

Über Gitterpunkte in der Ebene.

Von

J. G. van der Corput in Utrecht.

Wenn man die elementaren Gitterpunktanzahlungen außer Betracht läßt, so waren bis vor kurzem von nur wenigen ebenen Bereichen Gitterpunktanzahlungen bekannt, und zwar:

1. beim Bereiche $uv \leq x$, $u \geq 1$ und $v \geq 1$ durch Voronoï¹⁾ 1903 mit einem Fehler der Größenordnung $O(\sqrt[3]{x} \log x)$, mittels einer eigenen ganz im Gebiete der reellen Analysis verlaufenden Methode;

2. beim Kreise $u^2 + v^2 \leq x$ durch Herrn Sierpiński²⁾ 1906 mit der Fehlerabschätzung $O(\sqrt[3]{x})$, mittels der Voronoischen Methode;

3. durch Herrn Landau³⁾ 1912 und 1915 mittels einer eigenen kom-

¹⁾ G. Voronoï, Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques, Journal für die reine und angewandte Mathematik, 126 (1903), S. 241–282.

²⁾ W. Sierpiński, O pewnym zagadnieniu z rachunku funkcji asymptotycznych, Prace matematyczno-fizyczne, 17 (1906), S. 77–118. (S. 115–118: Sur un problème du calcul des fonctions asymptotiques (résumé)).

³⁾ E. Landau. a) Über die Anzahl der Gitterpunkte in gewissen Bereichen, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse.

Erste Abhandlung, Jahrgang 1912, S. 687–771.

Zweite Abhandlung, Jahrgang 1915, S. 209–248.

Dritte Abhandlung, Jahrgang 1917, S. 96–101.

b) Über einen Satz des Herrn Sierpiński, Giornale di Matematiche di Battaglini, 51 (1913), S. 73–81.

c) Zur analytischen Zahlentheorie der definiten quadratischen Formen (Über die Gitterpunkte in einem mehrdimensionalen Ellipsoid), Sitzungsberichte der Königlich Preussischen Akademie der Wissenschaften, physikalisch-mathematische Klasse, (1915), S. 458–476.

d) Über eine Aufgabe aus der Theorie der quadratischen Formen, Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturw. Klasse, 124, Abt. IIa (1915), S. 445–468.

plex-funktionentheoretischen Methode, bei dem in 1. erwähnten Bereiche mit dem Restgliede $O(\sqrt[3]{x} \log x)$ und bei der Ellipse

$$(1) \quad au^2 + 2buv + cv^2 + 2du + 2ev + f \leq x$$

mit dem Restgliede $O(\sqrt[3]{x})$; Herr Landau hat auch mehrdimensionale Gitter mit beliebigem Ausgangspunkte und beliebigen Weiten betrachtet, doch bleiben solche in dieser Abhandlung außer Betracht;

4. durch Herrn Landau⁴⁾ 1912 und 1915 bei den in 1. und 3. genannten Bereichen mit denselben Restgliedern mittels einer ganz im Gebiete der reellen Analysis verlaufenden Methode, welche ihrem Grundgedanken nach von Pfeiffer⁵⁾ herrührt, aber von Herrn Landau nach genauer Begründung für die Zahlentheorie in weitestgehender Weise nutzbar gemacht worden ist;

5. bei dem im Klassenzahlproblem auftretenden Bereiche

$$u \geq \mu, \quad v \geq \mu, \quad uv \leq \frac{\mu^2}{4} + x$$

für $1 \leq \mu \leq 2\sqrt{\frac{x}{3}}$ durch Herrn Landau⁶⁾ 1912 mittels der Pfeifferschen

e) Über Dirichlets Teilerproblem, Sitzungsberichte der Königl. Bayerischen Akademie der Wissenschaften, mathematisch-physikalische Klasse, (1915), S. 317–328.

f) Über die Heekesche Funktionalgleichung, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse, (1917), S. 102–111.

g) Einführung in die elementare und analytische Theorie der algebraischen Zahlen und der Ideale (Leipzig und Berlin (Teubner) 1918) (143 S.), S. 181.

h) Über Ideale und Primideale in Idealklassen, Mathematische Zeitschrift, 2 (1918) (S. 52–154), S. 53 und 153.

⁴⁾ E. Landau. a) Die Bedeutung der Pfeifferschen Methode für die analytische Zahlentheorie, Sitzungsberichte der Kaiserlichen Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturw. Klasse, 121, Abt. IIa (1912), S. 2195–2332.

b) Über die Zerlegung der Zahlen in zwei Quadrate, Annali di Matematica pura ed applicata, III, 20 (1913), S. 1–28.

c) Über die Gitterpunkte in einem Kreise, Nachrichten von der Königlichen Gesellschaft der Wissenschaften zu Göttingen, mathematisch-physikalische Klasse. Erste Mitteilung, Jahrgang 1915, S. 148–160; Zweite Mitteilung, Jahrgang 1915, S. 161–171.

d) Neue Untersuchungen über die Pfeiffersche Methode zur Abschätzung von Gitterpunktanzahlen, Sitzungsberichte der Kaiserl. Akademie der Wissenschaften in Wien, mathem.-naturw. Klasse, 124, Abt. IIa (1915), S. 469–505.

⁵⁾ E. Pfeiffer, Über die Periodizität in der Teilbarkeit der Zahlen und über die Verteilung der Klassen positiver quadratischer Formen auf ihre Determinanten, Jahresbericht der Pfeifferschen Lehr- und Erziehungsanstalt zu Jena über das Schuljahr von Ostern 1885 bis Ostern 1886, (1886), S. 1–21.

⁶⁾ E. Landau, Fußnote ^{a)} l. c., S. 2198–2202; 2246–2283; S. 2252.

Methode mit einem Fehler, der, und zwar gleichmäßig in μ , von der Größenordnung $O(\sqrt[3]{x} \log x)$ ist;

6. beim Gebiete $|u|^n + |v|^n \leq x$ für $n \geq 2$ durch Cauer⁷⁾ 1914 mit der Fehlerabschätzung $O\left(x^{\frac{2(n-1)}{3(2n-1)}}\right)$ mittels der Pfeifferschen Methode;

7. beim Bereiche

$$a_0 |u|^n + a_1 |u|^{n-1} v + \dots + a_n v^n \leq x,$$

wobei die Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_n verschiedenen Bedingungen genügen, durch Cauer⁸⁾ 1914 mit dem Restgliede $O\left(x^{\frac{2}{3n}}\right)$, wiederum mittels der Pfeifferschen Methode;

8. bei dem Hyperbelsektor $0 \leq v < \frac{p}{q} u$ und $\alpha u^2 - \beta uv + \gamma v^2 \leq x$ (α, β, γ, p und q sind positive ganze Zahlen) durch Herrn Hammerstein⁹⁾ 1919 mit einem Fehler der Größenordnung $O(\sqrt[3]{x})$, ebenfalls mittels der Pfeifferschen Abschätzungsmethode.

In meiner Dissertation¹⁰⁾ habe ich die Voronoische¹¹⁾ und die Pfeiffersche Methode vereinfacht und angewandt auf eine Klasse von Bereichen, welche die sechs oben erwähnten Bereiche enthält; diese Bereiche werde ich Voronoï-Pfeiffersche Bereiche¹²⁾ nennen und auf folgende Weise definieren: Ein VP.-Bereich ist eine im Endlichen gelegene Punktmenge, welche begrenzt wird von einer aus n Strecken λ_ν ($n \geq 0$; $\nu = 1, 2, \dots, n$) und m konvexen¹³⁾ Jordanbogen σ_μ ($m \geq 0$; $\mu = 1, 2, \dots, m$) zusammen-

⁷⁾ D. Cauer, Neue Anwendungen der Pfeifferschen Methode zur Abschätzung zahlentheoretischer Funktionen, Inauguraldissertation, 55 S., Göttingen (W. Fr. Kaestner) 1914.

⁸⁾ D. Cauer, Über die Pfeiffersche Methode, Mathematische Abhandlungen, Hermann Amandus Schwarz zu seinem fünfzigjährigen Doktorjubiläum am 6. August 1914 gewidmet, Berlin (Julius Springer) 1914, S. 432–447.

