per modo che si abbia

$$\varepsilon\omega'_1 = \omega'_1 - a - b\varepsilon,$$

$$\varepsilon\omega'_2 = \omega'_2 - c - d\varepsilon,$$

ossia

$$\omega'_1 = \frac{(2a - b) + (a + b)\varepsilon}{3}, \quad \omega'_2 = \frac{(2c - d) + (c + d)\varepsilon}{3}.$$

Ma

$$2a - b \equiv -(a + b), \quad 2c - d \equiv -(c + d) \qquad (\text{mod. } 3),$$

dunque ciascuno dei periodi ω'_1 e ω'_2 si può supporre eguale a uno dei seguenti tre numeri:

$$0, \quad \frac{\varepsilon - 1}{3}, \quad 2\frac{\varepsilon - 1}{3}.$$

Badando, come prima, che se ω'_1 e ω'_2 sono eguali e non entrambi nulli, uno può esser ridotto a zero, ed osservando che

$$2\frac{\varepsilon - 1}{3} = \varepsilon - 1 - \frac{\varepsilon - 1}{3},$$

si vede che, nell'ipotesi fatta, la tabella (39) può esser ridotta all'uno o all'altro di questi due aspetti:

$$(39') \quad \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix}, \qquad (39'') \quad \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{\varepsilon - 1}{3} & 1 & \varepsilon \end{vmatrix}.$$

40. Supponiamo, in quarto luogo, che nel gruppo (Γ) della V_2 appartenente alla tabella (37) compaia la sostituzione lineare

$$(40) \qquad u' = u, \quad v' = -\varepsilon v.$$

Allora nel gruppo (Γ) comparisce pure la sua quarta potenza, cioè

$$u' = u, \quad v' = \varepsilon v;$$

quindi la tabella (37) o si può ridurre all'aspetto (39') o si può ridurre all'aspetto (39'').

Ma sopra la V_2 appartenente a una tabella del tipo (39''), la sostituzione (40) non dà luogo a una trasformazione birazionale perchè una relazione del tipo

$$-\varepsilon\frac{\varepsilon - 1}{3} = \frac{\varepsilon - 1}{3} + a + b\varepsilon$$

con a e b interi è assurda, dunque, nell'ipotesi fatta, la V_2 appartiene certamente a una tabella del tipo:

$$(39') \qquad \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix}$$

41. Infine supponiamo che nel gruppo (Γ) della solita V_2 sia contenuta la sostituzione

$$u' = iu, \quad v' = \varepsilon v.$$

Allora nel gruppo è contenuta pure la (40) e quindi la V_2 appartiene intanto a una tabella del tipo (39'). Ma poi u è un integrale armonico e quindi si può supporre

$$\omega_1 = 1, \quad \omega_2 = i;$$

dunque nell'ipotesi attuale la tabella cui appartiene la V_2 è equivalente all'altra:

$$(41) \qquad \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix}$$

cioè la superficie considerata rappresenta la varietà delle coppie di punti estratte da due curve ellittiche di cui una è armonica e l'altra è equianarmonica.

42. Le considerazioni dei n[i] 37, ..., 41 possono essere tutte invertite; inoltre si vede subito che i due fasci ellittici di curve ellittiche situati sopra una delle nostre V_2 si unisecano, se la tabella a cui essa appartiene ha l'aspetto (37') [in particolare (38'), (39'), (41)], si bisecano se ha l'aspetto (37'') o, in particolare, (38''), si quadrisecano se ha l'aspetto (37''') e si trisecano se ha l'aspetto (39'') [74]).

Dunque, raccogliendo tutte le osservazioni fatte possiamo enunciare il seguente teorema:

Per le V_2 considerate in questo paragrafo i gruppi G e Γ:

1) *o sono ciclici del 2° ordine;*

2) *o sono quadrinomi;*

3) *o sono dell'ordine* 8;

4) *o sono dell'ordine* 6;

5) *o sono dell'ordine* 12;

6) *o sono dell'ordine* 24.

Per le V_2 del tipo III) *non possono presentarsi che le alternative* 1) *e* 2); *per le V_2 del tipo* IV) *non possono presentarsi che le prime cinque; per le V_2 del tipo* VI) *possono presentarsi tutte e sei.*

Nel caso 2) *i due fasci ellittici di curve ellittiche situati sulla V_2 si unisecano, si bisecano o si quadrisecano; nel caso* 3) *si unisecano o si bisecano; nel caso* 4) *si unisecano o si trisecano; nei casi* 5) *e* 6) *si unisecano.*

Nel caso 3) *uno dei fasci è armonico e l'altro è costituito di curve armoniche; nei casi* 4) *e* 5) *uno dei due fasci è equianarmonico e l'altro è costituito di curve equianarmoniche; nel caso* 6) *la V_2 è birazionalmente identica alla superficie iperellittica che rappresenta le coppie di punti di una curva ellittica armonica e una curva ellittica equianarmonica.*

---

[74]) Le superficie iperellittiche appartenenti a tabelle dei tipi (37'), (37''), (38'), (38''), (39') e (39'') si erano già tutte presentate a BAGNERA e DE FRANCHIS [loc. cit. [31]), n[i] 10, ..., 13] come sostegni di involuzioni di irregolarità 1 non equivalenti a rigate ellittiche; non così quelle appartenenti a tabelle del tipo (37'''). E ciò è ben naturale, poichè ogni involuzione segnata sopra una tal superficie o è iperellittica o è equivalente ad una rigata. La ragione che esclude queste superficie dalle considerazioni di quegli scienziati si trova nella discussione che essi fanno nel luogo citato al n° 10.

§ 8.

I gruppi G e Γ per le superficie iperellittiche dei tipi VII), VIII) e IX).

43. Le superficie iperellittiche degli ultimi tre tipi ammettono tutte infiniti fasci di sistemi nulli contenenti ciascuno infiniti sistemi nulli riemanniani.

Ciascuno di codesti fasci contiene due e due soli sistemi nulli degeneri i cui assi possono essere:

1) due rette reali distinte non razionali; oppure

2) due rette reali distinte e razionali; oppure

3) due rette reali coincidenti in un'unica retta (necessariamente razionale); oppure

4) due rette imaginarie coniugate.

Per le superficie del tipo VII), che sono tutte pure, le sole alternative possibili sono la prima e la quarta; per quelle dei tipi VIII) e IX) possono presentarsi tutte e quattro.

