Recherches sur les courbes planes du troisième degré.

Par G. H. Halphen à Paris.

Introduction.

Je me propose, dans le présent mémoire, de traiter, au sujet des courbes planes du 3ème degré ou *cubiques*, certaines questions générales, dont je vais tout d'abord expliquer sommairement l'origine.

Par $(3m-1)$ points, arbitrairement choisis sur une cubique C, passe une infinité de courbes M du degré m, sauf si m est égal à $1, 2$, cas dans lesquels il n'existe qu'une seule de ces courbes. Mais toujours le dernier point d'intersection de M et de C est déterminé par le choix des autres. Cette conclusion subsiste si les $(3m-1)$ points sont choisis infiniment près d'un seul et même point x. Conséquemment, à chaque point x de la cubique C correspond, sur cette même courbe, un point x'_m commun à toutes les courbes M, du degré m, qui ont avec C, au point x, des contacts de l'ordre $(3m-2)$. Il existe certains points x jouissant de cette propriété de coïncider avec leur correspondant x'_m. Désignons ces points par la notation x_m. Ce sont, comme on voit, les points en chacun desquels il existe des courbes du degré m, ayant avec la cubique des contacts de l'ordre $(3m-1)$. Pour $m=1$, les points x_m sont les *points d'inflexion*; pour $m=2$ les points *sextactiques;* pour $m=3$, les points que j'ai appelés *de coïncidence.*

Les points x_m ont une définition très-simple quand on emploie la représentation des courbes du 3ème degré par les fonctions elliptiques, introduite par M. Clebsch. Si l'on a choisi l'argument de telle sorte qu'il soit nul pour un point d'inflexion, alors les points x_m sont ceux dont les arguments, multipliés par $3m$, reproduisent les périodes.

Au sujet de ces points x_m, je me suis tout d'abord posé la question de trouver le covariant qui s'évanouit en chacun d'eux. Je n'ai pas tardé à reconnaître que ce covariant est un *combinant* pour le faisceau des cubiques qui ont neuf points d'inflexion communs. Cette propriété était connue pour le cas le plus simple, $m=2$. On sait, en effet, que les 27 points sextactiques d'une cubique C sont distribués sur 9 droites, qui restent les mêmes quand à la cubique C on en substitue une autre C' ayant les mêmes points d'inflexion que C. La question se présentait dès lors sous une autre forme, et se posait ainsi: *On envisage le faisceau des cubiques qui ont neuf points d'inflexion communs, et on demande le lieu des points x_m de ces cubiques.* Comme je viens de le rappeler, ce lieu, pour $m = 2$, se décompose en 9 droites. J'ai trouvé ensuite que, pour $m = 3$, il se décompose en 8 cubiques, et j'ai pu reconnaître que cette décomposition est un fait général:

Le lieu des points x_m se compose de 9 courbes distinctes quand m n'est pas divisible par 3; *de* 8 *courbes distinctes quand m est un multiple de* 3.

Si $m = 3^\alpha$, chacune des 8 *courbes est du degré $3^{2\alpha-1}$.*

Si $m = 3^\alpha \mu$, μ n'étant plus divisible par 3, *et α pouvant être zéro, et que $p, p', p'', \cdots$ désignent les facteurs premiers du nombre μ, distincts entre eux, chacune des* 8 *courbes* (pour $\alpha \geqq 1$) *ou des* 9 *courbes* (pour $\alpha = 0$) *est d'un degré égal à*

$$3^{2\alpha-1}\mu^2\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p'^2}\right)\left(1-\frac{1}{p''^2}\right)\cdots$$

Telle est la proposition principale dont on trouvera la démonstration dans ce mémoire.

Recherches préliminaires; lieux géométriques des points x_3 et x_4.

1. Je rappelle tout d'abord quelques propriétés élémentaires. Une cubique peut être transformée en elle-même par trois groupes de substitutions homographiques, savoir:

1° *Substitutions homologiques* α. Le centre d'homologie est un point d'inflexion J. Ces substitutions sont au nombre de *neuf.* Chacune d'elles, adjointe à un point d'inflexion J, laisse inaltéré, dans chaque triangle d'inflexions, le côté qui passe par J, et permute entre eux les deux autres.

2° *Substitutions* β, au nombre de *huit.* A chaque triangle d'inflexion deux d'entre elles sont adjointes. Une substitution β laisse inaltérés les côtés du triangle auquel elle est adjointe, et permute circulairement les côtés de chacun des autres triangles. Une substitution β est le produit de deux substitutions α successives. Les substitutions β forment un *groupe*, c'est-à-dire que les 8 points, transformés d'un seul et même point par ces huit substitutions, forment, avec ce point même, un groupe inaltérable par les substitutions β.

3° *Substitutions* γ, qui permutent entre eux les triangles d'inflexion. Dans les questions qui font l'objet de ce mémoire, il est utile de considérer ces substitutions. Elles transforment en elles-mêmes toutes les cubiques qui ont les mêmes points d'inflexion; et, par suite, elles transforment en eux-mêmes les lieux geométriques que nous aurons à envisager.

Soit choisi pour triangle de référence un triangle d'inflexions, relativement auquel l'équation

$$(1) \qquad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6ax_1x_2x_3 = 0$$

représente une cubique C quelconque du faisceau. Celle des substitutions α qui est adjointe au point d'inflexion $x_3 = 0$, $x_1 + \Theta x_2 = 0$, Θ étant une racine cubique de l'unité, fait correspondre au point x celui dont les coordonnées sont $(\Theta x_2,\ \Theta^2 x_1,\ x_3)$. Celles des substitutions β qui sont adjointes au triangle de référence font correspondre entre eux les trois points $(x_1,\ \Theta x_2,\ \Theta^2 x_3)$. Les six autres substitutions β font correspondre à l'un quelconque de ces trois points ceux que l'on obtient par la permutation circulaire des indices.

2. Je rappelle encore les propriétés connues des points sextactiques. Chacun d'eux est l'intersection de la cubique avec la polaire d'un point d'inflexion. Pour le point $x_3 = 0$, $x_1 + \Theta x_2 = 0$, cette polaire est $x_1 - \Theta x_2 = 0$. Donc *le lieu des points sextactiques des cubiques ayant neuf points d'inflexion communs se compose de neuf droites; ce sont les neuf axes d'homologie relatives aux substitutions α.* Chacune des parties du lieu peut être considérée comme adjointe à un point d'inflexion. L'ensemble du lieu est représenté par l'équation

$$(x_1^3 - x_2^3)(x_2^3 - x_3^3)(x_3^3 - x_1^3) = 0.$$

3. J'arrive maintenant aux points de coïncidence, qui sont aussi, comme on le sait, les sommets des triangles inscrits et circonscrits aux cubiques. La tangente de la courbe (1) au point x a pour équation

$$x_1^2y_1 + x_2^2y_2 + x_3^2y_3 + 2a(x_1x_2y_3 + x_2x_3y_1 + x_3x_1y_2) = 0.$$

Si l'on y fait, Θ étant imaginaire,

$$y_1 = x_1, \quad y_2 = \Theta x_2, \quad y_3 = \Theta^2 x_3,$$

l'équation sera verifiée pourvu qu'on ait

$$(2) \qquad A_1 = x_1^3 + \Theta x_2^3 + \Theta^2 x_3^3 = 0.$$

Donc, si le point x est situé sur cette courbe A_1, son transformé x' par l'une des substitutions β est situé sur la tangente de la cubique C en x. Mais ce point x' est aussi sur A_1. Donc la tangente de C en x' passe aussi au transformé x'' de x' par la même substitution; et de même la tangente en x'' passe aussi au point transformé de x''. Mais ce dernier n'est autre que x. Donc le triangle $xx'x''$ est inscrit et circonscrit à la cubique C. Donc la cubique A_1 coupe chaque cubique C en neuf points qui sont les sommets de trois triangles inscrits et circonscrits à C, c'est-à-dire en neuf points x_3 ou de coïncidence. La seconde substitution β, adjointe au triangle de référence fournit de même une seconde cubique A_1',

