# Nouvelles applications des fractions continues.

Par

ANDRÉ MARKOFF à St. Pétersbourg.

---

Dans ma thèse „Sur quelques applications des fractions continues algébriques“, publiée en russe (année 1884), je m'occupais à la détermination des valeurs limites des certaines intégrales dépendantes d'une fonction $f(y)$, laquelle n'est assujettie qu'à des conditions suivantes:

1) $f(y) > 0$ pour $a < y < b$;

2) les intégrales

$$\int_a^b f(y)\,dy, \int_a^b y f(y)\,dy, \ldots, \int_a^b y^{i-1} f(y)\,dy$$

doivent avoir des valeurs données.

La question sur ces valeurs limites est soulevée par Tchebychef dans sa note*) „Sur les valeurs limites des intégrales.“

Nous devons aussi à Tchebychef les inégalités importantes, qui demontrées et généralisées**) par moi sont la base des recherches sur les questions de ce genre.

Maintenant nous allons considérer les questions semblables aux précédentes, en remplaçant seulement l'inégalité

$$f(y) > 0$$

par les deux suivantes:

$$L > f(y) > 0.$$

---

*) Journal de Liouville, 2 série. XIX.

**) Mathematische Annalen, Band XXIV, p. 172. Voir aussi: C. Possé, Sur quelques applications des fractions continues algébriques, St. Pétersbourg, 1886.

§ 1.

Commençons par la question suivante:
*Etant données les valeurs des intégrales*

$$(1)\quad \int_a^b f(y)\,dy = \alpha_0,\ \int_a^b y f(y)\,dy = \alpha_1, \ldots, \int_a^b y^{i-1} f(y)\,dy = \alpha_{i-1},$$

*il s'agit de trouver les valeurs extrêmes de l'intégrale*

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

*à la condition*

$$(2)\qquad L > f(y) > 0.$$

En abordant la solution de notre question, posons, que $f(y)$ est une fonction quelconque satisfaisante aux conditions (1) et (2).

Entre $a$ et $b$ nous prenons $i+1$ nombres

$$\xi_1,\ \xi_2, \ldots, \xi_i,\ \xi_{i+1}$$

et dans le voisinage de ces nombre les éléments d'une même longueur $\sigma$ infiniment petite.

Or sur ces éléments nous donnerons à la fonction $f(y)$ les accroissements (positifs ou négatifs) constants

$$\delta_1,\ \delta_2, \ldots, \delta_i,\ \delta_{i+1},$$

qui ne contreviennent pas aux conditions (1) et (2).

En supposant les éléments $\sigma$ infiniment petits, nous supposerons en même temps, que sur chacun d'eux, séparément, la fonction $f(y)$ ne peut atteindre que l'une de ses valeurs extrêmes 0 et $L$.

Si sur quelque élément $\sigma$ la fonction n'atteint aucune de ses valeurs extrêmes 0 et $L$, l'accroissement $\delta$ correspondant peut être aussi bien positif comme négatif, pourvue qu'il soit assez petit numériquement.

Cet accroissement $\delta$ doit être negatif, si sur l'élément $\sigma$ correspondant la fonction $f(y)$ a la valeur extrême $L$, et au contraire $\delta$ doit être positif, si sur l'élément $\sigma$ correspondant la fonction $f(y)$ a la valeur 0. Ainsi les valeurs $\delta$ sont bornées par la condition (2)

Quant à la condition (1) elle nous donne les équations suivantes

$$\begin{aligned}
&\delta_1 + \delta_2 + \cdots + \delta_{i+1} = 0,\\
&\delta_1\xi_1 + \delta_2\xi_2 + \cdots + \delta_{i+1}\xi_{i+1} = 0,\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\delta_1\xi_1^{i-1} + \delta_2\xi_2^{i-1} + \cdots + \delta_{i+1}\xi_{i+1}^{i-1} = 0,
\end{aligned}$$

d'où on trouve

$$\delta_1 = \frac{\varepsilon}{\Theta'(\xi_1)}, \ \delta_2 = \frac{\varepsilon}{\Theta'(\xi_2)}, \ \ldots, \ \delta_{i+1} = \frac{\varepsilon}{\Theta'(\xi_{i+1})},$$

en posant

$$\Theta(y) = (y - \xi_1)(y - \xi_2)\ldots(y - \xi_{i+1}),$$

$\varepsilon$ étant un nombre arbitraire.

Or les valeurs trouvées de

$$\delta_1, \ \delta_2, \ldots, \delta_{i+1}$$

ont les mêmes signes que les produits

$$(-1)^i\varepsilon, \ (-1)^{i-1}\varepsilon, \ldots, \varepsilon;$$

nous supposons

$$\xi_1 < \xi_2 < \cdots < \xi_{i+1}.$$

Donc la variation considérée de la fonction $f(y)$ est possible toutes les fois, que les signes de

$$(-1)^i\varepsilon, \ (-1)^{i-1}\varepsilon, \ldots, \varepsilon$$

sont conformes aux remarques précédentes sur les signes de $\delta$.

L'accroissement correspondant de l'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

est égale à

$$\sigma(\delta_1\xi_1^i + \delta_2\xi_2^i + \cdots + \delta_{i+1}\xi_{i+1}^i) = \sigma\varepsilon\left\{\frac{\xi_1^i}{\Theta'(\xi_1)} + \cdots + \frac{\xi_{i+1}^i}{\Theta'(\xi_{i+1})}\right\} = \sigma\varepsilon.$$

et par conséquent il a le même signe que $\varepsilon$.

