Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. I.

Von

Paul Koebe in Göttingen.

Inhaltsverzeichnis.

		Seite
A.	**Einleitung**	146—154
	A, I. Historisches über das Uniformisierungsproblem, insbesondere die Methode der Überlagerungsfläche	146—149
	A, II. Inhalt der vorliegenden Abhandlung	150—154
B.	**Vorbemerkungen.** Allgemeiner Begriff der zu einer algebraischen Kurve gehörenden linear-polymorphen uniformisierenden Variablen	155—162
C.	**Vorbereitende Untersuchung.** Die Uniformisierung algebraischer Kurven durch rationale Funktionen, rationale Funktionen einer Exponentialfunktion, elliptische Funktionen	162—168
D.	**Erster (analytischer) Hauptteil.** Formulierung des Problems der Bestimmung aller zu einer beliebig gegebenen algebraischen Kurve gehörenden linear-polymorphen uniformisierenden Variablen mit reeller Substitutionsgruppe. Wertegebiet und charakteristische Signatur der einzelnen uniformisierenden Variablen	168—188
	D, I. Das Wertegebiet der einzelnen uniformisierenden Variablen	169—178
	D, II. Die charakteristische Signatur der einzelnen uniformisierenden Variablen	178—188
E.	**Zweiter (synthetischer) Hauptteil.** Vollständige Lösung des Problems der Bestimmung aller zu einer beliebig gegebenen algebraischen Kurve gehörenden linear-polymorphen uniformisierenden Variablen mit reeller Substitutionsgruppe. Existenz der zu einer gegebenen Signatur gehörenden Variablen	188—223
	E, I. Formulierung der zu lösenden Einzelprobleme. Zerlegung jedes Einzelproblems in ein Problem der Analysis situs und ein Problem der konformen Abbildung	188—194
	E, II. Lösung der Analysis-situs-Probleme	194—205
	E, III. Lösung der Abbildungsprobleme	205—223
F.	**Schlußbemerkungen**	224

A. Einleitung.

A, I. Historisches über das Uniformisierungsproblem, insbesondere die Methode der Überlagerungsfläche.

Unter dem Problem der Uniformisierung einer durch eine beliebige analytische Funktion $y(x)$ definierten analytischen Kurve (x, y) versteht man das Problem der Auffindung einer von x oder, was auf dasselbe hinauskommt, von y abhängenden analytisch zu erklärenden Hilfsveränderlichen t, welche so beschaffen ist, daß $x(t)$ und $y(t)$ eindeutige analytische Funktionen sind, während $y(x)$ selbst, allgemein zu reden, eine unendlich-vieldeutige Funktion von x ist.

Die Idee der Uniformisierung entwickelte sich in organischem Zusammenhang mit der Theorie der automorphen Funktionen, welche, vorbereitet durch klassische Untersuchungen von Riemann, Schwarz, Hermite, Schottky, Klein, Fuchs, zu Anfang der achtziger Jahre des verflossenen Jahrhunderts durch Klein*) und Poincaré**) ihre systematische Begründung fand.***)

Mit Rücksicht auf die zentrale Stellung der Uniformisierungstheoreme innerhalb der Klein-Poincaréschen Theorie wurden dieselben von Herrn Klein†) als *„Fundamentaltheoreme“* bezeichnet.

Was die verschiedenen Methoden anbetrifft, deren man sich zum Be-

---

*) F. Klein: „Über eindeutige Funktionen mit linearen Transformationen in sich“. Math. Annalen Bd. 19, 1882, pag. 565—568.

Derselbe: „Zweite Mitteilung“. Math. Annalen Bd. 20, 1882, pag. 48—51.

Derselbe: „Neue Beiträge zur Riemannschen Funktionentheorie“. Math. Annalen Bd. 21, 1883 p. 141—218. Erschienen 15. I. 1883, datiert vom 2. X. 1882.

**) H. Poincaré: Comptes Rendus de l'Académie des Sciences t. 92 (1881, I) pag. 333, 395, 551, 859, 957, 1198, 1274, 1335, 1484, t. 93 (1881, II) pag. 44, 138, 301, 581, t. 94 (1882, I) pag. 163, 840, 1038, 1166, 1402.

Derselbe: Sur les fonctions uniformes qui se reproduisent par des substitutions linéaires. Math. Ann. Bd. 19, pag. 553—564.

Derselbe: „Theorie des groupes fuchsiens“. Acta Math. t. I, 1882, p. 1—62.

Derselbe: „Mémoire sur les fonctions fuchsiennes“. Acta Math. t. I, 1882, pag. 193—294.

Derselbe: „Mémoire sur les groupes kleinéens“. Acta Math. t. III, 1883, p. 49—92.

Derselbe: „Sur les groupes des équations linéaires“. Acta Math. t. IV, 1884, pag. 201—312.

Derselbe: „Mémoire sur les fonctions zétafuchsiennes“. Acta Math. t. V, 1884, pag. 209—278.

***) Ich verweise auch auf die großzügige Darstellung in Fricke-Klein: „Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen“ Leipzig, Teubner, 1897 und 1901. Die zweite Lieferung des zweiten Bandes steht noch aus.

†) Math. Annalen Bd. 21, l. c.

weise der Uniformisierungstheoreme in mehr oder weniger weitem Umfange bedient hat, so würde ein näheres kritisches Eingehen auf dieselben uns hier zu weit führen. Ich begnüge mich vielmehr an dieser Stelle mit einigen Bemerkungen über die im folgenden anzuwendende Methode, welche ich kurz als *Methode der Überlagerungsfläche* bezeichnen will. Durch diese Methode werden im Prinzip tatsächlich alle überhaupt möglichen Uniformisierungstheoreme umfaßt.