Tra le omografie riemanniane generate per prodotti dai sistemi nulli riemanniani di uno dei fasci in discorso, ve ne sono sempre (n° 15) di quelle che dànno luogo a sostituzioni riemanniane modulari, e il gruppo formato da queste sostituzioni modulari, che diremo, per intenderci, un gruppo L, è finito nei casi 2) e 4), mentre è infinito nei casi 1) e 3).

Nel caso 1) il gruppo L ha la stessa struttura del gruppo G di una V_2 del tipo II) e sarà detto *iperbolico*.

Nel caso 2) il gruppo L ha la stessa struttura del gruppo G di una V_2 del tipo III); quindi o è il gruppo ciclico del 2° ordine generato da g_1, o è un gruppo quadrinomio.

Nel caso 3) il gruppo L, per un ragionamento analogo a quello del n° 14, applicato all'insieme delle forme riemanniane alternate intere rispondenti ai sistemi nulli riemanniani del fascio, e per una osservazione del n° 18 è meriedricamente isomorfo col grado di meriedria 2 a un sottogruppo del gruppo aritmetico riproduttivo di una binaria quadratica semi-definita; quindi è sempre assimilabile al gruppo G di una V_2 del tipo II), salvo che l'operazione aperiodica che lo genera insieme con g_1, corrisponde non già ad una omografia biassiale con le rette dei punti uniti distinte, ma ad una omografia biassiale con le rette dei punti uniti coincidenti in un'unica retta (razionale). In tal caso esso sarà detto *parabolico*.

Nel caso 4) il gruppo L è meriedricamente isomorfo col grado di meriedria 2 al gruppo aritmetico riproduttivo di una binaria quadratica definita; d'altra parte le radici dell'equazione caratteristica di una sua operazione non identica e diversa da g_1, debbono ridursi a due radici doppie imaginarie coniugate e debbono pure essere radici dell'unità, cioè non possono essere che

$$+i \text{ e } -i, \quad \text{o} \quad \varepsilon \text{ ed } \varepsilon^2, \quad \text{o} \quad -\varepsilon \text{ e } -\varepsilon^2 \quad \left(i=\sqrt{-1}, \quad \varepsilon = e^{\frac{2\pi i}{3}}\right),$$

dunque, esso, o è il gruppo generato da g_1; o è il gruppo ciclico generato da un'operazione del 4° ordine avente per radici dell'equazione caratteristica $+i$ e $-i$; o è il gruppo ciclico generato da un'operazione del 6° ordine avente per radici dell'equazione caratteristica $-\varepsilon$ e $-\varepsilon^2$. Ove si verifichi una di queste due ultime alternative, il gruppo L si dirà *ellittico* [75]).

Dicendo Λ il sottogruppo di Γ corrispondente a un sottogruppo L del gruppo G di una delle nostre V_2 ed estendendo a Λ le denominazioni introdotte per L, possiamo enunciare intanto il seguente teorema:

I gruppi G e Γ di una V_2 degli ultimi tre tipi sono sempre infiniti (discontinui). Essi contengono in ogni caso infiniti sottogruppi L o Λ iperbolici; ma se (e soltanto se) la superficie è del tipo VIII) *o* IX) *essi contengono anche infiniti sottogruppi L o Λ parabolici.*

Precisamente, si ha un sottogruppo L (e un corrispondente gruppo Λ) iperbolico per ogni coppia di pseudo-assi della superficie, distinti e non razionali; si ha invece un sottogruppo L (e un corrispondente sottogruppo Λ) parabolico per ogni eventuale asse della superficie.

44. Se per una delle V_2 qui considerate esiste un gruppo L (o Λ) quadrinomio o ellittico, ne esistono infiniti altri della stessa sua struttura; ma non è detto che di gruppi L sì fatti ne debbano esistere in ogni caso. Vogliamo appunto vedere sotto qnali condizioni essi si possono presentare.

Per un gruppo L (o Λ) che sia quadrinomio, la questione, in sostanza, è stata già risoluta al n° 37, dove adesso gli integrali ellittici u e v son da considerare come vincolati; quindi possiamo dire che:

I gruppi G e Γ di una V_2 dei tipi VIII) *e* IX) *possono contenere (uno, e quindi) infiniti sottogruppi L o Λ quadrinomi; ma ciò accade quando e solo quando la V_2 appartiene a una tabella riconducibile all'aspetto* (37'), (37'') *o* (37'''). *Allora essa ammette una coppia di fasci ellittici di curve ellittiche unisecantisi, bisecantisi o quadrisecantisi, e quindi ne ammette addirittura infinite.*

Per un gruppo L (o Λ) che sia ellittico e dell'ordine 4 o 6 la questione è stata già risoluta dai sig.ri Bagnera e De Franchis [76]); ma, per uniformità di metodo, vale la pena di ritrovare i loro risultati dal punto di vista di questa Memoria.

45. Sia dunque V_2 una superficie iperellittica (di uno degli ultimi tre tipi) il cui gruppo G contenga un sottogruppo ellittico L del 4° ordine.

Questo sarà generato da un'operazione g del 4° ordine avente per radici dell'equazione caratteristica $+i$ e $-i$.

L'omografia riemanniana della V_2 corrispondente a g è un'omografia biassiale in-

---

[75]) Queste denominazioni sono chiaramente suggerite da denominazioni della teoria delle forme quadratiche ternarie. Come pure, è in teoremi ben noti di questa teoria che deve esser ravvisata la chiave del fatto che un sottogruppo L d'ordine finito ha l'ordine 2, 4 o 6.

[76]) Loc. cit. [31]), n[i] 39 e 40.

volutoria avente per rette di punti uniti due rette imaginarie coniugate σ e $\bar{\sigma}$ appoggiate alle imagini τ e $\bar{\tau}$ della V_2.

Segue che le rette σ e $\bar{\sigma}$ (I, n° 60) si possono riguardare come imagini di una superficie iperellittica V'_2 a indici massimi, e che g è una sua sostituzione modulare rispondente a un'omografia che subordina su σ e $\bar{\sigma}$ delle identità.

Ma allora, poichè g ha per radici dell'equazione caratteristica $+i$ e $-i$, V'_2 è (n° 7) una superficie iperellittica armonica; quindi si può supporre che la tabella cui essa appartiene sia

$$(42) \qquad \begin{vmatrix} 1 & i & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{vmatrix}:$$

cioè si può supporre che σ e $\bar{\sigma}$ siano, rispettivamente, le rette congiungenti i punti $(1, i, 0, 0)$, $(0, 0, 1, i)$ e i punti $(1, -i, 0, 0)$, $(0, 0, 1, -i)$.

