
SULLA TENDENZA DEI SISTEMI MATERIALI A SFUGGIRE AI VINCOLI CON ATTRITO.

Nota di E. DANIELE.

In una Nota, pubblicata in uno degli ultimi fascicoli del « Giornale di Crelle » ¹⁾, il sig. Appell ritorna sopra una proprietà, da lui stesso segnalata tre anni addietro, dei sistemi ad attrito, la quale gli faceva supporre l'esistenza di un principio meccanico tuttora da formulare, che dovrebbe comprendere tutta una classe di fenomeni dovuti all'attrito. Chiamando N e v i valori assoluti della pressione e della velocità relativa di strisciamento fra due corpi solidi posti a contatto e facienti parte di un determinato sistema, e μ il coefficiente d'attrito fra le loro superficie, il lavoro delle forze d'attrito è della forma

$$L = - \sum \mu N v dt,$$

dove la somma va estesa a tutte le coppie di solidi, di cui si compone il sistema, e che si muovono in mutuo contatto. Il sig. Appell dimostra che, sotto certe condizioni, che si trovano realizzate nella maggior parte dei sistemi usuali, L a partire da un certo istante deve andare accostandosi indefinitamente allo zero; e poichè L si compone di una somma di termini tutti negativi, dovranno tendere a zero i singoli termini: siccome poi i coefficienti d'attrito μ si suppongono indipendenti dal tempo, così l'annullarsi di L sarà dovuto al fatto che in alcuni suoi termini si annulla il fattore N ed in altri termini il fattore v . Il ridursi a zero dei fattori dell'una o dell'altra specie rivela nel sistema la tendenza a sottrarsi all'attrito: è questo fenomeno che dovrebbe, secondo l'Appell, essere formulato in un principio generale.

In appoggio alla sua teoria il sig. Appell ha cura di citare alcuni esempi, nei quali effettivamente si constata come il la-

1) Sur la tendance des systèmes matériels à échapper au frottement; Crelles J., B. 133, p. 93.

voro delle forze d'attrito vada tendendo a zero col crescere del tempo. Altri esempi interessanti sono presentati e discussi dal sig. Lecornu in una Nota del « Bull. de la soc. math. de Fr. » ¹⁾). Senonchè in tutti questi esempi si verifica costantemente che i prodotti Nv si annullano in causa dell'annullarsi di v . Sarebbe quindi interessante vedere se non si possano portare degli esempi concreti, sui quali si constati direttamente che nel decorso del movimento può tendere a zero anche la pressione di due solidi a contatto. Questa constatazione anzi è indispensabile farla, se vogliamo assicurarci della fondatezza del principio di cui parla l'Appell. Difatti, se fosse vero che l'annullarsi di L è dovuto esclusivamente all'annullarsi delle v , il dire che L tende a svanire dopo un certo intervallo di tempo non direbbe nulla più di quanto tutti sanno intorno all'attrito: che ha per effetto di modificare i movimenti, in cui entra in giuoco, in modo da diminuire, fino a spegnerle, le velocità alle quali contrasta. In questo enunciato si potrebbe ritenere senz'altro contenuto quel principio: evidentemente è ben diversa la portata che gli dovrebbe spettare secondo l'Appell.

Si comprende a priori come la ricerca di movimenti, nei quali tendano a zero alcune pressioni N , debba riuscire meno facile di quella di movimenti in cui si annullano invece le velocità v . Tuttavia si possono riscontrare, anche su sistemi semplicissimi, dei moti di quella prima specie: questo appunto intendendo provare nelle linee che seguono, dandone un esempio. La natura dei movimenti che incontreremo potrà forse servire di orientamento per formulare nel modo più generale il principio di cui s'è parlato.