De tout ceci on peut tirer les conclusion suivantes.

I. L'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

n'atteint aucune de ses valeurs extrêmes, si dans une partie de l'intervalle, de $y = a$ jusqu'à $y = b$, la fonction $f(y)$ n'atteint aucune de ses valeurs extrêmes 0 et $L$.

II. L'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

n'atteint pas son maximum, si l'on peut indiquer entre $a$ et $b$, dans l'ordre des valeurs croissantes de $y$, les $i+1$ intervalles, où la fonction $f(y)$ est égale alternativement 0 et $L$, étant

$$f(y) = 0$$

dans le dernier de ces intervalles.

III. L'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\, dy$$

n'attient pas son minimum, si l'on peut indiquer entre $a$ et $b$, dans l'ordre des valeurs croissantes de $y$, les $i+1$ intervalles. où la fonction $f(y)$ est égale alternativement 0 et $L$, étant

$$f(y) = L$$

dans le dernier de ces intervalles

*Donc les valeurs extrêmes de l'intégrale*

$$\int_a^b y^i f(y)\, dy$$

*correspondent aux telles fonction $f(y)$, pour lesquelles l'intervalle de $y=a$ jusqu'à $y=b$ se divise en $i+1$ parties, dans lesquelles alternativement $f(y)=0$ et $f(y)=L$, au moins que les divisions semblables en plus petit nombre des parties soient impossibles.*

*Or dans la dernière des $i+1$ parties précédentes on doit avoir $f(y)=L$ pour le maximum et $f(y)=0$ pour le minimum de l'intégrale*

$$\int_a^b y^i f(y)\, dy.$$

## § 2.

Supposons maintenant, que par les valeurs de $f(y)$ l'intervalle de $y=a$ jusqu'à $y=b$ se divise effectivemment en $i+1$ parties de sorte qu'on a

$$\begin{array}{llll}
f(y) = \frac{1+(-1)^i}{2} L & \text{ou} \quad \frac{1-(-1)^i}{2} L & \text{pour} & a < y < y_1, \\
f(y) = \frac{1+(-1)^{i-1}}{2} L & \text{ou} \quad \frac{1-(-1)^{i-1}}{2} L & \text{pour} & y_1 < y < y_2, \\
\cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot \\
f(y) = 0 & \text{ou} \quad L & \text{pour} & y_{i-1} < y < y_i, \\
f(y) = L & \text{ou} \quad 0 & \text{pour} & y_i < y < b.
\end{array}$$

Soit de même $F(y)$ une autre fonction, satisfaisante aussi aux conditions (1) et (2):

$$\int_a^b F(y) dy = \alpha_0, \int_a^b y F(y)\, dy = \alpha_1, \ldots, \int_a^b y^{i-1} F(y)\, dy = \alpha_{i-1},$$

$$L > F(y) > 0.$$

Ceci posé, nous aurons

$$\int_a^b \Omega(y) f(y)\,dy = \int_a^b \Omega(y)\,F(y)\,dy$$

pour chaque fonction entière $\Omega(y)$ de degré inférieur à $i$.

Or la différence

$$y^i - (y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_i)$$

est une fonction entière de $y$ de degré inférieur à $i$.

Il en résulte que la différence

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy - \int_a^b y^i F(y)\,dy$$

est égale à

$$\int_a^b (y-y_1)\ldots(y-y_i) f(y)\,dy - \int_a^b (y-y_1)\ldots(y-y_i) F(y)\,dy,$$

ce qui revient à l'intégrale

$$\int_a^b (y-y_1)\ldots(y-y_i)\{f(y) - F(y)\}\,dy,$$

dont tous les éléments sont positifs ou négatifs, selon que

$$f(y) = L \quad \text{ou} \quad 0, \quad \text{pour} \quad y_i < y < b.$$

Par conséquent la différence

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy - \int_a^b y^i F(y)\,dy$$

est assurément positive dans le cas de

$$f(y) = L \quad \text{pour} \quad y_i < y < b,$$

et négative dans le cas de

$$f(y) = 0 \quad \text{pour} \quad y_i < y < b.$$

De cette manière nous vérifions notre solution et démontrons sa unicité, en excluant seulement les cas, où par les valeurs uniques 0 et $L$ d'une fonction $f(y)$, satisfaisante aux conditions (1) et (2), tout l'intervalle de $y = a$ jusqu'à $y = b$ se divise en nombre des parties plus petit que $i + 1$.

Mais il est facile de se convaincre, que ces cas exclusifs sont impossibles, si les nombres $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{i-1}$ sont donnés par les égalités

$$(3) \quad \alpha_0 = \int_a^b F(y)\,dy,\ \alpha_1 = \int_a^b yF(y)\,dy, \ldots, \alpha_{i-1} = \int_a^b y^{i-1} F(y)\,dy,$$

$F(y)$ étant une fonction donnée, dont les valeurs satisfont à la condition

$$L > F(y) > 0 \quad (\text{pour } a < y < b)$$

et ne sont pas toutes égales à 0 et $L$.