Di qua, poichè τ congiunge un punto di σ a un punto di $\bar{\sigma}$, si trae intanto che la tabella cui appartiene la nostra V_2 può ridursi all'aspetto

$$(43) \qquad \begin{vmatrix} 1 & i & \lambda & \lambda i \\ 1 & -i & \mu & -\mu i \end{vmatrix}.$$

Si tratta, adesso, di vedere a quali condizioni debbono soddisfare λ e μ perchè la (43) sia una matrice riemanniana.

Si osservi che g è una sostituzione principale; quindi l'omografia corrispondente muta in sè un sistema nullo principale di V_2; poniamo il sistema π.

Le rette σ e $\bar{\sigma}$, corrispondendo a radici dell'equazione caratteristica dell'omografia diverse da $+1$ e -1, sono mutate in sè dal sistema π, quindi π è, nel tempo stesso, un sistema nullo riemanniano di V'_2, cioè un sistema nullo riemanniano della matrice (42). Ciò porta che la sua equazione è del tipo:

$$(44) \qquad a(1, 2) + b[(1, 3) + (2, 4)] + c[(1, 4) - (2, 3)] + d(3, 4) = 0,$$

dove a, b, c, d sono interi, che si possono supporre primi tra loro, e (j, l) sta per $x_j y_l - x_l y_j$.

Lo pfaffiano del determinante emisimmetrico formato coi coefficienti di (44) è

$$ad - b^2 - c^2,$$

e il determinante formato con le parti reali e i coefficienti dell'imaginario degli elementi di (43), posto

$$\lambda = \lambda_1 + \lambda_2 i, \quad \mu = \mu_1 + \mu_2 i$$

con λ_1, λ_2, μ_1, μ_2 reali è:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & \lambda_1 & -\lambda_2 \\ 1 & 0 & \mu_1 & \mu_2 \\ 0 & 1 & \lambda_2 & \lambda_1 \\ 0 & -1 & \mu_2 & -\mu_1 \end{vmatrix}$$

che è eguale a

$$(\lambda_1 - \mu_1)^2 + (\lambda_2 + \mu_2)^2;$$

dunque, esprimendo che π è un sistema nullo principale di (43) [77]) si trova che deve essere:

$$d\lambda\mu + (c - bi)\lambda + (c + bi)\mu + a = 0$$

e

$$(ad - b^2 - c^2)[(\lambda_1 - \mu_1)^2 + (\lambda_2 + \mu_2)^2] < 0;$$

questa diseguaglianza equivalendo alle altre due:

$$\mu \neq \bar{\lambda} \quad \text{e} \quad b^2 + c^2 - ad > 0;$$

delle quali la prima risponde evidentemente al fatto che la retta τ non può esser reale.

Le considerazioni fatte possono essere invertite e quindi si ha il teorema:

Condizione necessaria e sufficiente perchè i gruppi G e Γ di una superficie iperellittica (di uno degli ultimi tre tipi) siano dotati di sottogruppi ellittici L e Λ del quart'ordine, è che la tabella cui essa appartiene sia equivalente a una tabella del tipo (43), *dove λ e μ sono numeri complessi non coniugati, fra i quali sussiste una relazione della forma*

$$d\lambda\mu + (c - bi)\lambda + (c + bi)\mu + a = 0,$$

con a, b, c, d interi e soddisfacenti alla diseguaglianza

$$b^2 + c^2 - ad > 0.$$

46. Un procedimento analogo a quello or ora adoperato fornisce subito quest'altra proposizione:

Condizione necessaria e sufficiente perchè i gruppi G e Γ di una V_2 (di uno degli ultimi tre tipi) contengano sottogruppi ellittici L e Λ del sesto ordine, è che la tabella cui essa appartiene sia equivalente a una tabella avente l'aspetto

$$(45) \qquad \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon & \lambda & \lambda\varepsilon \\ 1 & \varepsilon^2 & \mu & \mu\varepsilon^2 \end{vmatrix}$$

dove λ e μ sono numeri complessi non coniugati, fra i quali sussiste una relazione della forma

$$d\lambda\mu - [c + (b + c)\varepsilon]\lambda + [b + (b + c)\varepsilon]\mu + a = 0,$$

con a, b, c, d interi e soddisfacenti alla diseguaglianza

$$b^2 + c^2 + bc - ad > 0.$$

47. Se una superficie iperellittica appartiene a uno dei tipi VII) o VIII), ogni sua

---

[77]) Qui si adopera l'importante teorema di BAGNERA e DE FRANCHIS già invocato precedentemente [loc. cit. [68])].

omografia riemanniana (non identica) è biassiale, con le rette dei punti uniti appoggiate alle imagini della superficie. Ma allora questa omografia è certo ottenibile come prodotto di sistemi nulli riemanniani; e quindi:

Per le superficie iperellittiche dei tipi VII) *e* VIII) *le operazioni dei gruppi G e Γ sono esaurite da quelle dei loro sottogruppi L e Λ.*

Ciò non è vero per le V_2 del tipo IX) perchè non tutte le omografie riemanniane di una tale superficie provengono per prodotti dai relativi sistemi nulli riemanniani: quindi, per approfondire la ricerca in quest'ultimo caso ci resta da vedere se per una superficie del tipo IX) possano esistere operazioni del gruppo G rispondenti:

a) a un'omografia riemanniana biassiale con gli assi nelle imagini τ e $\bar{\tau}$ della superficie; oppure

b) a un'omografia riemanniana assiale, con le rette dei punti o piani uniti appoggiate alle imagini della superficie; oppure

c) a un'omografia riemanniana con due soli punti uniti (distinti, imaginari coniugati), situati l'uno su τ e l'altro su $\bar{\tau}$; oppure

d) a un'omografia riemanniana con quattro soli punti uniti (distinti), situati due su τ e gli altri due (coniugati ai precedenti) su $\bar{\tau}$.

Grazie alle osservazioni del n° 23 della Parte Prima è chiaro che altre alternative ulteriori non sono possibili.

Le alternative *a*), *b*), *c*) e *d*) saranno discusse separatamente nei n[i] che seguono; intanto non sarà male preannunziare fin da ora che le prime tre non possono verificarsi che per superficie particolari; e precisamente per superficie che in ogni caso sono birazionalmente identiche a involuzioni (di ordine ≥ 1) segnate sopra una superficie iperellittica armonica o equianarmonica.

48. *Alternativa a*).