1. Vi è un'intera classe di sistemi fra i quali si può cercare utilmente l'esempio che ci interessa. Scriviamo le equazioni del movimento sotto la forma che possiamo ancora chiamare canonica, cioè

$$(1) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + Q_i;$$

1) Sur l'extinction du frottement; Bull. etc., t. 35 (1907), p. 3.

dove Q_i indica la forza d'attrito relativa alla coordinata q_i , espressa naturalmente in funzione delle q e delle p . Si arriva alle equazioni (1), ad es., trasformando al solito modo le equazioni di Lagrange della seconda forma

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} - \frac{\partial T}{\partial q_i} = \frac{\partial U}{\partial q_i} + Q_i.$$

Per semplicità supporrò che nel sistema esista una sola coppia di corpi solidi fra i quali si manifesti attrito; allora a Q_i si potrà dare la forma seguente:

$$Q_i = -\mu |\Phi(q, p)| f_i(q, p),$$

dove μ indica ancora il coefficiente d'attrito, e Φ è la pressione normale fra i due solidi. Riguardo a μ , che è positivo e dipende in generale dalle q , supporremo, per ragioni semplificative, che sia addirittura costante; quanto alla Φ , si sa esprimerla in funzione delle coordinate e delle velocità (e quindi delle p) partendo dalle equazioni di Lagrange nelle quali figurino esplicitamente le condizioni dei vincoli¹).

A descrivere il movimento avremo così i due diversi sistemi di equazioni:

$$(1 a) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} - \mu \Phi f_i$$

$$(1 b) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i} + \mu \Phi f_i.$$

Le (1 a) e (1 b) rappresentano il movimento rispettivamente in quegli intervalli di tempo in cui Φ è positiva oppure negativa: noi per brevità ci riferiremo però sempre al sistema (1) che compendia i due ultimi.

Specializzeremo ora il nostro sistema supponendo che le equazioni

$$(2) \quad \frac{dq_i}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_i}, \quad \frac{dp_i}{dt} = -\frac{\partial H}{\partial q_i},$$

¹) Cfr. la mia nota: *Forze d'attrito ed equaz. del movim. nei sistemi liberi* (n.º 7); N. Cimento, 1905.

che si ottengono dalle (1) ponendovi $\mu = 0$, ammettano una soluzione periodica

$$(3) \quad q_i = q_i(t), \quad p_i = p_i(t)$$

soddisfacente alla relazione

$$\Phi(q, p) = 0;$$

questa soluzione apparterrà pure al sistema (1) qualunque sia μ , e godrà della proprietà caratteristica che nel movimento ad essa corrispondente la pressione, che s'esercita fra i due solidi a contatto, è costantemente nulla.

La presenza di una soluzione come quella ora detta non basta però ancora al nostro scopo: noi vogliamo cioè trovare un movimento nel quale la pressione non debba già mantenersi nulla costantemente, ma invece tenda ad annullarsi col decorrere del tempo. Orbene, ad un moto cosiffatto si arriva colla considerazione delle soluzioni *assintotiche*¹⁾ alla (3). Se difatti le equazioni (1) hanno una soluzione che da un certo istante in poi si discosti dalla (3) di così poco quanto si vuole ne avverrà che a partire da quell'istante la funzione $\Phi(q, p)$ calcolata con quella soluzione differirà da zero di così poco quanto si vuole²⁾. Noi saremo dunque in possesso dell'esempio di cui si parlò dianzi — 1°) quando avremo trovato un sistema che ammetta una soluzione del genere della (3), — 2°) quando avremo riconosciuto che questa soluzione ne ammette di assintotiche.

2. Studieremo ora in dettaglio un sistema che rientra fra quelli descritti nel n. precedente, e che avremo cura di ridurre alla forma più semplice possibile.

Un punto pesante P di massa *uno* si muove in un piano orizzontale Π attratto con legge di Newton da un altro punto M di massa *m* situato *al disopra* di Π e distante da questo dell'unità di misura. Assunto Π come piano xy e la perpendico-

1) Nel senso di Poincaré. Cfr. *Les méthodes nouvelles de la Méc. céleste*; t. I, chap. VII.

2) Occorre appena dire che ammettiamo la continuità di Φ rispetto alle q e alle p .

lare ad esso per M come asse z , le equazioni del movimento di P si scrivono:

$$(4) \quad \begin{cases} x'' = -\frac{m}{r^3} x - \mu \left| g - \frac{m}{r^3} \right| \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \\ y'' = -\frac{m}{r^3} y - \mu \left| g - \frac{m}{r^3} \right| \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}}, \end{cases}$$

essendo $\left| g - \frac{m}{r^3} \right|$ il valore assoluto della pressione normale di P su II, ed avendo posto

$$r = MP = \sqrt{x^2 + y^2 + 1}.$$

Le (4) ammettono, per $\mu = 0$, le soluzioni

$$x = \rho \cos at, \quad y = \rho \sin at$$

con ρ ed a costanti e legate dalla relazione

$$a^2 = \frac{m}{(\rho^2 + 1)^{3/2}};$$

queste soluzioni corrispondono a movimenti del punto P sopra cerchi concentrici di raggio ρ e con velocità angolare costante a .

