Zur Theorie der zweifach unendlichen Zahlenfolgen.*)

Von

ALFRED PRINGSHEIM in München.

In einer früher publicirten Arbeit über „*Elementare Theorie der unendlichen Doppelreihen*"**) habe ich einige Hauptsätze über die Grenzwerthe *zweifach unendlicher Zahlenfolgen* zusammengestellt, soweit sie mir für den damaligen Zweck erforderlich schienen. Nun scheint mir aber die, meines Wissens, in der Literatur sonst nicht ausdrücklich behandelte Theorie dieser Zahlenfolgen eine weit über die erwähnte specielle Anwendung hinausreichende, principielle Bedeutung zu besitzen und darf insbesondere für die gesammte Lehre von den Functionen mehrerer Variablen als fundamental gelten: bildet doch die Zurückführung sogenannter *stetiger* Grenzübergänge auf Grenzwerthe *abzählbarer* Zahlenmengen eine der wesentlichsten Grundlagen für die moderne Verschärfung functionentheoretischer Definitionen und Beweise. Aus diesem Grunde dürfte vielleicht die folgende ausführlichere Darstellung gewisser Grenzwerth-Eigenschaften der zweifach-unendlichen Zahlenfolgen einiges Interesse beanspruchen, zumal dieselbe verschiedene nicht unerhebliche Verallgemeinerungen und Vervollständigungen der früher mitgetheilten Hauptsätze enthält. Auch möchte ich auf die hierbei sich ergebende methodisch consequente und

*) Der folgende Aufsatz ist im wesentlichen einem Abschnitte meiner für den Druck bestimmten Vorlesungen über unendliche Reihen und analytische Functionen entnommen. Da es mir in Folge von Berufsgeschäften und anderen nothwendigen Arbeiten bisher nicht möglich war, das betreffende Buch druckfertig zu machen, und ich andererseits von Herrn F. London erfahren habe, dass er, durch meine unten citirte Arbeit über *Doppelreihen* angeregt, eine Abhandlung über den vorliegenden Gegenstand bei der Redaction der Mathematischen Annalen eingereicht habe, so bin ich der letzteren zu Danke verpflichtet, dass sie auch mir Gelegenheit giebt, die folgenden, in der Hauptsache aus dem Jahre 1896 stammenden Untersuchungen an dieser Stelle zu veröffentlichen. Im übrigen möchte ich nur noch ausdrücklich hervorheben, dass die Arbeit des Herrn London, trotz ihres Zusammenhanges mit meinem oben erwähnten *früheren* Aufsatze, völlig *unabhängig* von den *hier* mitgetheilten *allgemeineren* Untersuchungen entstanden ist.

**) Münch. Sitz.-Ber. Bd. 27 (1897), p. 101.

didaktisch äusserst zweckmässige*) Einführungsart der *gleichmässigen* und *ungleichmässigen Convergenz* einigen Werth legen. Der fragliche Fundamental-Begriff erscheint hier thatsächlich in seiner einfachsten *Grundform*, und der Zusammenhang, in welchem er auftritt, führt zugleich zu einer, soviel ich weiss, bisher nicht bemerkten nützlichen *Erweiterung*, die sich auch für gewisse functionentheoretische Untersuchungen als fruchtbar erweisen dürfte. Auf Grund dieses *erweiterten* Begriffes lassen sich insbesondere die *nothwendigen und hinreichenden* Bedingungen für die *Existenz* von $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ bei vorausgesetzter Existenz von $\lim\limits_{\nu=\infty}\overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ oder $\lim\limits_{\mu=\infty}\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ **) in vollkommen präciser Weise formuliren.

§ 1.

Grenzwerthe convergenter und eigentlich divergenter Doppelfolgen. — Monotone Doppelfolgen.

1. Als *Doppelfolge* werde im folgenden jede zweifach unendliche Folge *reeller* Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$ ($\mu = 0, 1, 2, \cdots \nu = 0, 1, 2, \cdots$) bezeichnet. Wir denken uns dieselbe allemal in der Form des Schema's;

$$(1)\qquad \left\{\begin{array}{llll} a_0^{(0)} & a_1^{(0)} \cdots & a_\mu^{(0)} & \cdots \\ a_0^{(1)} & a_1^{(1)} \cdots & a_\mu^{(1)} & \cdots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \\ a_0^{(\nu)} & a_1^{(\nu)} \cdots & a_\mu^{(\nu)} & \cdots \\ \cdot & \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \end{array}\right.$$

angeordnet; dabei markirt also der *obere* Index ν die *Zeile*, der *untere* Index μ die *Colonne*, welcher der Term $a_\mu^{(\nu)}$ angehört. Wir sagen, die *Doppelfolge* $a_\mu^{(\nu)}$ sei *convergent* und besitze für $\lim \mu = \infty$, $\lim \nu = \infty$ (ausführlicher: wenn μ, ν *unabhängig* von einander und *gleichzeitig* ins Unendliche wachsen) den *endlichen Grenzwerth* A, in Zeichen:

$$(2)\qquad \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = A,$$

wenn zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen n_1, n_2 existiren, sodass:

$$(2\text{a})\qquad |a_\mu^{(\nu)} - A| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \mu \geqq n_1,\ \nu \geqq n_2.\text{***})$$

*) Mit Hülfe sehr einfacher Zahlen-Schemata (vgl. § 3, Beisp. 1) und 3)) kann man diesen, bei der sonst üblichen Einführungsart dem *Anfänger* meist äusserst schwierig erscheinenden und dennoch, nach meinem Dafürhalten, selbst in *Elementar*-Vorlesungen kaum mehr zu entbehrenden Begriff, förmlich *ad oculos* demonstriren.

**) Ueber den Sinn dieser Bezeichnungsweise vgl. p. 302, Fussnote.

***) Ich gebe der Formulirung: $|a_\mu^{(\nu)} - A| \leqq \varepsilon$ vor der zumeist üblichen: $|a_\mu^{(\nu)} - A| < \varepsilon$ den Vorzug, weil sie bei der Willkürlichkeit von ε schliesslich genau

Diese Bedingung lässt sich ohne Beschränkung der Allgemeinheit auch durch die folgende ersetzen:

(2b) $$\left| a_\mu^{(\nu)} - A \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\mu \\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n.$$

Denn die letztere ist einerseits als specieller Fall in (2a) enthalten, nämlich wenn $n_1 = n_2$; andererseits kann man, wenn $n_1 \gtrless n_2$, die Bedingung (2a) in (2b) überführen, indem es freisteht, die *kleinere* der beiden Zahlen n_1, n_2 durch die grössere zu ersetzen.

Die Doppelfolge heisst *eigentlich divergent*, ihr *Grenzwerth* $+\infty$ bezw.: $-\infty$, in Zeichen:

(3) $$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bezw.:} \quad = -\infty,$$

wenn zu jedem (beliebig grossen) $G > 0$ zwei natürliche Zahlen n_1, n_2 existiren, sodass

(3a) $$a_\mu^{(\nu)} > G \text{ bezw. } < -G \quad \text{für:} \quad \mu \geqq n_1, \; \nu \geqq n_2.$$

Dabei ist es wiederum gestattet, diese Bedingung durch die folgende zu ersetzen:

(3b) $$a_\mu^{(\nu)} > G \text{ bezw. } < -G \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\mu \\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n.$$

Die beiden durch Gl. (2) und (3) charakterisirten Fälle der *Convergenz* und *eigentlichen Divergenz* sollen gelegentlich auch durch den Ausdruck zusammengefasst werden, dass der *Limes der Doppelfolge* oder auch der *Doppel-Limes* $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *existire.*

2. Die *nothwendige und hinreichende* Bedingung für die *Convergenz* der Doppelfolge kann auch so formulirt werden, dass sie nur die $a_\mu^{(\nu)}$, nicht aber den betreffenden Grenzwerth A enthält. Man kann ihr jede der folgenden drei Formen geben, welche trotz ihrer äusseren Verschiedenheit dieselbe Tragweite besitzen:

(4a) $$\left| a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left\{\begin{matrix}\mu \geqq n_1 & \varrho = 0, 1, 2, \cdots \\ \nu \geqq n_2 & \sigma = 0, 1, 2, \cdots\end{matrix}\right.$$

(4b) $$\left| a_{\nu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\nu^{(\nu)} \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left\{ \nu \geqq n \right. \quad \begin{matrix}\varrho = 0, 1, 2, \cdots \\ \sigma = 0, 1, 2, \cdots\end{matrix}$$

(4c) $$\left| a_\mu^{(\nu)} - a_n^{(n)} \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\mu \\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n.$$

Man erkennt zunächst, dass (4b) und (4c) durch successive Specialisirung aus (4a) hervorgehen. Es genügt daher, nachzuweisen, dass für die *Con-*

dieselbe Tragweite besitzt, wie diese letztere, während andererseits ihre (aus irgendwelchen Voraussetzungen zu folgernde) *Existenz* gewöhnlich etwas *kürzer* erwiesen werden kann, als diejenige von: $\left| a_\mu^{(\nu)} - A \right| < \varepsilon$.

vergenz der Doppelfolge (4a) eine *nothwendige*, (4c) eine *hinreichende* Bedingung darstellt.

Ist nun zunächst die Folge *convergent*, A ihr Grenzwerth, so kann man nach (2a) n_1, n_2 so fixiren, dass:

$$\left|a_\mu^{(\nu)} - A\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:} \quad \mu \geqq n_1,\ \nu \geqq n_2$$

und somit auch:

$$\left|a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - A\right| \leqq \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:} \quad \begin{cases} \mu \geqq n_1 & \varrho = 0, 1, 2, \cdots \\ \nu \geqq n_2 & \sigma = 0, 1, 2, \cdots, \end{cases}$$

sodass durch Combination dieser beiden Ungleichungen unmittelbar die Bedingung (4a) (und somit auch (4b), (4c)) als *nothwendig* für die *Convergenz* resultirt.

Besteht andererseits die Bedingung (4c), so kann man zunächst m so fixiren, dass:

$$\left|a_\mu^{(\nu)} - a_m^{(m)}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq m, \tag{5}$$

und man hat daher speciell für $\mu = \nu$:

$$\left|a_\nu^{(\nu)} - a_m^{(m)}\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq m. \tag{6}$$

Die letztere Ungleichung besagt aber, dass die *einfach unendliche* Folge $\left(a_\nu^{(\nu)}\right)$ *convergent* und somit eine *bestimmte Zahl*

$$A = \lim_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)}$$

existirt. Man kann daher ein n so fixiren, dass:

$$\left|a_\nu^{(\nu)} - A\right| \leqq \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \tag{7}$$

wobei es von vornherein freisteht $n \geqq m$ anzunehmen. Sodann wird aber

$$a_\mu^{(\nu)} - A = a_\mu^{(\nu)} - a_m^{(m)} + \left(a_m^{(m)} - a_n^{(n)}\right) + \left(a_n^{(n)} - A\right),$$

also:

$$\left|a_\mu^{(\nu)} - A\right| \leqq \left|a_\mu^{(\nu)} - a_m^{(m)}\right| + \left|a_n^{(n)} - a_m^{(m)}\right| + \left|a_n^{(n)} - A\right|,$$

d. h. schliesslich mit Benützung von Ungl. (5), (6), (7):

$$\left|a_\mu^{(\nu)} - A\right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n,$$

woraus nach (2b) die *Convergenz* der Doppelfolge gegen den Grenzwerth $A \left(= \lim_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)}\right)$ resultirt.