(3) $$A_1' = x_1^3 + \Theta^2 x_2^3 + \Theta x_3^3 = 0,$$

qui fait également partie du lieu des points cherchés. On aura d'autres parties du lieu en considérant les autres substitutions β. Par exemple, si l'on fait, Θ étant réel ou imaginaire,

$$y_1 = x_2, \quad y_2 = \Theta x_3, \quad y_3 = \Theta^2 x_1$$

on obtient l'équation

$$(x_1^2 x_2 + \Theta x_2^2 x_3 + \Theta^2 x_3^2 x_1)\,[1 + 2a(\Theta^2 + \Theta + 1)] = 0.$$

Il en résulte ces six autres parties du lieu, Θ étant imaginaire:

(4) $$\begin{cases} A_2' = x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2, & A_2 = x_1^2 x_2 + x_2^2 x_3 + x_3^2 x_1, \\ A_3' = x_1 x_2^2 + \Theta\, x_2 x_3^2 + \Theta^2 x_3 x_1^2, & A_3 = x_1^2 x_2 + \Theta^2 x_2^2 x_3 + \Theta\, x_3^2 x_1, \\ A_4' = x_1 x_2^2 + \Theta^2 x_2 x_3^2 + \Theta\, x_3 x_1^2, & A_4 = x_1^2 x_2 + \Theta\, x_2^2 x_3 + \Theta^2 x_3^2 x_1. \end{cases}$$

On obtient ainsi, pour chaque cubique C, 24 triangles inscrits et circonscrits. C'est précisément le nombre de ceux qui existent. On a donc là le lieu total. Ces cubiques A jouissent de diverses propriétés évidentes sur leurs équations, et que je résume dans l'énoncé suivant:

Pour le faisceau des cubiques ayant neuf points d'inflexion communs, le lieu des points de coïncidence se compose de huit cubiques équianharmoniques. Chacune d'elles a pour triangle d'inflexions un des triangles d'inflexions du faisceau, et est inscrite et circonscrite aux trois autres.

4. Les deux cubiques A_n et A_n' ont pour triangle d'inflexions commun un triangle d'inflexions T_n du faisceau, et se coupent aux neuf sommets des trois autres triangles.

Deux cubiques d'indices différents et accentuées de même se touchent aux trois sommets du triangle de référence T_1, et se coupent aux trois sommets du triangle dont l'indice n'est ni l'unité, ni celui de l'une ou l'autre de ces cubiques. Ainsi A_2 et A_3 se coupent aux sommets de T_4. De même A_2' et A_3'. Au contraire, A_2 et A_3' se coupent aux sommets de T_1 et se touchent aux sommets de T_4.

Ces considérations prouvent aisément que deux courbes quelconques du réseau

$$\lambda x_1 x_2 x_3 A_1 A_1' + \mu A_2 A_3 A_4 + \nu A_2' A_3' A_4' = 0,$$

qui sont du 9ème degré, ont 72 intersections fixes confondues six par six aux sommets des quatre triangles T. En conséquence, si l'on transforme le plan par la substitution

(5) $$\sigma y_1 = A_2 A_3 A_4, \quad \sigma y_2 = A_2' A_3' A_4', \quad \sigma y_3 = x_1 x_2 x_3 A_1 A_1',$$

à chaque point y correspondent *neuf* points x. Il est d'ailleurs visible que ces neuf points x constituent un groupe complet de points *conjugués* suivant les substitutions β.

Cette substitution (5) que je nommerai (A) jouera un rôle prépondérant dans les recherches actuelles.

5. Je vais encore chercher directement le lieu des points x_4, qui sont les points de contact des tangentes menées des points sextactiques. Je ferai usage de la proposition suivante:

Si, par rapport à toutes les cubiques C qui ont neuf points d'inflexion communs, on prend les premières polaires d'un point z, ces coniques forment un faisceau dont les pivots sont situés sur celle des cubiques qui passe par le point z.

Cette proposition se démontre ainsi. Deux des polaires sont représentées par les équations

$$z_1 x_1^2 + z_2 x_2^2 + z_3 x_3^2 = 0,$$
$$z_1 x_2 x_3 + z_2 x_3 x_1 + z_3 x_1 x_2 = 0.$$

Je tire de là les z en fonction des x:

$$(6) \quad \tau z_1 = x_1(x_2^3 - x_3^3), \quad \tau z_2 = x_2(x_3^3 - x_1^3), \quad \tau z_3 = x_3(x_1^3 - x_2^3)$$

et ensuite

$$\frac{z_1^3 + z_2^3 + z_3^3}{z_1 z_2 z_3} = \frac{x_1^3(x_2^3 - x_3^3)^3 + x_2^3(x_3^3 - x_1^3)^3 + x_3^3(x_1^3 - x_2^3)^3}{x_1 x_2 x_3 (x_1^3 - x_2^3)(x_2^3 - x_3^3)(x_3^3 - x_1^3)}.$$

Mais, en vertu de l'identité

$$a(b-c)^3 + b(c-a)^3 + c(a-b)^3 = (a-b)(b-c)(c-a)(a+b+c),$$

la dernière équation se change en

$$\frac{z_1^3 + z_2^3 + z_3^3}{z_1 z_2 z_3} = \frac{x_1^3 + x_2^3 + x_3^3}{x_1 x_2 x_3},$$

ce qui démontre la proposition annoncée. On a ainsi le moyen de passer du lieu des points x_m au lieu des points x_{2m}. Il suffit, en effet, de changer dans l'équation du premier, les x en z, puis de substituer aux z les expressions (6). En particulier, à chacune des neuf droites dont l'ensemble constitue le lieu des points x_2 correspond une courbe du 4ème degré B, lieu partiel des points x_4. Les neuf courbes B sont données par l'équation

$$(7) \qquad B = x_1(x_2^3 - x_3^3) - \Theta x_2(x_3^3 - x_1^3) = 0$$

et celles qu'on en déduit en remplaçant Θ par une quelconque des trois racines cubiques de l'unité, puis en permutant les indices. Ces courbes jouissent, par rapport aux triangles d'inflexions, de nombreuses propriétés dont l'énoncé suivant résume quelques-unes:

Pour le faisceau des cubiques qui ont neuf points d'inflexion communs, le lieu des points x_4 se compose de neuf courbes distinctes du 4ème degré. Chacune d'elles est adjointe à un point d'inflexion. L'ad-

jointe d'un point d'inflexion J a elle-même quatre points d'inflexion sur chacune des quatre droites d'inflexions passant en J et un contact du 3ème ordre avec sa tangente en chacun des sommets des triangles d'inflexions opposés aux côtés qui contiennent J. Les tangentes en ces quatres sommets passent en J.

Si l'on a égard à ce que le contact du 3ème ordre avec une tangente compte pour deux inflexions, on voit que cet énoncé fait connaître les 24 points d'inflexion de la courbe du 4ème degré B.

On ne manquera pas de remarquer que, par l'emploi continu de la substitution (6), ou substitution (B), le théorème général relatif aux décompositions et au degré du lieu des points x_m est dès à présent démontré pour $m = 2^n$.

Propriétés d'une certaine transformation du plan.

6. Je vais actuellement faire une étude spéciale de la substitution (A), définie par les équations (5), et tout d'abord je vais montrer, que cette substitution, comme celle que j'ai appelée (B), transforme en elles-même toutes les cubiques C du faisceau (1).