Fra queste soluzioni una appartiene pure alle (4) complete, e si ottiene prendendo

$$\rho^2 = \rho_0^2 = \left(\frac{m}{g} \right)^{2/3} - 1,$$

e quindi

$$a^2 = a_0^2 = \frac{m}{(\rho_0^2 + 1)^{3/2}};$$

difatti, osservando che $r^2 = \rho^2 + 1$, e chiamando ρ_0 il valore di ρ corrispondente a $\rho = \rho_0$, l'eguaglianza

$$\rho_0^2 = \left(\frac{m}{g} \right)^{2/3} - 1$$

è equivalente a

$$g - \frac{m}{r_0^3} = 0.$$

Si osserverà che, essendo ρ_0 una quantità essenzialmente reale, dovrà essere

$$\left(\frac{m}{g}\right)^{2/3} > 1 ,$$

ossia $m > g$: noi ammetteremo, naturalmente, che la massa del punto attraente soddisfi all'ultima disequaglianza:

Si ha poi per a_0 il valore

$$a_0^3 = \frac{m}{\rho_0^3} = g .$$

Aggiungeremo, per il seguito, che non solo ρ_0 è reale, ma va considerato come positivo, perchè rappresenta il raggio di un determinato cerchio; anche a_0 si può assumere sempre col segno $+$, perchè indica la velocità angolare del punto P nel suo movimento sul cerchio precedente, e noi possiamo invertire a nostro piacimento il senso positivo sugli assi x o y (e quindi il senso positivo delle rotazioni nel piano xy) senza che nulla muti sostanzialmente nel sistema.

Onde poter applicare il metodo di Poincaré per la ricerca delle soluzioni assintotiche, ridurremo le (4) al primo ordine assumendo come funzioni incognite $xyx'y'$: le equazioni del movimento ammettono così la soluzione periodica (col periodo $\frac{2\pi}{a_0}$):

$$(5) \quad x_0 = \rho_0 \cos a_0 t, \quad y_0 = \rho_0 \sin a_0 t, \quad x'_0 = -a_0 \rho_0 \sin a_0 t, \quad y'_0 = a_0 \rho_0 \cos a_0 t.$$

Il metodo di Poincaré esige che si costruiscano in primo luogo le *equazioni alle variazioni*¹⁾ delle (4) (ridotte, s' intende, al 1° ordine) assumendo come soluzione generatrice la (5); queste equazioni, lineari omogenee del 1° ordine, a coef-

ficienti periodici rispetto a t col periodo $\frac{2\pi}{a_0}$, ammettono quelle soluzioni particolari che il Poincaré chiama *fondamentali* (di prima o di seconda specie), nelle quali compaiono certe costanti, i così detti *esponenti caratteristici*. È noto come dalla

1) Poincaré, op. cit. ; t. I, chap. IV.

presenza e dal segno della parte reale di questi esponenti dipenda l'esistenza o meno di soluzioni delle (4), assintotiche alla (5).

3. Noi abbiamo dunque da occuparci delle seguenti equazioni:

$$(6) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dx}{dt} = x', \quad \frac{dy}{dt} = y' \\ \frac{dx'}{dt} = -\frac{m x}{r^3} \mp \mu \left(g - \frac{m}{r^3} \right) \frac{x'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \\ \frac{dy'}{dt} = -\frac{m y}{r^3} \mp \mu \left(g - \frac{m}{r^3} \right) \frac{y'}{\sqrt{x'^2 + y'^2}} \end{array} \right.$$

che danno luogo, quando si ponga

$$x = x_0 + \xi_1, \quad y = y_0 + \xi_2, \quad x' = x'_0 + \xi_3, \quad y' = y'_0 + \xi_4,$$