3. Die Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ heisst *monoton* und zwar *niemals ab-* bezw. *niemals zunehmend*, wenn *durchweg*:

$$a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \geqq 0 \quad \text{bezw.} \quad a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \leqq 0 \tag{8}$$

$(\varrho = 0, 1, 2, \cdots, \sigma = 0, 1, 2, \cdots)$. Für solche Doppelfolgen gilt zunächst der Satz:

Bleiben die $\left| a_\mu^{(\nu)} \right|$ *unter einer Zahl* g, *so ist die monotone Doppelfolge* $\left| a_\mu^{(\nu)} \right|$ *allemal convergent.*

Beweis*). Es sei etwa die fragliche Folge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ eine *niemals abnehmende,* sodass also die *erste* der Ungleichungen (8) als gültig vorausgesetzt wird. Angenommen nun, die Folge sei *nicht convergent,* so müsste mit Rücksicht auf die Convergenzbedingung (4a), *wie gross* auch μ, ν angenommen werden, zu dem Term $a_\mu^{(\nu)}$ ein anderer $a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)}$ existiren, sodass

$$\left| a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} \right| = a_{\mu+\varrho}^{(\nu+\sigma)} - a_\mu^{(\nu)} > \varepsilon,$$

wo ε eine möglicherweise sehr kleine, aber *bestimmte* positive Zahl bedeutet. Man könnte darnach aus der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ eine *unbegrenzt fortsetzbare* Folge von Termen:

$$a_m^{(n)},\ a_{m+\varrho_1}^{(n+\sigma_1)}, \cdots a_{m+\varrho_\varkappa}^{(n+\sigma_\varkappa)}, \cdots$$

herausheben, sodass:

$$\begin{aligned} a_{m+\varrho_1}^{(n+\sigma_1)} &- a_m^{(n)} &&> \varepsilon, \\ a_{m+\varrho_2}^{(n+\sigma_2)} &- a_{m+\varrho_1}^{(n+\sigma_1)} &&> \varepsilon, \\ &\cdots\cdots\cdots \\ a_{m+\varrho_\varkappa}^{(n+\sigma_\varkappa)} &- a_{m+\varrho_{\varkappa-1}}^{(n+\sigma_{\varkappa-1})} &&> \varepsilon \end{aligned}$$

und daher für *jedes noch so grosse* n:

$$a_{m+\varrho_\varkappa}^{(n+\sigma_\varkappa)} - a_m^{(n)} > \varkappa\varepsilon \quad \text{d. h.} \quad a_{m+\varrho_\varkappa}^{(n+\sigma_\varkappa)} > a_m^{(n)} + \varkappa\varepsilon,$$

was der Voraussetzung $\left| a_\mu^{(\nu)} \right| < g$ widersprechen wird. Somit muss die *niemals abnehmende* Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ unter der gemachten Voraussetzung *convergiren.*

Das analoge Resultat ergiebt sich sodann ohne weiteres für eine *niemals zunehmende* Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$, wenn man beachtet, dass in diesem Falle die Doppelfolge $\left(-a_\mu^{(\nu)}\right)$ eine *niemals abnehmende* und

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} \left(-a_\mu^{(\nu)}\right) = -\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$$

ist.

4. Bleiben die $\left| a_\mu^{(\nu)} \right|$ einer monotonen Doppelfolge *nicht* unter einer festen Grenze, giebt es also, *wie gross* man auch $G > 0$ annehmen möge, stets Terme $a_\mu^{(\nu)}$, für welche $\left| a_\mu^{(\nu)} \right| > G$, so existiren nur die folgenden beiden Möglichkeiten:

*) Vgl. auch p. 301, Fussnote.

Entweder die Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ ist eine *niemals abnehmende.* Dann müssen die $a_\mu^{(\nu)}$, wenn ihr absoluter Betrag schliesslich jedes beliebige G übersteigen soll, für hinlänglich grosse μ, ν durchweg *positiv* werden, sodass also nicht nur $\left|a_\mu^{(\nu)}\right| > G$, sondern $a_\mu^{(\nu)} > G$ wird, d. h. man hat in diesem Falle:

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty.$$

Oder die Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ ist eine *niemals zunehmende.* Dann bilden wiederum die Terme $-a_\mu^{(\nu)}$ eine *niemals abnehmende* Folge, für welche $\left|-a_\mu^{(\nu)}\right|$ beliebig gross wird. Man hat daher zunächst:

$$\lim_{\mu,\nu=\infty}\left(-a_\mu^{(\nu)}\right) = +\infty$$

und daher schliesslich:

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\infty. -$$

Da hiernach für *monotone* Doppelfolgen $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ als *endlich* oder *unendlich gross* stets *existirt* und somit auch durch $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)}$ ersetzt werden kann, so gilt auch der folgende Satz:

> *Eine monotone Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ ist entweder convergent oder eigentlich divergent; sie convergirt oder divergirt, je nachdem $\lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)}$ endlich oder unendlich ausfällt und man hat:* $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)}$.

§ 2.

Uneigentlich divergente Doppelfolgen. — Unterer und oberer Limes (Unbestimmtheitsgrenzen) der Doppelfolge.

1. Jede Doppelfolge, welche *weder convergirt, noch eigentlich divergirt*, soll als *uneigentlich divergent* bezeichnet werden. Zur genaueren Charakterisirung des Verhaltens, welches den Termen $a_\mu^{(\nu)}$ einer solchen Doppelfolge für $\lim \mu = \infty$, $\lim \nu = \infty$ zukommt, stellen wir die folgende Betrachtung an:

Es sei $a_\mu^{(\nu)}$ ($\mu = 0, 1, 2, \cdots$, $\nu = 0, 1, 2, \cdots$) das allgemeine Glied einer *beliebigen* (d. h. eventuell auch convergenten oder eigentlich divergenten) Doppelfolge. Die Gesammtheit der in dieser Doppelfolge enthaltenen Terme werde (mit Rücksicht auf das *Anfangs*glied $a_0^{(0)}$) mit $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_0^0$ bezeichnet; und analog bezeichne $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_m^n$ die Gesammtheit derjenigen Terme, welche nach Weglassung der ersten m Colonnen und n Zeilen übrig bleiben, also:

$$\begin{array}{cccccc} a_m^{(n)} & a_{m+1}^{(n)} & \cdots & a_{m+\varrho}^{(n)} & \cdots \\ a_m^{(n+1)} & a_{m+1}^{(n+1)} & \cdots & a_{m+\varrho}^{(n+1)} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ a_m^{(n+\sigma)} & a_{m+1}^{(n+\sigma)} & \cdots & a_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} & \cdots \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \end{array}$$

Diese Terme $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_m^n$ besitzen allemal eine *untere* Grenze $\underline{A}_m^{(n)}$ und eine *obere* Grenze $\overline{A}_m^{(n)}$, wo $\underline{A}_m^{(n)}$, $\overline{A}_m^{(n)}$ entweder *bestimmte Zahlen* vorstellen oder auch $\underline{A}_m^{(n)} = -\infty$, $\overline{A}_m^{(n)} = +\infty$ sein kann. Dabei hat man offenbar stets:

$$\underline{A}_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} \geqq \underline{A}_m^{(n)}, \quad \overline{A}_{m+\varrho}^{(n+\sigma)} \leqq \overline{A}_m^{(n)} \qquad \begin{pmatrix} \varrho = 0, 1, 2, \cdots \\ \sigma = 0, 1, 2, \cdots \end{pmatrix} \tag{9}$$

$$\underline{A}_m^{(n)} \leqq \overline{A}_m^{(n)}. \tag{10}$$

Von den beiden einfachen Zahlenfolgen:

$$\underline{A}_0^{(0)}, \underline{A}_1^{(1)}, \cdots \underline{A}_\nu^{(\nu)}, \cdots \tag{11a}$$

$$\overline{A}_0^{(0)}, \overline{A}_1^{(1)}, \cdots \overline{A}_\nu^{(\nu)}, \cdots \tag{11b}$$

ist also die erste *niemals abnehmend*, die zweite *niemals zunehmend*. Dabei kann der besondere Fall eintreten, dass die Folge (11a) aus lauter Termen $-\infty$ besteht*), sodass also auch $\lim\limits_{\nu=\infty} \underline{A}_\nu^{(\nu)} = -\infty$. In jedem anderen Falle muss die Folge (11a) als *niemals abnehmend convergiren* oder *nach* $+\infty$ *divergiren*. Man kann also schliesslich setzen:

$$\lim_{\nu=\infty} \underline{A}_\nu^{(\nu)} = \underline{A}, \tag{12a}$$

wo $\underline{A}$ *eine bestimmte Zahl* oder *ein* ∞ *mit bestimmtem Vorzeichen* vorstellt.

Analog kann die Folge (11b) aus lauter Termen $+\infty$ bestehen, in welchem Falle dann auch $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{A}_\nu^{(\nu)} = +\infty$ wird. Andernfalls muss sie als *niemals zunehmend convergiren* oder *nach* $-\infty$ *divergiren*, und man hat schliesslich

$$\lim_{\nu=\infty} \overline{A}_\nu^{(\nu)} = \overline{A}, \tag{12b}$$

---

*) Dieser Fall tritt ein, wenn die Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ nach $-\infty$ divergirt, oder wenn zum mindesten zu jedem noch so grossen G und n immer negative Terme $a_\mu^{(\nu)}$ vorhanden sind, die numerisch über G liegen, während zugleich $\mu > n$, $\nu > n$.

wo wiederum $\bar{A}$ *eine bestimmte Zahl* oder ∞ *mit bestimmtem Vorzeichen* vorstellt. Zugleich folgt aus Ungl. (10), dass allemal:

$$(13) \qquad \underline{A} \leqq \bar{A}.$$

Diese beiden für das Verhalten der $a_\mu^{(\nu)}$ bei $\lim \mu = \infty$, $\lim \nu = \infty$ als *charakteristisch* sich erweisenden Zahlen $\underline{A}$, $\bar{A}$ sollen die *Haupt-Limites* (Unbestimmtheitsgrenzen) *der Doppelfolge* $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ oder kürzer schlechthin die *Doppel-Limites* der $a_\mu^{(\nu)}$ für $\lim \mu = \infty$, $\lim \nu = \infty$ heissen, speciell $\underline{A}$ der *untere*, $\bar{A}$ der *obere Doppel-Limes* in Zeichen:

$$(14) \qquad \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{A}, \qquad \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \bar{A}.$$

Man bemerke zunächst noch, dass diese Zahlen $\underline{A}$, $\bar{A}$ auch zu Stande kommen, wenn man statt der *einfachen* Folgen (11a), (11b) die *Doppelfolgen* $\left(\underline{A}_\mu^{(\nu)}\right)$, $\left(\bar{A}_\mu^{(\nu)}\right)$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots;\ \nu = 0, 1, 2, \cdots)$ in Betracht zieht. Denn da diese letzteren nach Ungl. (5) *monoton* sind, so erkennt man unmittelbar mit Hülfe des Schluss-Satzes in § 1, dass*):

$$(15) \qquad \lim_{\mu,\nu=\infty} \underline{A}_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \underline{A}_\nu^{(\nu)}, \qquad \lim_{\mu,\nu=\infty} \bar{A}_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \bar{A}_\nu^{(\nu)}.$$

Ferner sei noch hervorgehoben, dass wegen der *Monotonie* der Doppelfolgen $\left(\underline{A}_\mu^{(\nu)}\right)$, $\left(\bar{A}_\mu^{(\nu)}\right)$ die Zahl $\underline{A}$ statt als $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} \underline{A}_\mu^{(\nu)}$ auch als *obere Grenze* der $\underline{A}_\mu^{(\nu)}$ und analog $\bar{A}$ als *untere Grenze* der $\bar{A}_\mu^{(\nu)}$ definirt werden kann.

2. Es mögen nun zunächst $\underline{A}$ und $\bar{A}$ als *endlich* vorausgesetzt werden. Auf Grund der Definitionsgleichungen (12a), (12b) muss sich dann zu jedem beliebig kleinen $\varepsilon > 0$ ein n so fixiren lassen, dass:

$$(16) \quad \underline{A} - \varepsilon \leqq \underline{A}_\nu^{(\nu)} \leqq \underline{A} + \varepsilon, \quad \bar{A} - \varepsilon \leqq \bar{A}_\nu^{(\nu)} \leqq \bar{A} + \varepsilon \quad \text{für} \quad \nu \geqq n.$$

*) Es thut der Anwendbarkeit jenes Satzes keinen Eintrag, dass unter den $\underline{A}_\mu^{(\nu)}$ bezw. $\bar{A}_\mu^{(\nu)}$ beliebig oft der Term $-\infty$ bezw. $+\infty$ vorkommen kann, während in § 1 die $a_\mu^{(\nu)}$ durchweg als *bestimmte Zahlen* anzusehen sind. Betrachtet man z. B. die Folge der $\underline{A}_\mu^{(\nu)}$, so ist die Möglichkeit $\underline{A}_m^{(n)} = +\infty$ (wegen der Bedeutung von $\underline{A}_m^{(n)}$ als *untere* Grenze der für *jedes endliche* (μ, ν) als *endlich* zu denkenden Terme $[a_\mu^{(\nu)}]_m^n$) definitiv *ausgeschlossen*. Ist nun aber etwa $\underline{A}_0^{(0)} = -\infty$, so kann entweder nur der im Texte hervorgehobene Fall eintreten, dass *alle* $\underline{A}_\nu^{(\nu)} = -\infty$ und folglich wegen der *Monotonie* der $\underline{A}_\mu^{(\nu)}$ auch *alle* $\underline{A}_\mu^{(\nu)} = -\infty$, sodass also schliesslich:

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} \underline{A}_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \underline{A}_\nu^{(\nu)} = -\infty.$$

Oder: Es giebt einmal ein *endliches* $\underline{A}_n^{(n)}$. Dann besteht aber die Doppelfolge $[\underline{A}_\mu^{(\nu)}]_n^n$ aus lauter *endlichen* Termen und gestattet somit ohne weiteres die Anwendung des fraglichen Satzes. Das analoge gilt bezüglich der $\bar{A}_\mu^{(\nu)}$.