Soit Θ une racine cubique imaginaire de l'unité, et considérons la substitution composée suivante

$$(8)\quad \begin{cases} \lambda x_1^3 = t_3^{\frac{1}{3}} + \Theta^2 t_2^{\frac{1}{3}} + \Theta t_1^{\frac{1}{3}}, & 8\mu a^3 t_1 = 2ay_3 - \Theta y_2 - \Theta^2 y_1, \\ \lambda x_2^3 = t_3^{\frac{1}{3}} + \Theta\ t_2^{\frac{1}{3}} + \Theta^2 t_1^{\frac{1}{3}}, & 8\mu a^3 t_2 = 2ay_3 - \Theta^2 y_2 - \Theta y_1, \\ \lambda x_3^3 = t_3^{\frac{1}{3}} + \quad t_2^{\frac{1}{3}} + \quad t_1^{\frac{1}{3}}, & \mu(1+8a^3)t_3 = 2ay_3 - y_2 - y_1. \end{cases}$$

Transformons par cette substitution la cubique

$$(9)\qquad x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6ax_1x_2x_3 = 0.$$

Voici le détail du calcul:

$$(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3)^3 + 6^3 a^3 x_1^3 x_2^3 x_3^3 = 0,$$

$$t_3 + 8a^3\left(t_1 + t_2 + t_3 - 3t_1^{\frac{1}{3}} t_2^{\frac{1}{3}} t_3^{\frac{1}{3}}\right) = 0,$$

$$[8a^3 t_1 + 8a^3 t_2 + (1+8a^3)t_1]^3 - 3^3 \cdot 2^9 a^9 t_1 t_2 t_3 = 0,$$

$$y_3^3 - \frac{1}{1+8a^3}(8a^3 y_3^3 - y_2^3 - y_1^3 - 6ay_1 y_2 y_3) = 0,$$

$$y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6ay_1 y_2 y_3 = 0.$$

Ainsi la substitution (8) transforme en elle-même la cubique (9).

7. Dans les formules (8), je peux substituer au paramètre a son expression tirée de (9). J'obtiendrai ainsi une substitution applicable à tout le plan, et qui transformera en elle-même chaque cubique du faisceau (9).

Tirons d'abord des formules (8) les expressions des y en fonction des x, ce qui donne:

$$
(10)\quad\begin{cases}
-\dfrac{3^4}{\lambda^3\mu}y_2=(1+8a^3)(x_3^3+x_2^3+x_1^3)^3+8a^3\Theta(x_3^3+\Theta^2x_2^3+\Theta x_1^3)^3\\
\qquad\qquad\qquad+8a^3\Theta^2(x_3^3+\Theta x_2^3+\Theta^2x_1^3)^3,\\
-\dfrac{3^4}{\lambda^3\mu}y_1=(1+8a^3)(x_3^3+x_2^3+x_1^3)^3+8a^3\Theta^2(x_3^3+\Theta^2x_2^3+\Theta x_1^3)^3\\
\qquad\qquad\qquad+8a^3\Theta(x_3^3+\Theta x_2^3+\Theta^2x_1^3)^3,\\
\dfrac{2\cdot 3^4 a}{\lambda^3\mu}y_3=(1+8a^3)(x_3^3+x_2^3+x_1^3)^3+8a^3(x_3^3+\Theta^2x_2^3+\Theta x_1^3)^3\\
\qquad\qquad\qquad+8a^3(x_3^3+\Theta x_2^3+\Theta^2x_1^3)^3.
\end{cases}
$$

Pour développer les seconds membres de ces équations, remarquons qu'on a en général:

$$
\begin{aligned}
&A(u_3+u_2+u_1)^3+B(u_3+\Theta^2u_2+\Theta u_1)^3+C(u_3+\Theta u_2+\Theta^2u_1)^3\\
&=(A+B+C)(u_1+u_2+u_3)^3+3(\Theta-1)(C-\Theta^2B)(u_1u_2^2+u_2u_3^2+u_3u_1^2)\\
&\quad+3(\Theta-1)(B-\Theta^2C)(u_2u_1^2+u_3u_2^2+u_1u_3^2).
\end{aligned}
$$

Au moyen de cette identité on reconnait que le second membre de la première équation (10) se réduit à

$$(x_1^3+x_2^3+x_3^3)^3+3\cdot 24a^3(x_1^3x_2^6+x_2^3x_3^6+x_3^3x_1^6).$$

En vertu de l'équation (9), on peut remplacer cette expression par

$$3\cdot 24a^3(x_1^3x_2^6+x_2^3x_3^6+x_3^3x_1^6-3x_1^3x_2^3x_3^3).$$

De même, le second membre de la deuxième équation (10) peut être remplacé par une expression qui diffère de la précédente par la permutation de deux indices. Quant à la troisième équation (10), son second membre devient, par des transformations analogues

$$
\begin{aligned}
&24a^3(x_1^9+x_2^9+x_3^9-3x_1^3x_2^3x_3^3)\\
&=24a^3(x_1^3+x_2^3+x_3^3)(x_1^3+\Theta x_2^3+\Theta^2x_3^3)(x_1^3+\Theta^2x_2^3+\Theta x_3^3).
\end{aligned}
$$

Ce qui peut encore s'écrire, eu égard à (9):

$$-6\cdot 24a^4x_1x_2x_3(x_1^6+x_2^6+x_3^6-x_1^3x_2^3-x_2^3x_3^3-x_3^3x_1^3).$$

Si je pose maintenant $\sigma=\frac{-9}{8\lambda^3\mu a^3}$, les formules (10) se changent en

$$
(11)\quad\begin{cases}
\sigma y_2=x_1^3x_2^6+x_2^3x_3^6+x_3^3x_1^6-3x_1^3x_2^3x_3^3,\\
\sigma y_1=x_2^3x_1^6+x_3^3x_2^6+x_1^3x_3^6-3x_1^3x_2^3x_3^3,\\
\sigma y_3=x_1x_2x_3(x_1^6+x_2^6+x_3^6-x_1^3x_2^3-x_2^3x_3^3-x_3^3x_1^3)
\end{cases}
$$

et nous avons ce résultat: *la substitution* (11) *transforme en elle-même toute cubique du faisceau* $x_1^3+x_2^3+x_3^3+6ax_1x_2x_3=0$.

Si l'on observe maintenant que les seconds membres des équations (11) sont décomposables en facteurs, on reconnait que *la substitution* (11) *coïncide avec la substitution* (A) *du* No. 4. Effectivement les équations (11) peuvent s'écrire:

$$(12)\quad \begin{cases} \sigma y_2 = (x_1 x_2^2 + x_2 x_3^2 + x_3 x_1^2)(x_1 x_2^2 + \Theta x_2 x_3^2 + \Theta^2 x_3 x_1^2) \cdot \\ \qquad\qquad (x_1 x_2^2 + \Theta^2 x_2 x_3^2 + \Theta x_3 x_1^2) = A_2' A_3' A_4', \\ \sigma y_1 = (x_2 x_1^2 + x_3 x_2^2 + x_1 x_3^2)(x_2 x_1^2 + \Theta x_3 x_2^2 + \Theta^2 x_1 x_3^2) \cdot \\ \qquad\qquad (x_2 x_1^2 + \Theta^2 x_3 x_2^2 + \Theta x_1 x_3^2) = A_2 A_3 A_4, \\ \sigma y_3 = x_1 x_2 x_3 (x_1^3 + \Theta x_2^3 + \Theta^2 x_3^3)(x_1^3 + \Theta^2 x_2^3 + \Theta x_3^3) = x_1 x_2 x_3 A_1 A_1'. \end{cases}$$

L'origine actuelle de cette substitution (A), qui réside dans les formules (8), met de nouveau en évidence qu'à chaque point y correspondent neuf points x.

8. Pour avancer dans l'étude de la substitution (A), je vais chercher comment elle transforme quelques-unes des lignes considerées précédemment.

Observons tout d'abord que le point d'inflexion $x_3 = 0$, $x_1 + x_2 = 0$ a pour transformé $y_3 = 0$, $y_1 + y_2 = 0$, c'est-à-dire se transforme en lui-même. Désignons par J ce point d'inflexion. Il résulte de là que, considéré dans la figure (y) il a pour transformés, dans la figure (x), les neuf points d'inflexion.