⁹⁾ A. Hammerstein, Zwei Beiträge zur Zahlentheorie, Inauguraldissertation, 76 S.; S. 3–59, Göttingen (W. Fr. Kaestner) 1919.

¹⁰⁾ J. G. van der Corput. a) Over roosterpunten in het platte vlak (De betekenis van de methoden van Voronoï en Pfeiffer), 128 S., Leiden (P. Noordhoff, Groningen) 1919.

b) In der Abhandlung: Over definiëte kwadratische vormen, Nieuw Archief voor Wiskunde, 13, (1919) S. 125–140 wird die Pfeiffersche Methode auf ein beliebiges mehrdimensionales Ellipsoid angewandt.

¹¹⁾ Hiermit ist das von Herrn Landau [Fußnote 4) a) l. c., S. 2205] ausgesprochene Desideratum erfüllt: „Natürlich würde ich mich sehr freuen, wenn von anderer Seite auch die Anwendbarkeit der Voronoïschen Methode auf meine oder andere Probleme untersucht würde.“

¹²⁾ Abgekürzt: VP.-Bereiche.

¹³⁾ Ein Jordanbogen (d. h. das umkehrbar eindeutig stetige Bild einer Strecke) heiße konvex, falls er mit jeder Geraden höchstens zwei verschiedene Punkte gemeinsam hat.

gesetzten einfachen geschlossenen Kurve, wobei die nachstehenden Bedingungen A und B erfüllt sind:

A. Jede Strecke λ_v sei entweder senkrecht zur u -Achse oder bilde dieser einen Winkel von rationaler Tangente. Die Gleichung $a_v u + b_v v = c_v$ der Strecke λ_v werde dann, was eindeutig möglich ist, so geschrieben, daß die Koeffizienten a_v und b_v ganzzahlig und teilerfremd¹⁴⁾ sind, und daß $a_v u + b_v v < c_v$ ist für alle Innenpunkte des Bereiches in der Nähe eines beliebigen Innenpunktes der Strecke λ_v .

B. Jeder Jordanbogen σ_μ habe einen gegebenen Richtungssinn und in jedem Punkte P eine, jedoch nicht mehr als eine Tangente (d. h., daß in jedem Punkte P des Jordanbogens, mit Ausschluß seiner Endpunkte, die vordere und hintere Tangente zusammenfallen), wobei der Winkel τ , den diese Tangente mit der positiven u -Achse bildet, sich monoton und stetig ändert, wenn P sich monoton und stetig über σ_μ bewegt, und die Koordinaten von P seien eindeutige differentiierebare¹⁵⁾ Funktionen $u(\tau)$ und $v(\tau)$ von τ (in dem von τ durchlaufenen Intervall) mit stetigen Derivierten $\frac{du(\tau)}{d\tau}$ und $\frac{dv(\tau)}{d\tau}$; infolgedessen besitzt der Bogen σ eine Länge s , die wir positiv rechnen im Sinne von σ , negativ im entgegengesetzten.

In der Voraussetzung B ist τ nur modulo 2π bestimmt, weil negative Werte und Werte $\geq 2\pi$ nicht ausgeschlossen sind; aus der Konvexität von σ_μ geht aber hervor, daß die Länge des von τ durchlaufenen Intervalls $\leq 2\pi$ ist. Der Punkt P durchlaufe nun den konvexen Jordanbogen σ_μ stetig und monoton. Die monotone und stetige Veränderliche τ ist dann bei dem gegebenen Richtungssinne der Kurve in allen Punkten von σ_μ bestimmt, sobald sie in einem Punkte gegeben ist, so daß es genügt, den Wert von τ in einem Punkte von σ_μ , z. B. in einem der Endpunkte, festzulegen. Weil die Koordinaten von P eindeutige Funktionen von τ sein sollen, ist streckenweises Konstantbleiben von τ ausgeschlossen; τ nimmt also bei der Bewegung von P beständig zu oder beständig ab.

Es sei jetzt in jedem Punkte P von σ_μ der Krümmungsradius $\varrho(\tau)$ definiert durch $\frac{ds}{d\tau}$; wegen Voraussetzung B und

$$u'(\tau) = \varrho(\tau) \cos \tau, \quad v'(\tau) = \varrho(\tau) \sin \tau$$

ist $\varrho(\tau)$ eine stetige Funktion von τ in dem von τ durchlaufenen Intervall.

In meiner Dissertation beweise ich einen sehr allgemeinen Satz über VP.-Bereiche, sowohl mit der Voronöischen als mit der Pfeifferschen Methode, und leite dann aus diesem Satze alle bisher bekannten und viele

¹⁴⁾ Hierbei heiße 0 teilerfremd zu 1 und -1 , aber nicht teilerfremd zu irgend-einer anderen ganzen Zahl.

¹⁵⁾ In den Endpunkten nur einseitig.

neue Gitterpunktabschätzungen ebener Bereiche ab. Auf Rat des Herrn Landau gebe ich hier den Beweis dieses Satzes nach der Voronoischen Methode, weil diese Methode bisher nur auf die unter 1. und 2. genannten Gebiete angewandt wurde, um diesen Beweis zu verstehen, braucht der Leser jedoch weder die Voronoische Methode noch meine Dissertation zu kennen. Weil der Formulierung des Satzes einige Definitionen vorangehen müssen, nenne ich hier vorläufig schon ein einfaches Korollar, das zwar viel weniger tief liegt, aber trotzdem die in 2., 7. und 8. erwähnten Ergebnisse und auch die in 3. genannte Gitterpunktabschätzung der Ellipse (1) als Spezialfälle enthält, nämlich.

Es sei G ein Element einer Menge von VP.-Bereichen, welche man eindeutig den positiven Zahlen zuordnen kann, und es sei x die dem Element G entsprechende Zahl. Falls dann die in obenstehender Definition genannten Zahlen m , n , a_r und b_r beschränkt sind (d. h. absolut genommen unterhalb einer festen, von x unabhängigen Schranke liegen) und bei jedem Jordانبogen σ_r der absolut größte Wert des Krümmungsradius $O(\sqrt{x})$ bei wachsendem r ist, dann ist die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande des Bereiches G

$$J(G) = \sum_{r=1}^n \psi(c_r) l_r \quad O(\sqrt{x}),$$

In dieser Formel bezeichnet $J(G)$ den Flächeninhalt von G , l_r die Länge der Strecke λ_r , und wir haben gesetzt

$$\psi(c_r) = c_r - [c_r] - \frac{1}{2}.$$

Bevor ich diese Einleitung schließe, möchte ich noch Herrn Landau danken für die große Freundlichkeit, daß er 1918 ein Manuskript von meiner Hand gelesen und mit vielen wertvollen fördernden Winken und ausführlichen Literaturangaben versehen hat. Diese von mir sehr geschätzten Bemerkungen brachten mich dazu, meine Dissertation und die vorliegende Note gänzlich umzuarbeiten. Auch bin ich Herrn Landau sehr verpflichtet für eine Reihe von Verbesserungen, die er vor der Drucklegung bei diesem Artikel angebracht hat.

Ehe wir nunmehr den hier zu beweisenden Hauptsatz formulieren, seien einige Erklärungen vorausgeschickt:

Es sei G ein beliebiger VP.-Bereich und P ein beliebiger Punkt. Falls P nicht einen Eckpunkt von G bildet, setzen wir $\Theta(G, P) = 1, 0$ oder $\frac{1}{2}$, je nachdem P innerhalb, außerhalb oder auf dem Rande von G liegt; bildet P einen Eckpunkt von G und zwar den gemeinschaftlichen Punkt zweier geraden Randstrecken, dann verstehen wir unter $2\pi \Theta(G, P)$

den zwischen 0 und 2π enthaltenen Winkel, welcher von diesen Randstrecken eingeschlossen wird und in der Umgebung von P an derselben Seite dieser Strecken liegt wie G selbst; bildet P schließlich einen anderen Eckpunkt von G , so definieren wir $\Theta(G, P)$ auf ähnliche Weise, mit der Maßgabe, daß ein Jordanbogen σ_μ , der in P endet, durch die Tangente in P ersetzt wird. Aus dieser Definition von $\Theta(G, P)$ geht unmittelbar hervor

$$(2) \quad \Theta(G, P) = \Theta(G_1, P) + \Theta(G_2, P),$$

wenn G in zwei VP.-Bereiche G_1 und G_2 zerlegt wird.