Per ciò che è detto al n° 7 essa ha luogo *quando e solo quando la superficie considerata è armonica o equianarmonica.*

49. *Alternativa b*).

Sia g un'operazione del gruppo G della nostra V_2 per cui si presenti il caso *b*).

Allora la corrispondente equazione caratteristica deve possedere una radice doppia e due radici semplici; la prima risulta quindi razionale, cioè intera, cioè $+1$ o -1, e le altre due risultano due numeri imaginari coniugati, radici di un'equazione della forma

$$z^2 + az \pm 1 = 0$$

con a intero.

Ma allora (cfr. n° 6) qui deve valere per l'ultimo coefficiente il segno superiore, e poi deve essere $a = 0$, $+1$, o -1; per conseguenza le altre due radici saranno $+i$ e $-i$, oppure ε ed ε^2, o $-\varepsilon$ e $-\varepsilon^2$.

Segue, scegliendo a parametri u e v gli integrali ellittici di V_2 corrispondenti l'uno alla retta dei punti uniti dell'omografia rispondente a g e l'altro a quella dei piani uniti, che l'operazione di (Γ) corrispondente a g può supporsi che sia

$$u' = \alpha u, \quad v' = \beta v$$

dove α è $+1$ o -1, e β è

$$i, \quad -i, \quad \varepsilon, \quad -\varepsilon, \quad \varepsilon^2 \quad \text{o} \quad -\varepsilon^2.$$

Di qua, per l'analisi dei n[i] 38 e 39, si trae intanto che la V_2 o contiene dei fasci ellittici di curve ellittiche armoniche o contiene dei fasci ellittici di curve ellittiche equianarmoniche.

Ma questa volta gli integrali ellittici della V_2 sono tutti a moltiplicazione complessa e tutti vincolati fra di loro, quindi nelle ipotesi attuali la tabella cui appartiene la V_2 può ridursi ad avere uno dei quattro aspetti seguenti

$$(46') \quad \begin{vmatrix} a & b+ci & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & i \end{vmatrix}, \qquad (46'') \quad \begin{vmatrix} a+bi & c+di & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{1+i}{2} & 1 & i \end{vmatrix}$$

$$(47') \quad \begin{vmatrix} a & b+c\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \varepsilon \end{vmatrix}, \qquad (47'') \quad \begin{vmatrix} a+b\varepsilon & c+d\varepsilon & 0 & 0 \\ 0 & \dfrac{\varepsilon-1}{3} & 1 & \varepsilon \end{vmatrix} \cdot$$

dove (a, b, c) o (a, b, c, d) sono numeri interi (che si possono supporre primi fra loro) assoggettati alla sola condizione di far risultare imaginario il rapporto dei primi due periodi della prima riga della tabella cui si riferiscono.

Concludendo:

Una g che risponda all'alternativa b) è necessariamente periodica col periodo 4, 3 *o* 6.

Se essa ha il periodo 4, *la V_2 considerata rappresenta un'involuzione (di ordine ≥ 1) segnata sopra una superficie iperellittica armonica e appartiene a una tabella riconducibile all'aspetto* (46') *o* (46''); *se invece ha il periodo* 3 *o* 6, *la V_2 rappresenta un'involuzione (di ordine ≥ 1) situata sopra una superficie iperellittica equianarmonica e la tabella cui appartiene è riducibile a uno dei due aspetti* (47') *e* (47'').

50. *Alternativa c).*

Se l'operazione g della V_2 presa in esame risponde al caso c) la sua equazione caratteristica deve avere due radici doppie imaginarie coniugate, soddisfacenti a un'equazione della forma

$$z^2 + az \pm 1 = 0$$

con a intero; quindi, al solito, codeste radici sono $+i$ e $-i$, ε ed ε^2, oppure $-\varepsilon$ e $-\varepsilon^2$.

Poichè la discussione nel caso che le due radici siano ε ed ε^2, oppure $-\varepsilon$ e $-\varepsilon^2$, può essere ricalcata, con qualche cambiamento del tutto insignificante, su quella che faremo per il caso in cui esse siano $+i$ e $-i$, noi, per disteso, non faremo che questa; ma va da sè che, alla fine, nell'enunciarne il risultato daremo addirittura il teorema che contempla tutti i casi possibili.

51. Siano, dunque, $+i$ e $-i$ le radici (doppie) dell'equazione caratteristica in discorso, e siano $(\omega_1, \omega_2, \omega_3, \omega_4)$ le coordinate del punto unito dell'omografia cui dà luogo g, situato su τ e rispondente a una determinata di queste radici. Salvo, se mai, a considerare $g g_1$ invece di g, si può supporre che quest'ultima radice sia proprio $+i$.

Il determinante caratteristico $D(\rho)$ di g per $\rho = i$ è nullo, ma, per ipotesi, di caratteristica 3; dunque, trascurando se mai un fattore di proporzionalità che qui non interessa, si può supporre che le ω siano numeri interi di Gauss, cioè della forma $m + n i$ con m ed n interi.

Ma

$$\omega_1, \quad \omega_2, \quad \omega_3, \quad \omega_4$$

si può pensare come riga di una tabella equivalente a quella cui appartiene V_2; dunque questa superficie, per una ragione già addotta, è, senz'altro, birazionalmente identica a un'involuzione (di ordine $\geqq 1$) segnata sopra una superficie iperellittica armonica.

Come parametri u e v scegliamo due integrali ellittici, supponendo per altro che il primo corrisponda all'*asse* di V_2 che congiunge il punto (ω_j) col punto imaginario coniugato.

Allora l'operazione (γ) di (Γ) corrispondente a g è del tipo

$$u' = i u, \quad v' = \alpha u + i v \tag{48}$$

con $\alpha \neq 0$, e la tabella cui appartiene la superficie, salvo a effettuare in caso una sostituzione unimodulare sui periodi di u e v può supporsi dell'aspetto

$$\begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 & 0 & 0 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & \omega'_3 & \omega'_4 \end{vmatrix} \tag{49}$$

ove ω_1 e ω'_3 si possono supporre degli interi ordinari (non nulli) e le altre ω e ω' sono numeri interi di Gauss.

Naturalmente ω_1 e ω_2 potranno non essere più i numeri indicati più sopra con gli stessi nomi.