## § 3.

Désignons par

$$f_{\min} \quad \text{et} \quad f_{\max}$$

les fonctions $f(y)$ satisfaisantes à nos conditions et correspondantes aux maximum et minimum de l'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy.$$

Soient encore

$$\xi',\ \xi'',\ \eta',\ \eta''$$

ces valeurs de $y$, pour lesquelles les fonctions $f_{\min}$ et $f_{\max}$ changent leurs valeurs 0 et $L$, de sorte qu'on aura:

$$\begin{array}{ll}
f_{\min} = 0 \text{ pour } y = \xi' - \varepsilon, & f_{\min} = L \text{ pour } y = \xi' + \varepsilon, \\
f_{\max} = 0 \text{ pour } y = \xi'' - \varepsilon, & f_{\max} = L \text{ pour } y = \xi'' + \varepsilon, \\
f_{\min} = L \text{ pour } y = \eta' - \varepsilon, & f_{\max} = 0 \text{ pour } y = \eta' + \varepsilon, \\
f_{\max} = L \text{ pour } y = \eta'' - \varepsilon, & f_{\max} = 0 \text{ pour } y = \eta'' + \varepsilon,
\end{array}$$

$\varepsilon$ étant infiniment petit et positif.

Enfin nous désignerons par

$$\begin{array}{ll}
V_i^{(')}(z) & \text{le produit de tous les facteurs } z - \xi', \\
V_i^{('')}(z) & \quad ,, \qquad ,, \qquad ,, \qquad ,, \qquad ,, \qquad ,, \qquad z - \xi'', \\
U_i^{(')}(z) & \quad ,, \qquad ,, \qquad ,, \qquad ,, \qquad ,, \qquad ,, \qquad z - \eta', \\
U_i^{('')}(z) & \quad ,, \qquad ,, \qquad ,, \qquad ,, \qquad ,, \qquad ,, \qquad z - \eta''.
\end{array}$$

Après ces désignations la condition (1) pour les fonctions $f_{\min}$ et $f_{\max}$ se ramène aux équations

$$(4)\quad \left\{\begin{array}{l}
\sum \eta' - \sum \xi' - \lambda a = \frac{\alpha_0}{L} = b + \sum \eta'' - \sum \xi'' - \mu a, \\
\sum \eta'^2 - \sum \xi'^2 - \lambda a^2 = \frac{2\alpha_1}{L} = b^2 + \sum \eta''^2 - \sum \xi''^2 - \mu a^2, \\
\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\
\sum \eta'^i - \sum \xi'^i - \lambda a^i = \frac{i\alpha_{i-1}}{L} = b^i + \sum \eta''^i - \sum \xi''^i - \mu a^i, \\
\qquad \lambda = \frac{1-(-1)^i}{2}, \qquad \mu = \frac{1+(-1)^i}{2},
\end{array}\right.$$

$\Sigma$ étant le signe d'une somme.

Quant aux minimum et maximum de l'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\,dy$$

ils seront

$$(5)\qquad \begin{aligned} h_i' &= \int_a^b y^i f_{\min}\,dy = L\left\{\sum \frac{\eta'^{\,i+1}}{i+1} - \sum \frac{\xi'^{\,i+1}}{i+1} - \frac{\lambda a^{i+1}}{i+1}\right\},\\ h_i'' &= \int_a^b y^i f_{\max}\,dy = L\left\{\frac{b^{i+1}-\mu a^{i+1}}{i+1} + \sum \frac{\eta''^{\,i+1}}{i+1} - \sum \frac{\xi''^{\,i+1}}{i+1}\right\}. \end{aligned}$$

Dans le cas de $i$ pair $= 2n$, nous avons les $4n$ inconnus

$$\begin{gathered} \xi_1' < \eta_1' < \xi_2' < \eta_2' < \cdots < \xi_n' < \eta_n',\\ \eta_1'' < \xi_1'' < \eta_2'' < \xi_2'' < \cdots < \eta_n'' < \xi_n'' \end{gathered}$$

et nous pouvons remplacer les équations (4) par ces formules

$$\sum \frac{L}{z-\eta'} - \sum \frac{L}{z-\xi'} = \frac{\alpha_0}{z^2} + \frac{2\alpha_1}{z^3} + \cdots + \frac{2n\,\alpha_{2n-1}}{z^{2n+1}} + \frac{(2n+1)h_{2n}'}{z^{2n+2}} + \cdots,$$

$$\frac{L}{z-b} - \frac{L}{z-a} + \sum \frac{L}{z-\eta''} - \sum \frac{L}{z-\xi''} = \frac{\alpha_0}{z^2} + \frac{2\alpha_1}{z^3} + \cdots + \frac{2n\,\alpha_{2n-1}}{z^{2n+1}} + \frac{(2n+1)h_{2n}''}{z^{2n+2}} + \cdots$$

d'où, en intégrant par rapport à $z$, on tire

$$\frac{V_{2n}^{(\prime)}(z)}{U_{2n}^{(\prime)}(z)} = e^{\frac{\alpha_0}{Lz} + \frac{\alpha_1}{Lz^2} + \cdots + \frac{\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}}} + \frac{h_{2n}'}{Lz^{2n+1}} + \cdots,$$

$$\frac{(z-a)\,V_{2n}^{(\prime)}(z)}{(z-b)\,U_{2n}^{(\prime)}(z)} = e^{\frac{\alpha_0}{Lz} + \frac{\alpha_1}{Lz^2} + \cdots + \frac{\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}}} + \frac{h_{2n}''}{Lz^{2n+1}} + \cdots$$

et par conséquent

$$(6)\qquad \left\{\begin{aligned} \frac{V_{2n}^{(\prime)}(z)}{U_{2n}^{(\prime)}(z)} &= e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} + \frac{h_{2n}' - \alpha_{2n}}{Lz^{2n+1}} + \cdots,\\ \frac{V_{2n}^{(\prime)}(z)}{U_{2n}^{(\prime)}(z)} &= \frac{z-b}{z-a}\, e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} + \frac{h_{2n}'' - \alpha_{2n}}{Lz^{2n+1}} + \cdots \end{aligned}\right.$$

si l'on détermine tous les nombres $\alpha$ par les égalités (3).