Es bezeichne $A(G)$ die Summe $\sum \Theta(G, P)$, ausgedehnt über alle Gitterpunkte P der Ebene, d. h. es sei $A(G)$ die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande des Gebietes G , falls Eckpunkte mit einem bestimmten Betrage und andere Randpunkte mit $\frac{1}{2}$ in Anschlag gebracht werden. Wegen (2) ist

$$A(G) = A(G_1) + A(G_2).$$

Wird nun $g_1(c_v) = 0$ oder $\psi(c_v)$ gesetzt, je nachdem c_v ganz oder nicht ganz ist, und setzen wir weiter

$$L(G) = \sum_{v=1}^n \frac{g_1(c_v) l_v}{\sqrt{a_v^2 + b_v^2}},$$

so ist ebenfalls

$$L(G) = L(G_1) + L(G_2).$$

Denn beide Seiten enthalten ja dieselben Glieder außer den rechts auftretenden Beiträgen der im gemeinschaftlichen Rande von G_1 und G_2 vorkommenden Strecken, und die Beiträge solcher einer Strecke $au + bv = c$ zu $L(G_1)$ und $L(G_2)$ sind (von der Reihenfolge abgesehen) bzw.

$$\frac{g_1(c)l}{\sqrt{a^2 + b^2}} \quad \text{und} \quad \frac{g_1(-c)l}{\sqrt{(-a)^2 + (-b)^2}},$$

weil G_1 und G_2 an verschiedenen Seiten der Strecke liegen, und wegen $g_1(-c) = -g_1(c)$ verschwindet der Beitrag dieser Strecke zu $L(G_1) + L(G_2)$.

Wenn wir schließlich

$$T(G) = A(G) - J(G) + L(G)$$

setzen, so ist auch

$$T(G) = T(G_1) + T(G_2),$$

und hieraus folgt, falls G die algebraische Summe der endlich vielen VP.-Bereiche G_1, G_2, \dots ist, daß $T(G)$ die algebraische Summe von $T(G_1), T(G_2), \dots$ ist.

Das Ziel dieser Note ist nun, mittels der Voronoischen Methode folgenden Satz zu beweisen:

Es sei der VP.-Bereich $G^{16)}$ begrenzt von einer Strecke parallel zur u -Achse, von zwei Strecken parallel zur v -Achse und von einem Jordanbogen σ , welcher der Voraussetzung B genügt, und wobei τ das Intervall (α, β) $\left(\frac{\pi}{2} > \beta > \alpha > 0\right)$ durchläuft¹⁷⁾. Wenn dann r eine Zahl bezeichnet, die größer als $(\cotg \alpha + 1)^3$ und größer als der absolute Betrag des Krümmungsradius in jedem Punkte von σ ist, so ist die Anzahl der Gitterpunkte auf σ kleiner als $16 r^{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} \beta$ und

$$T(G) < 106 r^{\frac{3}{2}} \operatorname{tg} \beta^{18)}.$$

Wir zerlegen den Beweis in mehrere Teile.

I. Es sei G zunächst ein beliebiger VP.-Bereich. Es ist klar, daß G durch die lineare Substitution

$$u = \alpha \bar{u} + \beta \bar{v}, \quad v = \gamma \bar{u} + \delta \bar{v},$$

wo $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganz sind und $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ ist, in einen VP.-Bereich \bar{G} transformiert wird, und daß man die Gitterpunkte P vor der Transformation eindeutig den Gitterpunkten \bar{P} nach der Transformation zuordnen kann. Nach der Definition von $\Theta(G, P)$ ist dann $\Theta(G, P) = \Theta(\bar{G}, \bar{P})$, mit etwaiger Ausnahme der Eckpunkte; aber jedenfalls ist $1 \geq \Theta(G, P) \geq 0$ und $1 \geq \Theta(\bar{G}, \bar{P}) \geq 0$, so daß die Differenz zwischen $A(G)$ und $A(\bar{G})$ absolut genommen höchstens gleich der Anzahl der Eckpunkte von G ist. Die Strecke λ_r mit der Gleichung $a_r u + b_r v = c_r$ wird durch die Substitution transformiert in die Strecke $\bar{\lambda}_r$ mit der Gleichung

$$(a_r \alpha + b_r \gamma) \bar{u} + (a_r \beta + b_r \delta) \bar{v} = c_r.$$

Nach der Voraussetzung A sind die Koeffizienten a_r und b_r ganzzahlig und teilerfremd, während für jeden Innenpunkt u_0, v_0 von G , der in der Umgebung eines inneren Punktes der Strecke λ_r liegt, $a_r u_0 + b_r v_0 < c_r$ ist. Die Koeffizienten $a_r \alpha + b_r \gamma$ und $a_r \beta + b_r \delta$ sind auch ganz und teilerfremd; denn ein gemeinsamer Teiler würde ebenfalls in

und

$$\begin{aligned} \delta(a_r \alpha + b_r \gamma) - \gamma(a_r \beta + b_r \delta) &= \pm a_r \\ -\beta(a_r \alpha + b_r \gamma) + \alpha(a_r \beta + b_r \delta) &= \pm b_r \end{aligned}$$

aufgehen. Wenn weiter \bar{u}_0, \bar{v}_0 den transformierten Punkt zu u_0, v_0 bezeichnet, so ist

$$(a_r \alpha + b_r \gamma) \bar{u}_0 + (a_r \beta + b_r \delta) \bar{v}_0 = a_r u_0 + b_r v_0 < c_r,$$

¹⁶⁾ In den Figuren 1 und 3 stellt $BCDE$ den Bereich G dar.

¹⁷⁾ Die Ordinaten und die Abszissen der Punkte von σ sind also eindeutige Funktionen voneinander.

¹⁸⁾ Man kann leicht die Koeffizienten 16 und 106 verkleinern; doch hat dies keinen Zweck.

also

$$L(\bar{G}) = \sum_{\gamma=1}^n \frac{g_1(c_\gamma) \bar{l}_\gamma}{\sqrt{(a_\gamma \alpha + b_\gamma \gamma)^2 + (a_\gamma \beta + b_\gamma \delta)^2}},$$

worin \bar{l}_γ die Länge der Randstrecke \bar{l}_γ von \bar{G} darstellt.

Weil der Flächeninhalt des Dreieckes, welches den Koordinatenursprung als Spitze und λ , als Basis hat, durch unsere Substitution wegen $\alpha\delta - \beta\gamma = \pm 1$ nicht verändert wird, ist

$$\frac{\frac{1}{2} c_\gamma \bar{l}_\gamma}{\sqrt{a_\gamma^2 + b_\gamma^2}} = \frac{\frac{1}{2} c_\gamma \bar{l}_\gamma}{\sqrt{(a_\gamma \alpha + b_\gamma \gamma)^2 + (a_\gamma \beta + b_\gamma \delta)^2}},$$

also $L(G) = L(\bar{G})$, und mit Rücksicht auf $J(G) = J(\bar{G})$ geht aus der Definitionsgleichung für $T(G)$ hervor, daß der Unterschied zwischen $T(G)$

und $T(\bar{G})$ gleich dem Unterschiede zwischen $A(G)$ und $A(\bar{G})$, also absolut genommen höchstens gleich der Anzahl der Eckpunkte von G ist.

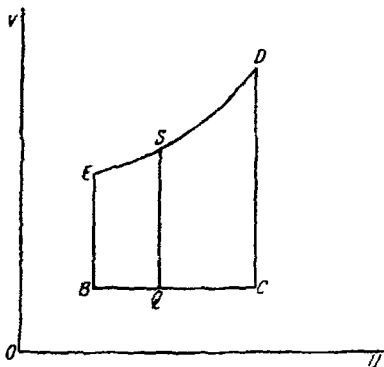


Fig. 1.