La droite $x_1 - x_2 = 0$ a évidemment pour transformée la droite $y_1 - y_2 = 0$. Il en résulte, ce que d'ailleurs les formules (11) permettent de vérifier aisément, que l'axe d'homologie $y_1 - y_2 = 0$, conjugué du point J, a pour transformée la figure composée des neuf axes d'homologie. C'est ce qu'exprime l'équation

$$(13)\qquad \sigma(y_1 - y_2) = -(x_1^5 - x_2^3)(x_2^3 - x_3^3)(x_3^3 - x_1^3).$$

9. Désignons par A le produit des 8 quantités $A_1 \cdots A_4'$. On a, d'après les formules (12)

$$\sigma^3 y_1 y_2 y_3 = A x_1 x_2 x_3$$

et puisque toute cubique du faisceau est transformée en elle-même, il en résulte

$$\sigma^3(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3) = A(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3).$$

$$(14)\quad \sigma^3(y_1^3 + y_2^3 + y_3^3 + 6a y_1 y_2 y_3) = A(x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6a x_1 x_2 x_3).$$

Au moyen de cette relation (14), nous pouvons trouver aisément la transformée d'une droite d'inflexions quelconque, en observant qu'un triangle d'inflexions est une cubique du faisceau. Considérons, par exemple, le triangle T_2 dont les côtés x_1', x_2', x_3' sont donnés par

$$(15)\quad x_1' = x_3 + \Theta x_2 + \Theta^2 x_1, \quad x_2' = x_3 + \Theta^2 x_2 + \Theta x_1, \quad x_3' = x_3 + x_2 + x_1,$$

le côté x_3' passant par J. Posons de même:

$$y_1' = y_3 + \Theta y_2 + \Theta^2 y_1, \quad y_2' = y_3 + \Theta^2 y_2 + \Theta y_1, \quad y_3' = y_3 + y_2 + y_1.$$

Comme conséquence de (14), on aura:

$$\sigma^3 y_1' y_2' y_3' = A x_1' x_2' x_3'.$$

Il résulte de là que les trois expressions des y', qui sont chacune du

9ième degré, se partagent entre elles les facteurs du second membre comme le font les expressions des y: deux d'entre elles contiennent trois facteurs A; la troisième, les deux autres facteurs A et le produit $x_1'x_2'x_3'$. La droite $y_3'=0$ contenant le point J, c'est l'expression de y_3' qui contient le facteur $x_1'x_2'x_3'$. La substitution α, adjointe à J, permute y_1 et y_2 sans altérer y_3, et, de même, permute y_1', y_2' sans altérer y_3'. D'autre part, on reconnait sans peine que les deux cubiques A, adjointes à un même triangle, s'échangent entre elles par toute substitution α. Donc les deux facteurs A qui complètent l'expression de y_3' correspondent à deux cubiques adjointes à un même triangle. Je dis que ce triangle est précisément celui dont nous transformons en ce moment les côtés, le triangle T_2. Observons, en effet, que les deux cubiques A, adjointes à un triangle T_n, ne passent pas aux sommets de ce triangle. Si donc $y_3'=x_1'x_2'x_3'A_nA_n'$, n étant autre que 2, la courbe composée qu'on obtient en égalant à zéro le second membre de cette expression, ne passe pas aux sommets de T_n. Or cette conclusion est impossible, puisque cette courbe composée fait partie du réseau envisagé au No. 4., et dont chaque courbe passe aux sommets des quatre triangles. Donc $n=2$, c'est-à-dire que: *une droite d'inflexions passant par le point J, et envisagée dans la figure (y), a pour transformée, dans la figure (x), l'ensemble des trois côtés du triangle d'inflexions dont elle fait partie, et, en outre, les deux cubiques A, qui sont adjointes à ce triangle. Les deux autres côtés du triangle ont ensemble, pour transformées, les six autres cubiques A.*

Comme conséquence, l'ensemble des 8 droites d'inflexions qui ne passent pas en J, se transforme en l'ensemble des 8 cubiques A, pris trois fois. Voici maintenant la conséquence algébrique, qui sera utile plus loin.

Considérons les équations analogues à (15), et qui définissent les autres triangles d'inflexions:

$$x_1''=\Theta\, x_1+x_2+x_3,\quad x_2''=x_1+\Theta\, x_2+x_3,\quad x_3''=x_1+x_2+\Theta\, x_3,$$
$$x_1'''=\Theta^2x_1+x_2+x_3,\quad x_2'''=x_1+\Theta^2x_2+x_3,\quad x_3'''=x_1+x_2+\Theta^2x_3.$$

On aura:

$$(16)\qquad \sigma^8 y_1y_2y_1'y_2'y_1''y_2''y_1'''y_2'''=(A_1A_1'A_2A_2'A_3A_3'A_4A_4')^3,$$

égalité que le raisonnement précédent démontre, sauf un facteur numérique. En faisant $x_3=0$, $x_1=x_2$, ce qui entraîne $y_3=0$, $y_1=y_2$; on reconnaîtra que l'égalité (16) est complètement exacte.

10. J'ai maintenant en vue d'obtenir la transformée de la courbe B, lieu partiel des points x_4. A cet effet, je vais établir une autre propriété de la substitution (A). Considérons les quatre quantités:

$$X = x_1^9 + x_2^9 + x_3^9,$$
$$Y = x_1^3 x_2^3 x_3^3,$$
$$Z = x_1^3 x_2^6 + x_2^3 x_3^6 + x_3^3 x_1^6,$$
$$U = x_2^3 x_1^6 + x_3^3 x_2^6 + x_1^3 x_3^6.$$

Si on les envisage pour un point x de la cubique

$$C = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6a x_1 x_2 x_3 = 0, \tag{17}$$

elles sont liées par la relation linéaire:

$$X + 3Y + 3Z + (6^3 a^3 + 6)\, U \equiv 0.$$

Si donc on considère une quelconque des courbes D représentées par l'équation

$$D = \lambda X + \mu Y + \nu Z + \varrho U = 0,$$

on peut prendre arbitrairement deux points seulement de la cubique C pour y faire passer la courbe D. Les autres points, au nombre de 25 sont par là déterminés. Je dis que *les* 27 *points d'intersection de la cubique C et d'une quelconque des courbes D sont distribués sur* 9 *lignes droites, transformées les unes des autres par les substitutions homographiques β.*

Pour le prouver, considérons une droite b_x; prenons ses transformées b_x', b_x'' par les deux substitutions β qui sont conjuguées du triangle de référence, et faisons le produit. Il vient:

$$b_x b_x' b_x'' = b_1^3 x_1^3 + b_2^3 x_2^3 + b_3^3 x_3^3 - 3 b_1 b_2 b_3 x_1 x_2 x_3.$$

Ce qui, pour un point de la cubique C, peut s'écrire:

$$b_x b_x' b_x'' \equiv \left(b_1^3 + \frac{b_1 b_2 b_3}{2a}\right) x_1^3 + \left(b_2^3 + \frac{b_1 b_2 b_3}{2a}\right) x_2^3 + \left(b_3^3 + \frac{b_1 b_2 b_3}{2a}\right) x_3^3.$$

Pour obtenir le produit de b_x et de ses huit transformées par les substitutions β, il suffit de permuter circulairement les indices dans cette dernière formule. Il en résulte manifestement que le produit de ces neuf facteurs est de la forme D, sauf des multiples de C. D'ailleurs, la droite b_x peut, ainsi que la courbe D, être menée par deux points arbitraires de C. Donc la proposition est démontrée.

11. Il résulte de là une conséquence immédiate pour la substitution (A). On peut l'écrire:

$$\sigma y_1 = Z - 3Y, \quad \sigma y_2 = U - 3Y, \quad \sigma y_3 \equiv -\frac{1}{6a}\,(X - 3Y).$$

Donc la transformée par (A) d'une droite de la figure (y) coupe une cubique quelconque du faisceau dans les mêmes points qu'une certaine courbe D. D'où cette conséquence: *A trois points x en ligne droite, et sur une même cubique C, correspondent par la substitution (A), trois points y en ligne droite.*

A deux points x infiniment voisins correspondent deux points y

infiniment voisins. Donc: *si la tangente d'une cubique C au point x rencontre de nouveau la cubique au point x', et que y, y' soient les transformés de x, x' par la substitution (A), y' est sur la tangente de C en y.* En d'autres termes, si *l'on effectue successivement les substitutions (A), (B), on peut en intervertir l'ordre sans changer le résultat.*