Da nun andererseits wegen der Bedeutung der Zahlen $\underline{A}_\nu^{(\nu)}$, $\bar{A}_\nu^{(\nu)}$:

$$\underline{A}_n^{(n)} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{A}_{(n)}^{(n)} \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n, \tag{17}$$

so folgt zunächst, wenn man in Ungl. (16) $\nu = n$ setzt, mit Berücksichtigung von (17):

$$\underline{A} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{A} + \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\mu\\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n. \tag{18}$$

Diese Ungleichung enthält *die erste Haupteigenschaft* der Limites $\underline{A}$, $\bar{A}$, nämlich:

(I) *Bei beliebig klein vorgeschriebenem* $\varepsilon > 0$ *und hinlänglich grossem* n *gehören alle Terme der Doppelfolge* $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_n^n$ *dem Zahlenintervalle* $\left(\underline{A} - \varepsilon,\ \bar{A} + \varepsilon\right)$ *an.*

Des weiteren folgt aus der Bedeutung von $\underline{A}_\nu^{(\nu)}$ als *untere Grenze* der mit $a_\nu^{(\nu)}$ beginnenden Doppelfolge, dass *mindestens ein* Term $a_\varrho^{(\sigma)}$ vorhanden sein muss, sodass:

$$\underline{A}_\nu^{(\nu)} - \frac{\varepsilon}{2} < \underline{A}_\nu^{(\nu)} \leqq a_\varrho^{(\sigma)} < \underline{A}_\nu^{(\nu)} + \frac{\varepsilon}{2}, \quad \text{wo:} \quad \left.\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix}\right\} \geqq \nu. \tag{19}$$

Da man andererseits nach Ungl. (16) ν von vornherein so gross annehmen kann, dass:

$$\underline{A} - \frac{\varepsilon}{2} \leqq \underline{A}_\nu^{(\nu)} \leqq \underline{A} + \frac{\varepsilon}{2} \tag{20}$$

so ergiebt sich das Bestehen der Ungleichungen:

$$\underline{A} - \varepsilon < a_\varrho^{(\sigma)} < \underline{A} + \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\varrho\\ \sigma\end{matrix}\right\} \geqq \nu \tag{21}$$

in dem folgenden Sinne: Wird $\varepsilon > 0$ *beliebig klein*, ν *beliebig gross vorgeschrieben*, so existirt allemal *mindestens ein* Term $a_\varrho^{(\sigma)}$, welcher den Bedingungen (21) genügt.

Nun bedeute ε_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ eine unbegrenzte Folge positiver Zahlen mit dem Grenzwerthe $\lim\limits_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0$, und es sei $a_{m_0}^{(n_0)}$ *irgend ein bestimmter* (auf Grund von (21) *sicher vorhandener*) Term, welcher der Bedingung genügt:

$$\underline{A} - \varepsilon_0 < a_{m_0}^{(n_0)} < \underline{A} + \varepsilon_0.$$

Wird alsdann die ganze Zahl $r_0 > m_0$ und $> n_0$ angenommen, so resultirt aus (21) die Existenz eines Terms $a_{m_1}^{(n_1)}$ von der Beschaffenheit, dass:

$$\underline{A} - \varepsilon_1 < a_{m_1}^{(n_1)} < \underline{A} + \varepsilon_1, \quad \text{wo:} \quad \left.\begin{matrix}m_1\\ n_1\end{matrix}\right\} \geqq r_0, \quad \text{also:} \quad \left\{\begin{matrix}m_1 > m_0,\\ n_1 > n_0.\end{matrix}\right.$$

Daraus folgt in analoger Weise:

$$\underline{A} - \varepsilon_2 < a_{m_2}^{(n_2)} < \underline{A} + \varepsilon_2, \quad \text{wo:} \quad \begin{cases} m_2 > m_1, \\ n_2 > n_1, \end{cases}$$

und bei Fortsetzung dieser Schlussweise:

$$(21) \qquad \underline{A} - \varepsilon_\nu < a_{m_\nu}^{(n_\nu)} < \underline{A} + \varepsilon_\nu, \quad \text{wo:} \quad \begin{cases} m_\nu > m_{\nu-1} \\ n_\nu > n_{\nu-1} \end{cases} (\nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Da vollkommen analoge Beziehungen sich auch für $\bar{A}$ ergeben, so kann man als *zweite Haupteigenschaft* von $\underline{A}$, $\bar{A}$ im Anschlusse an Ungl. (21), (22) folgendes aussprechen:

(II) *Zu jedem beliebig klein vorgeschriebenem* $\varepsilon > 0$ *giebt es unendlich viele, jede beliebig gross vorgeschriebene Zahl übersteigende Zahlenpaare* (μ, ν), *sodass:*

$$(23) \qquad \underline{A} - \varepsilon < a_\mu^{(\nu)} < \underline{A} + \varepsilon \quad \textit{bezw.} \quad \bar{A} - \varepsilon < a_\mu^{(\nu)} < \bar{A} + \varepsilon.$$

Insbesondere existiren zu jeder positiven, nach 0 *convergirenden Zahlenfolge* (ε_ν) *monoton in's Unendliche wachsende Folgen natürlicher Zahlen* m_ν, n_ν *bezw.* p_ν, q_ν, *sodass:*

$$(24) \qquad \underline{A} - \varepsilon_\nu < a_{m_\nu}^{(n_\nu)} < \underline{A} + \varepsilon_\nu \quad \textit{bezw.} \quad \bar{A} - \varepsilon_\nu < a_{p_\nu}^{(q_\nu)} < \bar{A} + e_\nu.$$

3. Es soll jetzt der Fall betrachtet werden, dass $\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{A}$ *endlich*, dagegen $\overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$. Alle auf die Zahl $\underline{A}$ bezüglichen Ergebnisse bleiben alsdann unverändert, während an die Stelle der Ungleichung (18) nunmehr die folgende tritt:

$$(25) \qquad \underline{A} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} < +\infty \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\mu \\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n,$$

d. h.:

(Ia) *Bei beliebig klein vorgeschriebenem* $\varepsilon > 0$ *und hinlänglich gross gewähltem* n *gehören alle Terme der Doppelfolge* $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_n^n$ *dem Intervalle* $(\underline{A} - \varepsilon, \infty)$ *an.*

Andererseits erheischt die Annahme $\overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$, d. h. schliesslich $\lim_{\nu=\infty} \bar{A}_\nu^{(\nu)} = \infty$, wie in Nr. 1 bemerkt wurde, dass geradezu

$$\bar{A}_\nu^{(\nu)} = \infty \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Aus der Bedeutung von $\bar{A}_\nu^{(\nu)}$ als *oberer Grenze* der mit $a_\nu^{(\nu)}$ beginnenden Doppelfolge ergiebt sich dann aber: wird G und ν *beliebig gross vorgeschrieben*, so giebt es stets Terme $a_\varrho^{(\sigma)}$, sodass:

$$(26) \qquad a_\varrho^{(\sigma)} > G \text{ und zugleich:} \quad \left.\begin{matrix}\varrho \\ \sigma\end{matrix}\right\} > \nu.$$

Bedeutet nun G_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ eine Folge positiver Zahlen mit dem Grenzwerthe $+\infty$, so hat man zunächst für irgend ein bestimmtes Zahlenpaar p_0, q_0:

$$a_{p_0}^{(q_0)} > G_0,$$

und sodann, wenn $r_0 \geqq p_0$ und $\geqq q_0$ angenommen wird, auf Grund von Ungl. (26):

$$a_{p_1}^{(q_1)} > G_1, \quad \text{wo:} \quad \left.\begin{matrix} p_1 \\ q_1 \end{matrix}\right\} > r_0, \quad \text{also auch:} \quad \left\{\begin{matrix} p_1 > p_0, \\ q_1 > q_0. \end{matrix}\right.$$

In dieser Weise weiter fortschliessend gelangt man zu einer Beziehung von der Form:

(27) $$a_{p_\nu}^{(q_\nu)} > G_\nu, \quad \text{wo:} \quad \left\{\begin{matrix} p_\nu > p_{\nu-1} \\ q_\nu > q_{\nu-1} \end{matrix}\right. \quad (\nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Somit tritt hier an die Stelle der Haupteigenschaft (II), soweit sie sich auf $\overline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ bezieht, die folgende (s. Ungl. (26), (27)):

(IIa) *Zu jedem beliebig gross vorgeschriebenem $G > 0$ giebt es unendlich viele, jede beliebig gross vorgeschriebene Zahl übersteigende Zahlenpaare (μ, ν), sodass:*

(28) $$a_\mu^{(\nu)} > G.$$

Insbesondere existiren zu jeder positiven, nach $+\infty$ divergirenden Zahlenfolge (G_ν) monoton in's Unendliche wachsende Folgen natürlicher Zahlen p_ν, q_ν, sodass:

(29) $$a_{p_\nu}^{(q_\nu)} > G_\nu.$$

Es ist ohne weiteres klar, wie dieses Resultat für den Fall:

$$\underline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = -\infty, \quad \overline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \bar{A} \quad (\textit{endlich}) \quad \text{oder} \quad = +\infty,$$

zu modificiren ist.

4. Ist $\underline{A} = \bar{A}$ *endlich*, so geht Ungl. (18), wenn man A für $\underline{A}$ und $\bar{A}$ schreibt, in die folgende über:

$$A - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq A + \varepsilon \quad \text{d. h.} \quad \left| a_\mu^{(\nu)} - A \right| \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix} \mu \\ \nu \end{matrix}\right\} \geqq n,$$

welche mit der *Convergenz*-Bedingung (2a) zusammenfällt. Die Doppelfolge *convergirt* also in diesem Falle gegen den Grenzwerth A, d. h. man hat:

(30) $$\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}.$$

Diese letztere Beziehung gilt auch noch, wenn $+\infty$ oder $-\infty$ an die Stelle der endlichen Zahl A tritt. Ist nämlich

$$\underline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \lim\limits_{\nu=\infty} \underline{A}_\nu^{(\nu)} = +\infty$$

(in welchem Falle dann nach Ungl. (13) *eo ipso* auch $\overline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty$), so kann man zu beliebig grossem G ein n so fixiren, dass:

$$\underline{A}_n^{(n)} > G$$

und somit, da $\underline{A}_n^{(n)}$ die *untere Grenze* der Terme $\left[a_\mu^{(\nu)}\right]_n^n$:

$$a_\mu^{(\nu)} > G \quad \text{für:} \quad \left.\begin{matrix}\mu \\ \nu\end{matrix}\right\} \geqq n$$

d. h. (s. Ungl. (3b)): Die Doppelfolge *divergirt* nach $+\infty$.

Das entsprechende ergiebt sich dann im Falle $\overline{\lim\limits_{\mu,\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = -\infty$.

Die *convergenten* und *eigentlich divergenten* Doppelfolgen sind also durch die Beziehung:

(31a) $$\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}$$

die *uneigentlich divergenten* durch:

(31b) $$\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} < \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}$$

charakterisirt.