II. Es bezeichne G jetzt einen VP-Bereich, der begrenzt wird von einer Strecke parallel zur u -Achse, von zwei Strecken parallel zur v -Achse und von einem Jordanbogen σ , welcher der Voraussetzung B genügt und wobei $\tau \geq 0$ und $\leq \frac{\pi}{2}$ ist; es stelle in Fig. 1 $BCDE$ den Bereich G dar. Falls (u_0, v_2) , (u_1, v_2) , (u_1, v_1) und (u_0, v_0) die Koordinaten-

paare bzw. von B, C, D und E bezeichnen, und $u_1 > u_0$, $v_1 > v_0 > v_2$ ist, wird G begrenzt von dem Jordanbogen ED und von den Strecken

$$BC \dots -v = -v_2, \quad CD \dots u = u_1, \quad BE \dots -u = -u_0;$$

diese Gleichungen haben die Eigenschaft, daß für die Punkte innerhalb G die linke Seite kleiner als die rechte Seite ist; also ist

$$\begin{aligned} L(G) &= \frac{g_1(-v_2) \cdot BC}{\sqrt{0^2 + (-1)^2}} + \frac{g_1(u_1) \cdot CD}{\sqrt{1^2 + 0^2}} + \frac{g_1(-u_0) \cdot BE}{\sqrt{(-1)^2 + 0^2}} \\ &= -g_1(v_2) \cdot BC + g_1(u_1) \cdot CD - g_1(u_0) \cdot BE, \end{aligned}$$

wo BC, CD und BE die Längen der entsprechenden Strecken bezeichnen. Die Festsetzung $u_1 > u_0$ und $v_1 > v_0 > v_2$ ist im vorstehenden nur der Bequemlichkeit halber getroffen, und die hier gegebene Beweisanordnung ist *mutatis mutandis* auch in den anderen Fällen gültig.

Längs des Jordanbogens DE ändert sich τ monoton und ist

≥ 0 und $\leq \frac{\pi}{2}$, so daß die Linie $u = \bar{u}$ (\bar{u} ganz; $u_1 \geq \bar{u} \geq u_0$) BC und DE in zwei Punkten Q und S mit Ordinaten v_2 und \bar{v} schneidet. Wir ersetzen nun \bar{u} und \bar{v} der Einfachheit halber durch u und v , so daß u und v die Koordinaten des Punktes S bezeichnen und also eindeutige Funktionen voneinander sind. Falls die etwaigen Gitterpunkte Q und S mit $\frac{1}{2}$ in Anschlag gebracht werden, ist die Anzahl der Gitterpunkte auf der Strecke QS

$$r_u = \sum_{v=v_2}^{\bar{v}} 1 = QS + g_1(v_2) - g_1(\bar{v})^{10)},$$

wo QS die Länge der Strecke bedeutet.

Wenn die obere Grenze von τ kleiner als $\frac{\pi}{2}$ ist, so ist die Ordinate v von S und also auch die Länge der Strecke QS für $u_0 \leq u \leq u_1$ eine eindeutige beschränkte differentiiierbare Funktion der Abszisse u von S mit einer stetigen Derivierten $\frac{dv}{du} = \operatorname{tg} \tau \geq 0$; falls aber τ im Punkte D , bzw. E den Wert $\frac{\pi}{2}$ hat, so ist die Länge von QS zwar eine eindeutige beschränkte Funktion von u , aber die Funktion hat dann nur für $u_0 \leq u < u_1$, bzw. für $u_0 < u \leq u_1$ eine stetige Derivierte.

Nach der Eulerschen Summenformel ist nun

$$\begin{aligned} \sum_{u=u_0}^{u_1} QS &= \int_{u_0}^{u_1} QS du - g_1(u_1) \cdot CD + g_1(u_0) \cdot BE + \int_{u_0}^{u_1} g_1(u) \frac{dv}{du} du \\ &\quad - J(G) - L(G) - g_1(v_2) \cdot BC + \int_{v_0}^{v_2} g_1(u) dv \end{aligned}$$

und

$$g_1(v_2) \sum_{u=u_0}^{u_1} 1 = g_1(v_2) \cdot BC - g_1(v_2) \{g_1(u_1) - g_1(u_0)\},$$

also

$$\sum_{u=u_0}^{u_1} r_u = J(G) - L(G) + \int_{v_0}^{v_2} g_1(u) dv - g_1(v_2) \{g_1(u_1) - g_1(u_0)\} - \sum_{u=u_0}^{u_1} g_1(v).$$

Der Beitrag zu $\sum_{u=u_0}^{u_1} r_u$ und zu $A(G)$ von einem nicht einen Eckpunkt von G bildenden Gitterpunkte innerhalb, außerhalb oder auf dem Rande von G ist bzw. 1, 0 oder $\frac{1}{2}$; der Beitrag eines etwaigen Gitterpunktes

¹⁰⁾ In dieser Abhandlung werden für u_0 oder u_1 ganz ($u_1 > u_0$) die Glieder in

$\sum_{u=u_0}^{u_1} f(u)$, worin $u = u_0$ oder u_1 ist, nur $\frac{1}{2}$ mal gezählt.

B, C, D oder E zu $\sum_{u=u_0}^{u_1} r_u$ ist $\frac{1}{4}$ und zu $A(G)$ respektive $\frac{1}{4}, \frac{1}{4}, \Theta(G, D)$ und $\Theta(G, E)$. Hieraus folgt, mit dem Zusatz, daß die rechten Seiten um $\Theta(G, D) - \frac{1}{4}$ oder (und) $\Theta(G, E) - \frac{1}{4}$ zu vermehren sind, wenn D oder

(und) E mit einem Gitterpunkte zusammenfällt, $A(G) = \sum_{u=u_0}^{u_1} r_u$ und

$$(3) \quad T(G) = \int_{v_0}^{v_1} g_1(u) dv - g_1(v_0) \{g_1(u_1) - g_1(u_0)\} - \sum_{u=u_0}^{u_1} g_1(v).$$

Deshalb, und wegen $|g_1(u)| \leq \frac{1}{2}, \frac{1}{2} \geq \Theta(G, D) \geq 0$ und $\frac{1}{2} \geq \Theta(G, E) \geq 0$, geht aus (3) schließlich hervor

$$(4) \quad |T(G)| \leq \left| \int_{v_0}^{v_1} g_1(u) dv \right| + \frac{1}{2} + \frac{1}{2} \sum_{u=u_0}^{u_1} 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{4}.$$

$$(4) \quad |T(G)| \leq \left| \int_{v_0}^{v_1} g_1(u) dv \right| + \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} du + 1\frac{1}{2}.$$

Diese Beziehung bleibt gültig, wenn G ersetzt wird durch den Bereich G_1 , der begrenzt wird vom Jordanbogen DE und von den zwei Strecken durch E und D parallel bzw. zur u - und v -Achse; denn für ganzzahliges BE verschwindet, wie man sofort übersieht, die T -Größe des Rechteckes, von welchem drei Eckpunkte respektive mit B, C und E zusammenfallen, so daß dann $T(G_1) = T(BCDE)$ ist.

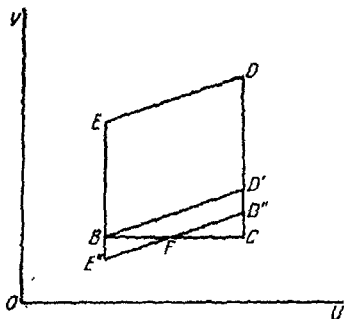


Fig. 2.

III. Ersetzt man in II den Jordanbogen σ durch die Strecke DE mit der Gleichung $au + bv = c$, wobei a und b ganzzahlig und teilerfremd sind, und $au + bv$ für die Punkte im Innern des Bereiches $< c$ ist, so stellt G das in Fig. 2 gezeichnete rechtwinklige Trapez $BCDE$ dar, dessen parallele Seiten parallel zur v -Achse sind.