Soviel mir bekannt ist, geht die Idee dieser Methode ursprünglich auf mündliche Äußerungen von Schwarz zurück. In der Literatur findet sie sich zuerst bei Poincaré*), welcher im Zusammenhang mit dieser Methode das Uniformisierungsproblem in bedeutsamer Weise generalisierte, indem er an Stelle einer algebraischen Kurve eine *beliebige analytische Kurve* treten ließ, allerdings ohne die betreffenden Fragen damals zum Abschluß bringen zu können.**) Die vollständige Klärung und Erledigung dieses allgemeinen Problems ist erst in neuester Zeit gelungen, worüber sogleich berichtet werden wird.

Bei der Methode der Überlagerungsfläche wird das Uniformisierungsproblem in zwei Probleme zerlegt, ein *Problem der Analysis situs*, nämlich das Problem der Konstruktion der zu der gesuchten Uniformisierungstranszendenten $t(x, y)$ gehörenden Riemannschen Fläche Φ, und ein *Problem der konformen Abbildung*, nämlich das der umkehrbar eindeutigen konformen Abbildung der Fläche Φ auf ein einblättriges im allgemeinsten Falle *unendlich-vielfach zusammenhängendes Gebiet.*

Von besonderer Wichtigkeit ist der Fall einer *einfach zusammenhängenden Fläche* Φ, welcher übrigens für die zu uniformisierende Kurve (x, y) selbst keine Beschränkung voraussetzt. In diesem Falle handelt es sich um den Nachweis des folgenden Abbildungssatzes: *Jede einfach zusammenhängende endlich- oder unendlich-vielblättrige nur von inneren Punkten gebildet zu denkende Riemannsche Fläche***) läßt sich umkehrbar eindeutig und konform entweder auf die schlichte (d. i. einblättrig vorzustellende) Fläche eines endlichen Kreises oder auf die schlichte ganze Ebene*

---

*) Poincaré: „Sur un théorème de la théorie générale des fonctions". Bulletin de la société mathématique de France, t. XI, 1883.

**) S. auch Hilberts Pariser Vortrag, 1900: „Mathematische Probleme". Gött. Nachr. 1900, pag. 253 ff. oder Archiv der Mathematik und Physik, 3. Reihe, Bd. 1. Man lese insbesondere den Abschnitt: „Uniformisierung analytischer Beziehungen mittelst automorpher Funktionen".

***) Die Fläche kann auch als Fläche im Raume oder überhaupt als eine zweidimensionale Mannigfaltigkeit gegeben gedacht werden. Wesentlich ist nur, daß allein die *inneren* Punkte als zur Mannigfaltigkeit gehörig betrachtet werden, das sind die Punkte, um welche herum eine zweidimensionale konform auf eine Kreisfläche übertragbare Umgebung angegeben werden kann.

exkl. des unendlich fernen Punktes (d. i. eine Kreisfläche mit unendlich großem Radius) oder auf die schlichte ganze Ebene inkl. des unendlich fernen Punktes abbilden.

Der letzte in dem Satze erwähnte Fall, in welchem die gegebene Fläche speziell eine *geschlossene* Fläche vom Geschlecht *Null* sein muß, wurde bereits 1870 durch Schwarz*) erledigt. Was die viel allgemeinere Frage nach der konformen Abbildung beliebiger ungeschlossener einfach zusammenhängender Flächen anbetrifft, so dienten auch für diese Frage die Riemann-Schwarzschen Entwickelungen betreffend die Abbildung ungeschlossener einfach zusammenhängender Flächen mit geschlossener Begrenzungslinie als Grundlage. Poincaré bewies 1883 (Bull. t. XI l. c.), daß jede einfach zusammenhängende endlich- oder unendlich-vielblättrige Riemannsche Fläche, welche mindestens *drei* voneinander verschiedene Punkte der Ebene unbedeckt läßt, auf ein schlichtes Gebiet innerhalb des Einheitskreises abgebildet werden kann. Nachdem weiterhin, doch erst in neuerer Zeit Osgood**), Brodén***), Johansson†) das Abbildungsproblem in speziellen Fällen gefördert hatten, wurde im Jahre 1907 die vollständige Erledigung desselben gegeben durch Herrn Poincaré††) und durch den Verfasser der vorliegenden Abhandlung†††) nach verschiedenen Methoden. Weitere vollständige Beweise des allgemeinen Abbildungs-

*) H. A. Schwarz: „Über die Integration der partiellen Differentialgleichung $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = 0$ unter vorgeschriebenen Grenz- und Unstetigkeitsbedingungen". Berl. Monatsber. 1870. Ges. Abh. Bd. II.

**) Osgood: On the existence of the Greens fonction for the most general simply connected plane region.". Am. Trans. 1900.

***) Brodén: „Bemerkungen über die Uniformisierung analytischer Funktionen". Lund, Berlingsche Druckerei, 1905.

†) Johansson: „Über die Uniformisierung Riemannscher Flächen mit endlicher Anzahl Windungspunkte". Act. Soc. Fenn., t. 33, 1906.

Derselbe: „Ein Satz über die konforme Abbildung einfach zusammenhängender Flächen auf den Einheitskreis". Math. Ann. Bd. 62, 1906.

Derselbe: „Beweis der Existenz linear polymorpher Funktionen vom Grenzkreistypus auf Riemannschen Flächen". Math. Ann. Bd. 62, 1906.

Die zuletzt erwähnte Abhandlung ist jedoch nur zum Teil einwandfrei; denn die auf pag. 191 des Bandes sich findende für Johansson zur Erlangung des von ihm in dieser Arbeit angestrebten Hauptresultats wesentliche Behauptung „Jede auf $\varphi(p, 0)$ unverzweigte Funktion ist nun ersichtlich auch auf $\varphi(p+1, 0)$ unverzweigt" ist unrichtig, ein Einwand, zu welchem auch Herr Johansson seine Zustimmung gegeben hat.