5. Man kann den vorstehenden Resultaten noch eine andere, vielleicht anschaulichere Fassung geben. Es bedeute m_ν, n_ν $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ je eine Folge natürlicher *monoton* in's Unendliche wachsender Zahlen. Alsdann soll die aus der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *herausgehobene einfache* Folge

$$\left(a_{m_\nu}^{n_\nu}\right) \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

eine *ächte Theilfolge* der ersteren heissen*). Dies vorausgeschickt lässt sich der Inhalt der in Nr. 2 und 3 entwickelten Beziehungen auch folgendermassen aussprechen:

---

*) Z. B. $\left(a_\nu^{(\nu)}\right)$ $(\nu = 0, 1, 2, \cdots)$ = Folge der in der *Haupt-Diagonale* enthaltenen Glieder: $\left(a_{\nu+q}^{(\nu)}\right)$, $\left(a_\nu^{(\nu+q)}\right)$ = jede zur Haupt-Diagonale *parallele* Folge. Ferner die beliebigen „*geradlinigen*" Folgen: $\left(a_{p\nu+q}^{(\nu)}\right)$, $\left(a_\nu^{(p\nu+q)}\right)$, die „*parabolischen*" Folgen: $\left(a_{p\nu^2+q}^{(\nu)}\right)$, $\left(a_\nu^{(p\nu^2+q)}\right)$, etc. Die Bedeutung dieser letzteren Terminologie leuchtet ohne weiteres ein, wenn man sich in dem Schema (1) jeden einzelnen Term $a_\mu^{(\nu)}$ genau in dem *Punkte* mit den rechtwinkligen Coordinaten $(\mu, -\nu)$ concentrirt denkt. Bedeutet dann $\varphi(\nu)$ irgend eine ganzzahlige Function von ν, so enthalten die Folgen: $\left(a_{\varphi(\nu)}^{(\nu)}\right)$, $\left(a_\nu^{(\varphi(\nu))}\right)$ alle diejenigen Terme, deren zugeordnete Punkte („*Gitterpunkte*") von der Curve

$$x = \varphi(-y) \quad \text{bezw.} \quad y = -\varphi(x)$$

getroffen werden.

> *Ist* $\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{A}$, $\overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \bar{A}$ *(wo* $\underline{A}$, $\bar{A}$ *endlich oder* ∞ *mit bestimmtem Vorzeichen), so existiren ächte Theilfolgen mit den Grenzwerthen* $\underline{A}$ *und* $\bar{A}$ (s. Ungl. (24), (29)); *dagegen giebt es* ***keine*** *ächte Theilfolge, welche einen kleineren Grenzwerth als* $\underline{A}$ *oder einen grösseren als* $\bar{A}$ *besitzt* (s. Ungl. (18), (25)).

Ferner folgt für den Fall $\underline{A} = \bar{A}$:

> *Ist die Doppelfolge* ***convergent*** *oder* ***eigentlich divergent****, so gilt das entsprechende von* ***jeder*** *Theilfolge, bei welcher* ***beide*** *Indices in's Unendliche wachsen* (s. Ungl. (2a), (4a) und (3a)), *insbesondere also von* ***jeder ächten*** *Theilfolge.*

Umgekehrt:

> *Weiss man nur, dass* ***jede ächte*** *Theilfolge convergirt bezw. eigentlich divergirt, so gilt das entsprechende von der Doppelfolge selbst*).*

Wenn nämlich die ächten Theilfolgen *convergiren*, so kann nach dem eben ausgesprochenen Satze die Doppelfolge zunächst *nicht eigentlich divergiren* . Sie kann aber auch nicht *uneigentlich divergiren*, d. h. *verschiedene* Limites $\underline{A}$, $\bar{A}$ besitzen. Denn alsdann könnte man zunächst aus der Doppelfolge zwei ächte Theilfolgen mit den Limites $\underline{A}$ und $\bar{A}$ herausheben und aus diesen durch Vereinigung passend ausgewälter Glieder eine *uneigentlich divergente ächte Theilfolge* (mit den Limites $\underline{A}$, $\bar{A}$) bilden, was der Voraussetzung widerspricht. Somit muss in diesem Falle die Doppelfolge *convergiren.*

Das analoge gilt für den Fall, dass die ächten Theilfolgen *eigentlich divergiren.*

§ 3.

Die Limites und iterirten Limites der Zeilen und Colonnen. — Gleichmässige Convergenz, Divergenz, Begrenztheit und Unbegrenztheit der Zeilen (Colonnen).

1. Wesentlich verschieden von den *ächten Theilfolgen*, als dem einfachsten Typus von Theilfolgen, bei welchen *beide* Indices schliesslich in's Unendliche wachsen, sind diejenigen Theilfolgen, bei denen nur der *eine* Index diese Eigenschaft besitzt und als deren einfachster Typus die *Zeilen*

$$a_0^{(\nu)} \; a_1^{(\nu)} \; \cdots \; a_\mu^{(\nu)} \; \cdots \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

und *Colonnen:*

$$a_\mu^{(0)} \; a_\mu^{(1)} \; \cdots \; a_\mu^{(\nu)} \; \cdots \qquad (\mu = 0, 1, 2, \cdots)$$

*) Hieraus könnte man auch ohne weiteres die *Convergenz* bezw. *eigentliche Divergenz* jeder *monotonen Doppelfolge* erschliessen.

des Schema's (1) erscheinen. Man bemerkt zunächst, dass das Verhalten einer *beliebigen endlichen Anzahl* von *Zeilen* und *Colonnen* auf die in § 1, 2 näher entwickelten *Limites der Doppelfolge* keinerlei Einfluss übt. Denn die zur Charakterisirung dieser *Limites* dienenden Ungleichungen (2b), (3b), (18), (21), (25), (26) verlangen ja gewisse Eigenschaften lediglich von denjenigen $a_\mu^{(\nu)}$, bei denen *beide* Indices gewisse Grenzen überschreiten. Um im übrigen die Beziehungen zwischen den *Limites* der *Zeilen* (*Colonnen*) und denjenigen der *Doppelfolge* des genaueren festzustellen (s. § 4), schicken wir zunächst die folgenden Betrachtungen voraus. *Dabei gilt alles, was bezüglich der Zeilen gesagt wird, mutatis mutandis auch für die Colonnen.*

Die Terme $a_\mu^{(\nu)}$ jeder einzelnen Zeile (also ν beliebig, aber constant; $\mu = 0, 1, 2, \cdots$) besitzen stets einen *unteren* und einen *oberen* Limes:

$$(32) \qquad \left\{ \begin{aligned} \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} &= \underline{a}^{(\nu)} \text{ bezw. } = \pm\infty, \\ \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} &= \bar{a}^{(\nu)} \text{ bezw. } = \pm\infty, \end{aligned} \right. \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

welche beiden eventuell auch zusammenfallen können. Im letzteren Falle „*existirt*" $\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$, in Zeichen*):

$$(33) \qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)} \text{ bezw. } = \pm\infty,$$

und die betreffende Zeile ist *convergent* bezw. *eigentlich divergent*.

Bildet man sodann die beiden Folgen:

$$(34) \qquad \left\{ \begin{aligned} &\underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(0)},\ \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(1)}, \cdots \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}, \cdots \\ &\overline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(0)},\ \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(1)}, \cdots \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}, \cdots \end{aligned} \right.$$

(in denen eventuell auch beliebig viele Terme $+\infty$, $-\infty$ vorkommen können), so gehört zu jeder derselben wiederum ein *unterer* und ein *oberer Limes*, in Zeichen:

$$(35) \qquad \underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)},\quad \overline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)},\quad \underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)},\quad \overline{\lim}_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}.$$

Die beiden *äusseren* dieser vier (eventuell auch sämmtlich oder theilweise unter einander gleichen) Zahlen will ich als den *iterirten unteren* bezw. *oberen Zeilen-Limes* bezeichnen. Aus der unmittelbar einleuchtenden Beziehung:

$$(36) \qquad \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} \leq \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

*) Die Bezeichnung $\overline{\underline{\lim}}$ soll generell die Bedeutung haben, dass es in der betreffenden Formel freisteht, $\underline{\lim}$ oder $\overline{\lim}$ zu wählen.

folgt sodann:

$$(37)\quad \begin{cases} \underline{\lim}_{\nu=\infty} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim}_{\nu=\infty} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim}_{\nu=\infty} \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}, \\ \underline{\lim}_{\nu=\infty} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \leqq \underline{\lim}_{\nu=\infty} \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim}_{\nu=\infty} \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\ ^{*)}. \end{cases}$$

Sind also jene beiden *äusseren* Limites einander *gleich,* so *fallen* auch die beiden *mittleren* mit ihnen *zusammen,* d. h. in diesem Falle *existirt* ein eindeutig bestimmter

$$\lim_{\nu=\infty} \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \quad (\text{als } \textit{endlich} \text{ bezw. } +\infty \text{ oder } -\infty),$$

der dann als *iterirter Zeilen-Limes* schlechthin bezeichnet werden möge.

2. Es verdient hervorgehoben zu werden, dass man den *iterirten unteren* bezw. *oberen Zeilen-Limes* allemal auch durch *einfache Limites* und zwar durch *Grenzwerthe ächter Theilfolgen* ersetzen kann**). Es gilt nämlich der Satz:

Man kann aus der Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *stets ächte Theilfolgen* $\left(a_{m_\nu}^{(n_\nu)}\right)$, $\left(a_{p_\nu}^{(q_\nu)}\right)$ *so herausheben, dass:*

$$(38)\qquad \lim_{\nu=\infty} a_{m_\nu}^{(n_\nu)} = \underline{\lim}_{\nu=\infty} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}, \quad \lim_{\nu=\infty} a_{p_\nu}^{(q_\nu)} = \overline{\lim}_{\nu=\infty} \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

Beim *Beweise* dieses Satzes haben wir drei Fälle zu unterscheiden, je

---

*) Dagegen kann sehr wohl:

$$\overline{\lim}_{\nu=\infty} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} > \underline{\lim}_{\nu=\infty} \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$$

ausfallen. Beispiel:

$$a_\mu^{(\nu)} = (-1)^\mu + 2\left(1 + (-1)^\nu\right),$$

also:

$$a_\mu^{(2\nu)} = (-1)^\mu + 4,$$
$$a_\mu^{(2\nu+1)} = (-1)^\mu,$$

und daher:

$$\underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(2\nu)} = 3, \qquad \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(2\nu)} = 5,$$
$$\underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(2\nu+1)} = -1, \qquad \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(2\nu+1)} = 1.$$

Daraus folgt weiter:

$$\overline{\lim}_{\nu=\infty} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 3,$$
$$\underline{\lim}_{\nu=\infty} \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 1,$$

d. h. in der That:

$$\overline{\lim}_{\nu=\infty} \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} > \underline{\lim}_{\nu=\infty} \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

**) Anders ausgedrückt: Man kann jeden *successiven* Grenzübergang auch durch einen *speciellen simultanen* ersetzen.

nachdem die in Frage kommenden Limites *endlich* oder *unendlich* mit noch näher zu specificirendem Vorzeichen ausfallen.