Wir setzen nun zunächst $b > 0$ voraus. Dann bleibt die Beweisordnung dieselbe wie oben, mit der Ausnahme, daß nun $L(G)$ und deshalb auch $T(G)$ ein Glied, nämlich

$$\frac{g_1(c) \cdot DE}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \frac{u_1 - u_0}{b} g_1(c)$$

mehr enthält; wegen $v = \frac{c-au}{b}$ und $dv = -\frac{a}{b} du$ muß in diesem Falle die rechte Seite von (3) ersetzt werden durch

$$-\frac{a}{b} \int_{u_0}^{u_1} g_1(u) du - g_1(v_2) \{g_1(u_1) - g_1(u_0)\} + \left\{ \frac{u_1 - u_0}{b} g_1(c) - \sum_{u=u_0}^{u_1} g_1\left(\frac{c-au}{b}\right) \right\}.$$

Da nun, wie man leicht nachweist,

$$(5) \quad \left| \int_{u_0}^{u_1} g_1(u) du \right| \leq \frac{1}{8}$$

und

$$\left| \frac{u_1 - u_0}{b} g_1(c) - \sum_{u=u_0}^{u_1} g_1\left(\frac{c-au}{b}\right) \right| \leq b,$$

so ergibt sich wegen $b \geq 1$

$$(6) \quad |T(G)| \leq \frac{|a|}{8b} + \frac{1}{2} + b + \frac{1}{2} \leq \frac{1}{8} |a| + 2b,$$

und diese Ungleichung gilt auch für $b < 0$, wenn man b durch $|b|$ ersetzt.

Sie bleibt auch gültig, wenn das Trapez in das Dreieck BCD' entartet, falls BD' und ED parallel sind; denn für ganzzahliges BE findet man leicht die Beziehung $T(BD'DE) = 0$, also

$$T(BCD') = T(BCDE).$$

Auf dieselbe Art übersieht man, daß (6) auch gilt, wenn das Trapez in die Differenz der Dreiecke FCD'' und BFE'' entartet, falls $E''D''$ und ED parallel sind; denn für ganzes $E''E$ ist $T(E''D''DE) = 0$, weshalb

$$T(FCD'') - T(BFE'') = T(BCDE).$$

Ungleichung (6) ist ferner leicht zu übertragen auf ein (vielleicht in ein Dreieck oder in die Differenz von zwei Dreiecken entartetes) Trapez G_1 , dessen Seiten

$$\lambda_v \dots a_v u + b_v v = c_v \quad (v = 1, 2, 3, 4)$$

(a_v und b_v ganzzahlig und teilerfremd) die Eigenschaft haben, daß λ_3 und λ_4 parallel sind und $a_1 b_2 - a_2 b_1 = \pm 1$ ist. Denn durch die lineare Substitution

$$\bar{u} = a_2 u + b_2 v, \quad \bar{v} = a_1 u + b_1 v,$$

wobei a_2, b_2, a_1, b_1 ganz sind und $a_2 b_1 - a_1 b_2 = \pm 1$ ist, wird G_1 transformiert in ein Trapez \bar{G}_1 , von welchem eine Seite parallel zur u -Achse ist, und zwei Seiten parallel zur v -Achse sind, während die vierte Seite die Gleichung

$$(a_1 b_3 - a_2 b_1) \bar{u} - (a_2 b_3 - a_3 b_2) \bar{v} = \pm c_3$$

hat. Nach dem Vorhergehenden ist

$$|T(\bar{G}_1)| \leq \frac{1}{8} |a_1 b_3 - a_3 b_1| + 2 |a_2 b_3 - a_3 b_2|,$$

also wegen I

$$T(G_1) \leq |T(\bar{G}_1)| + 4 = \frac{1}{8} |a_1 b_3 - a_3 b_1| + 6 |a_2 b_3 - a_3 b_2|;$$

denn, weil λ_2 und λ_3 nicht parallel sind, ist $|a_2 b_3 - a_3 b_2| \geq 1$.

Es bezeichne nun weiter G_2 ein Vieleck²⁰⁾, das begrenzt wird von den einander folgenden Seiten

$$\lambda_\nu \dots a_\nu u + b_\nu v = c_\nu \quad (n \geq 2; \nu = 0, 1, \dots, n)$$

(a_ν und b_ν ganzzahlig und teilerfremd), mit der Eigenschaft

$$|a_1 b_0 - a_0 b_1| = |a_2 b_1 - a_1 b_2| = \dots = |a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n| = 1^{21)}.$$

Zieht man durch den Schnittpunkt von λ_0 und λ_n die geraden Linien $\lambda'_1, \lambda'_2, \dots, \lambda'_{n-2}$, parallel bzw. zu $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_{n-2}$, dann kann das Gebiet G_2 zerlegt werden in die algebraische Summe der durch $\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda'_1, \lambda'_{v-1} \lambda_\nu \lambda_{\nu+1} \lambda'_\nu$ ($2 \leq \nu \leq n-2$) und $\lambda'_{n-2} \lambda_{n-1} \lambda_n$ begrenzten Trapeze, von denen einige in ein Dreieck oder in die Differenz von zwei Dreiecken entarten können (wie z. B. mit dem letzten Trapez stets der Fall ist). Nach dem Vorhergehenden ist jedenfalls

$$|T(\lambda_0 \lambda_1 \lambda_2 \lambda'_1)| \leq 6 |a_2 b_1 - a_1 b_2| + \frac{1}{8} |a_2 b_0 - a_0 b_2| = 6 + \frac{1}{8} |a_2 b_0 - a_0 b_2|,$$

$$|T(\lambda'_{v-1} \lambda_\nu \lambda_{\nu+1} \lambda'_\nu)| \leq 6 |a_{\nu+1} b_\nu - a_\nu b_{\nu+1}| + \frac{1}{8} |a_{\nu+1} b_{\nu-1} - a_{\nu-1} b_{\nu+1}|$$

$$= 6 + \frac{1}{8} |a_{\nu+1} b_{\nu-1} - a_{\nu-1} b_{\nu+1}|$$

und

$$|T(\lambda'_{n-2} \lambda_{n-1} \lambda_n)| \leq 6 |a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n| + \frac{1}{8} |a_n b_{n-2} - a_{n-2} b_n|$$

$$= 6 + \frac{1}{8} |a_n b_{n-2} - a_{n-2} b_n|,$$

also

$$(7) \quad |T(G_2)| \leq 6n + \frac{1}{8} \sum_{\nu=1}^{n-1} |a_{\nu+1} b_{\nu-1} - a_{\nu-1} b_{\nu+1}|.$$

IV. Es sei der VP.-Bereich G begrenzt von den zwei Strecken $-au + bv = c$ und $-a'u + b'v = c'$, deren Koeffizienten a, b, a', b' positive ganze Zahlen sind mit der Eigenschaft $a'b - ab' = \pm 1$ (also $\frac{a'}{b'} \geq \frac{a}{b}$), und von einem Jordanbogen σ , welcher der Bedingung B genügt, und bei welchem $\text{tg } \tau$ in dem Intervalle $\frac{a}{b} \dots \frac{a'}{b'}$ (inkl. Grenzen)

²⁰⁾ Unter Vieleck verstehe ich hier den Bereich, der begrenzt wird von einem geschlossenen, doppelstreckungsfreien Streckenzug (mit endlich vielen Seiten).

²¹⁾ $|a_0 b_n - a_n b_0|$ braucht also nicht 1 zu sein.

liegt, und der absolute Betrag des Krümmungsradius in jedem Punkte kleiner als eine bestimmte Konstante r ist.

Durch die lineare Substitution

$$\bar{u} = -au + bv, \quad \bar{v} = a'u - b'v,$$

wo a, b, a', b' ganz sind und $a'b - ab' = \pm 1$ ist, transformieren wir G in einen VP.-Bereich \bar{G} , der begrenzt wird von zwei Strecken parallel zu den Koordinatenachsen und von einem Jordanbogen $\bar{\sigma}$; wir bezeichnen die Werte von $\tau, u, v, \bar{u}, \bar{v}$ in einem der Endpunkte von σ durch $\tau_0, u_0, v_0, \bar{u}_0, \bar{v}_0$ und in dem anderen durch $\tau_1, u_1, v_1, \bar{u}_1, \bar{v}_1$.