De même manière on trouvera

$$
(7)\quad \begin{cases}
\dfrac{(z-a)\,V^{(\prime)}_{2n-1}(z)}{U^{(\prime)}_{2n-1}(z)} = e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} + \dfrac{h'_{2n-1}-\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}} + \cdots, \\[2ex]
\dfrac{(z-b)\,V^{(\prime)}_{2n-1}(z)}{U^{(\prime)}_{2n-1}(z)} = \dfrac{z-b}{z-a}e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} + \dfrac{h'_{2n-1}-\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}} + \cdots, \\[2ex]
\dfrac{V^{(\prime\prime)}_{2n-1}(z)}{(z-b)\,U^{(\prime\prime)}_{2n-1}(z)} = e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} + \dfrac{h''_{2n-1}-\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}} + \cdots, \\[2ex]
\dfrac{V^{(\prime\prime)}_{2n-1}(z)}{(z-a)\,U^{(\prime\prime)}_{2n-1}(z)} = \dfrac{z-b}{z-a}e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} + \dfrac{h''_{2n-1}-\alpha_{2n-1}}{Lz^{2n}} + \cdots.
\end{cases}
$$

Nous parvenons ainsi au théorème suivant:

## Théorème I.

*Si la fonction $F(y)$ satisfait à la condition*

$$L > F(y) > 0,$$

*les développements suivants**)

$$
(8)\quad e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} = \cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{z-a-\cfrac{c_2}{1-\cfrac{c_3}{z-a-\ddots}}}},
$$

$$
(9)\quad e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} = 1+\cfrac{\gamma_1}{z-b+\cfrac{\gamma_2}{1+\cfrac{\gamma_3}{z-b+\cfrac{\gamma_4}{1+\ddots}}}},
$$

$$
(10)\quad \frac{z-b}{z-a}e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} = 1-\cfrac{\partial_1}{z-a-\cfrac{\partial_2}{1-\cfrac{\partial_3}{z-a-\cfrac{\partial_4}{1-\ddots}}}},
$$

*) Ce genre des fractions continues était employé déjà par Stieltjes dans ses „Recherches sur les fractions continues“.

$$(11)\qquad \frac{z-b}{z-a}e^{\frac{1}{L}\int\limits_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} = \frac{1}{1+}\,\frac{\delta_1}{z-b+}\,\frac{\delta_2}{1+}\,\frac{\delta_3}{z-b+\cdots},$$

*sont possibles, les nombres $c$, $\gamma$, $\partial$, $\delta$ étant positifs.*

*Or ces développements sont liés avec nos fonctions $U$ et $V$ par les formules*

$$(12)\qquad \frac{V_{2n}^{(\prime)}(z)}{U_{2n}^{(\prime)}(z)} = \frac{1}{1-}\,\frac{c_1}{z-a-}\,\frac{c_2}{1-\cdots-}\,\frac{c_{2n-1}}{z-a-c_{2n}},$$

$$(13)\qquad \frac{(z-a)V_{2n-1}^{(\prime)}(z)}{U_{2n-1}^{(\prime)}(z)} = \frac{1}{1-}\,\frac{c_1}{z-a-\cdots-}\,\frac{c_{2n-2}}{1-}\,\frac{c_{2n-1}}{z-a},$$

$$(14)\qquad \frac{V_{2n}^{(\prime\prime)}(z)}{U_{2n}^{(\prime\prime)}(z)} = 1-\frac{\partial_1}{z-a-}\,\frac{\partial_2}{1-\cdots-}\,\frac{\partial_{2n-1}}{z-a-\partial_{2n}},$$

$$(15)\qquad \frac{V_{2n-1}^{(\prime\prime)}(z)}{(z-a)U_{2n-1}^{(\prime\prime)}(z)} = 1-\frac{\partial_1}{z-a-\cdots-}\,\frac{\partial_{2n-2}}{1-}\,\frac{\partial_{2n-1}}{z-a},$$

$$(16)\qquad \frac{V_{2n}^{(\prime)}(z)}{U_{2n}^{(\prime)}(z)} = 1+\frac{\gamma_1}{z-b+}\,\frac{\gamma_2}{1+\cdots+}\,\frac{\gamma_{2n-1}}{z-b+\gamma_{2n}},$$

$$(17)\qquad \frac{V_{2n-1}^{(\prime\prime)}(z)}{(z-b)U_{2n-1}^{(\prime\prime)}(z)} = 1+\frac{\gamma_1}{z-b+\cdots+}\,\frac{\gamma_{2n-2}}{1+}\,\frac{\gamma_{2n-1}}{z-b},$$

$$(18)\qquad \frac{V_{2n}^{(\prime\prime)}(z)}{U_{2n}^{(\prime\prime)}(z)} = \frac{1}{1+}\,\frac{\delta_1}{z-b+}\,\frac{\delta_2}{1+\cdots+}\,\frac{\delta_{2n-1}}{z-b+\delta_{2n}},$$

$$(19)\qquad \frac{(z-b)V_{2n-1}^{(\prime)}(z)}{U_{2n-1}^{(\prime)}(z)} = \frac{1}{1+}\,\frac{\delta_1}{z-b+\cdots+}\,\frac{\delta_{2n-2}}{1+}\,\frac{\delta_{2n-1}}{z-b}.$$