††) Poincaré: „Sur l'uniformisation des fonctions analytiques". Acta Math. t. XXXI, pag. 1—63, insbesondere pag. 46—63. Die bereits im März 1907 gedruckte Arbeit erschien erst im November 1907.

†††) Koebe: „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven". Gött. Nachr., 12. Mai 1907, pag. 191—210.

Eine Darstellung dieses meines ersten Beweises findet man auch bei Fubini satzes enthalten die auf dieser Seite unter †††) zitierten Arbeiten VI und IX, sowie implizite die vorliegende Abhandlung. Letzterer Beweis stellt eine namentlich durch die vollständige Vermeidung des Harnackschen Satzes über positive Potentiale charakterisierte Vervollkommnung, wenn auch vielleicht nicht gedankliche Vereinfachung meines ersten in III gegebenen Beweises dar. In IX ist die Ausdehnung auf den oben erwähnten allgemeinsten Fall des Uniformisierungsproblems gegeben, wobei die auf einen schlichten Bereich abzubildende Fläche *unendlich-vielfach zusammenhängend* ist. Für diesen allgemeinen Beweis ist namentlich die Heranziehung gewisser von Herrn Hilbert in seiner Abhandlung „Über das Dirichletsche Prinzip“ und in seiner vierten Mitteilung zur Theorie der Integralgleichungen benützter Gedankengänge charakteristisch.

„Introduzione alla teoria dei gruppi discontinui e delle funzioni automorfe“ (Pisa, Spoerri, 1908).

Ich benütze diese Gelegenheit, um meine sämtlichen bisherigen Publikationen über Uniformisierung bezw. konforme Abbildung zusammenzustellen. Ich numeriere dieselben, ihrer zeitlichen Aufeinanderfolge entsprechend, um im Laufe der vorliegenden Abhandlung kürzer zitieren zu können.

I. „Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche, insbesondere solcher Bereiche, deren Begrenzung von Kreisen gebildet wird“. Vortrag, gehalten auf der Naturforscherversammlung in Meran, September 1905. Jahresbericht der Deutschen Mathematiker-Vereinigung 1906, pag. 142—153.

II. „Über konforme Abbildung mehrfach zusammenhängender ebener Bereiche“. Vortrag, gehalten auf der Naturforscherversammlung in Stuttgart, September 1906. Jahresbericht der D. M.-V. 1907, pag. 116—130.

III. „Über die Uniformisierung reeller algebraischer Kurven“. Gött. Nachr., 9. März 1907, pag 177—190.

IV. „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven“. (Erste Mitteilung.) Gött. Nachr., 12. Mai 1907, pag. 191—210.

V. „Zur Uniformisierung der algebraischen Kurven“. Gött. Nachr., 6. Juli 1907, pag. 410—414.

VI. „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. (Zweite Mitteilung.)“ Gött. Nachr., 23. November 1907, pag. 633—669.

VII. „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. (Imaginäre Substitutionsgruppen.) (Voranzeige.) Mitteilung eines Grenzübergangs durch iterierendes Verfahren.“ Gött. Nachr., 22. Februar 1908, pag. 112—116.

VIII. „Über ein allgemeines Uniformisierungsprinzip“. Vortrag, gehalten auf dem internationalen Mathematikerkongreß in Rom, April 1908. (Noch nicht erschienen.)

IX. „Über die Uniformisierung beliebiger analytischer Kurven. (Dritte Mitteilung.)“ Gött. Nachr., 11. Juli 1908, pag. 337—358.

X. „Konforme Abbildung der Oberfläche einer von endlich vielen regulären analytischen Flächenstücken gebildeten körperlichen Ecke auf die schlichte ebene Fläche eines Kreises“. Gött. Nachr., 19. Dezember 1908, pag. 359—360.

XI. „Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven durch automorphe Funktionen mit imaginärer Substitutionsgruppe“. Gött. Nachr., 20. Febr. 1909, pag. 68 folg.

XII. „Sur un principe général d'uniformisation“. Comptes Rendus, 29. mars 1909.

A, II. Inhalt der vorliegenden Abhandlung.

In der vorliegenden Abhandlung ist das Streben nach einer möglichst allseitig independenten Darstellung maßgebend gewesen.

Wir schließen die folgenden Bemerkungen über den Inhalt derselben an das Verzeichnis pag. 145 an.

In B wird der allgemeine Begriff der zu einer algebraischen Kurve (x, y) gehörenden linear polymorphen uniformisierenden Variablen t definiert und die Natur der möglichen relativen Verzweigungssingularitäten der Funktion $t(x, y)$, relativ zur Riemannschen Fläche F der Funktion $y(x)$, untersucht.

In C werden alle diejenigen zu algebraischen Kurven gehörenden linear polymorphen uniformisierenden Variablen bestimmt, bei welchen das Wertegebiet der Variablen t entweder durch die ganze Ebene inkl. oder durch die ganze Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes gebildet wird. Die uniformisierenden Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ sind im Falle der ganzen Ebene inkl. des unendlich fernen Punktes rationale Funktionen von t, im Falle der ganzen Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes rationale Funktionen einer und derselben Exponentialfunktion von t oder einer und derselben elliptischen $\wp$-Funktion und deren Ableitung.

Die Untersuchungen des Abschnitts C werden in D und E (pag. 180 bezw. 222) vorausgesetzt und bilden überhaupt eine organische Ergänzung der in D und E gegebenen Hauptuntersuchung.