Beim Beweise werden wir $\frac{a'}{b'} > \frac{a}{b}$ voraussetzen, da wir den anderen Fall $\frac{a'}{b'} < \frac{a}{b}$ nach derselben Methode behandeln können. Weiter setzen wir bequemlichkeitshalber $\tau_1 > \tau_0, \bar{u}_1 > \bar{u}_0$ und $\bar{v}_1 > \bar{v}_0$ voraus. Nach I und (4) ist dann

$$|T(G)| \leq |T(\bar{G})| + 3 \leq \left| \int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}_1} g_1(\bar{u}) d\bar{v} \right| + \frac{1}{2} \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} d\bar{u} + 4 \frac{1}{2},$$

und mit Rücksicht auf

$$(8) \quad d\bar{u} = -a du + b dv = b \varrho(\tau) \cos \tau \left(\operatorname{tg} \tau - \frac{a}{b} \right) d\tau,$$

$$\frac{d\bar{u}}{d \operatorname{tg} \tau} < b r \left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \right) \frac{d\tau}{d \operatorname{tg} \tau} = \frac{r d\tau}{b' d \operatorname{tg} \tau} < \frac{r}{b'}$$

findet man

$$(9) \quad \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} d\bar{u} < \frac{r}{b'} \int_{\tau_0}^{\tau_1} d \operatorname{tg} \tau = \frac{r}{b'} (\operatorname{tg} \tau_1 - \operatorname{tg} \tau_0) \leq \frac{r}{b'} \left(\frac{a'}{b'} - \frac{a}{b} \right) = \frac{r}{bb'^2},$$

also

$$|T(G)| < \left| \int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}_1} g_1(\bar{u}) d\bar{v} \right| + \frac{r}{2bb'^2} + 4 \frac{1}{2}.$$

Wegen $u = b\bar{v} + b'\bar{u}$ ist

$$b d\bar{v} = du - b' d\bar{u} = \varrho(\tau) \cos \tau d\tau - b' d\bar{u},$$

weshalb

$$(10) \quad \int_{\bar{v}_0}^{\bar{v}_1} g_1(\bar{u}) d\bar{v} = w - \frac{b'}{b} \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} g_1(\bar{u}) d\bar{u},$$

wo

$$w = \frac{1}{b} \int_{\tau_0}^{\tau_1} g_1(\bar{u}) \varrho(\tau) \cos \tau d\tau$$

gesetzt ist. Wie schon in (5) bemerkt wurde, ist das letzte Integral in (10) absolut $\leq \frac{1}{8}$, also

$$(11) \quad |T(G)| < |w| + \frac{b'}{8b} + \frac{r}{2bb'^2} + 4\frac{1}{2}.$$

Wir führen nun τ_2 ein durch die Definition

$$\tau_2 = \tau_0 + \frac{1}{2b^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}}.$$

Für $\tau_2 \geq \tau_1$ ist

$$|w| \leq \frac{1}{b} \int_{\tau_0}^{\tau_2} \frac{1}{2} r d\tau = \frac{r(\tau_2 - \tau_0)}{2b} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{4b^{\frac{3}{2}}}.$$

Falls $\tau_2 < \tau_1$ ist, nennen wir \bar{u}_2 den zu τ_2 gehörenden Wert von \bar{u} ; dann ist $w = w' + w''$, wobei

$$w' = \frac{1}{b} \int_{\tau_0}^{\tau_2} g_1(\bar{u}) \varrho(\tau) \cos \tau d\tau$$

wieder absolut $\leq \frac{r^{\frac{1}{2}}}{4b^{\frac{3}{2}}}$ ist, während

$$w'' = \frac{1}{b} \int_{\tau_2}^{\tau_1} g_1(\bar{u}) \varrho(\tau) \cos \tau d\tau$$

nach (8) den Wert

$$\frac{1}{b^{\frac{3}{2}}} \int_{\bar{u}_2}^{\bar{u}_1} g_1(\bar{u}) d\bar{u} \frac{1}{\operatorname{tg} \tau - \frac{a}{b}}$$

hat. Da für $\tau_1 \geq \tau \geq \tau_2$ die monotone positive Funktion $\frac{1}{\operatorname{tg} \tau - \frac{a}{b}}$ nicht größer als

$$\frac{1}{\operatorname{tg} \tau_2 - \operatorname{tg} \tau_0} = \frac{1}{\int_{\tau_0}^{\tau_2} \frac{1}{\cos^2 \tau} d\tau} \leq \frac{1}{\int_{\tau_0}^{\tau_2} d\tau} = 2b^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}$$

ist, erhält man nach dem zweiten Mittelwertsatz

$$|w''| \leq \frac{2b^{\frac{1}{2}}r^{\frac{1}{2}}}{8b^{\frac{3}{2}}} = \frac{r^{\frac{1}{2}}}{4b^{\frac{3}{2}}},$$

so daß $|w|$ in jedem Falle $\leq \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2b^{\frac{3}{2}}}$ ist. Nach (11) ist also schließlich

$$(12) \quad |T(G)| < \frac{r^{\frac{1}{2}}}{2b^{\frac{3}{2}}} + \frac{b'}{8b} + \frac{r}{2bb'^2} + 4\frac{1}{2},$$

und die Anzahl der Gitterpunkte auf σ ist gleich der Anzahl der Gitterpunkte auf $\bar{\sigma}$, also nach (9) höchstens

$$(13) \quad \sum_{\bar{u}=\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} 1 \leq \int_{\bar{u}_0}^{\bar{u}_1} d\bar{u} + 1 \leq \frac{r}{b b'} + 1.$$

V. Es bezeichne G jetzt wieder den in dem Hauptsatze genannten Bereich, der z. B. die in den Figuren 1 und 3 für $BCDE$ angegebene Form haben kann.

Ordnet man die reduzierten Brüche, deren Nenner kleiner als $r^{\frac{1}{2}}$ sind, mit Zuziehung der uneigentlichen Brüche $\frac{0}{1}, \frac{1}{0}$ in eine steigende Reihe und bezeichnet mit $\frac{a}{b}$ und $\frac{a'}{b'}$ irgend zwei unmittelbar aufeinanderfolgende Glieder derselben, so hat man stets

$$b + b' \geq r^{\frac{1}{2}} \quad \text{und} \quad a'b - b'a = 1 \quad (22).$$

Unter diesen Brüchen ist mindestens einer $\geq \operatorname{tg} \beta$, nämlich $\frac{\operatorname{tg} \beta + 1}{1}$, und wegen $r^{\frac{1}{2}} > \operatorname{cotg} \alpha + 1$ mindestens ein von $\frac{0}{1}$ verschiedener $\leq \operatorname{tg} \alpha$, nämlich $\frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha + 1}$, so daß wir aus der von diesen Brüchen gebildeten Reihe einen Teil

$$\frac{a_0}{b_0}, \frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \dots, \frac{a_n}{b_n}, \quad (n \geq 1)$$

herausgreifen können, für den $\frac{a_0}{b_0} \leq \operatorname{tg} \alpha < \frac{a_1}{b_1}$ und $\frac{a_{n-1}}{b_{n-1}} < \operatorname{tg} \beta \leq \frac{a_n}{b_n}$ ist, und diese Brüche genügen für $1 \leq m \leq n$ den Beziehungen

$$a_m b_{m-1} - a_{m-1} b_m = 1 \quad \text{und} \quad b_m + b_{m-1} \geq r^{\frac{1}{2}}.$$

Wegen

$$\frac{a_1}{b_1} - \frac{a_0}{b_0} = \frac{1}{b_0 b_1} \leq \frac{a_0}{b_0}$$

ist

$$\frac{a_0}{b_0} \geq \frac{1}{2} \cdot \frac{a_1}{b_1} > \frac{1}{2} \operatorname{tg} \alpha,$$

und auf dieselbe Art beweist man $\frac{a_n}{b_n} < 2 \operatorname{tg} \beta$. Aus

$$\operatorname{tg} \beta > \operatorname{tg} \alpha > \frac{1}{\operatorname{cotg} \alpha + 1} > r^{-\frac{1}{2}}$$

und $r > 1$ folgt

$$b_m < r^{\frac{1}{2}} < r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta$$

und

$$a'_m \leq \frac{a_n}{b_n} \cdot b_m < 2 \operatorname{tg} \beta \cdot r^{\frac{1}{2}} < 2 r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta.$$

²²⁾ Vgl. z. B. P. Bachmann, *Niedere Zahlentheorie, erster Teil* (1902), S. 121–124; Teubner (Leipzig).