e si prendano per x_0, y_0, x'_0, y'_0 le espressioni (5), alle equazioni alle variazioni qui appresso:

$$(7) \quad \left\{ \begin{array}{ll} \frac{d\xi_1}{dt} = \xi_3 & \frac{d\xi_2}{dt} = \xi_4 \\ \frac{d\xi_3}{dt} = M_1 \xi_1 + N_1 \xi_2 & \frac{d\xi_4}{dt} = M_2 \xi_1 + N_2 \xi_2 \end{array} \right.$$

$$(8) \quad \left\{ \begin{array}{l} M_1 = \frac{m}{r^5} (3\rho^2 \cos^2 at - r^2) \pm \lambda \sin at \cos at \\ N_1 = \frac{3m\rho^2}{r^5} \sin at \cos at \pm \lambda \sin^2 at \\ M_2 = \frac{3m\rho^2}{r^5} \sin at \cos at \mp \lambda \cos^2 at \\ N_2 = \frac{m}{r^5} (3\rho^2 \sin^2 at - r^2) \mp \lambda \sin at \cos at \end{array} \right.$$

$$(9) \quad \lambda = \frac{3 m \rho \mu}{r^5}$$

Nelle ultime formole s'è tralasciato (e così faremo sempre nel seguito) l'indice zero alle lettere ρ, r, a , non essendovi oramai più pericolo di confusione

Ecco che cosa si può dire intorno alle equazioni (7) in base alla teoria generale. Esse ammettono delle soluzioni particolari della forma

$$\xi_i = e^{\alpha t} \phi_i(t) \quad (i = 1, \dots, 4)$$

dove le α (esponenti caratteristici) sono costanti e le ϕ funzioni periodiche di t (col periodo $\frac{2\pi}{\alpha}$); queste soluzioni (fondamentali di prima specie) sono esattamente quattro se le α sono tutte distinte. Qualora invece alcuni esponenti α fossero eguali, accanto a soluzioni del tipo precedente se ne avrebbero delle altre (fondamentali di seconda specie) del tipo

$$\xi_i = e^{\alpha t} (t^k \phi_i + t^{k-1} \psi_i + \dots + \chi_i),$$

dove le ψ, \dots, χ sono funzioni periodiche come le ϕ , e $k+1$ indica il numero degli esponenti α eguali tra loro. Di questi esponenti poi uno è certamente eguale a zero nel nostro caso, perchè le (6) hanno i coefficienti indipendenti dal tempo; in conseguenza si avrà una soluzione delle (7) avente la forma

$$\xi_i = \text{funz. period. di } t.$$

Affinchè esistano soluzioni assintotiche alla (5) occorre e basta che fra gli esponenti α ve ne sia uno almeno colla parte reale negativa ¹⁾: noi dobbiamo dunque ricercare la natura dei tre α che ci sono tuttora incogniti.

4. Per calcolare gli esponenti α ridurremo le (7) ad un'unica equazione lineare omogenea del 4.^o ordine in una sola funzione incognita, seguendo un procedimento del sig. Sauvage ²⁾ che è indicato dal sig. L. Schlesinger ³⁾, come il più semplice per ricondurre lo studio analitico dei sistemi di equazioni lineari del 1.^o ordine a quello di una sola equazione omogenea di ordine n . Richiamerò il procedimento di Sauvage.

1) S'intende che si farà tendere t ad ∞ per valori positivi.

2) Ann. de la Fac. de Toulouse, 1895.

3) Beiträge zur Th. der Systeme linearer homogener Diff. Gleich.; Crelles, J. B. 128, p. 263. Cfr. pure le recenti "Vorl. ü. lin. Diff. Gleich. "; Leipzig, Teubner, 1908; p. 176.