Pour plus de clarté, appelons substitution (A) celle qui transforme un point y en neuf points x, et substitution (A^{-1}) celle qui transforme un point x en un point y. La substitution (A^{-1}) change en elle-même la droite $E = x_1 - x_2 = 0$. La substitution (B) la change en la courbe B, lieu partiel des points x_4 (No. 5.). Transformer E par les substitutions successives (A^{-1}), (B), (A) dans cet ordre, c'est donc transformer la courbe B par la substitution (A). Mais les deux dernières substitutions effectuées sur E peuvent être interverties, comme je viens de le prouver. L'opération effectuée sur E est donc la même que celle-ci (A^{-1}) (A) (B). Mais l'opération (A^{-1}) (A) change la droite E en l'ensemble des 9 axes d'homologie analogues. Donc la transformée de la courbe B par la substitution (A) coïncide avec l'ensemble des transformées par (B) des 9 axes d'homologie, c'est-à-dire avec l'ensemble des neuf courbes analogues à B. Cette propriété s'exprime par l'égalité

$$(18)\quad y_1(y_2^3-y_3^3)-y_2(y_3^3-y_1^3)=[x_1^3(x_2^3-x_3^3)^3-x_2^3(x_3^3-x_1^3)^3]\times \cdot [x_2^3(x_3^3-x_1^3)^3-x_3^3(x_1^3-x_2^3)^3]\,[x_3^3(x_1^3-x_2^3)^3-x_1^3(x_2^3-x_3^3)^3],$$

qui est prouvée, sauf un facteur numérique. Il suffira de faire $x_3 = y_3 = 0$ pour achever la démonstration de cette formule (18).

Ici se termine la partie purement algébrique et géométrique de ce mémoire, que je vais poursuivre en introduisant les fonctions elliptiques.

Solution des problèmes proposés au moyen des fonctions elliptiques.

12. Le mode de représentation des points d'une courbe cubique par les fonctions elliptiques, imaginé par M. Clebsch, peut être, comme on sait, varié de diverses manières. Ainsi que l'a fait voir M. Hermite*), le mode le plus général consiste à prendre les rapports de deux des coordonnées à la troisième, et à égaler séparément ces deux rapports à deux fonctions doublement périodiques, ayant trois infinis, les mêmes pour toutes deux, dans le parallélogramme des périodes communes ω, ω', et dépendant du même argument t, à chaque valeur duquel correspond ainsi un point de la courbe. Les équations obtenues de la sorte définissent, de la manière la plus générale, une cubique plane.

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik. Bd. LXXXII.

Je rappelle sommairement les propositions suivantes:

L'argument t étant choisi de manière à être nul pour un point d'inflexion J, la somme des arguments des $3m$ points d'intersection de la cubique avec une courbe de degré m ne diffère de zéro que par des multiples des périodes; et comme conséquences: *les points x_m, en chacun desquels il existe des courbes de degré m ayant avec la cubique des contacts de l'ordre $(3m-1)$ sont ceux dont les arguments ont la forme $\frac{n\omega+n'\omega'}{3m}$, n et n' étant des nombres entiers;*

les points x_2 ou sextactiques sont les points de contact des tangentes menées des points d'inflexion, les points x_4 sont les points de contact des tangentes menées des points x_2;

les points x_3 sont les sommets des triangles inscrits et circonscrits. Car le triangle dont les sommets ont pour arguments

$$\frac{n\omega+n'\omega'}{9},\quad \frac{-2n\omega-2n'\omega'}{9},\quad \frac{4n\omega+4n'\omega'}{9}$$

est inscrit et circonscrit, et ses sommets sont des points x_3. *Les points x_3 sont au nombre de* 72; car l'expression $\frac{n\omega+n'\omega'}{9}$ a 81 valeurs, d'où il faut défalquer les 9 valeurs $\frac{n\omega+n'\omega'}{3}$ qui répondent aux points d'inflexion.

Enfin, *si le point x a pour argument t, les huit points transformés de x par les substitutions β ont pour arguments $t+\frac{n\omega+n'\omega'}{3}$; et les 9 points transformés de x par les substitions α ont pour arguments $-t+\frac{n\omega+n'\omega'}{3}$.*

13. Je rappelle maintenant quelques formules relatives à la multiplication de l'argument dans les fonctions elliptiques. Je vais reproduire ces formules telles que je les ai employées dans un travail inséré aux *Comptes-Rendus de l'Académie des Sciences* (3, 17, 31 Mars 1879). Je rappelle toutefois que, sous une forme peu différente, elles ont déjà été mises en usage par M. Kiepert*) et par M. Max Simon**), et bien antérieurement par M. Moutard***).

Considérons la fonction $\mathsf{H}(t)$ de Jacobi. Si l'on écrit H_a au lieu de $\mathsf{H}(at)$, cette fonction satisfait à la relation

$$(19)\qquad \mathsf{H}_{a-b}\mathsf{H}_{a+b}\mathsf{H}_c^2+\mathsf{H}_{b-c}\mathsf{H}_{b+c}\mathsf{H}_a^2+\mathsf{H}_{c-a}\mathsf{H}_{c+a}\mathsf{H}_b^2=0.$$

Dans cette relation (19) existe une double homogénéité; homogénéité par rapport à la lettre H, tous les termes étant du 4ème *degré*; homo-

*) Journal für die reine und angewandte Mathematik. B. LXXVI.

**) ibid. Bd. LXXXI.

***) Poncelet, applications d'analyse et de Géométrie, T. I. p. 545.

généité par rapport aux carrés des indices, tous les termes étant, à ce point de vue, du *poids* $2(a^2+b^2+c^2)$. Prenons la fonction

$$(20) \qquad g_m(t) = \frac{\mathsf{H}(mt)\mathsf{H}(t)^{\frac{m^2-4}{3}}}{\mathsf{H}(2t)^{\frac{m^2-1}{3}}},$$

qui est du degré et du poids zéro, et il est manifeste que la fonction g_m satisfait, elle aussi, à la relation (19). Les quantités g_1 et g_2 sont toutes deux l'unité. Pour éviter les exposants fractionnaires, prenons $g_3{}^3$ au lieu de g_3 et posons:

$$(21) \qquad \xi(t) = g_3{}^3(t) = \frac{\mathsf{H}^3(3t)\mathsf{H}^5(t)}{\mathsf{H}^8(2t)}, \quad \eta(t) = g_4(t) = \frac{\mathsf{H}(4t)\mathsf{H}^4(t)}{\mathsf{H}^5(2t)}.$$

Nous avons alors cette proposition: *la quantité $g_m(t)$ est un polynome entier en $\xi(t)$, $\eta(t)$, quand l'entier m n'est pas divisible par* 3. *Quand m est un multiple de* 3, *$g_m(t)$ est le produit de $\xi^{\frac{1}{3}}(t)$ par un tel polynome.* Effectivement la formule (19) de Jacobi donne pour le calcul de g_m ces deux formules récurrentes

$$(22) \quad g_{2n+1} = g_{n+2}g_n^3 - g_{n-1}g_{n+1}^3, \quad g_{2n} = g_n\left(g_{n+2}g_{n+1}^2 - g_{n-2}g_{n+1}^2\right).$$

On en tire g_m en fonction entière de η, $\xi^{\frac{1}{3}}$, et l'on reconnait sans peine que cette fonction entière est composée en ξ comme l'indique l'énoncé précédent.

14. Les fonctions g_m sont paires et, pour les valeurs entières de m, doublement périodiques. Pour $t=0$, $g_m(t)$ se réduit à $\frac{m}{2^{\frac{m^2-1}{3}}}$.

La fonction $\xi(t)$, dans un parallélogramme des périodes ω, ω', a 8 zéros triples $\frac{n\omega+n'\omega'}{3}$, n et n' n'étant pas nuls ensemble. Elle a 3 infinis octuples $\frac{n\omega+n'\omega'}{2}$. La fonction $\eta(t)$ a 12 zéros simples $\frac{n\omega+n'\omega'}{4}$, n et n' n'étant pas pairs en même temps, et 3 infinis quadruples, les mêmes que ceux de $\xi(t)$.

L'argument t correspondant au point x d'une cubique C, je vais calculer les fonctions $\xi(t)$ et $\eta(t)$ au moyen des coordonnées du point x.

Soit $x_3=0$, $x_1+x_2=0$ le point d'inflexion J pour lequel t est nul.