Führen wir die Zahlen $a'_m = a_{m-1} + a_m$ und $b'_m = b_{m-1} + b_m$ für $1 \leq m \leq n$ ein, so ist $b'_m \geq r^{\frac{1}{2}}$,

$$(14) \quad a'_m b_{m-1} - a_{m-1} b'_m = (a_{m-1} + a_m) b_{m-1} - a_{m-1} (b_{m-1} + b_m) \quad 1$$

und

$$(15) \quad a_m b'_m - a'_m b_m = a_m (b_{m-1} + b_m) - (a_{m-1} + a_m) b_m = 1.$$

Sei zunächst $\operatorname{tg} \alpha < \frac{a'_1}{b'_1}$ und $\operatorname{tg} \beta > \frac{a'_n}{b'_n}$; setzen wir $\operatorname{tg} \tau_m = \frac{a'_m}{b'_m}$ und

$\operatorname{tg} \tau'_m = \frac{a'_m}{b'_m} \left(\frac{\pi}{2} > \tau_m > 0; \frac{\pi}{2} > \tau'_m > 0 \right)$, so erhalten wir

$$\tau_0 \leq \alpha < \tau'_1 < \tau_1 < \dots < \tau_{n-1} < \tau'_n < \beta \leq \tau_n.$$

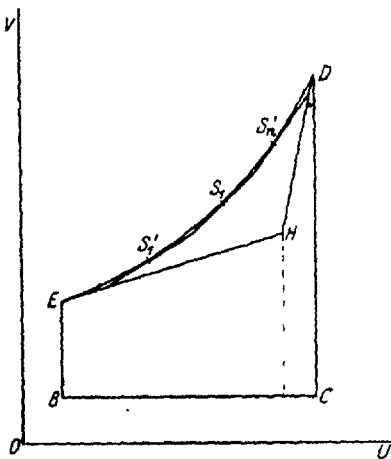


Fig. 3.

Wir nennen (siehe Fig. 3) die Punkte auf σ , in denen τ die Werte $\tau'_1, \tau_1, \dots, \tau'_n$ hat, bzw. S'_1, S_1, \dots, S'_n ; weiter ziehen wir durch E die Linie $-a_0 u + b_0 v = \text{Konstante}$ und durch D die Linie $-a_n u + b_n v = \text{Konstante}$ und ziehen die Tangenten in den Punkten S'_1, S_1, \dots, S'_n . Auf diese Weise ist G dargestellt als die algebraische Summe von zwei Polygonen und einer Anzahl Segmente; bisweilen, z. B. falls G den in Fig. 3 gezeichneten Bereich $BCDHE$ bezeichnet, darf man den Ausdruck „algebraische Summe“ schlechthin durch „Summe“ ersetzen. Durch eine Linie parallel zur

v -Achse zerteile man eins der Polygone, nämlich $BCDHE$ in zwei Trapeze; dann ist wegen (6)

$$\begin{aligned} |T(BCDHE)| &< \frac{1}{8} a_0 + 2b_0 + \frac{1}{8} a_n + 2b_n \\ &< \left(\frac{1}{4} + 2 + \frac{1}{4} + 2 \right) r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta < 9r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta. \end{aligned}$$

Aus (14) und (15) folgt, daß das andere Polygon, das wir G_1 nennen wollen, und das begrenzt wird von EH , DH und den Tangenten, die in III vorausgesetzten Bedingungen erfüllt, so daß nach (7)

$$\begin{aligned} |T(G_1)| &< 6 \cdot 2n + \frac{1}{8} \{ (a_1 b_0 - a_0 b_1) + (a'_1 b'_1 - a'_1 b'_2) + \dots + (a_n b_{n-1} - a_{n-1} b_n) \\ &= 12n + \frac{1}{8} \sum_{m=1}^n (a_m b_{m-1} - a_{m-1} b_m) + \frac{1}{8} \sum_{m=1}^{n-1} (a'_{m+1} b'_m - a'_m b'_{m+1}); \end{aligned}$$

wegen

$$a_m b_{m-1} - a_{m-1} b_m = 1, \quad a'_{m+1} b'_m - a'_m b'_{m+1} = 2 + \frac{b_{m-1}}{b_m} + \frac{b_{m+1}}{b_m}$$

ist also

$$|T(G_1)| < 12 \frac{3}{8} n + \frac{1}{8} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{b_{m-1}}{b_m} - \frac{1}{8} \sum_{m=1}^{n-1} \frac{b_{m+1}}{b_m},$$

und weil sowohl 1 als $\frac{b_{m-1}}{b_m} = \frac{b_{m-1} \frac{1}{b_m}}{b_m}$ und ebenso auch $\frac{b_{m+1}}{b_m}$ kleiner als $\frac{r^{\frac{1}{2}}}{b_m^{\frac{3}{2}}}$ ist, so erhält man die Ungleichung

$$|T(G_1)| < 12 \frac{5}{8} r^{\frac{1}{2}} \sum_{m=1}^n \frac{1}{b_m^{\frac{3}{2}}}.$$

Es bleiben nun noch die Segmente zwischen der Kurve σ und den Paaren aufeinanderfolgender Seiten des Vieleckes G_1 zu berücksichtigen. Man kann dieselben in zwei Gruppen einteilen, derart, daß jedes Segment der ersten Gruppe von σ und von den geraden Linien $-a_m u + b_m v = \text{Konstante}$ und $-a'_{m+1} u + b'_{m+1} v = \text{Konstante}$ ($n-1 \geq m \geq 0$) und jedes Segment der zweiten Gruppe von σ und von den geraden Linien $-a'_m u + b'_m v = \text{Konstante}$ und $-a_m u + b_m v = \text{Konstante}$ ($n \geq m \geq 1$) begrenzt wird. Bei jedem Segment der ersten Gruppe ist $\tau'_{m+1} \geq \tau \geq \tau_m$, so daß die zu diesem Segmente gehörige T -Größe nach (12) absolut kleiner ist als

$$\frac{r^{\frac{1}{2}}}{2 b_m^{\frac{3}{2}}} + \frac{b_m + b_{m+1}}{8 b_m} + \frac{r}{2 b_m b'_{m+1}} + 4 \frac{1}{2} \leq \left(\frac{1}{2} + \frac{2}{8} + \frac{1}{2} + 4 \frac{1}{2} \right) \frac{r^{\frac{1}{2}}}{b_m^{\frac{3}{2}}} = 5 \frac{3}{4} \frac{r^{\frac{1}{2}}}{b_m^{\frac{3}{2}}},$$

und da man dies für die Segmente der zweiten Gruppe auf dieselbe Art beweist, findet man somit

$$\begin{aligned} |T(G)| &< 9 r^{\frac{2}{3}} \operatorname{tg} \beta + \left(12 \frac{5}{8} + 5 \frac{3}{4} + 5 \frac{3}{4} \right) r^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^n \frac{1}{b_m^{\frac{3}{2}}} \\ &= 9 r^{\frac{2}{3}} \operatorname{tg} \beta + 24 \frac{1}{8} r^{\frac{1}{2}} \sum_{m=0}^n \frac{1}{b_m^{\frac{3}{2}}}. \end{aligned}$$

Wegen $\frac{a_m}{b_m} < 2 \operatorname{tg} \beta$ und $b_m < r^{\frac{1}{2}}$ ist nun weiter

$$\sum_{m=0}^n \frac{1}{b_m^{\frac{3}{2}}} \leq \sum_{b=1}^{r^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{b^{\frac{3}{2}}} \sum_{a=1}^{2b \operatorname{tg} \beta} 1 \leq 2 \operatorname{tg} \beta \sum_{b=1}^{r^{\frac{1}{2}}} \frac{1}{b^{\frac{1}{2}}} \leq 4 r^{\frac{1}{2}} \operatorname{tg} \beta,$$

also schließlich

$$|T(G)| < (9 + 24 \frac{1}{8} \times 4) r^{\frac{2}{3}} \operatorname{tg} \beta < 106 r^{\frac{2}{3}} \operatorname{tg} \beta.$$