In dem Abschnitte D (erster (analytischer) Hauptteil) wird das Problem in Angriff genommen, alle zu einer gegebenen algebraischen Kurve (x, y) gehörenden linear polymorphen uniformisierenden Variablen t zu bestimmen, für welche die Substitutionsgruppe reell ist oder, anders ausgedrückt, für welche jede einzelne zwischen zwei relativen Zweigen der Funktion $t(x, y)$ bestehende lineare Substitution eine Substitution mit lauter reellen Koeffizienten ist, wobei die Koeffizientendeterminante *positiv* oder *negativ* sein kann. Der Abschnitt D gibt eine Analyse, als deren Resultat die Individualisierung der einzelnen zur gesuchten Klasse gehörenden Transzendenten $t(x, y)$ erscheint. In D, I wird zunächst bewiesen, daß das Wertegebiet einer einzelnen Variablen t der Klasse entweder die ganze obere Halbebene*) und nur diese (*erster Typus*) oder die ganze Ebene exkl., allgemein zu reden, unendlich viele Punkte der Achse des Reellen (*zweiter Typus*) ausfüllt. In D, II wird dann gezeigt, daß eine Größe t des ersten Typus als Größe der gesuchten Klasse vollständig individualisiert wird durch die Angabe der relativen Verzweigungspunkte der Funktion $t(x, y)$

*) Halbebene oberhalb der Achse des Reellen.

mit den zugehörenden Ordnungszahlen der relativen Verzweigung, daß ferner eine Größe t des zweiten Typus als Größe der Klasse vollständig individualisiert wird durch Angabe derjenigen teils geschlossenen, teils ungeschlossenen Linienzüge auf F (Riemannsche Fläche der Funktion $y(x)$), längs welchen die Funktion $t(x, y)$ reell ist, (*Realitätszüge*), sowie die Angabe aller relativen Verzweigungsstellen der Funktion $t(x, y)$ mit den zugehörenden Ordnungszahlen der relativen Verzweigung. Die Gesamtheit der eine einzelne Größe t charakterisierenden Bestimmungsstücke bildet die *charakteristische Signatur* der betreffenden uniformisierenden Variablen.

Die in der Signatur vorkommenden Bestimmungsstücke können nicht willkürlich gegeben werden.

Im Falle einer Größe t des ersten Typus existieren gewisse Ausnahmesignaturen, welche durch die in B und C angestellten Untersuchungen geliefert werden, indem nämlich jede der dort gefundenen Funktionen $t(x,y)$ eine gewisse relative Verzweigung besitzt. Diesen Ausnahmesignaturen kann sicher keine linear polymorphe uniformisierende Variable des ersten Typus entsprechen.

Im Falle einer Größe t des zweiten Typus ergeben sich für die einzelnen Bestimmungsstücke der Signatur folgende Bedingungen. Die Kurve (x, y) selbst muß sich birational in eine *reelle* Kurve transformieren lassen, welche auch wirklich *reelle Züge* besitzt. Das System der in der Signatur vorkommenden oben definierten *Realitätszüge* muß dabei in das System der *reellen Züge* transformiert werden, ohne jedoch dieselben vollständig erschöpfen zu müssen. Ein einzelner Realitätszug wird vielmehr nach der Transformation entweder einen vollständigen reellen Zug liefern oder nur ein Stück eines solchen reellen Zuges. Die Realitätszüge sind jedenfalls nur in endlicher Anzahl vorhanden. Was die in der Signatur vorkommenden relativen Verzweigungspunkte und Ordnungszahlen der Verzweigung der Funktion $t(x, y)$ anbetrifft, so erscheinen dieselben nach der Transformation konjugiert symmetrisch angeordnet, wobei ein solcher Verzweigungspunkt auch sich selbst symmetrisch entsprechen kann, in welch letzterem Falle er eben auf einem reellen Zuge liegt. Niemals liegt jedoch ein relativer Verzweigungspunkt innerhalb eines Realitätszuges. Ist andererseits ein Realitätszug ungeschlossen, so sind stets die beiden Endpunkte desselben relative Verzweigungspunkte und zwar von der ersten Ordnung.

Man übersieht jetzt, wie im Falle einer uniformisierenden Variablen des zweiten Typus die Signatur zu geben ist. Man hat dabei von vornherein eine solche Kurve (x, y) anzunehmen, welche sich durch birationale Transformation in eine reelle Gestalt (mit reellen Zügen) setzen läßt, wobei, beiläufig erwähnt, bekanntlich der Fall eintreten kann, daß eine und dieselbe Kurve (x, y) mehrere *wesentlich verschiedene* reelle Gestalten besitzt, d. s. solche reelle Gestalten, deren keine zwei durch eine *reelle* birationale Transformation zusammenhängen. Bei der Betrachtung einer einzelnen uniformisierenden Variablen des zweiten Typus werden wir dementsprechend zweckmäßig direkt eine reelle algebraische Kurve mit reellen Zügen zugrunde legen.

In E (zweiter (synthetischer) Hauptteil) handelt es sich nun weiter darum, die Existenz der zu einer gegebenen Signatur gehörenden uniformisierenden Variablen des ersten bezw. zweiten Typus wirklich darzutun. Die einzelne Signatur muß dabei den in D gefundenen notwendigen Bedingungen genügen, die eben durch die Untersuchungen des Abschnitts E auch als hinreichend erkannt werden.

Wir bedienen uns zum Existenzbeweise der *Methode der Überlagerungsfläche.*

Nachdem in E, I dem Grundgedanken der Methode der Überlagerungsfläche entsprechend jedes einzelne Problem in ein Problem der Analysis situs und ein Problem der konformen Abbildung zerlegt ist, werden in E, II die Analysis-situs-Probleme und in E, III die Abbildungsprobleme behandelt.