Fall I. Es sei zunächst:

(39) $$\underline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = \underline{a} \quad \text{(wo } \underline{a} \text{ eine bestimmte Zahl).}$$

Aus der Folge:

(40) $$\underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(0)},\quad \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(1)},\ \cdots\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)},\ \cdots$$

muss sich dann eine unbegrenzte Folge *endlicher* Terme*)

$$\underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(n_\nu)} = \underline{a}^{(n_\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2 \cdots)$$

mit dem *Grenzwerthe* a herausheben lassen, also:

(41) $$\lim_{\nu=\infty} \underline{a}^{(n_\nu)} = a \quad \text{d. h.} \quad = \underline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}.$$

Da $\underline{a}^{(n_\nu)}$ den *unteren Limes* der Terme $a_\mu^{(n_\nu)}$ $(\mu = 0, 1, 2, \cdots)$ d. h. der $(n_\nu + 1)^{\text{ten}}$ Zeile vorstellt, so muss es zu jedem $\varepsilon > 0$ und zu jedem einzelnen n_ν *unendlich viele* Terme $a_{\mu_\nu}^{(n_\nu)}$ geben, sodass:

(42) $$\underline{a}^{(n_\nu)} - \varepsilon \leqq a_{\mu_\nu}^{(n_\nu)} \leqq \underline{a}^{(n_\nu)} + \varepsilon \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Nimmt man also eine Folge positiver ε_ν mit den Grenzwerthe $\lim_{\nu=\infty} \varepsilon_\nu = 0$, so existirt zunächst eine *erste* Zahl m_0, sodass:

$$\underline{a}^{(n_0)} - \varepsilon_0 \leqq a_{m_0}^{(n_0)} \leqq \underline{a}^{(n_0)} + \varepsilon_0;$$

sodann eine *erste* Zahl m_1, welche gleichzeitig den *beiden* Bedingungen genügt:

$$m_1 > m_0 \quad \text{und:} \quad \underline{a}^{(n_1)} - \varepsilon_1 \leqq a_{m_1}^{(n_1)} \leqq \underline{a}^{(n_1)} + \varepsilon_1.$$

So fortfahrend erhält man eine *ächte Theilfolge* $\left(a_{m_\nu}^{(n_\nu)}\right)$ von der Beschaffenheit, dass:

(43) $$\underline{a}^{(n_\nu)} - \varepsilon_\nu \leqq a_{m_\nu}^{(n_\nu)} \leqq \underline{a}^{(n_\nu)} + \varepsilon_\nu \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots),$$

und man findet somit, da $\lim_{\nu=\infty} \underline{a}^{(n_\nu)}$ nach Gl. (41) *existirt:*

(44) $$\lim_{\nu=\infty} a_{m_\nu}^{(n_\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \underline{a}^{(n_\nu)} \quad \text{d. h} \quad = \underline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}.$$

---

*) Die Voraussetzung (39) schliesst keineswegs aus, dass unter den Termen

$$\underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

der Werth $-\infty$ in *endlicher* Anzahl und der Werth $+\infty$ sogar *unendlich oft* vorkommt.

Analog ergiebt sich:

(45) $\lim\limits_{\nu=\infty} a_{p_\nu}^{(q_\nu)} = \overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}$, wenn: $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}$ (d. h. endlich),

am einfachsten, wenn man beachtet, dass $(-\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)})$ den entsprechenden *unteren* Limes für die aus den Termen $(-a_\mu^{(\nu)})$ gebildete Doppelfolge vorstellt.

Fall II. Es sei jetzt:

(46) $$\underline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = -\infty.$$

Nimmt man eine Folge positiver Zahlen G_ν mit dem Grenzwerthe $\lim\limits_{\nu=\infty} G_\nu = +\infty$, so muss sich auf Grund der Voraussetzung (46) aus der Folge (40) eine unbegrenzte Folge von Termen $\underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(n_\nu)}$ so herausheben lassen*), dass:

(47) $$\underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(n_\nu)} < -G_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Aus der Bedeutung von $\underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(n_\nu)}$ folgt dann weiter, dass zu jedem einzelnen n_ν *unendlich viele* Terme $a_{\mu_\nu}^{(n_\nu)}$ existiren müssen, sodass:

(48) $$a_{\mu_\nu}^{(n_\nu)} < -G_\nu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Man kann daher ganz analog wie im Falle I zu $n_0, n_1, n_2, \cdots$ eine *steigende* Folge natürlicher Zahlen $m_0, m_1, m_2, \cdots$ so auswählen, dass:

(49) $$a_{m_\nu}^{(n_\nu)} < -G_\nu \qquad (m_\nu > m_{\nu-1},\ n_\nu > n_{\nu-1})$$

und somit schliesslich:

(50) $$\lim\limits_{\nu=\infty} a_{m_\nu}^{(n_\nu)} = -\infty \text{ d. h. } \underline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}.$$

Entsprechend ergiebt sich:

(51) $$\lim\limits_{\nu=\infty} a_{p_\nu}^{(q_\nu)} = +\infty, \text{ wenn: } \overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = +\infty.$$

Fall III. Ist:

(52) $$\underline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = +\infty \text{ bezw. } \overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = -\infty,$$

so folgt aus (37), dass auch:

(53) $$\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = +\infty \text{ bezw. } \underline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = -\infty.$$

---

*) Diese Terme $\underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(n_\nu)}$ können dabei für jedes einzelne ν *endlich* oder auch sämmtlich bezw. theilweise $= -\infty$ sein.

Damit ist aber dieser Fall ohne weiteres auf Fall II zurückgeführt und der oben ausgesprochene Satz jetzt vollständig bewiesen.

3. Es erscheint für das folgende zweckmässig, in Bezug auf die successive Annäherung der Zahlen $a_\mu^{(\nu)}$ an die betreffenden Zeilen-Limites $\overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ gewisse Unterscheidungen zu treffen und die verschiedenen Möglichkeiten durch geeignete Bezeichnungen zu charakterisiren.

Fasst man zunächst den einfachsten Fall in's Auge, dass jede Zeile *convergirt*, also etwa:

$$\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a^{(\nu)} \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots), \tag{54}$$

so besagt diese Voraussetzung lediglich folgendes: zu jedem (beliebig kleinen) $\varepsilon > 0$ und für jedes einzelne ν existiren Zahlen m_ν und somit speciell eine *kleinste* Zahl m_ν', sodass:

$$\left|a_\mu^{(\nu)} - a^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon, \quad \text{wenn: } \mu \geqq m_\nu' \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots). \tag{55}$$

Dabei werden diese Zahlen m_ν' (ausser mit ε) im allgemeinen mit ν veränderlich sein, und es erscheint insbesondere nicht ausgeschlossen, dass sie (sämmtlich oder theilweise) zugleich mit ν *über alle Grenzen wachsen.* Ebenso können auch die $|a^{(\nu)}|$ zugleich mit ν sämmtlich oder theilweise in's Unendliche wachsen. Wir sagen in jedem dieser beiden Fälle, die *Zeilen* seien *ungleichmässig convergent.*

Existirt dagegen für die Zahlen m_ν' ein *bestimmtes endliches Maximum* m und bleiben die $\left|a^{(\nu)}\right|$ unter einer endlichen Schranke g, so kann man die Bedingung (55) durch die folgende ersetzen:

$$\left|a_\mu^{(\nu)} - a^{(\nu)}\right| \leqq \varepsilon, \quad \text{wenn: } \mu \geqq m \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots), \tag{56}$$

wobei jetzt m eine (nur noch von ε abhängende) für alle ν *unveränderliche* Zahl bedeutet und $|a^{(\nu)}| < g$ bleibt. In diesem Falle heissen die *Zeilen gleichmässig convergent.*

Sind *alle Zeilen eigentlich divergent*, also:

$$\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty \ \text{ bezw. } = -\infty \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots), \tag{57}$$

so besagt dies wiederum nur folgendes: zu jedem (beliebig grossen) $G > 0$ und für jedes einzelne ν existiren Zahlen m_ν und speciell eine *kleinste* Zahl m_ν', sodass:

$$a_\mu^{(\nu)} > G \ \text{ bezw. } < -G, \quad \text{wenn } \mu \geqq m_\nu' \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots). \tag{58}$$

Haben alsdann die m_ν' ein *bestimmtes endliches Maximum* m, sodass die Bedingung (58) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$a_\mu^{(\nu)} > G \ \text{ bezw. } < -G, \quad \text{wenn } \mu \geqq m \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots), \tag{59}$$

so mögen die *Zeilen* als *gleichmässig divergent* bezeichnet werden; dagegen als *ungleichmässig divergent*, wenn ein solches Maximum *nicht* vorhanden ist, sodass also die m_ν' gleichzeitig mit ν sämmtlich oder theilweise *in's Unendliche wachsen.*

Beispiele. 1) Die Zeilen der Folge $\left[\frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\right]_1^1$ sind *gleichmässig convergent.* Denn man hat:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu} + \frac{1}{\nu}, \qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\nu},$$

also:

$$a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu}.$$

Wird also $\varepsilon > 0$ beliebig klein vorgeschrieben, darauf m so fixirt, dass $\frac{1}{m} \leqq \varepsilon$, so wird:

$$\left|a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right| \leqq \frac{1}{\mu} \leqq \varepsilon \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m \quad \text{und} \quad \nu = 1, 2, 3, \cdots.$$

2) Die Zeilen der Folge $[\mu+\nu]_0^0$ sind *gleichmässig divergent.* Denn man hat:

$$a_\mu^{(\nu)} = \mu + \nu, \qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty, \qquad a_\mu^{(\nu)} \geqq \mu \qquad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Wird also $G > 0$ beliebig gross vorgeschrieben, sodann $m > G$ angenommen, so hat man:

$$a_\mu^{(\nu)} \geqq m > G \quad \text{für} \quad \mu \geqq m \quad \text{und} \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots.$$

3) Die Zeilen der Folge $\left[\frac{(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2}\right]_0^0$ sind *ungleichmässig convergent.* Aus:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2}, \qquad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 1$$

folgt nämlich:

$$\left|a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}\right| = 1 - \frac{(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2} = \frac{1}{1+(\mu-\nu)^2}.$$

Versteht man unter n eine *beliebig grosse* natürliche Zahl und setzt $\nu = n$ d. h. betrachtet man eine *Zeile* von *beliebig hohem Range*, so wird:

$$\left|a_n^{(n)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(n)}\right| = 1.$$

Es ist somit nicht möglich, die fragliche Differenz durch Fixirung einer endlichen Maximalgrenze $\mu = m$ für *alle* ν numerisch unter ein beliebig kleines $\varepsilon > 0$ herabzudrücken. Das Wesen dieser *ungleichmässigen Convergenz* tritt noch anschaulicher hervor, wenn man sich die Glieder der betreffenden Doppelfolge in Form des Schema's (1) angeschrieben denkt:

$$\begin{array}{cccccccc}
0 & \frac{1^2}{1+1^2} & \frac{2^2}{1+2^2} & \frac{3^2}{1+3^2} & \cdots & \frac{\mu^2}{1+\mu^2} & \cdots \\
\frac{1^2}{1+1^2} & 0 & \frac{1^2}{1+1^2} & \frac{2^2}{1+2^2} & \cdots & \frac{(\mu-1)^2}{1+(\mu-1)^2} & \cdots \\
\frac{2^2}{1+2^2} & \frac{1^2}{1+1^2} & 0 & \frac{1^2}{1+1^2} & \cdots & \frac{(\mu-2)^2}{1+(\mu-2)^2} & \cdots \\
\frac{3^2}{1+3^2} & \frac{2^2}{1+2^2} & \frac{1^2}{1+1^2} & 0 & \cdots & \frac{(\mu-3)^2}{1+(\mu-3)^2} & \cdots \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot
\end{array}$$

Man erkennt, dass die Terme jeder einzelnen Zeile schliesslich beständig *wachsend* der Grenze 1 zustreben. Aber dieses *Zunehmen* der Glieder beginnt erst jedesmal *rechts* von dem *Diagonalgliede*, welches in *jeder* Zeile den Werth 0 hat: die successive Annäherung der Glieder an den Grenzwerth 1 wird mit jeder Zeile *um eine Stelle weiter hinausgeschoben.*

4) Auch die Zeilen der Folge $\left[\frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}\right]_1^1$ sind *ungleichmässig convergent.* Man hat hier:

$$a_\mu^{(\nu)} = \frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2} = \frac{1}{\frac{\mu}{\nu}+\frac{\nu}{\mu}}, \quad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0 \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

also:

$$\left| a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \right| = \frac{\mu\nu}{\mu^2+\nu^2}$$

und daher für jedes noch so grosse n:

$$\left| a_n^{(n)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(n)} \right| = \frac{1}{2}.$$

Die Terme jeder einzelnen Zeile convergiren hier schliesslich beständig *abnehmend* gegen 0; aber das *Abnehmen* der Glieder beginnt wieder jedesmal erst *rechts* von dem *Diagonalgliede*, welches durchweg den Werth $\frac{1}{2}$ besitzt. Bedeutet ferner p eine beliebige natürliche Zahl, so hat man:

$$a_{p\nu}^{(\nu)} = \frac{p}{1+p^2}$$

d. h. das Glied $\frac{p}{1+p^2}$, welches für $\nu = 1$, d. h. in der *ersten* Zeile an der p^{ten} Stelle steht, steht in der n^{ten} Zeile erst an der pn^{ten} Stelle: es findet also mit jeder neuen Zeile zugleich auch eine *Verlangsamung* der Gliederabnahme statt.

