

Einige Bemerkungen zu der vorstehenden Arbeit des Herrn A. Speiser¹⁾.

Von

I. Schur in Berlin

Das Problem, die einfachsten algebraischen Zahlkörper zu bestimmen, in denen eine gegebene endliche Gruppe linearer Substitutionen rational darstellbar ist, gehört zu den schwierigsten Aufgaben der Gruppentheorie. In der vorstehenden Arbeit ist es Herrn Speiser gelungen, zu den bis jetzt erledigten Spezialfällen einige neue interessante Fälle hinzuzufügen. Besonders bemerkenswert ist sein Satz über irreduzible Gruppen ungeraden Grades mit reellem Charakter. Die Grundlage seiner Untersuchungen bildet der an und für sich interessante zahlentheoretische Satz, den Herr Speiser im § 1 seiner Arbeit ableitet. Im folgenden will ich zeigen, daß die in meiner Arbeit „Neue Begründung der Theorie der Gruppencharaktere“²⁾ entwickelten Methoden es gestatten, auf kürzerem Wege ein allgemeineres Resultat zu erhalten.

Es bedeute wie bei Herrn Speiser K einen algebraischen Zahlkörper, der in bezug auf den Grundkörper k ein Normalkörper ist. Die Galoissche Gruppe von K relativ zu k sei

$$\mathfrak{G} = G_0 + G_1 + \dots + G_{g-1}.$$

Ist $A = (a_{\kappa\lambda})$ eine Matrix, deren Koeffizienten dem Körper K angehören, so bezeichne man die zu A in bezug auf k konjugiert algebraischen Matrizen mit

$$A^S = (a_{\kappa\lambda}^S) \quad (S = G_0, G_1, \dots, G_{g-1}).$$

Ordnet man den g Elementen S von \mathfrak{G} in K rationale Matrizen M_S des Grades m mit nicht verschwindenden Determinanten zu, für die Gleichungen der Form

¹⁾ Vgl. A. Speiser, Zahlentheoretische Sätze aus der Gruppentheorie. Diese Zeitschrift, 5 (1919), S. 1–6.

²⁾ Sitzungsberichte der Berliner Akademie, Jahrg. 1905, S. 406–432.

$$(1) \quad M_S^T M_T = r_{S,T} M_{S,T} \quad (S, T = G_0, G_1, \dots, G_{g-1})$$

bestehen, so sprechen wir von einer zum Faktorensystem $r_{S,T}$ gehörenden Darstellung $\mathfrak{M} = \{M_S\}$ des Grades m von \mathfrak{G} . Für jede in K rationale Matrix A des Grades m , deren Determinante nicht verschwindet, bilden zugleich mit den M_S auch die Matrizen

$$N_S = A^S M_S A^{-1}$$

eine zum Faktorensystem $r_{S,T}$ gehörende Darstellung \mathfrak{N} , die zu \mathfrak{M} äquivalent heißen möge. Die Darstellung \mathfrak{N} nennen wir *irreduzibel*, wenn sich keine zu ihr äquivalente Darstellung \mathfrak{N} angeben läßt, die in den üblichen Bezeichnungen die Form

$$\mathfrak{N} = \begin{pmatrix} \mathfrak{N}_1 & 0 \\ & \mathfrak{N}_2 \end{pmatrix}$$

hat.

Multipliziert man die Matrizen M_S der Darstellung \mathfrak{M} mit irgend welchen von Null verschiedenen Größen c_S des Körpers K , so bilden die Matrizen $c_S M_S$ eine neue Darstellung, die zum Faktorensystem

$$r'_{S,T} = \frac{c_S^T c_T}{c_{S,T}} r_{S,T}$$

gehört. Zwei derartige Faktorensysteme sind als nicht wesentlich von einander verschieden anzusehen, sie mögen als einander *assoziiert* bezeichnet werden. Gehört zu einem Faktorensystem $r_{S,T}$ eine Darstellung $\{M_S\}$ des Grades m , so lehrt die Betrachtung der Determinanten der Matrizen M_S , daß die m -ten Potenzen der Zahlen $r_{S,T}$ ein dem System $\varrho_{S,T} = 1$ assoziiertes Faktorensystem bilden.

Satz I. Damit sich zu g^2 von Null verschiedenen Größen $r_{S,T}$ des Körpers K eine zu diesem Faktorensystem gehörende Darstellung der Gruppe \mathfrak{G} angeben lasse, ist notwendig und hinreichend, daß sie den g^3 Gleichungen

$$(2) \quad r_{S,T}^U r_{S,T,U} = r_{S,T,U} r_{T,U} \quad (S, T, U = G_0, G_1, \dots, G_{g-1})$$

genügen. In jedem Falle ist das Faktorensystem $r_{S,T}^g$ dem System $\varrho_{S,T} = 1$ assoziiert.

Daß für die Größen $r_{S,T}$ eines Faktorensystems die Gleichungen (2) bestehen müssen, folgt unmittelbar aus den Gleichungen (1) auf Grund des assoziativen Gesetzes. Andere Bedingungen kommen aber nicht hinzu. Denn genügen die (von Null verschiedenen) Größen $r_{S,T}$ von K den Gleichungen (2) und setzt man ε_S gleich 1 oder 0, je nachdem S dem Einheitsselement E von \mathfrak{G} gleich oder von ihm verschieden ist, so bilden, wie man leicht zeigt, die g Matrizen

$$(3) \quad M_S = (r_{P^{-1}, PQ^{-1}S^{-1}}) \quad (P, Q = G_0, G_1, \dots, G_{g-1})$$

des Grades g eine zum Faktorensystem $r_{S,T}$ gehörende Darstellung der Gruppe \mathfrak{G} ³⁾. Hieraus folgt zugleich unsere Behauptung über die Zahlen $r_{S,T}^g$.