Die in E, II zu konstruierende, unendlich-vielblättrige Riemannsche Fläche einer gesuchten Einzeltranszendenten $t(x, y)$ ist, je nachdem die gesuchte Größe t dem ersten oder zweiten Typus angehört, eine einfach zusammenhängende oder eine aus zwei zueinander symmetrischen einfach zusammenhängenden Hälften gebildete i. a. *unendlich-vielfach*-zusammenhängende Fläche. Im letzteren Falle können wir wegen der Symmetrie die Betrachtung auf eine der *einfach* zusammenhängenden Hälften beschränken.

Was die explizite Konstruktion der erwähnten einfach zusammenhängenden Überlagerungsflächen anbetrifft, so habe ich darauf Gewicht gelegt, diese Analysis-situs-Probleme streng als solche zu behandeln, wobei zugleich gewisse am Schlusse von E, III anzuwendende Abschätzungsformeln hergeleitet werden.

Bei der Behandlung der Abbildungsprobleme in E, III, welche die konforme Abbildung der in E, II gefundenen einfach zusammenhängenden Überlagerungsflächen auf die schlichte Fläche einer Halbebene fordern, ist die Idee folgende. Es wird die zu der betreffenden Überlagerungsfläche gehörende in einem Punkte logarithmisch unendlich werdende Greensche Funktion als Grenzfunktion der zu den Näherungsflächen gehörenden Greenschen Funktionen konstruiert. Wir erledigen zunächst die Fälle, in welchen die uniformisierende Variable eine Variable des zweiten Typus wird. In diesen Fällen gelingt es eine Majorante aufzustellen, welche ich bereits in einer früheren Note (III) angegeben habe. In den Fällen hingegen, in welchen die uniformisierende Variable eine solche vom ersten Typus wird, verfahren wir indirekt, indem wir den Durchgang durch den allgemeinen pag. 147 unten genannten Abbildungssatz über einfach zusammenhängende Bereiche nehmen; (bezüglich des hier gegebenen Beweises dieses allgemeinen Satzes verweise ich auf die betreffenden Bemerkungen oben pag. 149). Es handelt sich dann schließlich darum den Fall der ganzen Ebene auszuschließen, was auf pag. 222—223 nach zwei Methoden geschieht, deren eine sich auf die Ergebnisse des Abschnitts C stützt, während die andere die erwähnten in E, II bei der Behandlung der Analysis-situs-Probleme gefundenen Abschätzungsformeln benützt, wobei sich der Unterschied zwischen der Euklidischen und der Nichteuklidischen Ebene in charakteristischer Weise ausprägt.*)

Die in dieser Abhandlung behandelten Uniformisierungsprobleme erscheinen *nach zwei Seiten von fundamentaler Bedeutung*, namentlich im Gegensatz zu den später zu behandelnden Uniformisierungsproblemen, bei welchen die Substitutionsgruppen im allgemeinen Fall imaginär sind und sich auch nicht in reelle Form setzen lassen. Einerseits nämlich lassen sich alle andern zur gegebenen Kurve (x, y) gehörenden linear-polymorphen uniformisierenden Variablen als eindeutige Funktionen der hier konstruierten darstellen, eine Eigenschaft, für welche ich in den Noten III und IV in den daselbst formulierten Theoremen den umfassendsten und prägnantesten Ausdruck gegeben habe, andererseits liefern die hier behandelten uniformisierenden Variablen in den zugehörenden Gruppen wirklich invariante Normalgebilde der durch die gegebene Kurve definierten Riemannschen Klasse von Kurven (s. die Schlußbemerkungen in III und IV).

Gerade im Hinblick auf die erwähnte zentrale Bedeutung der hier behandelten Klasse von uniformisierenden Variablen erschien es mir als eine organische Notwendigkeit, in D und E diejenigen reellen Substitutionen, deren Koeffizientendeterminante *negativ* ist, von vornherein gleichberechtigt mit denen *positiver* Determinante zuzulassen, im Unterschiede von Poincaré (Acta Math.) und Fricke-Klein („Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen"). Auf diese Weise ergab sich

*) Man kann versuchen, auch die den uniformisierenden Variablen des ersten Typus entsprechenden Abbildungsprobleme durch Majorantenbildung zu erledigen. In diesem Sinne gerade versuchte Herr Johansson (l. c.) in direkter Anknüpfung an Poincaré (Bull. t. XI) und Osgood (Am. Tr. l. c.) eine Lösung der betreffenden Probleme. Diesen Gedanken habe ich in der Note V weiter verfolgt. Eine vollständige Zuendeführung oder auch nur Förderung dieses Gedankens scheint mir auch jetzt noch ein Interesse darzubieten.

namentlich eine naturgemäße und vollständige Beziehung zu Kleins allgemeiner Einteilung der *symmetrischen* Riemannschen Flächen mit Symmetrielinien bzw. reellen algebraischen Kurven mit reellen Zügen, eine Beziehung, die sich auch auf beliebige analytische Kurven überträgt (vgl. Note IV).

Sowohl Poincaré (Acta I) als auch Fricke-Klein (Vorlesungen über die Theorie der automorphen Funktionen) geben bereits eine systematische Behandlung der eigentlich diskontinuierlichen Gruppen reeller Substitutionen mit positiver Determinante.*) Die dabei resultierende Einteilung dieser Gruppen und damit der zugeordneten Uniformisierungsprobleme fließt bei den genannten Autoren aus einer geometrischen Analyse dieser Gruppen bzw. der zugehörenden Fundamentalpolygone oder „Normalpolygone“ (Fricke). Demgegenüber gehe ich hier wie überhaupt von der zu uniformisierenden Kurve aus und gelange durch eine die Idee des Fundamentalpolygons nur unwesentlich benutzende Methode zu einer vollständigen systematischen Durchdringung. Ohne die besonderen Vorteile jeder einzelnen der beiden Methoden vergleichend abwägen zu wollen, möchte ich nur bemerken, daß die meinige einer für die uniformisierenden Variablen mit reeller Substitutionsgruppe geltenden charakteristischen Bemerkung Rechnung trägt, daß nämlich dieselben von der Wahl eines einzelnen Fundamentalpolygons bzw. einereinzelnen kanonischen Zerschneidung *unabhängig* sind.