Siano date le n equazioni

$$(10) \quad \frac{dx_i}{dt} = a_{i1}x_1 + \dots + a_{in}x_n \quad (i=1, \dots, n),$$

ove le a_{ik} sono funzioni assegnate di t ; si operi la sostituzione

$$(11) \quad y_h = s_{h1}x_1 + \dots + s_{hn}x_n \quad (h=1, \dots, n)$$

ponendo fra le s le relazioni

$$(11') \quad s_{h+1,k} = \frac{ds_{hk}}{dt} + \sum_{i=1}^n s_{hi}a_{ik}, \quad (h=1, \dots, n-1; k=1, \dots, n).$$

Allora le (10) si mutano in queste altre:

$$(12) \quad \left\{ \begin{array}{l} \frac{dy_1}{dt} = y_2, \dots, \quad \frac{dy_{n-1}}{dt} = y_n \\ \frac{dy_n}{dt} = b_0y_1 + b_1y_2 + \dots + b_{n-1}y_n, \end{array} \right.$$

ove le b sono funzioni di t composte razionalmente mediante le a , le s e le derivate delle s . Dal sistema (12) si eliminano subito $y_2 \dots y_n$, giungendo all'unica equazione in y_1 :

$$(12') \quad \frac{d^n y_1}{dt^n} = b_{n-1} \frac{d^{n-1} y_1}{dt^{n-1}} + \dots + b_0 y_1.$$

Le (11') stabiliscono $n(n-1)$ relazioni fra le s , che sono in numero di n^2 , per modo che si potrà disporre delle s con una certa arbitrarietà: noi cominceremo a supporre che il loro determinante non sia identicamente nullo. Allora da ogni soluzione Y della (12') si risale ad una soluzione delle (10) osservando che Y insieme colle sue prime $n-1$ derivate costituiscono una soluzione delle (12); dopo ciò non vi sarà che da fare la risoluzione delle (11) rispetto alle x .

Dalle (11') si vede ancora che possiamo scegliere a nostro arbitrio le $s_{11} s_{12} \dots s_{1n}$: fissate queste s , le rimanenti risultano del tutto determinate.

5. Venendo al nostro problema, eseguiremo sulle ξ la sostituzione

$$(13) \quad \eta_i = s_{i1}\xi_1 + s_{i2}\xi_2 + s_{i3}\xi_3 + s_{i4}\xi_4, \quad (i=1, \dots, 4),$$

scrivendo fra le s le relazioni (11'), e facendo

$$(14) \quad s_{11} = \frac{r^8}{m} = \frac{r^2}{a^2}, \quad s_{12} = s_{13} = s_{14} = 0 ;$$

le rimanenti s diventano allora

$$\begin{aligned} s_{21} &= 0, & s_{22} &= 0, & s_{23} &= s_{11}, & s_{24} &= 0 \\ s_{31} &= s_{11} M_1, & s_{32} &= s_{11} N_1, & s_{33} &= 0, & s_{34} &= 0 \\ s_{41} &= s_{11} M_1', & s_{42} &= s_{11} N_1', & s_{43} &= s_{11} M_1, & s_{44} &= s_{11} N_1. \end{aligned}$$

La sostituzione (13) è evidentemente invertibile. Non resta più che effettuare i calcoli per giungere all'equazione del 4.^o ordine in η_1 :

$$\begin{aligned} (15) \quad & \frac{d^4 \eta_1}{dt^4} - 2 \frac{N_1'}{N_1} \frac{d^3 \eta_1}{dt^3} - \left\{ \frac{N_1''}{N_1} + M_1 + N_2 - 2 \left(\frac{N_1'}{N_1} \right)^2 \right\} \frac{d^2 \eta_1}{dt^2} + \\ & + \frac{2(M_1 N_1' - M_1' N_1)}{N_1} \frac{d \eta_1}{dt} + \left(\frac{M_1 N_1'' - M_1'' N_1}{N_1} + \right. \\ & \left. + M_1 N_2 - M_2 N_1 - \frac{2 N_1'}{N_1} \frac{M_1 N_1' - M_1' N_1}{N_1} \right) \eta_1 = 0, \end{aligned}$$

la quale è a coefficienti periodici, perchè questi coefficienti sono delle combinazioni razionali di quelli delle (7), che sono periodici, nonchè delle loro derivate prime e seconde. Ma c'è di più: i coefficienti della (15) sono funzioni razionali di $\sin at$ e $\cos at$. Possiamo allora trasformare la (15), mediante la sostituzione

$$\theta = e^{iat},$$

in un'equazione a coefficienti razionali in θ , che viene ad essere della forma

$$(16) \quad \theta^4 \frac{d^4 \eta_1}{d\theta^4} + P_3 \theta^3 \frac{d^3 \eta_1}{d\theta^3} + P_2 \theta^2 \frac{d^2 \eta_1}{d\theta^2} + P_1 \theta \frac{d \eta_1}{d\theta} + P_0 \eta_1 = 0 :$$

le P_i sono funzioni razionali di θ che *rimangono finite per* $\theta = 0$ ¹⁾. Il valore *zero* di θ è quindi per la (16) un punto singolare, nel quale però tutte le soluzioni dell'equazione