Diese Ungleichung ist nun erst bewiesen für den Fall $\alpha < \tau'_1$ und $\beta > \tau'_n$, aber die Beweisanordnung bleibt dieselbe für die anderen Fälle; diese sind $\alpha < \tau'_1$ und $\beta \leq \tau'_n$; $\alpha \geq \tau'_1$ und $\beta > \tau'_n$; $\alpha \geq \tau'_1$ und $\beta \leq \tau'_n$. Im letzten Falle z. B. fallen die Punkte S'_1 und S'_n weg. Ziehen wir dann durch E und D die Linien $-a'_1 u + b'_1 v = \text{Konstante}$ und $-a'_n u + b'_n v = \text{Konstante}$, so ist nach (6)

$$\begin{aligned} |T(BCDHE)| &< \frac{1}{8}a'_1 + \frac{1}{8}a'_n + 2b'_1 + 2b'_n \\ &= \frac{1}{8}(a_0 + a_1 + a_{n-1} + a_n) + 2(b_0 + b_1 + b_{n-1} + b_n) < 9r^{\frac{2}{3}} \text{tg} \beta, \end{aligned}$$

während die Ungleichungen für das zweite Polygon und für die Segmente (die zwei verschwundenen Segmente natürlich außer Betracht gelassen) a fortiori gelten. Hiermit ist die Ungleichung in vollem Umfang bewiesen.

Nach der Schlußformel von IV (Formel 13) ist die Anzahl der Gitterpunkte auf einem zur ersten Gruppe gehörenden Segment von σ höchstens

$$\frac{r}{b_m b'_{m+1}} + 1 < \frac{2r^{\frac{1}{3}}}{b^{\frac{2}{3}}_m},$$

mit demselben Ergebnis bei dem zu den Segmenten zweiter Gruppe gehörigen Segment, so daß die Anzahl aller Gitterpunkte auf dem in $2n$, $2n - 1$ oder $2n - 2$ Teile zerlegten Jordanbogen σ , kleiner ist als

$$4r^{\frac{1}{3}} \sum_{m=0}^n \frac{1}{b^{\frac{2}{3}}_m} \leq 16r^{\frac{1}{3}} \text{tg} \beta.$$

Da jetzt der Satz in allen Teilen bewiesen ist, bleibt uns nur noch übrig, das in der Einleitung erwähnte Korollar aus diesem Satze abzuleiten. Es bezeichne daher G den in dem Korollar genannten Bereich. Wenn man die Anzahl der Gitterpunkte, welche auf den Randsegmenten λ_ν und σ_μ von G liegen, jedoch nicht einen Eckpunkt von G bilden, bzw. $B(\lambda_\nu)$ und $B(\sigma_\mu)$ nennt, kommt es nur darauf an zu beweisen, daß

$$(16) \quad T(G) = O(\sqrt[3]{x}) \quad \text{und} \quad B(\sigma_\mu) = O(\sqrt[3]{x}) \quad \text{für} \quad \mu = 1, 2, \dots, m.$$

Es ist ja

$$A(G) + \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^n B(\lambda_\nu) + \frac{1}{2} \sum_{\mu=1}^m B(\sigma_\mu)$$

die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande des Bereiches G , falls die einen Eckpunkt bildenden Gitterpunkte mit einem bestimmten Betrage ≥ 0 und ≤ 1 in Anschlag gebracht werden; die Anzahl der Eckpunkte von G ist beschränkt, so daß, wenn die Beziehungen (16) gelten, die Anzahl der Gitterpunkte auf dem Rande und innerhalb G

$$A(G) + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n B(\lambda_v) + O(\sqrt[3]{x}) = J(G) - \sum_{v=1}^n \frac{g_1(c_v) l_v}{\sqrt{a_v^2 + b_v^2}} + \frac{1}{2} \sum_{v=1}^n B(\lambda_v) + O(\sqrt[3]{x})$$

ist. Für nicht ganzes c_v ist $B(\lambda_v) = 0$ und $\psi(c_v) = g_1(c_v)$, und für ganzes c_v ist der Unterschied zwischen $B(\lambda_v)$ und $\frac{l_v}{\sqrt{a_v^2 + b_v^2}}$ höchstens 1 und $\psi(c_v) = g_1(c_v) - \frac{1}{2}$, so daß dann die Anzahl der Gitterpunkte im Innern und auf dem Rande des Bereiches

$$J(G) - \sum_{v=1}^n \frac{\psi(c_v) l_v}{\sqrt{a_v^2 + b_v^2}} + O(\sqrt[3]{x})$$

ist.

Beim Beweise der Beziehungen (16) dürfen wir noch voraussetzen, daß G die in den Figuren 1 und 3 für $BCDE$ angegebene Form hat, d. h. daß G begrenzt wird von zwei Strecken parallel zur V -Achse, von einer Strecke parallel zur U -Achse und von einem Jordanbogen σ , welcher der Bedingung B genügt, und wobei τ das Intervall (α, β) ($\frac{\pi}{4} \geq \beta > \alpha \geq 0$) durchläuft; sonst kann man ja den Bereich mittels einer beschränkten Anzahl Strecken parallel zu den Koordinatenachsen zerlegen in eine beschränkte Anzahl VP.-Bereiche, welche nach etwaiger Umkehrung oder (bzw. und) Vertauschung der Koordinatenachsen diesen Bedingungen genügen und in eine beschränkte Anzahl rechtwinkliger Trapeze, der Art, daß von jedem Trapeze drei Seiten parallel zu den Koordinatenachsen sind und die vierte Seite eine der Strecken λ_v ist, so daß die zu diesem Trapeze gehörige T -Größe nach (6) einen beschränkten Wert hat.

Außerdem dürfen wir uns noch beschränken auf die Fälle $\cotg \alpha \leq \sqrt[6]{x}$ und $\cotg \beta \geq \sqrt[6]{x}$; denn, falls $\cotg \alpha > \sqrt[6]{x} > \cotg \beta$ ist, können wir G in zwei VP.-Bereiche zerteilen, indem wir parallel zur V -Achse eine Strecke ziehen durch den Punkt auf σ , in welchem $\cotg \tau = \sqrt[6]{x}$ ist, und jeder dieser Bereiche genügt der ersten oder der zweiten Bedingung.

Ist $\cotg \beta \geq \sqrt[6]{x}$, und bezeichnen u_0, v_0 und u_1, v_1 die Koordinatenpaare der Endpunkte von σ , so ist für $u_1 > u_0$ die Anzahl $B(\sigma)$ der von den beiden Endpunkten des Bogens σ verschiedenen Gitterpunkte auf σ kleiner als

$$\begin{aligned} \int_{u_0}^{u_1} du + 1 &= \int_{\alpha}^{\beta} \varrho(\tau) \cos \tau d\tau + 1 = \int_{\alpha}^{\beta} O(\sqrt{x}) d\tau + 1 \\ &= O(\beta\sqrt{x}) + 1 = O(\operatorname{tg} \beta \sqrt{x}) + 1 = O(\sqrt[3]{x}), \end{aligned}$$

und nach (4) ist dann

$$T(G) \leq \left| \int_{v_0}^{v_1} g_1(u) dv + \frac{1}{2} \int_{u_0}^{u_1} du + 1 \frac{1}{2} = O(\sqrt[3]{x}) + \int_{v_0}^{v_1} g_1(u) dv \right|,$$

worin das Schlußglied höchstens

$$\left| \int_{v_0}^{v_1} \frac{1}{2} dv \right| = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} \varrho(\tau) \sin \tau d\tau = \frac{1}{2} \int_{\alpha}^{\beta} O(\sqrt{x}) d\tau = O(\sqrt[3]{x})$$

ist.

Ist jedoch $\cotg \alpha \leq \sqrt[6]{x}$, also $(\cotg \alpha + 1)^3 = O(\sqrt{x})$, so folgen die Beziehungen (16) unmittelbar aus dem oben bewiesenen Satze, wenn man darin $r = O(\sqrt{x})$ und $\tg \beta \leq 1$ setzt.

(Angenommen Dezember 1919.)