*) Die betreffenden Gruppen werden bei Poincaré als „*groupes fuchsiens*“, bei Fricke-Klein als „Hauptkreisgruppen“ bezeichnet. Bei letzteren werden auch die die obere Halbebene in sich überführenden Transformationen mit Umlegung der Winkel („Substitutionen zweiter Art“) neben denen ohne Umlegung der Winkel („Substitutionen erster Art“, eigentliche reelle lineare Substitutionen *positiver* Determinante) berücksichtigt, allerdings nur in untergeordneter Weise. Bei der expliziten Durchführung der Klassifikation der Gruppen und der damit zusammenhängenden Aufstellung der Uniformisierungstheoreme werden die „Substitutionen zweiter Art“ überhaupt beiseite gelassen, wodurch die im Texte (pag. 154 oben) erwähnte (vgl. auch pag. 189) Unvollkommenheit zum Vorschein kommt, welche bei voller Berücksichtigung der Substitutionen zweiter Art wegfallen würde. Man würde dadurch in der Tat dieselbe Vollständigkeit erzielen, welche ich durch die Zulassung der reellen linearen Substitutionen mit *negativer* Determinante erzielt habe. Geometrisch drückt sich der Unterschied zwischen den reellen linearen Substitutionen *positiver* und *negativer* Determinante bekanntlich dadurch aus, daß erstere die beiden durch die Achse des Reellen voneinander getrennten Halbebenen (obere und untere Halbebene) einzeln in sich überführen, während letztere diese beiden Halbebenen miteinander vertauschen.

B. Vorbemerkungen.

Allgemeiner Begriff der zu einer algebraischen Kurve gehörenden linear-polymorphen uniformisierenden Variablen.

Wird mit $y(x)$ eine algebraische Funktion von x, mit F die zu dieser Funktion gehörende, über der x-Ebene ausgebreitet zu denkende Riemannsche Fläche bezeichnet, so kann man bei möglichst weiter Auffassung der Bedeutung des Wortes „*Uniformisieren*" als *eine zu der algebraischen Kurve* (x, y) *gehörende uniformisierende Variable* jede Größe t bezeichnen, die durch eine endlich- oder unendlich-vieldeutige analytische Funktion des Ortes auf der Fläche F erklärt ist und die Eigenschaft hat, daß die analytischen Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ in dem Bereiche der von der Größe t ihrer Definition gemäß angenommenen Werte eindeutig sind. Die tiefe Bedeutung des Begriffs der uniformisierenden Variablen tritt jedoch in ihrem ganzen Umfange erst bei einer gewissen Verengerung dieses Begriffs hervor, welche in der Hauptsache darauf hinausläuft, den Funktionen die Bedingung des *linearen Automorphismus* aufzuerlegen. Präzise definieren wir den Begriff in der für uns hier in Betracht kommenden Form folgendermaßen.

Definition der zu einer algebraischen Kurve gehörenden linear polymorphen uniformisierenden Variablen: Eine Größe t heiße eine zu der algebraischen Kurve (x, y) bezw. zu der Riemannschen Fläche F der Funktion $y(x)$ gehörende linear polymorphe uniformisierende Variable, wenn die zu ihrer Erklärung dienende, allgemein zu reden, unendlich-vieldeutige analytische Funktion $t(x, y)$ des Ortes auf der Fläche F folgende Eigenschaften hat:

1. Die Funktion $t(x, y)$ ist entweder auf der ganzen Fläche F in allen ihren Zweigen (— „*Zweig*" relativ zur Fläche F verstanden —) ausnahmslos mit dem Charakter rationaler Funktionen von x und y erklärt, oder es gibt *endlich* viele voneinander verschiedene Stellen auf F, an welchen die Funktion $t(x, y)$ relativ verzweigt ist.

2. Sind t_1 und t_2 irgend zwei relative Zweige der Funktion $t(x, y)$, so ist t_2 eine ganze oder gebrochene lineare Funktion mit konstanten Koeffizienten von t_1.

3. Die Funktion $t(x, y)$ ist eine *einwertige* Funktion des Ortes auf der Riemannschen Fläche F; d. h. präziser: es gibt auf F keine zwei voneinander verschiedenen Punkte, an welchen die Funktion t einen und denselben Wert annimmt. Auch kann die Funktion t an einer und derselben, von einem der genannten relativen Verzweigungspunkte verschiedenen, Stelle nicht in zwei voneinander verschiedenen Zweigen einen und denselben Wert annehmen. —

Charakter der bei Umlaufung eines relativen Verzweigungspunktes sich *ergebenden linearen Substitution.**) Wir fassen einen einmaligen Umlauf in positivem Sinne um einen der relativen Verzweigungspunkte ins Auge. Ist der Verzweigungspunkt ein Verzweigungspunkt von *endlicher* Ordnung, so ist klar, daß die lineare Substitution, welche die Funktion t bei Ausführung dieses Umlaufs erfährt, eine *elliptische* Substitution ist. Es läßt sich in diesem Falle eine lineare Funktion t' von t bestimmen, welche sich bei Ausführung des Umlaufs gemäß der Gleichung

$$[t'] = e^{\frac{2\pi i}{n}} t'$$

ändert, wobei mit $[t']$ der Wert der Funktion t' nach Ausführung des Umlaufs, mit n die Anzahl der um den betreffenden Punkt herum zusammenhängenden Zweige der Funktion t bezeichnet ist.