1) Tralascio di scriverne le espressioni, che riescono piuttosto lunghe; il loro calcolo però è facilissimo.

sono *determinate*. Anzi, scrivendo distesamente le espressioni delle P_i si constatarebbe che la (16) ha le sue soluzioni determinate in tutto il piano della ϑ , e quindi è della *classe di Fuchs*. A noi interessa in modo speciale il punto $\vartheta = 0$, nel quale (come, del resto, negli altri punti singolari) si sanno calcolare, con procedimenti puramente algebrici, i coefficienti degli sviluppi in serie delle soluzioni fondamentali canoniche, nonché gli esponenti a cui *appartengono* le singole soluzioni. Questi esponenti forniscono subito gli esponenti caratteristici delle (7).

Difatti noi sappiamo che le soluzioni fondamentali canoniche della (16) relative a $\vartheta = 0$ sono dell'una o dell'altra delle due forme.

$$(17) \quad \eta = \theta^\sigma P(\vartheta) \text{ opp. } \eta = \theta^\sigma (P_0(\vartheta) + P_1(\vartheta) \lg \vartheta + \dots + P_m(\vartheta) \lg^m \vartheta),$$

ove le P, P_0, \dots, P_m indicano delle serie di potenze intere e positive di ϑ tali che $P(0) \neq 0$ e $P_0(0), \dots, P_m(0)$ non sono tutte nulle; ora, per il modo come la (16) è stata ottenuta dalle (7), ai due tipi precedenti di soluzioni della (16) corrispondono per le (7) soluzioni delle forme seguenti:

$$\xi_h = e^{ia\sigma't} \psi_h(t) \text{ opp. } \xi_h = e^{ia\sigma't} (\psi_{h0} + t \psi_{h1} + \dots + t^m \psi_{hm}),$$

dove le ψ sono funzioni periodiche di t col periodo $\frac{2\pi}{a}$, e σ' differisce da σ tutt'al più per un intero additivo. Ma queste non sono altro che le soluzioni fondamentali delle (7), di prima o di seconda specie: la ricerca di queste soluzioni fondamentali si riduce dunque alla ricerca delle soluzioni fondamentali canoniche della (16) relative al punto singolare $\vartheta = 0$. In particolare noi vediamo in quale relazione stiano gli esponenti caratteristici delle (7) cogli esponenti σ relativi alla (16): i primi si ottengono da questi ultimi aggiungendovi un conveniente intero e moltiplicando poi per ia .

6. Gli esponenti σ che figurano nelle (17), cioè gli esponenti a cui appartengono le soluzioni fondamentali canoniche della (16) relative a $\vartheta = 0$, sono le radici di un'equazione di 4° grado, l'*equazione determinante* di Frobenius, che si scrive:

$$(18) \quad \sigma(\sigma-1)(\sigma-2)(\sigma-3) + P_3(0)\sigma(\sigma-1)(\sigma-2) + \\ + P_2(0)\sigma(\sigma-1) + P_1(0)\sigma + P_0(0) = 0.$$

Si tratterà quindi di calcolare i coefficienti $P_i(0)$, e di esaminare poi la realtà delle radici della (18). Ora si ha:

$$\begin{aligned} P_3(0) &= 10 a^* \\ P_2(0) &= \frac{3 a^*}{r^2} (8r^2 - 1) \\ P_1(0) &= \frac{a^*}{r^2} (12r^2 - 9 + i\nu) \\ P_0(0) &= \frac{a^*}{r^2} (-3 + i\nu), \end{aligned} \quad \nu = \pm 2 s_{11} \lambda$$

e la (18), ordinata secondo le potenze di σ , si scrive:

$$(19) \quad r^2 \sigma^4 + 4r^2 \sigma^3 + (5r^2 - 3) \sigma^2 + (2r^2 - 6 + i\nu) \sigma - 3 + i\nu = 0.$$