Satz II. Sind $\mathfrak{M} = \{M_S\}$ und $\mathfrak{N} = \{N_S\}$ zwei zum Faktorensystem $r_{S,T}$ gehörende Darstellungen der Grade m und $n \geq m$ von \mathfrak{G} , so läßt sich stets eine Matrix A des Ranges m mit m Zeilen und n Spalten angeben, deren Koeffizienten dem Körper K angehören und die den g Gleichungen

$$(4) \quad A^S N_S = M_S A \quad (S = G_0, G_1, \dots, G_{g-1})$$

genügt.

Ist nämlich U eine beliebige in K rationale Matrix mit m Zeilen und n Spalten, und setzt man

$$(5) \quad A = \sum_R M_R^{-1} U^R N_R, \quad (R = G_0, G_1, \dots, G_{g-1})$$

so wird

$$M_S^{-1} A^S N_S = \sum_R M_S^{-1} (M_R^S)^{-1} U^{RS} \cdot r_{RS} N_{RS} = \sum_R M_{RS}^{-1} U^{RS} N_{RS} = A,$$

weil

$$M_R^S M_S^{-1} = r_{RS} M_{RS}, \quad \text{also} \quad r_{RS} M_S^{-1} (M_R^S)^{-1} = M_{RS}^{-1}$$

ist. Wir haben also nur noch zu zeigen, daß die Matrix (5) bei passender Wahl von U den Rang m erhält. Dies ergibt sich folgendermaßen.

Bilden die Zahlen $\omega_1, \omega_2, \dots, \omega_g$ eine Basis des Körpers K in bezug auf den Grundkörper k , so kann $U = \sum \omega_\gamma U_\gamma$ gesetzt werden, wobei die Koeffizienten $u_{\mu\nu}^{(\gamma)}$ der g Matrizen U_γ beliebige Größen des Körpers k bedeuten können. Es wird dann

$$(6) \quad U^R = \sum_{\gamma=1}^g \omega_\gamma^R U_\gamma.$$

Man fasse nun irgendeine Unterdeterminante D des Grades m von A ins Auge. Würde D für alle $u_{\mu\nu}^{(\gamma)}$ von k verschwinden, so müßte das auch zutreffen, wenn die $u_{\mu\nu}^{(\gamma)}$ ganz beliebige Größen bedeuten. Da aber die Determinante der g^2 Zahlen ω_γ^R von Null verschieden ist, so können wir die U_γ so wählen, daß in (6) an Stelle der zu U algebraisch konjugierten Matrizen U^R beliebig vorgeschriebene Matrizen U_R treten. Ist nun B eine ganz beliebige Matrix mit m Zeilen und n Spalten und setzen wir $U_R = M_R B N_R^{-1}$, so tritt in (5) an Stelle von A die Matrix gB . Da

³⁾ Vgl. die analoge Betrachtung in meiner Arbeit, „Über die Darstellung der endlichen Gruppen durch gebrochene lineare Substitutionen“, Journ. für Math., 127 (1904), S. 20–50 [S. 24].

hierin die Unterdeterminante D gewiß nicht identisch Null ist, so kann D auch nicht für alle Matrizen U mit Koeffizienten aus dem Körper K verschwinden.

Nimmt man insbesondere $m = n$ an, so folgt aus dem Satze II, daß zwei Darstellungen, die zu demselben Faktorensystem gehören, stets einander äquivalent sind, wenn nur ihre Grade übereinstimmen. Für das Faktorensystem $r_{s,T} = 1$ liefert dies schon das Resultat des Herrn Speiser.

Ist ferner $m < n$ und genügt die in K rationale Matrix A des Ranges m den Gleichungen (4), so können wir zwei Matrizen P und Q der Grade m und n mit nicht verschwindenden Determinanten bestimmen, deren Koeffizienten dem Körper K angehören, so daß

$$A^* = P A Q^{-1} = (E_m, 0)$$

wird, wobei E_m die Einheitsmatrix des Grades m bedeutet. Setzt man dann

$$P^s M_s P^{-1} = M_s^*, \quad Q^s N_s Q^{-1} = N_s^*,$$

so wird

$$A^* N_s^* = M_s^* A^*.$$

Hieraus folgt aber, daß die Darstellung $\mathfrak{N}^* = \{N_s^*\}$ die Form

$$\mathfrak{N}^* = \begin{pmatrix} \mathfrak{M}^* & 0 \\ \mathfrak{N}_3 & \mathfrak{N}_4 \end{pmatrix}$$

hat. Sind also insbesondere \mathfrak{M} und \mathfrak{N} beide irreduzibel, so muß $m = n$ sein und die beiden Darstellungen sind einander äquivalent. Als Schlußresultat ergibt sich nun ohne weiteres:

Satz III. *Sieht man zwei äquivalente Darstellungen als nicht voneinander verschieden an, so gehört zu jedem Faktorensystem $r_{s,T}$ nur eine irreduzible Darstellung \mathfrak{M} . Der Grad n jeder anderen zu $r_{s,T}$ gehörenden Darstellung \mathfrak{N} ist ein Vielfaches des Grades m von \mathfrak{M} und \mathfrak{N} ist der Darstellung*

$$\begin{pmatrix} \mathfrak{M} & 0 & 0 & \dots \\ 0 & \mathfrak{M} & 0 & \dots \\ 0 & 0 & \mathfrak{M} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

äquivalent, die \mathfrak{M} genau $\frac{n}{m}$ -mal enthält. Dies gilt insbesondere auch für die Darstellung (3), und daher ist m ein Teiler der Ordnung g der Gruppe \mathfrak{G} .