Ciò posto, indichiamo con $a_{r,s}$ i coefficienti (interi) della sostituzione riemanniana modulare g. Dovrà essere:

$$\left\{\begin{array}{ll} i\omega_1 = a_{1,1}\omega_1 + a_{1,2}\omega_2, & \alpha\omega_1 + i\omega'_1 = a_{1,1}\omega'_1 + a_{1,2}\omega'_2 + a_{1,3}\omega'_3 + a_{1,4}\omega'_4, \\ i\omega_2 = a_{2,1}\omega_1 + a_{2,2}\omega_2, & \alpha\omega_2 + i\omega'_2 = a_{2,1}\omega'_1 + a_{2,2}\omega'_2 + a_{2,3}\omega'_3 + a_{2,4}\omega'_4, \\ 0 = a_{3,1}\omega_1 + a_{3,2}\omega_2, & i\omega'_3 = a_{3,1}\omega'_1 + a_{3,2}\omega'_2 + a_{3,3}\omega'_3 + a_{3,4}\omega'_4, \\ 0 = a_{4,1}\omega_1 + a_{4,2}\omega_2, & i\omega'_4 = a_{4,1}\omega'_1 + a_{4,2}\omega'_2 + a_{4,3}\omega'_3 + a_{4,4}\omega'_4, \end{array}\right. \tag{50}$$

e

$$|a_{r,s}| = 1. \tag{51}$$

Notisi prima di procedere innanzi che le relazioni (50) e (51) fra gli interi $a_{r,s}$, le ω, ω' e il numero α esprimono le condizioni necessarie e sufficienti perchè l'operazione (48) generi sulla superficie iperellittica appartenente alla tabella (49) una trasformazione birazionale; e che l'operazione del gruppo G corrispondente a questa trasformazione, ove sia $\alpha \neq 0$, risulta certo un'operazione rispondente all'alternativa c). È appunto questo fatto che tra poco ci permetterà di invertire senz'altro le nostre considerazioni.

Le ultime due equazioni della prima quadrupla delle (50) esigono che sia

$$(52) \qquad a_{3,1} = a_{3,2} = a_{4,1} = a_{4,2} = 0,$$

poichè altrimenti il rapporto $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ non potrebbe essere imaginario, dunque si ha intanto

$$(53) \qquad \begin{cases} i\omega_1 = a_{1,1}\omega_1 + a_{1,2}\omega_2, & i\omega'_3 = a_{3,3}\omega'_3 + a_{3,4}\omega'_4, \\ i\omega_2 = a_{2,1}\omega_1 + a_{2,2}\omega_2, & i\omega'_4 = a_{4,3}\omega'_3 + a_{4,4}\omega'_4. \end{cases}$$

Di qua si trae

$$\begin{vmatrix} a_{1,1} - i & a_{1,2} \\ a_{2,1} & a_{2,2} - i \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a_{3,3} - i & a_{3,4} \\ a_{4,3} & a_{4,4} - i \end{vmatrix} = 0$$

dunque

$$(54) \qquad a_{1,1} + a_{2,2} = a_{3,3} + a_{4,4} = 0,$$

e

$$(55) \qquad a_{1,1}a_{2,2} - a_{1,2}a_{2,1} = a_{3,3}a_{4,4} - a_{3,4}a_{4,3} = 1.$$

Come è chiaro, le (52) e (55) implicano la (51).

Poniamo ora, in conformità di quanto è stato detto più sopra,

$$\omega_1 = a, \quad \omega_2 = b + ci; \quad \omega'_3 = a'', \quad \omega'_4 = b'' + c'i,$$

dove a, b, c, a'', b'', c' sono interi e i primi tre si possono anche supporre primi tra di loro.

Allora le (53) si convertono in queste altre

$$(56) \qquad \begin{cases} a = a_{1,2}c, \quad b = a_{2,2}c, & a'' = a_{3,4}c', \quad b'' = a_{4,4}c', \\ a_{1,1}a + a_{1,2}b = 0, & a_{3,3}a'' + a_{3,4}b'' = 0, \\ a_{2,1}a + a_{2,2}b = -c, & a_{4,3}a'' + a_{4,4}b'' = -c'. \end{cases}$$

Segue, primieramente, che a e b debbono essere divisibili per c, e a'', b'' divisibili per c'; ma a, b, c sono primi fra di loro, dunque $c = \pm 1$ o, com'è lecito supporre, $c = 1$.

Poi, posto, in conformità di ciò, con a' e b' interi

$$\omega_1 = a, \quad \omega_2 = b + i; \quad \omega'_3 = a'c', \quad \omega'_4 = (b' + i)c'$$

le (54), (55) e (56) si accordano tutte a dare

$$a_{1,1} = -a_{2,2} = -b, \quad a_{1,2} = a, \quad a_{2,1} = -\frac{1 + b^2}{a},$$

$$a_{3,3} = -a_{4,4} = -b', \quad a_{3,4} = a', \quad a_{4,3} = -\frac{1 + b'^2}{a'};$$

quindi $1 + b^2$ e $1 + b'^2$ debbono essere rispettivamente divisibili per a e a'.

Le sole equazioni (50) fin qui non considerate, posto per brevità

$$a_{1,3} = x, \quad a_{1,4} = y, \quad a_{2,3} = z, \quad a_{2,4} = t$$

diventano

$$\alpha a + i\omega'_1 = -b\omega'_1 + a\omega'_2 + a'c'x + (b'+i)c'y,$$

$$\alpha(b+i) + i\omega'_2 = -\frac{1+b^2}{a}\omega'_1 + b\omega'_2 + a'c'z + (b'+i)c't,$$

e perchè queste coesistano, per un conveniente valore non nullo di α (che, si noti, è certo del tipo $r + si$, con r ed s razionali), occorre e basta che sia

$$(57) \qquad (b+i)\omega'_1 - a\omega'_2 \neq a'c'x + (b'+i)c'y$$

e

$$(58) \quad -2(b+i)\omega'_1 + 2a\omega'_2 + a'c'[(1-bi)x + aiz] + (1-ib')c'[(b+i)y - at] = 0.$$

Invertendo le considerazioni fatte ed estendendole al caso in cui le radici dell'equazione caratteristica di g non siano $+i$ e $-i$, ma ε ed ε^2, o (ciò che sostanzialmente è lo stesso) $-\varepsilon$ e $-\varepsilon^2$, si trova il seguente teorema complessivo:

Perchè una V_2 del tipo IX) *possegga un'operazione g rispondente all'alternativa c), occorre e basta che la tabella a cui essa appartiene sia equivalente*