D'après les propriétés connues des fractions continues on a

$$(20)\quad \begin{cases} c_1 = \gamma_1 = \dfrac{\alpha_0}{L}, & \partial_1 = \delta_1 = b - a - \dfrac{\alpha_0}{L}, \\ c_1 c_2 \ldots c_i = \dfrac{\alpha_{i-1} - h'_{i-1}}{L}, & \partial_1 \partial_2 \ldots \partial_i = \dfrac{h''_{i-1} - \alpha_{i-1}}{L}, \\ \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_{2n-1} = \dfrac{\alpha_{2n-2} - h'_{2n-2}}{L}, & \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{2n-1} = \dfrac{h''_{2n-2} - \alpha_{2n-2}}{L}, \\ \gamma_1 \gamma_2 \ldots \gamma_{2n} = \dfrac{h''_{2n-1} - \alpha_{2n-1}}{L}, & \delta_1 \delta_2 \ldots \delta_{2n} = \dfrac{\alpha_{2n-1} - h'_{2n-1}}{L}. \end{cases}$$

Il est important aussi de remarquer la proposition suivante:

La fraction ordinaire irréductible $\frac{\varphi(x)}{\psi(x)}$ étant égale à

$$\cfrac{1}{1 - \cfrac{e_1}{x - \cfrac{e_2}{1 - \cfrac{e_3}{x - \ddots - \cfrac{e_i}{x^{\frac{1-(-1)^i}{2}}}}}}}$$

et les nombres $e_1, e_2, e_3, \ldots, e_i$ étant positifs, toutes les racines des équations

$$\varphi(x) = 0 \quad \text{et} \quad \psi(x) = 0$$

sont réelles positives et distinctes; de plus les racines de l'équation $\varphi(x) = 0$ séparent celles de l'équation $\psi(x) = 0$.

Ayant égard à cette proposition et aux formules trouvées, il est facile de vérifier en ordre inverse nos conclusions, fondées sur l'existence de maximum et de minimum de l'intégrale

$$\int_a^b y^i f(y)\, dy.$$

## § 5.

Nous allons établir maintenant, que les fonctions trouvées $f_{\min}$ et $f_{\max}$ donnent aussi la solution de cette question générale.

*Etant donnés*

$$\int_a^b f(y)\, dy = \alpha_0, \int_a^b y f(y)\, dy = \alpha_1, \ldots, \int_a^b y^{i-1} f(y)\, dy = \alpha_{i-1}$$

*et la condition*

$$L > f(y) > 0,$$

*il s'agit de trouver les valeurs extrêmes de l'intégrale*

$$\int_a^b \Phi(y)\, f(y)\, dy$$

*pour chaque fonction* $\Phi(y)$ *donnée, dont la derivée*

$$\frac{d^i\Phi(y)}{dy^i} = \Phi^i(y),$$

*de l'ordre* $i$, *ne change pas son signe entre* $y = a$ *et* $y = b$.

A cet effet en conservant les désignations de § 2 et en posant

$$\Omega(y) = \Phi(y_1)\frac{(y-y_2)\dots(y-y_i)}{(y_1-y_2)\dots(y_1-y_i)} + \dots + \Phi(y_i)\frac{(y-y_1)\dots(y-y_{i-1})}{(y_i-y_1)\dots(y_i-y_{i-1})}$$

nous relevons les égalités

$$\int_a^b \Phi(y)\, F(y)\, dy - \int_a^b \Phi(y) f(y)\, dy = \int_a^b \{\Phi(y) - \Omega(y)\}\{F(y) - f(y)\}\, dy$$

et

$$\Phi(y) - \Omega(y) = \frac{(y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_i)}{1.2.3\dots i}\Phi^i(y_0),$$

d'où l'on tire

$$(21)\quad \int_a^b \Phi(y) F(y)\, dy = \int_a^b \Phi(y) f(y)\, dy + \Phi^i(\xi)\int_a^b \frac{\{F(y) - f(y)\}\,\omega(y)\, dy}{1.2.3\dots i},$$

en posant

$$\omega(y) = (y-y_1)(y-y_2)\dots(y-y_i),$$

$y_0$ et $\xi$ étant quelques nombres intermédiaires entre $a$ et $b$.

La formule (21) s'applique à chaque fonction $\Phi(y)$.

Or dans le cas, où l'on a constamment

$$\Phi^i(y) > 0 \quad \text{pour} \quad a < y < b,$$

il en résultent les inégalités

$$\int_a^b \Phi(y) f_{\min}\, dy < \int_a^b \Phi(y)\, F(y)\, dy < \int_a^b \Phi(y) f_{\max}\, dy,$$

quelque soit la fonction $F(y)$ satisfaisante à nos conditions.