Les points pour lesquels on a $2t\equiv 0$ mais non $t\equiv 0$, sont les trois points sextactiques situés sur la polaire de J, $x_1-x_2=0$.

Les points pour lesquels on a $4t\equiv 0$, mais non $2t\equiv 0$, sont les 12 points x_4 situés sur la courbe du 4ème degré B (No. 5.)

$$B = x_1(x_2{}^3-x_3{}^3) - x_2(x_3{}^3-x_1{}^3) = 0.$$

Considérons la fonction

$$\eta' = \frac{x_1(x_2^3 - x_3^3) - x_2(x_3^3 - x_1^3)}{(x_1 - x_2)^4},$$

et envisageons-la le long de la cubique donnée C.

Il est manifeste que cette fonction, ainsi envisagée, a les mêmes zéros et les mêmes infinis que la fonction $\eta(t)$, et avec les mêmes ordres de multiplicité. Comme elle est homogène et de degré zéro, c'est aussi une fonction doublement périodique de t, aux mêmes périodes que $\eta(t)$. C'est donc $\eta(t)$ sauf un facteur numérique. Pour connaître ce facteur, observons qu'au point J, η' se réduit à $-\frac{1}{8}$, tandis que, pour $t = 0$, $\eta(t)$ se réduit à $\frac{1}{8}$. Donc η' et $\eta(t)$ ne diffèrent que par le signe.

Prenons maintenant, le long de C, la fonction

$$\xi' = \frac{x_1 x_2 x_1' x_2' x_1'' x_2'' x_1''' x_2'''}{(x_1 - x_2)^8},$$

dont le numérateur est composé du produit des huit droites d'inflexion ne passant pas en J, et explicitement données au No. 9. Cette fonction, également homogène et de degré zéro, est aussi doublement périodique, et a les mêmes périodes que $\xi(t)$. Mais elle a aussi, comme $\xi(t)$, pour zéros les 8 valeurs de $\frac{n\omega + n'\omega'}{3}$, sauf la valeur zéro, et elle les a trois fois, attendu que les huit droites qui figurent en son numérateur contiennent chacune trois des huit points d'inflexion autres que J. La fonction ξ' a aussi les mêmes infinis que $\xi(t)$, octuples aussi. Donc ξ' et $\xi(t)$ ne diffèrent que par un facteur numérique. D'ailleurs, au point J, ξ' se réduit à $-\frac{3^3}{2^8}$ et $\xi(t)$ à $\frac{3^3}{2^8}$. Donc ξ' et $\xi(t)$ ne diffèrent que par le signe. Nous avons donc ces formules

$$(23)\qquad \begin{cases} \xi(t) = -\dfrac{x_1 x_2 x_1' x_2' x_1'' x_2'' x_1''' x_2'''}{(x_1 - x_2)^8}, \\[2ex] \eta(t) = -\dfrac{x_1(x_2^3 - x_3^3) - x_2(x_3^3 - x_1^3)}{(x_1 - x_2)^4}. \end{cases}$$

Si l'on développe le numérateur de $\xi(t)$, on a encore:

$$(24)\quad \xi(t) = -\frac{x_1 x_2[(x_1 + x_3)(x_1 + x_3 - x_2) + x_2^2][(x_2 + x_3)(x_2 + x_3 - x_1) + x_1^2] \times [x_1^2 + x_2^2 + x_3^2 - x_1 x_3 - x_2 x_1 - x_3 x_1]}{(x_1 - x_2)^8}.$$

15. Les formules (23) permettent de calculer la fonction $g_m(t)$, exprimée par les coordonnées du point x. Mais, comme ce sont les points $3mt \equiv 0$ qui nous intéressent ici, je vais calculer directement $\xi(3t)$ et $\eta(3t)$, par un raisonnement tout semblable. Si nous faisons $t' = 3t$, nous savons que:

les points $2t' \equiv 0$ sont les points sextactiques, situés sur le lieu

$$(x_1^3 - x_2^3)(x_2^3 - x_3^3)(x_3^3 - x_1^3) = 0;$$

les points $4t' \equiv 0$ sont les points x_4, dont le lieu complet se compose des 9 courbes B, représentées par:

$$[x_1^3(x_2^3-x_3^3)^3-x_2^3(x_3^3-x_1^3)^3]\,[x_2^3(x_3^3-x_1^3)^3-x_3^3(x_1^3-x_2^3)^3]$$
$$[x_3^3(x_1^3-x_2^3)^3-x_1^3(x_2^3-x_3^3)^3]=0;$$

les points $3t' \equiv 0$ sont les points x_3, dont le lieu complet est l'ensemble des 8 courbes $A_1 \cdots A_4'$. En reproduisant alors le raisonnement précédent, j'obtiens ces nouvelles formules:

$$(25)\quad \begin{cases} \xi(3t) = -\dfrac{(A_1A_1'A_2A_2'A_3A_3'A_4A_4')^3}{[(x_1^3-x_2^3)(x_2^3-x_3^3)(x_3^3-x_1^3)]^6}, \\[2ex] \eta(3t) = -\dfrac{[x_1^3(x_2^3-x_3^3)^3-x_2^3(x_3^3-x_1^3)^3]\,[x_2^3(x_3^3-x_1^3)^3-x_3^3(x_1^3-x_2^3)^3]\times [x_3^3(x_1^3-x_2^3)-x_1^3(x_2^3-x_3^3)^3]}{[(x_1^3-x_2^3)(x_2^3-x_3^3)(x_3^3-x_1^3)]^4}. \end{cases}$$

Ou en développant le numérateur de $\xi(3t)$:

$$(26)\quad \xi(3t) = -\frac{(x_1^6+x_2^6+x_3^6-x_1^3x_2^3-x_2^3x_3^3-x_3^3x_1^3)^3(x_1^3x_2^6+x_2^3x_3^6+x_3^3x_1^6-3x_1^3x_2^3x_3^3)^3\times(x_2^3x_1^6+x_3^3x_2^6+x_1^3x_3^6-3x_1^3x_2^3x_3^3)^3}{[(x_1^3-x_2^3)(x_2^3-x_3^3)(x_3^3-x_1^3)]^6}.$$

16. La comparaison des formules (23) et (25) va nous faire connaître enfin la véritable nature de la substitution (A), dont nous nous sommes précédemment occupés. Mettons, par la pensée, dans les seconds membres de (23), y au lieu de x, et désignons par t' l'argument du point y. Les formules (23) donnent alors $\xi(t')$ et $\eta(t')$. Substituons maintenant aux y leurs expressions données par la substitution (A), et rappelons-nous les formules (13), (16) et (18) qui nous fournissent le résultat de cette substitution. La conclusion est celle-ci:

$$\xi(t') = \xi(3t), \quad \eta(t') = \eta(3t).$$

L'étude que j'ai faite des fonctions ξ, η dans le travail précité, conduit à cette conséquence, que ces deux fonctions étant données numériquement, l'argument, à des multiples près des périodes, est déterminé sauf le signe. On a donc $t' \equiv \pm 3t$, et nous n'avons plus qu'à lever cette ambiguïté de signe.

Soit x' le point de rencontre de la droite Jx avec la cubique C, z le point de rencontre de la tangente en x avec C. Si l'on a $t' \equiv 3t$, le point y est en ligne droite avec x' et z. Si l'on a, au contraire, $t' \equiv -3t$, x' et z sont en ligne droite avec le point y' situé sur la droite Jy. Examinons si ce second cas a lieu. Le point x' a pour coordonnées x_2, x_1, x_3 et le point y' a pour coordonnées y_2, y_1, y_3. Il faut donc examiner le déterminant:

$$\begin{vmatrix} y_2 & y_1 & y_3 \\ x_2 & x_1 & x_3 \\ z_1 & z_2 & z_3 \end{vmatrix}$$

dans lequel les y sont données par (11), et les z par (6). Il est aisé de vérifier que ce déterminant n'est pas nul; car le terme du plus haut degré en x_1, du 10ème degré, est unique et ne peut, par conséquent, se réduire. Au contraire, dans le déterminant que l'on obtient par échange de y_1 et y_2, il y a deux termes du 10ème degré en x_1, et qui se détruisent. Ainsi:

Si le point x a l'argument t sur la cubique du faisceau qui y passe, le point y qui lui correspond par la substitution (A), *a l'argument* $3t$; ou encore: *Si l'on inscrit à une cubique du faisceau un triangle $xx'z$ de manière que le côté xz soit tangent à la cubique en x, et que le côté xx' passe au point d'inflexion J, le troisième côté passe au point y, correspondant au sommet opposé x par la substitution* (A).