5) Als *ungleichmässig convergent* haben ferner die Zeilen der Folge: $\left[\nu + \frac{1}{\mu}\right]_1^1$ zu gelten. Zwar hat man hier:

$$a_\mu^{(\nu)} = \nu + \frac{1}{\mu}, \quad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \nu$$

also:

$$a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \frac{1}{\mu}$$

und daher genau, wie bei dem Beispiele 1):

$$\left| a_\mu^{(\nu)} - \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \right| \leqq \frac{1}{m} \leqq \varepsilon$$

für $\mu \geqq m \geqq \frac{1}{\varepsilon}$ und $\nu = 1, 2, 3, \cdots$.

Dagegen ist hier die Bedingung *nicht* erfüllt, dass die $|a^{(\nu)}|$ unter einer endlichen Schranke bleiben, denn man hat:

$$\lim_{\nu=\infty} a^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \nu = +\infty.$$

6) Die Zeilen der Folge $[(\mu - \nu)^2]_0^0$ sind *ungleichmässig divergent.* Man hat:

$$a_\mu^{(\nu)} = (\mu - \nu)^2, \quad \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty, \quad (\nu = 0, 1, 2, \cdots).$$

Wird $G > 0$ beliebig vorgeschrieben, so lässt sich *kein* m so fixiren, dass:

$$a_\mu^{(\nu)} > G \quad \text{für} \quad \nu = 0, 1, 2, \cdots$$

Denn man hat, wie gross auch n angenommen werden möge:

$$a_n^{(n)} = 0 \text{*)}.$$

4. Die im vorstehenden eingeführten Begriffe der *gleichmässigen* Zeilen-Convergenz und -Divergenz gestatten noch eine für das folgende nützliche Verallgemeinerung.

Es werde zunächst angenommen, dass die *Limites der Zeilen*, zum mindesten nach Ausschluss einer endlichen Anzahl, numerisch *unter einer festen Schranke* bleiben (eine Annahme, die offenbar diejenige der *Zeilen-Convergenz* gegen *endlich* bleibende Limites als speciellen Fall enthält), etwa:

$$(60) \qquad \underline{\lim}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)}, \quad \overline{\lim}\, a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)}, \qquad \text{wo:} \begin{rcases} |\underline{a}^{(\nu)}| \\ |\bar{a}^{(\nu)}| \end{rcases} < g \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n.$$

Alsdann existirt zu jedem $\varepsilon > 0$ und für jedes einzelne $\nu \geqq n$ eine kleinste Zahl m_ν', sodass:

$$(61) \qquad \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m_\nu', \quad \nu \geqq n.$$

---

*) Da die angeführten Beispiele, ausser Nr. 5, in Bezug auf die beiden Indices μ, ν völlig symmetrisch gebaut sind, so können sie auch dazu dienen, um die in Rede stehenden Convergenz- und Divergenz-Eigenschaften der *Zeilen* auch für die *Colonnen* zu exemplificiren. An Stelle von Beispiel 5) hätte man dann lediglich $\left[\mu + \frac{1}{\nu}\right]_1^1$ zu substituiren.

Haben dann wiederum die m_ν' *ein endliches Maximum* m, sodass also die Bedingung (61) durch die folgende ersetzt werden kann:

$$(62)\quad \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n \left(\left. \begin{array}{l} |\underline{a}^{(\nu)}| \\ |\bar{a}^{(\nu)}| \end{array} \right\} < g \right),$$

so sollen die Zeilen für $\nu \geqq n$ *gleichmässig begrenzt* heissen; dagegen *ungleichmässig begrenzt*, wenn eine solche Zahl m *nicht* existirt oder wenn die $|\underline{a}^{(\nu)}|$ und $|\bar{a}^{(\nu)}|$ *nicht* unter einer endlichen Schranke bleiben. Da die Bedingung (62) im Falle $\underline{a}^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)}$ mit derjenigen für die *gleichmässige Convergenz* der Zeilen bei $\nu \geqq n$ zusammenfällt (s. Ungl. (56)), so erscheint also diese letztere als specieller Fall der *gleichmässigen Begrenzung*.

Bestehen die fraglichen Bedingungen nur für *einen* der beiden Limites, d. h. hat man nur:

$$(63)\quad \left\{ \begin{array}{llll} & \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} & \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n & (|\underline{a}^{(\nu)}| < g) \\ \textit{oder:} & \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \geqq a_\mu^{(\nu)} & \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n & (|\bar{a}^{(\nu)}| < g), \end{array} \right.$$

so soll die *Begrenzung* der Zeilen eine *einseitig gleichmässige* heissen.

Bleiben die $|\underline{a}^{(\nu)}|$, $|\bar{a}^{(\nu)}|$ für $\nu \geqq n$ *nicht* unter einer endlichen Schranke (woraus das analoge für die $|a_\mu^{(\nu)}|$ bei gleichzeitig unbegrenzt wachsendem μ, ν folgt), so soll speciell der Fall $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty$ bezw. $-\infty$ betrachtet werden. Auf Grund dieser Voraussetzung existirt zunächst zu jedem (beliebig grossen) $G > 0$ eine kleinste natürliche Zahl n, sodass:*)

$$(64)\quad \left\{ \begin{array}{llll} & \underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} > G, & \text{also auch:} \quad \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} > G & \text{für:} \quad \nu \geqq n, \\ \text{bezw.} & \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} > -G, & \text{also auch:} \quad \underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} < -G & \text{für:} \quad \nu \geqq n. \end{array} \right.$$

Daraus folgt wiederum nur soviel, dass für jedes einzelne $\nu \geqq n$ eine kleinste Zahl m_ν' existirt, sodass:

$$(65)\quad a_\mu^{(\nu)} > G \quad \text{bezw.} \quad < -G \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m_\nu', \quad \nu \geqq n.$$

Ist alsdann für die m_ν' ein endliches Maximum m vorhanden, sodass also:

$$(66)\quad a_\mu^{(\nu)} > G \quad \text{bezw.} \quad < -G \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n,$$

so sollen die Zeilen der Doppelfolge als *gleichmässig unbegrenzt***) be-

*) Dabei wird n im allgemeinen mit G *veränderlich* sein (nämlich mit wachsenden Werthen von G gleichfalls zunehmen). Dies wäre nur dann *nicht* der Fall, wenn von einer bestimmten Zeile ab, etwa für $\nu \geqq n'$, durchweg:

$$\underline{\lim}\, a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}\, a_\mu^{\nu} = +\infty \quad \text{bezw.} \quad = -\infty.$$

Dann genügt nämlich die Annahme $n = n'$ bei jedem beliebigen G.

**) Der Ausdruck bezieht sich wesentlich auf die *Gesammtheit* der Zeilen. Jede einzelne Zeile kann dabei immerhin *begrenzt* (d. h. mit endlichen Limites versehen), sogar *convergent* sein (s. Beispiel 9)).

zeichnet werden. Die Vergleichung der Bedingung (66) mit der für *gleichmässige Divergenz* geltenden Bedingung (58) zeigt wiederum, dass diese letztere Eigenschaft einen speciellen Fall der soeben definirten darstellt.

Beispiele. 7) Die Zeilen der Folge $\left[(-1)^{\mu+\nu}\frac{\mu+\nu}{\mu\nu}\right]_1^1$ sind *gleichmässig begrenzt.* Man hat:

$$a_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\left(\frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu}\right), \quad \text{also:} \quad \underline{a}^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = -\frac{1}{\nu},$$

$$\bar{a}^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = +\frac{1}{\nu}.$$

Da nun:

$$-\frac{1}{\mu}-\frac{1}{\nu} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \frac{1}{\mu}+\frac{1}{\nu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

so folgt:

$$\underline{a}_\nu - \frac{1}{\mu} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}_\nu + \frac{1}{\mu} \qquad (\nu = 1, 2, 3, \cdots)$$

und daher:

$$\underline{a}_\nu - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}_\nu + \varepsilon \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m \geqq \frac{1}{\varepsilon}, \qquad \nu = 1, 2, 3, \cdots.$$

8) Die Zeilen der Folge $\left[(-1)^{\mu+\nu}\frac{2+(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2}\right]_0^0$ sind *ungleichmässig begrenzt.* Man hat:

$$a_\mu^{(\nu)} = (-1)^{\mu+\nu}\frac{2+(\mu-\nu)^2}{1+(\mu-\nu)^2}, \quad \text{also:} \quad \underline{a}^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = -1,$$

$$\bar{a}^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = +1.$$

Andererseits wird, für jedes noch so grosse n:

$$a_n^{(n)} = 2, \qquad a_{n\pm 1}^{(n)} = -\frac{3}{2},$$

d. h. für jede Zeile von beliebig hohem Range n liegen das $n \pm 1^{\text{te}}$ und n^{te} Glied *ausserhalb* des Intervalles $(\underline{a}^{(n)} - \varepsilon,\ \bar{a}^{(n)} + \varepsilon) = (1-\varepsilon,\ 1+\varepsilon)$.

9) Die Zeilen der Folge $\left[\nu + \frac{1}{\mu}\right]_1^1$, welche oben (Beispiel 5)) als *ungleichmässig convergent* erkannt wurden, sind andererseits *gleichmässig unbegrenzt.* Denn man hat

$$a_\mu^{(\nu)} = \nu + \frac{1}{\mu} > \nu.$$

Wird also $n \geqq G$ angenommen, so folgt:

$$a_\mu^{(\nu)} \geqq n > G \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \quad \mu \geqq 1.$$

10) *Gleichmässig unbegrenzt* sind auch die Zeilen der Folge $[\nu + (1+(-1)^\mu)\,\mu]_0^0$. Man hat hier:

$$a_\mu^{(\nu)} = \nu, \qquad \text{wenn } \mu \text{ gerade},$$

$$a_\mu^{(\nu)} = \nu + 2\mu, \quad \text{wenn } \mu \text{ ungerade}$$

und daher:

$$\underline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \nu, \quad \overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty;$$

im übrigen für $n > G$:

$$a_\mu^{(\nu)} \geq n > G \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n, \quad \mu \geqq 0.$$

11) Setzt man:

$$a_\mu^{(\nu)} = \lim_{p=\infty} \frac{\mu^{p-1} - \nu^{p-1}}{\mu^p + \nu^p} \cdot \mu\nu \; (\mu = 1, 2, 3, \cdots; \; \nu = 1, 2, 3, \cdots),$$

so folgt:

$$a_\mu^{(\nu)} \begin{cases} = \lim\limits_{p=\infty} \dfrac{1 - \left(\dfrac{\nu}{\mu}\right)^{p-1}}{1 + \left(\dfrac{\nu}{\mu}\right)^p} \cdot \nu = \nu, & \text{wenn: } \mu > \nu, \\ = \lim\limits_{p=\infty} \dfrac{\left(\dfrac{\mu}{\nu}\right)^{p-1} - 1}{\left(\dfrac{\mu}{\nu}\right)^p + 1} \cdot \mu = -\mu, & \text{wenn: } \mu < \nu. \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot \; = 0, & \text{wenn: } \mu = \nu. \end{cases}$$

Folglich wird:

$$\underline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \nu,$$

d. h. die Zeilen sind *convergent*, aber *ungleichmässig*, weil der Grenzwerth ν schliesslich in's Unendliche wächst, übrigens aber auch darum, weil (für jedes noch so grosse n) $a_n^{(n)} = 0$, $a_{n-\lambda}^{(n)} = -(n-\lambda)$. Aus diesem letzteren Grunde sind dann aber die Zeilen auch *nicht einmal gleichmässig unbegrenzt.* *)

§ 4.

Beziehungen zwischen den iterirten Limites der Zeilen (Colonnen) und den Limites der Doppelfolge.

1. Mit Hülfe der im vorigen Paragraphen eingeführten Unterscheidungen lassen sich die Beziehungen zwischen den *iterirten* (Zeilen- bezw. Colonnen-) *Limites* und den in §§ 1, 2 betrachteten *Doppel-Limites* in sehr allgemeiner Weise feststellen. Zunächst ergiebt sich der folgende Satz:

(I) *Der iterirte untere bezw. obere Limes ist niemals kleiner bezw. grösser, als der entsprechende Doppel-Limes, d. h. man hat stets:*

*) Die Beispiele 7), 8), 11) gelten wiederum auch unmittelbar für die entsprechenden Erscheinungen bezüglich der *Colonnen;* die Beispiele 9), 10) nach Vertauschung von μ und ν.