De même dans le cas, où l'on a constamment

$$\Phi^i(y) < 0 \quad \text{pour} \quad a < y < b,$$

la formule (21) donne

$$\int_a^b \Phi(y)\, f_{\min}\, dy > \int_a^b \Phi(y)\, F(y)\, dy > \int_a^b \Phi(y)\, f_{\max}\, dy.$$

En appliquant ce résultat à la fonction

$$\Phi(y) = \frac{1}{z-y}$$

et en posant pour fixer les idées

$$z > b$$

on obtient le théorème suivant:

## Théorème II.

*Si l'on a*

$$L > F(y) > 0 \quad \text{et} \quad z > b$$

*et si l'on développe les expressions*

$$e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} \quad \text{et} \quad \frac{z-a}{z-b}\, e^{-\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}}$$

*en fractions continues*

$$\cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{z-a-\cfrac{c_2}{1-\cfrac{c_3}{z-a-\cdots}}}} \quad \text{et} \quad \cfrac{1}{1-\cfrac{\partial_1}{z-a-\cfrac{\partial_2}{1-\cfrac{\partial_3}{z-a-\cdots}}}}$$

*toutes les fractions réduites de ces développements seront plus petites que les expressions correspondantes.*

*Or si aux conditions précedentes*

$$L > F(y) > 0 \quad \text{et} \quad z > b$$

*on développe les mêmes expressions*

$$e^{\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}} \quad \text{et} \quad \frac{z-a}{z-b}\, e^{-\frac{1}{L}\int_a^b \frac{F(y)\,dy}{z-y}}$$

*en fractions continues*

$$1+\cfrac{\gamma_1}{z-b+\cfrac{\gamma_2}{1+\cfrac{\gamma_3}{z-b+\cdots}}} \quad \text{et} \quad 1+\cfrac{\delta_1}{z-b+\cfrac{\delta_2}{1+\cfrac{\delta_3}{z-b+\cdots}}},$$

*les fractions réduites de ces développements seront alternativement plus petites et plus grandes que les expressions correspondantes.*

## § 6.

En conservant nos conditions (1), (2) et (3), passons aux valeurs extrêmes de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

$x$ étant un nombre donné compris entre $a$ et $b$.

Or préalablement nous devons établir cette proposition simple. Etant

$$\xi_1 < \xi_2 < \xi_3 < \cdots < \xi_x < \xi_{x+1} < \cdots < \xi_i < \xi_{i+1}$$

et

$$\Theta(z) = (z-\xi_1)(z-\xi_2)\ldots(z-\xi_i)(z-\xi_{i+1}),$$

la somme

$$\frac{1}{\Theta'(\xi_1)} + \frac{1}{\Theta'(\xi_2)} + \cdots + \frac{1}{\Theta'(\xi_x)}$$

a le même signe ($\pm$) que son terme dernier

$$\frac{1}{\Theta'(\xi_x)}.$$

En effet pour chaque fonction entière $\Omega(y)$, de degré plus petit que $i$, on a

$$\frac{\Omega(\xi_1)}{\Theta'(\xi_1)} + \frac{\Omega(\xi_2)}{\Theta'(\xi_2)} + \cdots + \frac{\Omega(\xi_{i+1})}{\Theta'(\xi_{i+1})} = 0$$

et par conséquent

$$\frac{1}{\Theta'(\xi_1)} + \frac{1}{\Theta'(\xi_2)} + \cdots + \frac{1}{\Theta'(\xi_x)} + \frac{\Omega(\xi_{k+1})}{\Theta'(\xi_{k+1})} = 0,$$

si les coefficients de la fonction $\Omega(y)$ sont déterminées par les équations

$$\begin{aligned}\Omega(\xi_1) &= \Omega(\xi_2) = \cdots = \Omega(\xi_x) = 1,\\ \Omega(\xi_{x+2}) &= \Omega(\xi_{x+3}) = \cdots = \Omega(\xi_{i+1}) = 0.\end{aligned}$$

D'autre part il est facile de voir, que la dérivée $\Omega'(y)$ doit être constamment négative dans l'intervalle de $y = y_x$ jusqu'à $y = y_{x+2}$, la fonction $\Omega(y)$ étant déterminée par les conditions que nous venons d'établir.

Il en résultent les inégalités

$$0 < \Omega(\xi_{x+1}) < 1.$$

Donc la somme

$$\frac{1}{\Theta'(\xi_1)} + \frac{1}{\Theta'(\xi_2)} + \cdots + \frac{1}{\Theta'(\xi_x)},$$

étant comprise entre

$$0 \quad \text{et} \quad \frac{-1}{\Theta'(\xi_{x+1})},$$

a le même signe que $\frac{1}{\Theta'(\xi_k)}$.

Rappelons maintenant la variation à laquelle était soumise la fonction $f(y)$ en § 1, en posant $\xi_\varkappa < x < \xi_{\varkappa+1}$.

D'après les résultats précédentes cette variation de $f(y)$ augmentera ou diminuera la valeur de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

selon que

$$\delta_\varkappa = \frac{\varepsilon}{\Theta'(\xi_\varkappa)}$$

sera positif ou negatif.

Célà étant, il n'est pas difficile d'établir pour la fonction $f(y)$, correspondante au maximum ou au minimum de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

les conditions suivantes:

1) $f(y)$ n'a pas d'autres valeurs que 0 et $L$;
2) l'intervalle, de $y=a$ jusqu'à $y=b$, se divise en $i+2$ parties, dans lesquelles $f(y)$ est alternativement égale à 0 et à $L$;
3) $f(x-\varepsilon') = L$ et $f(x+\varepsilon') = 0$ dans le cas maximum de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

$f(x-\varepsilon') = 0$ et $f(x+\varepsilon') = L$ dans le cas de minimum de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy,$$

$\varepsilon'$ étant infiniment petit positif.