Ist der betrachtete Verzweigungspunkt ein Verzweigungspunkt von *unendlich* hoher Ordnung, so ist die lineare Umlaufssubstitution, wie wir jetzt beweisen wollen, *parabolisch*, so daß es also eine lineare Funktion t' von t gibt, welche sich gemäß einer Gleichung der Form

$$[t'] = t' + 2\pi i,$$

ändert.

Beweis. Den Beweis führen wir indirekt. Gesetzt, unsere Behauptung sei nicht richtig; dann könnte man jedenfalls eine lineare Funktion t'' von t bestimmen, deren Verhalten gegenüber einem Umlaufe um den Verzweigungspunkt durch eine Gleichung

$$(1) \qquad [t''] = \varkappa t''$$

dargestellt wird, wobei mit $\varkappa$ eine passend zu wählende von *Null* verschiedene Konstante bezeichnet ist. Der absolute Betrag der Größe $\varkappa$ kann nicht gleich *eins* sein. Denn einerseits kann $\varkappa$ keine Wurzel der Einheit sein, weil der betrachtete Verzweigungspunkt nach Voraussetzung von unendlich hoher Ordnung ist, andererseits kann $\varkappa$ auch nicht eine von jeder Einheitswurzel verschiedene Zahl des absoluten Betrages *eins* sein, weil dies offenbar dem Charakter der Funktion t'', also auch der Funktion t, als *einwertiger* Funktion widersprechen würde. Somit muß $|\varkappa| \lessgtr 1$ sein.

Nunmehr denken wir uns um den betrachteten Verzweigungspunkt eine einfach geschlossene Linie L gezogen. Mit G bezeichnen wir das von L und dem Verzweigungspunkte begrenzte zweifach zusammenhängende Gebiet, indem wir den Verzweigungspunkt selbst nicht mehr als zu G

*) Es ist uns an dieser Stelle, wie ich des richtigen Verständnisses halber bemerken will, noch nicht bekannt, daß die Funktion $t(x, y)$ in dem Verzweigungspunkte selbst einen bestimmten Wert annimmt. Vgl. die Fußnote pag. 160.

gehörig betrachten. Um in G einen einzelnen Zweig der Funktion t zu isolieren, denken wir uns von einem Punkte P auf L eine durch G hindurchlaufende Linie l nach dem Verzweigungspunkte gezogen. Dadurch geht der zweifach zusammenhängende Bereich G in einen einfach zusammenhängenden Bereich G_1 über, wobei wiederum der Verzweigungspunkt selbst nicht mehr als zu G_1 gehörig betrachtet werden möge, während die Punkte der Linie l doppelt vorgestellt werden sollen, je nachdem sie dem einen oder andern an l anschließenden Teile des Bereichs G_1 zugerechnet gedacht werden. Dieser doppelten Auffassung entsprechend werde die Linie l genauer einmal mit $l^{(+)}$, das andere Mal mit $l^{(-)}$ bezeichnet, indem die Verteilung der Vorzeichen so gewählt zu denken ist, daß der Übergang von $l^{(-)}$ nach $l^{(+)}$ durch G_1 hindurch die Ausübung eines *positiven* Umlaufs um den Verzweigungspunkt erfordert. Ebenso wird zweckmäßigerweise der erwähnte Punkt P entsprechend einmal mit $P^{(+)}$, das andere Mal mit $P^{(-)}$ bezeichnet.

Wir betrachten nun einen einzelnen Zweig t_1'' der Funktion t''. Die Funktion t_1'' nimmt in G_1, in welchem Gebiete sie für alle Punkte eindeutig erklärt ist, keinen ihrer Werte mehr als einmal an. Sie nimmt ferner den Wert *Null* und den Wert *unendlich* sicher nicht an. Führt man nämlich ausgehend vom Punkte P unendlich viele Umläufe einmal im positiven, das andere Mal im negativen Sinne um den Verzweigungspunkt aus, immer die Linie L verfolgend, so nähern sich die Werte der Funktion t'' wegen (1) sicher unbegrenzt *Null* bezw. *unendlich*, wenn $|\varkappa| < 1$, *unendlich* bezw. *Null*, wenn $|\varkappa| > 1$ ist; demnach würde, wenn t_1'' einen der Werte *Null* oder *unendlich* annähme, der Charakter der Funktion t'' als *einwertige* Funktion ausgeschlossen sein. Die Funktion t_1'' besitzt schließlich noch folgende Eigenschaft: sie nimmt niemals an zwei voneinander verschiedenen Stellen von G_1 Werte mit dem Quotienten $\varkappa$ an, es sei denn, daß der eine der beiden Punkte auf $l^{(-)}$ liegt, der andere der mit ersterem koinzidierende Punkt auf $l^{(+)}$ ist; anderenfalls könnte man nämlich den zweiten Wert aus dem ersten auch dadurch erhalten, daß man ausgehend vom ersten Punkte genau einen vollständigen Umlauf um den Verzweigungspunkt ausführt, so daß also eine Verletzung des Charakters der Funktion t'' als *einwertiger* Funktion unvermeidlich würde.