(67) $$\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \left\{ \begin{array}{l} \leqq \underline{\lim}_{\nu=\infty}\, \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim}_{\nu=\infty}\, \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} \\ \leqq \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, \underline{\lim}_{\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} \leqq \overline{\lim}_{\mu=\infty}\, \overline{\lim}_{\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} \end{array} \right\} \leqq \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}.$$

Beweis. Nach dem Satze in Nr. 2 des vorigen Paragraphen kann man jeden der betreffenden iterirten Limites durch den Limes einer *ächten Theilfolge* ersetzen. Nach § 2, Nr. 5 existirt aber *keine* ächte Theilfolge, deren Grenzwerth $< \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ oder $> \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$: somit ist der fragliche Satz bewiesen. —

Fasst man insbesondere den Fall in's Auge, dass $\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$, so resultirt aus (I) unmittelbar der folgende Specialsatz*):

(Ia) *Man hat stets:*

(68) $$\left. \begin{array}{l} \lim_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} \\ \lim_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} \end{array} \right\} = \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)},$$

sobald der letztere Grenzwerth existirt.

Ist die Doppelfolge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *monoton*, so gilt das gleiche von den Zeilen- und Colonnen-Folgen. In diesem Falle *existiren* also auch $\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$, $\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$, sodass für eine *monotone* Doppelfolge *unter allen Umständen* die Beziehung besteht:

(69) $$\lim_{\nu=\infty} \lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty} \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}. —$$

Aus (68) folgt des weiteren, dass die *Existenz* von $\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ eine *hinreichende* Bedingung für die Beziehung:

(70) $$\lim_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}$$

und diese letztere somit umgekehrt eine *nothwendige* Bedingung für die *Existenz* von $\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ bildet. Daraus ergiebt sich insbesondere, dass $\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ sicher *nicht* existirt, wenn die beiden Grenzwerthe (70) *verschieden* ausfallen. $\left(\text{Beispiele: } \left[\frac{\mu}{\mu+\nu}\right]_1^1,\ \left[2^{-\frac{\nu}{\mu}}\right]_1^1,\ \left[\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)^\nu\right]_1^1\right).$

Andererseits erscheint die *Existenz* von $\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *keineswegs* als *nothwendig* für das Bestehen der Beziehung (70) (s. § 3, Beisp. 3), 4), 5), 6), 10), 11)), diese letztere also *nicht* als *hinreichend* für die *Existenz* von

*) Vgl. Münch. Sitz.-Ber. a. a. O. p. 105; desgl. Bd. 28 (1898), p. 63.

$\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$. Neben den eben citirten Beispielen möchte ich als besonders lehrreich noch das folgende anführen:

$$a_\mu^{(\nu)} = (-1)^\mu \cdot \frac{\mu^2\nu^3}{\mu^3+\nu^6} \qquad (\mu = 1, 2, 3, \cdots; \ \nu = 1, 2, 3, \cdots).$$

Man hat hier zunächst:

$$\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0, \qquad \lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0,$$

also auch:

$$\lim_{\nu=\infty}\lim_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0, \qquad \lim_{\mu=\infty}\lim_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = 0.$$

Ferner ergiebt sich:

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} (-1)^\nu \cdot \frac{\nu^2}{1+\nu^3} = 0,$$

und sogar allgemein, für jedes ganzzahlige $p \geqq 1$, $q \geqq 0$:

$$\lim_{\nu=\infty} a_{p\nu+q}^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} (-1)^{p\nu+q} \cdot \frac{(p\nu+q)^2\,\nu^3}{(p\nu+q)^3+\nu^6} = 0,$$

$$\lim_{\nu=\infty} a_\nu^{(p\nu+q)} = \lim_{\nu=\infty} (-1)^\nu \quad \cdot \frac{\nu^2(p\nu+q)^3}{\nu^3+(p\nu+q)^6} = 0.$$

Die Folge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ hat also die Eigenschaft, dass nicht nur die *iterirten Limites* und der Grenzwerth der *Hauptdiagonale* den Werth 0 haben, sondern dass *alle* in ihr enthaltenen *„geradlinigen“* *) Theilfolgen *gegen* 0 *convergiren.* Nichts destoweniger hat man:

$$a_{\nu^2}^{(\nu)} = (-1)^{\nu^2} \cdot \frac{1}{2}\,\nu$$

also:

$$\lim_{\nu=\infty} a_{\nu^2}^{(\nu)} = \pm\infty, \text{ jenachdem } \nu \textit{ gerade} \text{ oder } \textit{ungerade},$$

und daher:

$$\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = -\infty, \qquad \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty.$$

2. Ebenso wenig wie das Bestehen der Beziehung (70) die *Existenz* von $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ und somit (nach Satz Ia) das *Zusammenfallen* der *iterirten Limites* mit dem *Doppel-Limes* verbürgt, brauchen allgemein der *iterirte untere* und *obere Limes* mit dem *unteren* bezw. *oberen Doppel-Limes* zusammenzufallen. Man bemerke zunächst, dass ein solches Zusammenfallen auf Grund der Beziehung (67) allemal dann stattfindet, wenn der *iterirte untere Limes* den Werth $-\infty$, der *obere* den Werth $+\infty$ hat. Im übrigen

*) Vgl. p. 300, Fussn. 1.

ergiebt sich für das Zusammenfallen der betreffenden Limites zunächst die folgende *hinreichende* Bedingung:

(II) *Sind die Zeilen (Colonnen) der Doppelfolge nach eventuellem Ausschlusse einer endlichen Anzahl* gleichmässig *begrenzt oder unbegrenzt, im Falle* $\overline{\lim}\ \overline{\lim}\ a_\mu^{(\nu)} = +\infty$ oder $\underline{\lim}\ \underline{\lim}\ a_\mu^{(\nu)} = -\infty$ *wenigstens* einseitig gleichmässig *begrenzt, so ist:*

$$(71)\quad \begin{cases} \underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)}, & \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ \overline{\lim}_{\nu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)}, \\ \Big(\text{bezw.}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty}\ \underline{\lim}_{\nu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)}, & \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ \overline{\lim}_{\nu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)}\Big). \end{cases}$$

Beweis. Fall I. Sind die Zeilen zum mindesten für $\nu \geqq n'$ *gleichmässig begrenzt*, und setzt man:

$$(72)\qquad \underline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)}, \qquad \overline{\lim}_{\mu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)},$$

so liegen (s. § 3, Nr. 4) die $\underline{a}^{(\nu)}$, $\bar{a}^{(\nu)}$ für $\nu \geqq n'$ innerhalb endlicher Schranken und zu jedem $\varepsilon > 0$ lässt sich m so fixiren, dass:

$$(73)\qquad \underline{a}^{(\nu)} - \frac{\varepsilon}{3} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für:}\ \mu \geqq m,\ \nu \geqq n'.$$

Wird sodann gesetzt:

$$(74)\qquad \underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{a}^{(\nu)} = \underline{a}, \qquad \overline{\lim}_{\nu=\infty}\ \bar{a}^{(\nu)} = \bar{a},$$

so kann man ein $n \geqq n'$ so annehmen, dass:

$$(75)\qquad \underline{a} - \frac{\varepsilon}{3} \leqq \underline{a}^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} \leqq \bar{a} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{für:}\ \nu \geqq n,$$

sodass sich durch Combination von (73) und (75) ergiebt:

$$(76)\qquad \underline{a} - \frac{2\varepsilon}{3} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a} + \frac{2\varepsilon}{3} \quad \text{für:}\ \mu \geqq m,\ \nu \geqq n.$$

Da hiernach die $a_\mu^{(\nu)}$ für $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$ innerhalb endlicher Schranken bleiben, so hat man:

$$(77)\qquad \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} = \underline{A}, \qquad \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty}\ a_\mu^{(\nu)} = \bar{A},$$

wo $\underline{A}$, $\bar{A}$ bestimmte Zahlen vorstellen. Wegen der Bedeutung dieser Zahlen $\underline{A}$, $\bar{A}$ (s. § 2, Ungl. 24) giebt es alsdann *ächte Theilfolgen* $\left(a_{m_\nu}^{n_\nu}\right)$, $\left(a_{p_\nu}^{q_\nu}\right)$, sodass:

$$(78)\qquad a_{m_\nu}^{(n_\nu)} \leqq \underline{A} + \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \bar{A} - \frac{\varepsilon}{3} \leqq a_{p_\nu}^{(q_\nu)}.$$

Da es hierbei freisteht, von vornherein $m_\nu \geqq m$, $n_\nu \geqq n$ anzunehmen und andererseits die Ungleichungen (76) bestehen bleiben, wenn man die *beliebigen* μ, ν durch die *specielleren* m_ν, n_ν bezw. p_ν, q_ν ersetzt, so resultiren aus der Verbindung von (76) und (78) die folgenden Beziehungen:

$$\underline{a} - \frac{2\varepsilon}{3} \leqq \underline{A} + \frac{\varepsilon}{3}, \qquad \bar{A} - \frac{\varepsilon}{3} \leqq \bar{a} + \frac{2\varepsilon}{3},$$

anders geschrieben:

(79) $$\underline{a} \leqq \underline{A} + \varepsilon, \qquad \bar{a} \geqq \bar{A} - \varepsilon,$$

d. h., da ε jede *noch so kleine* positive Zahl vorstellen kann:

(80) $$\underline{a} \leqq \underline{A}, \qquad \bar{a} \geqq \bar{A}$$

und, da die Möglichkeit $\underline{a} < \underline{A}$, $\bar{a} > \bar{A}$ durch Satz I (Ungl. (67)) definitiv ausgeschlossen erscheint, schliesslich:

(81) $$\underline{a} = \underline{A}, \qquad \bar{a} = \bar{A},$$

d. h.

(82) $$\underline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}, \qquad \overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}. —$$

Fall II. Es seien jetzt die Zeilen für $\nu \geqq n'$ *gleichmässig unbegrenzt*, also (s. Ungl. (66)) etwa:

(83) $$a_\mu^{(\nu)} > G \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n \geqq n'.$$

Daraus ergiebt sich zunächst, dass auch:

$$\underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} > G \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n,$$

und daher:

(84) $\underline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = +\infty$, also *a fortiori* auch: $\overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = +\infty$.

Sodann folgt aber aus Ungl. (67) oder auch unmittelbar aus der Vergleichung der Bedingung (83) mit derjenigen für die *eigentliche Divergenz der Doppelfolge* (§ 1, Ungl. (3a))*), dass auch:

(85) $$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty,$$

sodass also schliesslich:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = +\infty,$$

---

*) Die analytische Formulirung derjenigen Eigenschaft, welche hier als „*gleichmässige Unbegrenztheit*" der Zeilen bezeichnet wird, ist in Wahrheit mit der nothwendigen und hinreichenden Bedingung für die *eigentliche Divergenz* der Doppelfolge *identisch*.

oder einfacher geschrieben:

(86a) $$\lim_{\nu=\infty} \overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty.$$

Analog ergiebt sich im Falle:

$$a_\mu^{(\nu)} < -G \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n \geqq n',$$

dass:

(86b) $$\lim_{\nu=\infty} \overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = -\infty.$$

Fall III. Es sei:

$$\overline{\lim_{\nu=\infty}}\, \overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty, \text{ dagegen } \underline{\lim_{\nu=\infty}}\, \underline{\lim_{\mu=\infty}} \equiv \lim_{\nu=\infty} \underline{a}^{(\nu)} = \underline{a} \text{ (endlich)}$$

und die Zeilen für $\nu \geqq n'$ in Bezug auf die $\underline{a}^{(\nu)}$ *gleichmässig begrenzt*, sodass also:

(87) $$\underline{a}^{(\nu)} - \frac{\varepsilon}{3} < a_\mu^{(\nu)} \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n'.$$

Alsdann lässt sich wiederum ein $n \geqq n'$ so fixiren, dass:

(88) $$\underline{a} - \frac{\varepsilon}{3} \leqq \underline{a}^{(\nu)} \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n,$$

sodass also:

(89) $$\underline{a} - \frac{2\varepsilon}{3} \leqq a_\mu^{(\nu)} \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n.$$

Da sodann: $\underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} \leqq \underline{\lim}_{\nu=\infty}\, \underline{\lim}_{\mu=\infty}\, a_\mu^{(\nu)}$ d. h. $\leqq \underline{a}$ und andererseits für *alle* $a_\mu^{(\nu)}$ bei $\mu \geqq m$, $\nu \geqq n$ nach Ungl. (89) $a_\mu^{(\nu)} \geqq \underline{a} - \frac{2\varepsilon}{3}$, so ist:

(90) $$\underline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{A}$$

eine bestimmte endliche Zahl.