Or ces conditions déterminent tout a fait la fonction cherchée $f(y)$, ce que nous allons démontrer:

Soient

$$y_1 < y_2 < \cdots < y_\varkappa < x < y_{\varkappa+1} < y_{\varkappa+2} < \cdots < y_{i-1} < y_i$$

les valeurs de $y$, qui séparent les valeurs 0 et $L$ de la fonction $f(y)$.

Soit encore $F(y)$ une autre fonction satisfaisante aussi aux conditions (1) et (2).

En posant

$$(y-y_1)(y-y_2)\ldots(y-y_i) = \Theta(y)$$

et

$$\Omega(y) = \frac{\Theta(y)}{(y-y_1)\Theta'(y_0)} + \frac{\Theta(y)}{(y-y_2)\Theta'(y_2)} + \cdots + \frac{\Theta(y)}{(y-y_\varkappa)\Theta'(y_\varkappa)},$$

on aura

$$\Omega(y_1) = \Omega(y_2) = \cdots = \Omega(y_x) = 1,$$
$$\Omega(y_{x+1}) = \Omega(y_{x+2}) = \cdots = \Omega(y_i) = 0$$

et

$$\int_a^b \{f(y) - F(y)\}\, \Omega(y)\, dy = 0.$$

Or on peut écrire

$$\int_a^x f(y)\, dy - \int_a^x F(y)\, dy = \int_a^b \{f(y) - F(y)\}\, \omega(y) dy,$$

en déterminant $\omega(y)$ par les égalités

$$\omega(y) = 1 \quad \text{pour} \quad a < y < x$$

et

$$\omega(y) = 0 \quad \text{pour} \quad x < y < b.$$

Il en résulte que la différence

$$\int_a^x f(y)\, dy - \int_a^x F(y)\, dy$$

est égale à l'intégrale

$$\int_a^b \{f(y) - F(y)\}\, \{\omega(y) - \Omega(y)\} dy,$$

dont tous les éléments ont un même signe, car les différences

$$f(y) - F(y) \quad \text{et} \quad \omega(y) - \Omega(y)$$

changent de signe simultanément.

Donc notre fonction $f(y)$ donne le maximum ou le minimum de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\, dy.$$

Enfin pour s'assurer que le maximum et le minimum de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\, dy$$

correspondent respectivement au cas de $f(x-\varepsilon') = L$ et au cas de $f(x-\varepsilon') = 0$, $\varepsilon'$ étant infiniment petit et positif, il reste à remarquer, que pour $y_x < y < x$ la différence

$$\omega(y) - \Omega(y)$$

est positive.

## § 7.

Nous nous bornerons ici à examiner en détail la solution de la question sur le minimum de l'intégrale

$$\int_a^x f(y)\,dy$$

dans le cas de $i$ pair, $i = 2n$.

Il faut pour cette recherche de distinguer deux hypothèses par rapport aux valeurs de $y$, qui séparent les valeurs 0 et $L$ de la fonction $f(y)$.

Dans la première hypothèse nous avons

$$\begin{array}{llll}
f(y) = 0 \text{ pour } a < y < \xi_1\,, & f(y) = L \text{ pour } \xi_1 < y < \eta_1\,, \\
f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_1 < y < \xi_2\,, & f(y) = L \quad ,, \quad \xi_2 < y < \eta_2\,, \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_{\varkappa-2} < y < \xi_{\varkappa-1}, & f(y) = L \quad ,, \quad \xi_{\varkappa-1} < y < \eta_{\varkappa-1}, \\
f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_{\varkappa-1} < y < x\,, & f(y) = L \quad ,, \quad x < y < \eta_\varkappa\,, \\
f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_\varkappa < y < \xi_\varkappa\,, & f(y) = L \quad ,, \quad \xi_\varkappa < y < \eta_{\varkappa+1}, \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_n < y < \xi_n\,, & f(y) = L \quad ,, \quad \xi_n < y < b
\end{array}$$

et dans la seconde hypothèse

$$\begin{array}{ll}
f(y) = L \text{ pour } a < y < \eta_1\,, & f(y) = 0 \text{ pour } \eta_1 < y < \xi_1, \\
f(y) = L \quad ,, \quad \xi_1 < y < \eta_2\,, & f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_2 < y < \xi_2, \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
f(y) = L \quad ,, \quad \xi_{\varkappa-1} < y < \eta_\varkappa\,, & f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_\varkappa < y < x\,, \\
f(y) = L \quad ,, \quad x < y < \eta_{\varkappa+1}, & f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_{\varkappa+1} < y < \xi_\varkappa, \\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\
f(y) = L \quad ,, \quad \xi_{n-1} < y < \eta_{n+1}, & f(y) = 0 \quad ,, \quad \eta_{n+1} < y < b\,.
\end{array}$$

En considérant séparément ces hypothèses et en ajoutant aux désignations de § 3 celles ci

$$\begin{array}{l}
P(z) = \text{le produit de tous les facteurs } z - \xi, \\
Q(z) = \;,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad ,, \quad z - \eta,
\end{array}$$

on trouvera, par des calculs semblables à ceux de § 3, les formules

$$\frac{(z-x)P(z)}{(z-b)\,Q(z)} = 1 + \cfrac{\gamma_1}{z-b+\cfrac{\gamma_2}{1+\ddots+\cfrac{\gamma_{2n}}{1+\cfrac{\gamma}{z-b}}}},$$