1) *a una tabella del tipo*

$$(59) \qquad \begin{vmatrix} a & b+i & 0 & 0 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & a'c' & (b'+i)c' \end{vmatrix}$$

dove a, b, a', b', c' sono interi (con $a \neq 0$, $a'c' \neq 0$), $1 + b^2$ e $1 + b'^2$ sono divisibili rispettivamente per a e a' e inoltre ω'_1 e ω'_2 sono interi di Gauss *legati fra loro da condizioni della forma*

$$-2(b+i)\omega'_1 + 2a\omega'_2 + a'c'[(1-bi)x + aiz] + (1-b'i)c'[(b+i)y - at] = 0,$$

$$(b+i)\omega'_1 - a\omega'_2 \neq a'c'x + (b'+i)c'y$$

con x, y, z, t interi; oppure

2) *a una tabella del tipo*

$$(60) \qquad \begin{vmatrix} a & b+\varepsilon & 0 & 0 \\ \omega'_1 & \omega'_2 & a'c' & (b'+\varepsilon)c' \end{vmatrix}$$

dove a, b, a', b', c' sono interi (con $a \neq 0$, $a'c' \neq 0$), $b^2 - b + 1$ e $b'^2 - b' + 1$ sono divisibili rispettivamente per a e a' e infine ω'_1 e ω'_2 sono della $r + s\varepsilon$ con r, s interi e sono legati fra loro da condizioni della forma

$$[2 - b + (1-2b)\varepsilon]\omega'_1 + a(1+2\varepsilon)\omega'_2$$
$$+ a'c'[(b+\varepsilon)x - az] + (b'+\varepsilon)c'[(b+\varepsilon)y - at] = 0,$$

$$(b+\varepsilon)\omega'_1 - a\omega'_2 \neq a'c'x + (b'+\varepsilon)c'y$$

con x, y, z, t interi.

Per conseguenza la V_2, secondo che si verifica il caso 1) *o il caso* 2), *rappresenta un'involuzione segnata sopra una superficie iperellittica armonica o equianarmonica.*

52. *Alternativa d)*.

Sia g un'operazione del gruppo G di una V_2 del tipo IX) che risponda al caso d); allora non vi è più luogo a cercare una caratterizzazione della superficie che la possiede, poichè è chiaro *a priori* che ogni superficie iperellittica dell'ultimo tipo possiede delle operazioni si fatte: ma vi è luogo, invece, a una importante osservazione sui moltiplicatori λ e μ della operazione (γ) del gruppo (Γ) ad essa corrispondente.

Si osservi intanto che λ e μ sono imaginari, non coniugati e che le quattro radici *semplici* dell'equazione caratteristica di g

$$(61) \qquad \rho^4 + A\rho^3 + B\rho^2 + C\rho + 1 = 0$$

dove A, B, C sono interi, sono fornite da λ, μ, $\bar{\lambda}$ e $\bar{\mu}$; poi si noti che la tabella cui appartiene la superficie è isomorfa alla matrice (riemanniana)

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 \end{vmatrix}$$

e quindi λ e μ debbono soddisfare a quattro relazioni indipendenti del tipo

$$L_1 + M_1(\lambda + \mu) + N_1(\lambda^2 + \lambda\mu + \mu^2) + P_1\lambda\mu + Q_1\lambda\mu(\lambda + \mu) + R_1\lambda^2\mu^2 = 0$$

con L_1, M_1, N_1, P_1, Q_1 ed R_1 interi.

Ciò porta che esiste certamente fra λ e μ una relazione di questo tipo in cui $N_1 = Q_1 = R_1 = 0$ e quindi sussisterà fra λ e μ una relazione della forma

$$L - M(\lambda + \mu) + P\lambda\mu = 0$$

con L, M, P interi e non tutti nulli.

Qui possono presentarsi due casi; e cioè può essere

$$M = 0, \quad \text{oppure} \quad M \neq 0.$$

Se $M = 0$, non potendo essere anche $P = L = 0$, $\lambda\mu$ risulta razionale; e siccome, per le relazioni che legano i coefficienti e le radici dell'equazione (61), è pure

$$\lambda\mu . \bar{\lambda}\bar{\mu} = 1,$$

l'essere $\lambda\mu$ razionale porta che è pure

$$\lambda\mu = \pm 1.$$

Allora dalle ulteriori relazioni fra i coefficienti e le radici dell'equazione in discorso si ricava

$$(\lambda + \mu) + (\bar{\lambda} + \bar{\mu}) = -A,$$

$$(\lambda + \mu)(\bar{\lambda} + \bar{\mu}) = B \mp 2$$

e quindi $\lambda + \mu$ è radice dell'equazione di 2° grado

$$z^2 + Az + (B \mp 2) = 0;$$

la quale, si noti, risulta certo a radici imaginarie, perchè se no sarebbero reali $\lambda+\mu$ e $\lambda\mu$, e λ e μ sarebbero reali o imaginari coniugati.

Se $M\neq 0$ si può scrivere

$$\lambda+\mu=\frac{P\lambda\mu+L}{M};$$

e quindi da

$$\lambda+\mu+\bar\lambda+\bar\mu=-A$$

si trae

$$\lambda\mu+\bar\lambda\bar\mu=-\frac{AM+2L}{P},$$

cioè i numeri $\lambda\mu$ e $\bar\lambda\bar\mu$ sono radici dell'equazione di 2° grado

$$Pz^2+(AM+2L)z+P=0,$$

che è reciproca e, come prima, a radici imaginarie.

In conclusione:

L'equazione caratteristica di una sostituzione riemanniana modulare g che presenti il caso d) è risolubile per successive estrazioni di radici quadrate; e per i moltiplicatori λ e μ della corrispondente operazione di (Γ) o si ha

$$\lambda\mu=\pm 1$$

e $\lambda+\mu$ radice di un'equazione di 2° grado del tipo

$$z^2+az+b=0$$

con a, b interi e

$$a^2-4b<0;$$

o si ha

$$\lambda+\mu=\frac{P\lambda\mu+L}{M}$$

con P, L, M interi e $\lambda\mu$ radice di un'equazione di 2° grado del tipo

$$az^2+bz+a=0$$

con a, b interi e

$$b^2-4a^2<0.$$

Che entrambe le alternative siano possibili si dimostra subito con esempi effettivi; ma è importante osservare che delle due equazioni di 2° grado di cui parla questo teorema soltanto la prima è, nella sua specie, a meno di *una* eccezione, una equazione qualunque.

Si supponga, per un momento, che nel ragionamento fatto più sopra valga la seconda alternativa.