Es existirt daher wiederum eine *ächte Theilfolge* $\left(a_{m_\nu}^{(n_\nu)}\right)$, sodass (s. § 2, Ungl. (24)):

(91) $$a_{m_\nu}^{(n_\nu)} \leqq \underline{A} + \frac{\varepsilon}{3}.$$

Daraus folgt aber in Verbindung mit Ungl. (89), dass:

(92) $$\underline{a} - \frac{2\varepsilon}{3} \leqq \underline{A} + \frac{\varepsilon}{3} \quad \text{d. h.} \quad \underline{a} \leqq \underline{A} + \varepsilon$$

und schliesslich, genau wie im Falle I:

(93a) $$\underline{a} = \underline{A} \quad \text{d. h.} \quad \underline{\lim_{\nu=\infty}}\, \underline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}.$$

Ueberdies ergiebt sich aus der Voraussetzung: $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = +\infty$ auf Grund von Ungl. (67), dass auch:

$$\text{(93b)} \qquad \overline{\lim_{\mu,\nu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = +\infty, \quad \text{also:} \quad = \overline{\lim_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}.$$

Das analoge gilt sodann im Falle: $\underline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = -\infty$, $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}$.—

Da sich die vorstehenden Betrachtungen ohne weiteres auch auf die *Colonnen* übertragen lassen, so erscheint hiermit der oben ausgesprochene Satz in allen seinen Theilen bewiesen.

3. Nimmt man im Falle I des vorigen Satzes $\underline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}$ und $\overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\ \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}$ als *zusammenfallend* an, so gewinnt man unmittelbar den folgenden Specialsatz:

(IIa) *Sind die Zeilen der Doppelfolge* $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *nach eventuellem Ausschlusse einer endlichen Anzahl* gleichmässig begrenzt *und* existirt:

$$\lim_{\nu=\infty}\ \overline{\underline{\lim_{\mu=\infty}}}\ a_\mu^{(\nu)} = a\ ^{*)},$$

so convergirt *die Doppelfolge und man hat:*

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = a.$$

Zugleich gestattet der Fall (II) des obigen Satzes die folgende Formulirung:

(IIb) *Sind die Zeilen der Doppelfolge* $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *nach eventuellem Ausschlusse einer endlichen Anzahl* gleichmässig unbegrenzt, *so ist nicht nur:*

$$\lim_{\nu=\infty}\ \overline{\underline{\lim_{\mu=\infty}}}\ a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bezw.} \quad = -\infty,$$

sondern die Doppelfolge selbst ist eigentlich divergent, *sodass also:*

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \text{bezw.} \quad = -\infty.$$

Das analoge gilt wiederum bezüglich der *Colonnen.*

Die Sätze (IIa), (IIb) zeigen insbesondere, dass für die *Convergenz* bezw. *eigentliche Divergenz* der Doppelfolge die *Convergenz* bezw. *eigentliche*

*) Dass in diesem Falle $\lim\limits_{\nu=\infty}\ \overline{\underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}}\ a_\mu^{(\nu)}$ stets eine *endliche Zahl* a ist, folgt unmittelbar aus der Voraussetzung der *gleichmässigen Begrenzung:* denn diese erheischt, dass $\underline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}$, $\overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\ a_\mu^{(\nu)}$ zum mindesten für $\nu \geqq m$ zwischen zwei endlichen Schranken bleiben (s. § 3, Nr. 4).

Divergenz keiner einzigen Zeile (Colonne) erforderlich ist. (Beispiel einer *convergenten* Doppelfolge mit durchweg *oscillirenden* Zeilen s. § 3, Nr. 4, Beisp. 7); eigentlich *divergente* Folge mit durchweg *convergenten* Zeilen: ebendas. Beisp. 9); eigentlich *divergente* Folge, deren Zeilen *innerhalb endlicher Grenzen oscilliren:* $[(2+(-1)^{\mu})\nu]_0^0$; eigentlich *divergente* Folge, deren Zeilen einen *endlichen unteren* und *unendlichen oberen Limes* besitzen: a. a. O. Beisp. 10)).

3. Ich will nun untersuchen, in wieweit die in Satz (II), (IIa), (IIb) angegebenen, für das Zusammenfallen der *iterirten* und der entsprechenden *Doppel*-Limites *hinreichenden* Bedingungen sich zugleich auch als *nothwendige* erweisen, d. h. in wieweit die betreffenden Sätze *umkehrbar* sind.

Dass dies für den *allgemeinen* Satz (II) *nicht* der Fall ist, sodass man also aus den Beziehungen:

$$\underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}, \quad \overline{\lim}_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$$

nicht auf die *gleichmässige* Begrenztheit oder Unbegrenztheit der Zeilen schliessen darf, zeigt die folgende Ueberlegung. Es sei $\left(b_\mu^{(\nu)}\right)$ eine Folge mit *gleichmässig begrenzten* Zeilen und:

$$(94)\quad \underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty} b_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} b_\mu^{(\nu)} = \underline{b}, \quad \overline{\lim}_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}_{\mu=\infty} b_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} b_\mu^{(\nu)} = \bar{b}, \quad \underline{b} < \bar{b}.$$

Bedeutet sodann $\left(c_\mu^{(\nu)}\right)$ eine Folge mit *ungleichmässig begrenzten* Zeilen, für welche:

$$(95)\quad \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} c_\mu^{(\nu)} = \underline{c} \leqq \underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty} c_\mu^{(\nu)}, \quad \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} c_\mu^{(\nu)} = \bar{c} \geqq \overline{\lim}_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}_{\mu=\infty} c_\mu^{(\nu)},$$

$$(96)\quad \underline{b} < \underline{c} \leqq \bar{c} < \bar{b},$$

so bilde man aus den Termen der beiden Doppelfolgen $\left(b_\mu^{(\nu)}\right)$, $\left(c_\mu^{(\nu)}\right)$ eine einzige $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ indem man setzt:

$$(97)\quad a_\mu^{(2\nu)} = b_\mu^{(\nu)}, \quad a_\mu^{(2\nu+1)} = c_\mu^{(\nu)} \quad (\mu = 0, 1, 2, \cdots, \ \nu = 0, 1, 2, \cdots)$$

(d. h. die Zeilen der Folge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ bestehen abwechselnd aus den Zeilen der beiden Folgen $\left(b_\mu^{(\nu)}\right)$, $\left(c_\mu^{(\nu)}\right)$. Alsdann hat man offenbar:

$$(98)\quad \underline{\lim}_{\nu=\infty}\ \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{b}, \quad \overline{\lim}_{\nu=\infty}\ \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \overline{\lim}_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \bar{b},$$

obschon die Zeilen der Folge $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *nicht mehr gleichmässig* begrenzt sind.

In analoger Weise kann man aus einer Folge mit *einseitig gleichmässig begrenzten* oder *gleichmässig unbegrenzten* Zeilen durch Einschaltung der Zeilen einer anderen Folge eine solche bilden, welche jene Eigenschaft nicht mehr besitzt, während die in Frage kommenden Limites unverändert bleiben.

Hiergegen lassen sich die *speciellen* Sätze (IIa), (IIb) in folgender Weise umkehren:

(IIIa) *Existirt* $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ *als endliche Zahl* A, *in welchem Falle dann (nach Satz* (Ia) *auch:*

$$\lim_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = A,$$

so sind die Zeilen und Colonnen mit eventuellem Ausschluss einer endlichen Anzahl gleichmässig begrenzt.

Beweis. Aus der Voraussetzung $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = A$ folgt zunächst, dass zu jedem $\varepsilon > 0$ zwei natürliche Zahlen m, n' fixirt werden können, dass:

$$(99) \qquad A - \frac{\varepsilon}{2} \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq A + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n'.$$

Da sodann auch:

$$\lim_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = A$$

so erkennt man, dass die $\underline{\lim}\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$, $\overline{\lim}\limits_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)}$ zum mindesten von einem bestimmten Index ν ab *endliche* Zahlen sein müssen, etwa:

$$(100) \qquad \underline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \underline{a}^{(\nu)}, \qquad \overline{\lim}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \bar{a}^{(\nu)},$$

und dass sodann:

$$(101) \qquad A - \frac{\varepsilon}{2} \leqq \left\{ \begin{matrix} \underline{a}^{(\nu)} \\ \bar{a}^{(\nu)} \end{matrix} \right\} \leqq A + \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{etwa für:} \quad \nu \geqq n''.$$

Man hat also insbesondere:

$$(102) \qquad \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq A - \frac{\varepsilon}{2}, \quad A + \frac{\varepsilon}{2} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für:} \quad \nu \geqq n''$$

und daher, wenn n eine Zahl bedeutet, die nicht kleiner als n' und n'', durch Verbindung der Ungleichungen (102) und (99):

$$(103) \qquad \underline{a}^{(\nu)} - \varepsilon \leqq a_\mu^{(\nu)} \leqq \bar{a}^{(\nu)} + \varepsilon \quad \text{für:} \quad \mu \geqq m, \quad \nu \geqq n$$

d. h. die *Zeilen* der Doppelfolge sind *gleichmässig begrenzt*. Das analoge gilt dann wiederum für die Colonnen. —

(IIIb) *Besteht eine der drei Beziehungen:*

$$\lim_{\nu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\mu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty, \quad \lim_{\mu=\infty} \overline{\underline{\lim}}_{\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty, \quad \lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty,$$

(bezw. $= -\infty$), *in welchem Falle (nach Satz* (I) *und* (Ia) *dann allemal auch die beiden anderen erfüllt sind, so sind die*

Zeilen und Colonnen mit eventuellem Ausschluss einer endlichen Anzahl gleichmässig unbegrenzt.

Dieser letztere Satz bedarf keines weiteren Beweises. Da man nämlich, wie schon in seiner Fassung enthalten, allemal von vornherein $\lim\limits_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = +\infty$ bezw. $-\infty$ annehmen kann, so besteht die *Divergenz-Bedingung* (3a) (s. § 1), welche mit der Eigenschaft der *„gleichmässigen Unbegrenztheit"* identisch ist (vgl. Fussn. 1), p. 316).

Durch Zusammenfassung der Sätze (IIa), (IIIa) bezw. (IIb), (IIIb) und Berücksichtigung von (Ia) gewinnt man schliesslich noch die folgenden allgemeinsten Sätze dieser Art:

(IVa) *Für die Convergenz der Doppelfolge* $\left(a_\mu^{(\nu)}\right)$ *ist nothwendig und hinreichend, dass die Zeilen oder Colonnen mit eventuellem Ausschluss einer endlichen Anzahl gleichmässig begrenzt sind und dass* $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ *bezw.* $\lim\limits_{\mu=\infty} \overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ *existirt. Ist diese Bedingung für die Zeilen und* $\lim\limits_{\nu=\infty} \overline{\lim\limits_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$ *erfüllt, so besteht sie auch für die Colonnen und* $\lim\limits_{\mu=\infty} \overline{\lim\limits_{\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}$, *vice versa, und man hat dann allemal:*

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\mu=\infty} \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)}.$$

(IVb) *Für die eigentliche Divergenz der Doppelfolge ist nothwendig und hinreichend, dass die Zeilen oder Colonnen mit eventuellem Ausschluss einer endlichen Anzahl gleichmässig unbegrenzt sind. Ist diese Bedingung für die Zeilen erfüllt, so besteht sie auch für die Colonnen, vice versa, und man hat dann allemal:*

$$\lim_{\mu,\nu=\infty} = \lim_{\mu=\infty} \overline{\lim_{\nu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = \lim_{\nu=\infty} \overline{\lim_{\mu=\infty}}\, a_\mu^{(\nu)} = +\infty \quad \textit{bezw.} \quad = -\infty.$$

München, December 1896 und Juni 1899.