Poichè uno degli esponenti caratteristici α è nullo, come s'è riconosciuto al n. 3, la (19) deve avere una radice intera: si vede difatti che è soddisfatta da $\sigma = -1$. Dividendo allora la (19) per $\sigma + 1$, e facendo la sostituzione $\sigma = \tau - 1$, si trova l'equazione del 3° grado in τ

$$\tau^3 - \left(1 + \frac{3}{r^2}\right) \tau + \frac{i\nu}{r^2} = 0,$$

colle radici

$$\tau_1 = -2iq, \quad \tau_2 = p + iq, \quad \tau_3 = -p + iq,$$

dove s'è posto:

$$\begin{aligned} p &= \frac{\sqrt[3]{3}}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{\nu}{2r^2} + \sqrt{Q}} + \sqrt[3]{\frac{\nu}{2r^2} + \sqrt{Q}} \right) \\ q &= \frac{1}{2} \left(\sqrt[3]{-\frac{\nu}{2r^2} + \sqrt{Q}} - \sqrt[3]{\frac{\nu}{2r^2} + \sqrt{Q}} \right) \\ Q &= \frac{1}{27} + \frac{1}{3r^2} + \left(1 + \frac{\nu^2}{4}\right) \frac{1}{r^6} + \frac{1}{r^6}: \end{aligned}$$

s'intende che i valori delle radici quadrate e cubiche, che figurano in queste formole, debbono essere quelli aritmetici. Noteremo poi che, per essere $Q > 0$, sono reali p e q .

7. Possiamo ora scrivere i valori dei quattro esponenti caratteristici α corrispondenti alle soluzioni fondamentali del sistema (7); abbiamo cioè, ricordando che è $\alpha = +\sqrt{g}$:

$$\alpha_0 = 0, \quad \alpha_1 = 2q\sqrt{g}, \quad \alpha_2 = (-q + ip)\sqrt{g}, \quad \alpha_3 = (-q - ip)\sqrt{g}.$$

Lasciando da parte α_0 , che non ci dà soluzioni assintotiche alla soluzione (5), rimane da esaminare il segno della parte reale di $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3$, vale a dire il segno di q . Tenendo presente che s'è posto $\nu = \pm 2s_{11}\lambda$, ossia, per la (9) e per la prima (14),

$$\nu = \pm 6m\rho\mu,$$

si vede che q è negativo o positivo secondochè nella formola precedente si prende il $+$ o il $-$ nel secondo membro. Ma il doppio segno in questa formola è in corrispondenza col doppio segno nei secondi membri delle (6), ed in queste vanno scelti i segni superiori od inferiori secondochè nella posizione attuale del punto P si ha

$$g - \frac{m}{\rho^3} > 0 \quad \text{opp.} \quad < 0,$$

vale a dire secondochè il punto P è esterno o interno al cerchio di raggio ρ_0 , traiettoria del punto P nel movimento (5).

Ne segue che ad α_1 corrisponde una semplice infinità di soluzioni assintotiche alla (5), nelle quali le traiettorie del punto P tendono a confondersi col cerchio (ρ_0) *dall'esterno*; α_2 e α_3 ce ne forniscono invece una doppia infinità, ed in queste soluzioni le traiettorie stanno (a partire da un certo valore del tempo) *nell'interno* del cerchio (ρ_0). L'esistenza di queste soluzioni assintotiche è così provata per ogni valore del coefficiente d'attrito μ , escluso però il valore $\mu = 0$, nel qual caso si avrebbe $g = 0$, e quindi nessuno degli esponenti caratteristici α avrebbe la parte reale negativa.

Ciò che distingue nettamente il moto circolare (5) ed i suoi assintotici da tutti gli altri di cui è capace il punto P, è il fatto che i primi non accennano mai a spegnersi per quanto cresca il tempo; anzi a partire da un certo istante tendono a raggiungere uno stato uniforme nel quale perdurano indefinitamente. Gli altri moti invece vengono continuamente rallentati dall'attrito, finchè cessano dopo un tempo finito.