Allora la somma

$$\lambda\mu+\bar\lambda\bar\mu$$

si può calcolare, come è stato fatto, in funzione di L, M, P ed A; ma essa potrebbe anche essere calcolata mediante L, M, P e poi B o C. Sussistono quindi dei legami tra gli interi A, B, C, L, M, P che non permettono di riguardare l'equazione di 2°

grado cui soddisfa $\lambda\mu$ come una qualunque equazione di 2° grado reciproca a radici imaginarie e a coefficienti interi.

Per es. si riscontra subito che l'equazione in discorso non può essere mai la seguente

$$2z^2 + 3z + 2 = 0.$$

Piuttosto che fermarci a indicare in che consistano le particolarità aritmetiche di questa equazione, che non sembrano suscettibili di un enunciato semplice e interessante, facciamo vedere che, invece:

Se per i due numeri λ e μ *si ha*

$$\lambda\mu = \pm 1$$

e poi che $\lambda + \mu$ *è radice di un'equazione di* 2° *grado del tipo*

$$z^2 + az + b = 0$$

con a, b *interi e*

$$a^2 - 4b < 0,$$

diversa per altro dall'equazione

$$z^2 + 4 = 0,$$

esiste una superficie iperellittica del tipo IX) *con un'operazione del gruppo* G *che risponde al caso* d) *e ha per radici della sua equazione caratteristica*

$$\lambda, \quad \mu, \quad \bar\lambda, \quad \bar\mu.$$

In primo luogo è chiaro che λ e μ sono entrambi imaginari, perchè la loro somma è, per ipotesi, imaginaria e il loro prodotto è reale, ed è pur chiaro che non sono imaginari coniugati, perchè altrimenti la loro somma sarebbe reale.

D'altro canto λ e μ sono pure diversi, perchè altrimenti, essendo $\lambda\mu = \pm 1$ ed essendo λ e μ imaginari sarebbe

$$\lambda = \mu = \pm i$$

e la somma $\lambda + \mu$ sarebbe radice dell'equazione di 2° grado esclusa; quindi i quattro numeri

$$\lambda, \quad \mu, \quad \bar\lambda, \quad \bar\mu$$

sono tutti imaginari e tutti distinti.

Adesso si ha

$$\lambda + \mu + \bar\lambda + \bar\mu = -a,$$

$$\lambda\bar\lambda + \lambda\mu + \lambda\bar\mu + \bar\lambda\mu + \bar\lambda\bar\mu + \mu\bar\mu = (\lambda + \mu)(\bar\lambda + \bar\mu) + \lambda\mu + \bar\lambda\bar\mu = b \pm 2,$$

$$\lambda\mu(\bar\lambda + \bar\mu) + \bar\lambda\bar\mu(\lambda + \mu) = \mp a,$$

$$\lambda\mu . \bar\lambda\bar\mu = 1$$

dunque i quattro numeri considerati sono le radici dell'equazione a coefficienti interi

$$(62) \qquad \rho^4 - a\rho^3 + (b \pm 2)\rho^2 \pm a\rho + 1 = 0.$$

Ciò posto, in base alle relazioni che vincolano λ e μ, si ha subito che la matrice

$$(63)\qquad \begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 \end{vmatrix}$$

ammette quattro forme riemanniane alternate indipendenti; d'altra parte il determinante formato con le parti reali e i coefficienti dell'imaginario del suoi elementi, cioè, a meno di un fattore numerico non nullo, il determinante

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 \\ 1 & \bar\lambda & \bar\lambda^2 & \bar\lambda^3 \\ 1 & \bar\mu & \bar\mu^2 & \bar\mu^3 \end{vmatrix}$$

è, per quanto è stato detto, differente da zero; dunque essa è senz'altro una matrice riemanniana a indici massimi.

Sopra una superficie iperellittica che appartenga alla tabella (63) l'operazione

$$u' = \lambda u, \quad v' = \mu v$$

in virtù dell'equazione (62) genera una trasformazione birazionale; dunque la nostra asserzione si può considerare come pienamente giustificata.

53. Chiudiamo queste nostre considerazioni sul gruppo G o Γ di una superficie iperellittica del tipo IX) completando la ricerca per quel che riguarda le sue eventuali operazioni periodiche.

Per le superficie dei primi otto tipi la questione analoga è stata pienamente risoluta; noi sappiamo, tipo per tipo, quali operazioni periodiche il gruppo G può, in caso, contenere, e abbiamo anche visto come si caratterizzino le superficie per cui queste operazioni periodiche esistono effettivamente.

Invece per le superficie del tipo IX) occorrono ancora delle considerazioni complementari che ora passiamo ad esporre.

Sia dunque g un'operazione periodica (non identica) del gruppo G di una V_2 del tipo IX).

Il periodo n di g (I, n° 25) può essere

$$2, \quad 3, \quad 4, \quad 5, \quad 6, \quad 8, \quad 10, \quad 12.$$

Che il periodo n possa essere effettivamente 2, 3, 4 o 6 è chiaro, in base a quello che è stato stabilito nelle pagine precedenti; ma si vede anche subito che per quei valori del periodo nessun altro caso può presentarsi all'infuori di quelli che sono stati già incontrati.

E infatti se il periodo è 2, l'equazione caratteristica di g o ha la radice quadrupla -1, o ha le due radici doppie $+1$ e -1. Nel primo caso, g coincide con g_1; nel secondo caso g fa parte di un sottogruppo L quadrinomio.

Se il periodo è 4, l'equazione caratteristica o ha una radice doppia eguale a $+1$ o -1 e le due radici semplici $+i$ e $-i$; o è priva di radici reali e allora ha le due radici doppie $+i$ e $-i$. La prima ipotesi conduce a superficie incontrate nel n° 49, la seconda alle superficie armoniche e a quelle caratterizzate nel n° 45.

Se il periodo è 3 le radici dell'equazione caratteristica non possono essere che una radice reale doppia eguale a $+1$ e le radici semplici ε ed ε^2, oppure le due radici doppie ε ed ε^2; quindi si ritrovano superficie incontrate nei n^i 49, 48 e 46.

Se il periodo è 6 le radici dell'equazione caratteristica o sono date da $-\varepsilon$, $-\varepsilon^2$ e da una radice reale doppia eguale a $+1$ o -1, o sono date da ε, ε^2 e dalla radice reale doppia -1, o sono date dalle radici doppie $-\varepsilon$, $-\varepsilon^2$ o sono date da ε, $-\varepsilon$, ε^2 e $-\varepsilon^2$. Che le prime tre ipotesi non diano luogo a casi nuovi è ormai evidente; resta dunque da considerare la quarta.