17. Arrivons maintenant à la solution définitive des problèmes qui nous occupent. Calculons, au moyen des formules récurrentes (22), $g_m(3t)$, en mettant pour ξ, η les valeurs (25), et égalons le résultat à zéro. Nous obtenons ainsi l'équation d'une courbe qui coupe toute cubique du faisceau dans les points dont les arguments sont les zéros de $g_m(3t)$, et ne la coupe en aucun autre. Si m est un nombre composé, g_m se décompose en autant de facteurs que m a de diviseurs. On prendra simplement le facteur qui répond à m lui-même, et l'on aura l'équation d'une courbe coupant chaque cubique du faisceau, et la coupant simplement, en tous les points x_m, et ne la coupant en aucun autre.

Mais nous pouvons aussi calculer $g_m(t)$ en mettant pour ξ, η les valeurs (23), et nous obtenons de même une courbe coupant simplement chaque cubique du faisceau en tous les points dont les arguments vérifient $mt \equiv 0$, sans vérifier $m't \equiv 0$, m' étant moindre que m. Cette courbe est une partie du lieu des points x_m, si m est premier avec 3. Nous pouvons calculer le degré de ce lieu partiel d'après le nombre des points où il rencontre une cubique du faisceau. Or le nombre des solutions, distinctes suivant les périodes, de l'équation $mt \equiv 0$, et qui n'appartiennent à aucune autre équation $m't \equiv 0$, où m' soit moindre que m, se calcule aisément. C'est

$$m^2\left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p'^2}\right)\left(1-\frac{1}{p''^2}\right)\cdots,$$

si p, p', p'' $\cdots$ sont les facteurs premiers de m, distincts entre eux. Le tiers de ce nombre est donc le degré de ce lieu partiel que nous envisageons.

18. Pour connaître le lieu complet, donnons aux deux entiers n, n' les valeurs 0, 1, 2 sans leur donner en même temps la valeur zéro. La relation $mt \equiv 0$ ne coïncide avec aucune des relations

$$m\left(t+\frac{n\omega+n'\omega'}{3}\right)\equiv 0.$$

Si donc on transforme le lieu partiel par les substitutions β, on obtient chaque fois un nouveau lieu partiel. Si, au contraire, on change t en $-t$, la relation $mt \equiv 0$ n'est pas altérée, et les huit autres s'échangent toutes entre elles. Donc: *Quand le nombre m n'est pas divisible par 3, le lieu des points x_m se compose de 9 courbes distinctes, dont chacune coupe une cubique quelconque du faisceau en des points x_m, et non en d'autres points. Chacun des lieux partiels est adjoint à un point d'inflexion; il reste inaltéré par la substitution homologique dont ce point d'inflexion est le centre, et qui laisse inaltérées les cubiques du faisceau. Cette substitution permute entre eux tous les autres lieux partiels. Si $p, p', p'' \cdots$ sont les facteurs premiers du nombre m, distincts entre eux, le degré de chaque lieu partiel est*

$$\frac{1}{3} m^2 \left(1 - \frac{1}{p^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p'^2}\right)\left(1 - \frac{1}{p''^2}\right) \cdots.$$

19. Au lieu d'effectuer sur le lieu partiel $mt \equiv 0$ les substitutions β, nous aurions pu passer de $g_m(t)$ à $g_m(3t)$ en remplaçant les x par les y, puis mettant au lieu des y les valeurs données par les formules de la substitution (A). En d'autres termes, le lieu complet est le transformé du lieu partiel par la substitution (A). C'est ce qui résulte de la proposition établie au No. 16. On reconnait ainsi, de nouveau, que le lieu complet est d'un degré égal à celui du lieu partiel, multiplié par 9. Mais on voit aussi que, *le nombre m n'étant pas divisible par 3, le lieu partiel des points x_m, adjoint au point d'inflexion J se transforme en lui-même par la substitution (A^{-1}).* C'est ce que nous avons reconnu précédemment pour le lieu des points x_2 et x_4.

Prenons maintenant le lieu complet des points x_m, et appliquons-lui la substitution (A). Chacun des lieux partiels se transforme en un lieu séparé, de degré neuf fois plus grand. Mais le lieu partiel adjoint au point J se change en le lieu total des points x_m. Le lieu complet des points x_{3m} se compose donc seulement de 8 courbes. Le degré de chacune d'elles est égal à neuf fois celui des précédentes. En outre, chacun de ces lieux partiels reste inaltéré par les substitutions β.

Répétons encore la substitution (A) sur le lieu complet des points x_{3m}; chaque lieu partiel donne un nouveau lieu partiel des points x_{9m}, de degré neuf fois plus grand, et ainsi de suite. Donc: *Si $m = 3^\alpha \mu$, μ étant premier avec 3, et que $p, p', p'' \cdots$ soient les facteurs premiers de μ, le lieu des points x_m se compose de huit courbes distinctes, dont chacune est du degré $3^{2\alpha-1}\mu^2 \left(1-\frac{1}{p^2}\right)\left(1-\frac{1}{p'^2}\right)\left(1-\frac{1}{p''^2}\right) \cdots$.*

Même raisonnement, appliqué au lieu des points x_3, donne cette conséquence: *le lieu des points x_{3^α} se compose de 8 courbes, dont chacune est du degré $3^{2\alpha-1}$.*

Dans ces deux cas, chaque lieu partiel reste inaltéré par les substitutions homographiques β; il est conjugué avec un autre lieu partiel, de telle sorte que deux conjugués s'échangent entre eux par les substitutions α.

Introduction des covariants.

20. Je termine ce mémoire en montrant comment les résultats précédents permettent de résoudre le problème que je m'étais primitivement posé: *pour une courbe du* 3*ème degré, trouver le covariant qui s'évanouit en chaque point x_m de cette courbe.* On voit maintenant que ce problème peut aussi s'énoncer ainsi: *Soit $f=0$ l'équation d'une cubique et Δ le hessien de f, exprimer en égalant à zéro un combinant de la forme $\varkappa f+\lambda\Delta$, l'équation du lieu des points x_m pour les courbes du faisceau $\varkappa f+\lambda\Delta=0$.*

Pour résoudre ce problème, il suffira de mettre sous forme de combinants les expressions (25) de $\xi(3t)$ et $\eta(3t)$, ce qui sera facile grâce à l'étude approfondie qui a été faite des formes cubiques ternaires.

J'emploierai les notations mêmes des *Vorlesungen über Geometrie von Clebsch*, publiées par M. Lindemann, et je poserai, en considérant la forme

$$\begin{aligned} f &= a_x^3, \\ \Delta &= (abc)^2 a_x b_x c_x = \alpha_x^3, \\ N &= (a\alpha x) a_x^2 \alpha_x^2 = N_x^4 u_n, \quad N_i = \frac{\partial N}{\partial u_i}, \\ \psi_x^6 &= N_{n'} N_n' N_x^3 N_x'^3, \\ \Omega &= (a\alpha\psi) a_x^2 \alpha_x^2 \psi_x^5. \end{aligned}$$

Je désignerai par R le discriminant, pris de manière à ce qu'il soit égal à 6^2 pour $a_x'^3 = x_1^3+x_2^3+x_3^3$.