$$\gamma = \frac{(b-x)\,V_{2n}^{(\prime)}(x)}{V_{2n-1}^{(\prime\prime)}(x)},$$

$$\frac{(z-x)P(z)}{(z-a)\,Q(z)} = 1 - \cfrac{\partial_1}{z-a-\cfrac{\partial_2}{1-\ddots-\cfrac{\partial_{2n}}{1-\cfrac{\partial}{z-a}}}},$$

$$\partial = \frac{(x-a)\,V_{2n}^{(\prime\prime)}(x)}{V_{2n-1}^{(\prime\prime)}(x)},$$

$$L\gamma_1\gamma_2\ldots\gamma_{2n}\gamma + L\,\partial_1\partial_2\ldots\partial_{2n}\partial = h''_{2n} - h'_{2n}$$

dans la première hypothèse, et les formules

$$\frac{(z-a)(z-x)P(z)}{Q(z)} = \cfrac{1}{1-\cfrac{c_1}{z-a-\cfrac{c_2}{1-\ddots-\cfrac{c_{2n}}{1-\cfrac{c}{z-a}}}}},$$

$$c = \frac{V_{2n}^{(\prime)}(x)}{V_{2n-1}^{(\prime)}(x)},$$

$$\frac{(z-b)(z-x)P(z)}{Q(z)} = \cfrac{1}{1+\cfrac{\delta_1}{z-b+\cfrac{\delta_2}{1+\ddots+\cfrac{\delta_{2n}}{1+\cfrac{\delta}{z-b}}}}},$$

$$\delta = -\frac{V_{2n}^{(\prime\prime)}(x)}{V_{2n-1}^{(\prime)}(x)},$$

$$L\,c_1c_2\ldots c_{2n}c + L\delta_1\delta_2\ldots\delta_{2n}\delta = h''_{2n} - h'_{2n}$$

dans la seconde hypothèse.

De ces formules il est facile de conclure que nous devons nous arrêter à la première hypothèse dans le cas de

$$V_{2n}^{(\prime)}(x)\;V_{2n}^{(\prime\prime)}(x) > 0$$

et à la seconde dans le cas de

$$V_{2n}^{(\prime)}(x)\;V_{2n}^{(\prime\prime)}(x) < 0.$$

Quant au minimum cherché de l'intégrale, il s'exprime par

$$L\{\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_{\varkappa-1} - \xi_1 - \xi_2 - \cdots - \xi_{\varkappa-1}\}$$

dans la première hypothèse, et par

$$L\{\eta_1 + \eta_2 + \cdots + \eta_\varkappa - \xi_1 - \xi_2 - \cdots - \xi_{\varkappa-1} - a\},$$

si la seconde hypothèse a lieu.

§ 8.

En terminant nous allons remarquer une méthode de calcul approximatif des intégrales, qui découle des recherches précédentes.

Cette méthode est basée sur ce qu'on remplace l'intégrale proposée

$$\int_a^b \Phi(y)\, F(y)\, dy$$

par l'intégrale

$$\int_a^b \Phi(y)\, f_{\min}\, dy$$

ou

$$\int_a^b \Phi(y)\, f_{\max}\, dy,$$

qui se réduit à la somme des intégrales de ces formes

$$L\int_a^\eta \Phi(y)\, dy, \quad L\int_\xi^\eta \Phi(y)\, dy, \quad L\int_\xi^b \Phi(y)\, dy.$$

Nous retenons ici les désignations du § 3, en réunissant seulement $\xi'$, $\xi''$ en un signe $\xi$, et $\eta'$, $\eta''$ en un signe $\eta$.

Or en posant

$$\Phi(y) = \varphi'(y) \quad \text{et} \quad F'(y) = g(y)$$

et ayant égard à l'égalité

$$\int_a^b g(y)\, \varphi(y)\, dy = F(b)\, \varphi(b) - F(a)\, \varphi(a) - \int_a^b F(y)\, \Phi(y)\, dy,$$

on transformera la formule, que nous venons d'indiquer, en celle ci

$$\int_a^b g(y)\, \varphi(y)\, dy = L'\, \varphi(b) - L''\, \varphi(a) + L\, \Sigma\varphi(\xi) - L\, \Sigma\varphi(\eta) + K\varphi^{i+1}(\zeta)$$

$K$ étant un nombre constant, $\zeta$ un nombre compris entre $a$ et $b$,

$$L' = F(b) \quad \text{ou} \quad F(b) - L,$$
$$L'' = F(a) \quad \text{ou} \quad F(a) - L.$$

On ne doit pas oublier, que notre formule suppose

$$L > F(y) > 0.$$

Les nombres $L'$ et $L''$, en général, sont différents de 0 et de $\pm L$.

En examinant les conditions aux quelles $L'$ et $L''$ deviennent égales à 0 ou à $\pm L$, on parviendra à ces deux cas:

1. cas:

$$\int_a^b g(y)\,dy = 0,$$

$$F(y) = \int_a^{y} g(y)\,dy \geqq 0;$$

2. cas:

$$L = \int_a^b g(y)\,dy \geqq F(y) = \int_a^y g(y)\,dy \geqq 0$$

Dans ces deux cas et dans les cas, qui n'en différent, que par le signe de $g(y)$, notre formule sera conforme à celle, que Tchebychef a traité dans les derniers paragraphes de son mémoire*) „Sur les quadratures“ La différence consiste seulement dans la valeur du facteur $L$.

Pourtant grace au changement de ce facteur nous pouvons assurer, que tous les nombres de nos calculs seront réels, et ensuite nous pouvons donner la formule approchée avec son terme complémentaire.

*) Journal de Liouville, 2 série, XIX.