In tal caso i moltiplicatori dell'operazione di (Γ) corrispondente a g, salvo a sostituire a g il prodotto gg_1 o la sua quinta potenza, si possono supporre ε e $-\varepsilon$ oppure ε e $-\varepsilon^2$. Nella prima alternativa si trova che (Γ) contiene un'operazione coi moltiplicatori ε^2, ε^2 e quindi la superficie è una superficie equianarmonica, nella seconda, il gruppo (Γ) contiene un'operazione coi moltiplicatori ε^2, ε e quindi si ricade in superficie incontrate al n° 46.

54. Supponiamo dunque che n sia 5, 10, 8 o 12 e facciamo vedere subito che l'ipotesi $n = 5$ (e quindi anche l'ipotesi $n = 10$) deve essere scartata.

Infatti se fosse $n = 5$ tra le radici dell'equazione caratteristica di g apparirebbe certo una radice quinta imaginaria dell'unità; ma allora siccome questa è necessariamente primitiva, le altre sarebbero certo le rimanenti radici primitive quinte dell'unità; e i moltiplicatori dell'operazione di (Γ) corrispondente a g sarebbero dati da due radici primitive quinte diverse e non coniugate. Segue che la superficie apparterrebbe a una tabella isomorfa a quella cui può supporsi appartenere la superficie di Jacobi-Humbert; e ciò è assurdo, una volta che quella superficie è, per ipotesi, del tipo IX), mentre questa è del tipo V).

Consideriamo il caso di $n = 8$.

Allora le quattro radici dell'equazione caratteristica di g non possono essere tutte radici ottave dell'unità non primitive, perchè se ciò accadesse l'operazione sarebbe al più del periodo 4; dunque almeno una di esse è una radice primitiva ottava dell'unità, e dopo ciò le altre saranno necessariamente le rimanenti tre radici primitive. Indicatane una con η, le altre saranno $-\eta$, η^3 e $-\eta^3$.

I moltiplicatori λ e μ dell'operazione di (Γ) corrispondente a g debbono essere diversi e non coniugati, dunque posto, per es., $\lambda = \eta$, sarà

$$\mu = \eta^3 \quad \text{oppure} \quad \mu = -\eta.$$

Si vede subito che entrambi i casi sono realizzabili considerando la matrice

$$\begin{vmatrix} 1 & \lambda & \lambda^2 & \lambda^3 \\ 1 & \mu & \mu^2 & \mu^3 \end{vmatrix}$$

che risulta riemanniana e ad indici massimi: ma resta a vedere a quali superficie essi conducono.

Se è
$$\lambda = \eta \quad \text{e} \quad \mu = -\eta$$
il gruppo (Γ) contiene un'operazione coi moltiplicatori
$$\lambda^2 = \mu^2 = \pm i$$
e quindi la superficie considerata è una superficie iperellittica armonica; se è invece
$$\lambda = \eta \quad \text{e} \quad \mu = \eta^3$$
la tabella cui appartiene la superficie considerata è, al solito, isomorfa a quest'altra
$$\begin{vmatrix} 1 & \eta & \eta^2 & \eta^3 \\ 1 & \eta^3 & -\eta^2 & \eta \end{vmatrix}$$
cui risponde la superficie di JACOBI, che diremo di JACOBI-BOLZA, inerente al radicale quadratico
$$\sqrt{x(x^4+1)},$$
e quindi la superficie in discorso è birazionalmente identica a una involuzione (d'ordine ≥ 1) segnata sulla superficie di JACOBI-BOLZA.

Supponiamo infine che sia $n = 12$.

Allora l'equazione caratteristica di g o ha per radici le quattro radici primitive dodicesime dell'unità o ha per radici (sostituendo, in caso, a g il prodotto gg_1) $+i$, $-i$, ε, ε^2. Quest'ultima ipotesi va scartata perchè esige (I, n° 23) l'esistenza di integrali ellittici non vincolati e quindi porta alla superficie del tipo VI) che rappresenta la varietà delle coppie di punti di una curva ellittica armonica e una curva ellittica equianarmonica; dunque non resta che la prima.

Se ζ è una radice primitiva dodicesima dell'unità, le altre sono ζ^5, $-\zeta$ e $-\zeta^5$; per modo che, se λ e μ sono i moltiplicatori dell'operazione di (Γ) corrispondente a g, posto $\lambda = \zeta$ si ha
$$\mu = -\zeta \quad \text{o} \quad \mu = \zeta^5.$$

Entrambe le alternative sono realizzabili, come si vede al solito modo; ma nella prima il gruppo (Γ) contiene un'operazione coi moltiplicatori
$$\lambda^2 = \mu^2 = -\varepsilon \quad \text{o} \quad -\varepsilon^2;$$
nella seconda, una operazione coi moltiplicatori
$$\lambda^3 = \mu^3 = \pm i,$$
e quindi la superficie considerata o è equianarmonica o è armonica.

Concludendo:

Il gruppo G *o* Γ *di una superficie iperellittica del tipo* IX) *non può possedere operazioni periodiche dell'ordine* 5 *o* 10; *può contenerne invece dell'ordine* 2, 3, 4, 6, 8, 12.

Inoltre:

Se possiede un'operazione a periodo 8 *la superficie relativa o è armonica o è bira-*

zionalmente identica a un'involuzione (d'ordine $\geqq 1$*) segnata sopra una superficie di* JACOBI-BOLZA [78]), *e se possiede un'operazione a periodo* 12, *la superficie stessa o è armonica o è equianarmonica.*

Infine vale la pena di osservare esplicitamente che:

Una superficie iperellittica il cui gruppo G *o* Γ *contenga un'operazione a periodo* 12 *o è armonica o è equianarmonica o è la varietà delle coppie di punti di due curve ellittiche di cui una sia armonica e l'altra equianarmonica;*

e che:

Una superficie iperellittica il cui gruppo G *o* Γ *contenga un'operazione a periodo* 5 *o* 10 *è birazionalmente identica a un'involuzione (di ordine* $\geqq 1$*) segnata sopra la superficie di* JACOBI-HUMBERT [79]).

Parma, 16 agosto 1916.

GAETANO SCORZA.

---

78) Cfr. BAGNERA e DE FRANCHIS, loc. cit. 31), n° 25.

79) Cfr. BAGNERA e DE FRANCHIS, loc. cit. 31), n° 26.