21. Il est très aisé d'obtenir l'expression de $\eta(3t)$. Considérons effectivement l'expression

$$\eta' = \frac{R(N_1^3-N_2^3)(N_2^3-N_3^3)(N_3^3-N_1^3)}{\Omega^4}.$$

On vérifie sans peine que, pour la forme $a_x'^3$, η' se réduit à $\eta(3t)$, sauf un facteur numérique. Mais η' est aussi un combinant *absolu*, c'est-à-dire qu' il reste absolument invariable quand on remplace f par $\varkappa f+\lambda\Delta$. Effectivement, si l'on pose

$$G(\varkappa,\lambda) = \varkappa^4 - S\varkappa^2\lambda^2 - \frac{4}{3}T\varkappa\lambda^3 - \frac{1}{12}S^2\lambda^4, \tag{27}$$

T, S désignant les deux invariants de f, on sait que la substitution de $\varkappa f+\lambda\Delta$ à f a pour effet de multiplier R par G^3, Ω par G^3 et N par G, en sorte que η' n'est pas altéré. L'expression analytique de η' est donc la même pour $a_x'^3$ et pour

$$a_x^3 = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 + 6a x_1 x_2 x_3.$$

Donc, dans tous les cas, η' ne diffère de $\eta(3t)$ que par un facteur numérique, facile à déterminer.

22. Pour obtenir l'expression de $\xi(3t)$, considérons les deux facteurs A_1, A_1' de son numérateur.

$$A_1 = x_1^3 + \Theta x_2^3 + \Theta^2 x_3^3, \quad A_1' = x_1^3 + \Theta^2 x_2^3 + \Theta x_3^3.$$

Ces deux quantités sont précisément les deux covariants irrationels, désignés dans les *Vorlesungen* (p. 572) par la notation M, N. Si l'on prend l'expression qui est donnée pour ces deux covariants dans l'ouvrage cité, en y faisant $f = 0$, on voit, qu'à un facteur indépendant des x près, leur produit coïncide avec $(4\lambda\psi + \varkappa\Delta^2)$, où λ, $\varkappa$ satisfont à l'équation $G = 0$. Les 4 couples de facteurs qui composent le numérateur de $\xi(3t)$ s'obtiendront si l'on prend successivement pour $\lambda : \varkappa$ les quatre racines de $G = 0$. On peut donc écrire, pour ce numérateur, à un facteur près, le cube de

$$(27\text{a}) \qquad G(4\psi, -\Delta^2) = 2^8\psi^4 - 2^4 S\psi^2\Delta^4 + \frac{2^4}{3} T\psi\Delta^6 - \frac{1}{12} S^2\Delta^8.$$

En divisant le cube de cette expression par Ω^8, on aura, à un facteur près, une expression de $\xi(3t)$. Mais elle ne sera pas sous forme de combinant. En ajoutant des multiples de f, on peut varier l'expression trouvée; une de ces formes est un combinant absolu. Pour trouver cette forme, envisageons les deux combinants $S_{\Delta,-f}$, $T_{\Delta,-f}$, c'est-à-dire, comme dans l'ouvrage cité, les invariants S, T, calculés pour la forme $\varkappa f + \lambda\Delta$, et dans lesquels on fait, après le calcul, $\varkappa = \Delta$, $\lambda = -f$. Les expressions de ces combinants sont données dans les *Vorlesungen* (page 640). Si l'on y néglige les multiples de f, ces expressions se réduisent à

$$S_{\Delta,-f} \equiv S\Delta^4, \quad T_{\Delta,-f} \equiv T\Delta^6.$$

Je peux dès lors écrire au lieu de (27a) le combinant suivant

$$(28) \qquad A = 2^8\psi^4 - 2^4\psi^2 S_{\Delta,-f} + \frac{2^4}{3}\psi T_{\Delta,-f} - \frac{1}{12}(S_{\Delta,-f})^2,$$

et j'ai pour $\xi(3t)$ l'expression suivante:

$$(29) \qquad \xi(3t) = \frac{A^3}{3\cdot 2^8\Omega^8},$$

dans laquelle il est très-facile de vérifier le facteur numérique, seul inconnu jusqu'à présent. Effectivement, pour $f = 0$, $\Delta = 0$, c'est-à-dire pour un point d'inflexion de la courbe f, A se réduit à $2^8\psi^4$, et $\xi(3t)$ à $\frac{3^3}{2^8}\cdot\left(\frac{2^6\psi^3}{3\Omega^2}\right)^4$. Or l'identité suivante, due à M. Brioschi

$$24^2\Omega^2 = 384\psi^3 - 12\psi S_{\mathcal{A},-f} + 2T_{\mathcal{A},-f}$$

donne, pour $f = \Delta = 0$

$$3\Omega^2 \equiv 2^6\psi^3.$$

On voit donc que l'expression précédente se réduit à $\frac{3^3}{2^6}$ pour $3t = 0$. Eu égard à sa provenance, c'est donc bien $\xi(3t)$.

23. Le calcul direct de l'expression η' pour la forme

$$a_x' = x_1^3 + x_2^3 + x_3^3$$

donne facilement le facteur qui lui est relatif, et l'on a finalement

$$(30) \qquad \eta(3t) = \frac{9R(N_2^3 - N_3^3)(N_3^3 - N_1^3)(N_1^3 - N_2^3)}{2^7\Omega^4} = \frac{B}{\Omega^4}.$$

En prenant les valeurs (29) et (30) de ξ, η, on exprimera au moyen des trois combinants A, B, Ω les équations des lieux des points x_m. Il suffira de faire usage des formules récurrentes (22). Voici, par exemple, les premières équations:

$g_5 = \eta - \xi$, *lieu des points* x_5: $B\Omega^4 - A^3 = 0$,

$g_6 = \xi^{\frac{1}{3}}(\eta - \xi - \eta^2)$, *lieu des points* x_6: $B\Omega^4 - A^3 - B^2 = 0$,

$g_7 = (\eta - \xi)\xi - \eta^3$, *lieu des points* x_7: $(B\Omega^4 - A^3)A^3 - B^3\Omega^4 = 0$,

$g_8 = \eta[(\eta - \xi)(2\xi - \eta) - \xi\eta^2]$,

lieu des points x_8: $(B\Omega^4 - A^3)(2A^3 - B\Omega^4) - A^3B^2 = 0$,

et ainsi de suite.

24. Il existe une autre classe de lieux géométriques dont les équations peuvent se trouver aussi par l'emploi des fonctions ξ, η. Pour développer ce nouvel ordre d'idées, il me faudrait entrer ici dans trop de détails sur les *invariants différentiels*, dont j'ai fondé la théorie dans ma *Thèse**). Je me contente d'énoncer quelques résultats.

Appelons, en modifiant un peu un nom proposé par M. Fouret, *courbe anharmonique* la courbe telle qu'en chacun de ses points la tangente et les trois droites qui unissent ce point à trois poles fixes, fassent un rapport anharmonique constant h. Pour chaque point d'une courbe quelconque C, il existe une courbe anharmonique ayant, en ce point, avec C un contact de l'ordre le plus élevé possible, le 7ème ordre. Disons-la *osculatrice;* et, quand, en un point particulier, l'ordre de ce contact s'élève encore, disons-la *surosculatrice*. Ces définitions posées, on a cette proposition:

Pour le faisceau des cubiques $\varkappa f + \lambda\Delta = 0$, le lieu du point pour lequel la courbe anharmonique osculatrice de la cubique du faisceau qui passe en ce point, a le rapport anharmonique h, est représenté par l'équation:

*) Paris, Gauthiers-Villars, 1878.

$$2^4 \cdot 7^3 (h-2)^2 (h+1)^2 (2h-1)^2 A^3 - 3^2 \cdot 5^2 (h^2-h+1)^3 \Omega^6 = 0.$$

Le lieu du point pour lequel il existe une courbe anharmonique sur-osculatrice, est représenté par

$$8B - \Omega^4 = 0.$$

Le lieu du point pour lequel la cubique du faisceau a un contact du 8ème ordre avec une courbe du 4ème degré et de la 3ème classe, est représenté par

$$[2^4 B^2 + 2^6 B \Omega^4 - 7^2 \Omega^8 + 3 \cdot 2^7 A^3]^2 - 2^4 \Omega^4 (8B - \Omega^4)^3 = 0.$$

Je pourrais multiplier de tels exemples qui sont des cas particuliers de cette proposition générale: *Le lieu du point pour lequel, sur la cubique du faisceau qui y passe, un invariant différentiel s'évanouit, se représente par une équation dont le premier membre est une fonction entière des trois combinants* A^3, B, Ω^4.

Paris, Mai 1879.