Wir bilden nun die Funktion

$$\tau'' = e^{\frac{2\pi i}{\log \varkappa} \log t_1''} = t_1''^{\frac{2\pi i}{\log \varkappa}},$$

wobei mit $\log \varkappa$ genauer derjenige Wert bezeichnet ist, welcher den Zuwachs der Funktion $\log t_1''$ oder, was auf dasselbe hinauskommt, der Funktion $\log t''$ bei Ausführung eines positiven Umlaufs um den Verzweigungspunkt darstellt. Aus den vorhin gemachten Angaben über die

Funktion t_1'' können wir schließen, daß die Funktion τ'' eine in dem zweifach zusammenhängenden Gebiete G *eindeutige* und *einwertige* Funktion ist, welche in diesem Gebiete weder den Wert *Null* noch den Wert *unendlich* annimmt. Demnach vermittelt die Funktion τ'' eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung von G auf ein anderes zweifach zusammenhängendes Gebiet G', welches die Ebene nirgends mehrfach bedeckt. Der Linie L entspricht bei der konformen Abbildung eine ganz im Endlichen liegende einfach geschlossene Linie L'. Da die vollständige Änderung, welche die Funktion $\log \tau''$ bei einmaliger Durchlaufung der Linie L im positiven Sinne erfährt, wie aus der Definition von τ'' sofort ersichtlich ist, gleich $2\pi i$ ist, so ergibt sich, daß, die Linie L' den Nullpunkt einfach und zwar im positiven Sinne umschlingt. Aus dem letzteren Umstande folgern wir, daß das Gebiet G' ganz im Innern der Linie L' liegen muß, so zwar, daß dabei der Nullpunkt sicher außerhalb G' befindlich bleibt. Da somit die Funktion τ'' im ganzen Gebiete G unterhalb einer endlichen Grenze bleibt, muß sie sich auch im Verzweigungspunkte selbst bestimmt verhalten, und wir können für τ'' eine Potenzreihenentwicklung in der Form ansetzen

$$\tau'' = A(x-x_0) + (x-x_0)^2\, \mathfrak{P}(x-x_0), \tag{2}$$

wobei mit x_0 der Wert der zu dem Verzweigungspunkte gehörenden x-Koordinate der Kurve (x, y), mit A eine von *Null* verschiedene endliche Zahl und mit $\mathfrak{P}(x-x_0)$ eine nach ganzen positiven Potenzen fortschreitende reguläre Potenzreihe bezeichnet ist. Ist x_0 ein Windungspunkt für die Fläche F oder der unendlich ferne Punkt, welcher seinerseits wieder Windungspunkt der Fläche F sein kann, so tritt an Stelle der Größe $(x-x_0)$ eine Größe $(x-x_0)^{\frac{1}{\nu}}$ bezw. $\frac{1}{x}$ oder $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\nu}}$.

Das Gebiet G' stellt somit eine bestimmte einblättrig zu denkende vollständige Umgebung des Nullpunktes dar. Nun ist $t'' = \tau''^{\frac{\log \varkappa}{2\pi i}}$ und $\frac{\log \varkappa}{2\pi i}$ ist sicher nicht reell. Daraus folgt, daß t'' als Funktion von τ'' und folglich wegen (2) auch als Funktion von x keine einwertige Funktion ist, entgegen der Voraussetzung.

Die Annahme, daß die bei einmaliger Umlaufung des betrachteten Verzweigungspunktes für die Funktion t sich ergebende lineare Umlaufssubstitution nicht parabolisch sei, hat sich also als widerspruchsvoll erwiesen. D. h. die betreffende Umlaufssubstitution ist *parabolisch*. q. e. d.

Das überall bestimmte Verhalten der Funktion $t(x, y)$. Einführung des Schwarzschen Differentialausdrucks dritter Ordnung. Die Funktion $t(x, y)$ verhält sich auf der Fläche F an allen Punkten bestimmt. Ist (x_0, y_0) ein Punkt der Fläche F, welcher für die Funktion $t(x, y)$ nicht die Rolle eines Verzweigungspunktes spielt, so versteht sich diese Bemerkung von selbst. An einer solchen Stelle läßt sich stets eine lineare Funktion von t bestimmen, welche sich, je nachdem der Punkt (x_0, y_0) für die Fläche F ein gewöhnlicher endlicher Punkt oder ein endlicher Windungspunkt $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung oder ein gewöhnlicher unendlich ferner Punkt oder ein unendlich ferner Windungspunkt $(\nu-1)^{\text{ter}}$ Ordnung ist, in der Form entwickeln läßt

$$(x-x_0) + (x-x_0)^2\,\mathfrak{P}(x-x_0)$$

bezw.

$$(x-x_0)^{\frac{1}{\nu}} + (x-x_0)^{\frac{2}{\nu}}\,\mathfrak{P}\left((x-x_0)^{\frac{1}{\nu}}\right),$$

$$\frac{1}{x} + \left(\frac{1}{x}\right)^2 \mathfrak{P}\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\nu}} + \left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{2}{\nu}} \mathfrak{P}\left(\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\nu}}\right),$$

wobei mit $\mathfrak{P}$ jedesmal eine nach ganzen positiven Potenzen des Arguments fortschreitende Potenzreihe bezeichnet ist.

Ist (x_0, y_0) ein relativer Verzweigungspunkt $(n-1)^{\text{ter}}$ Ordnung für die Funktion $t(x, y)$, so kann man auf der Fläche F um den Punkt (x_0, y_0) herum stets ein kleines Gebiet so abgrenzen, daß die Funktion t in keinem Punkte dieses Gebietes (exkl. x_0 selbst) den Wert unendlich annimmt. Die Funktion t läßt sich daher für dieses Gebiet in eine nach ganzen Potenzen von $(x-x_0)^{\frac{1}{n}}$ bezw. $(x-x_0)^{\frac{1}{\nu n}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\nu n}}$ fortschreitende Laurentsche Reihe entwickeln. Die Anzahl der in dieser Reihe vorkommenden Glieder mit negativem Exponenten muß endlich sein, da anderenfalls in der Nähe des Punktes (x_0, y_0) Stellen angegeben werden könnten, in denen die Funktion t einen und denselben Wert annimmt. Aus demselben Grunde kann überhaupt nur die erste negative Potenz wirklich vorkommen. In jedem Falle gibt es eine lineare Funktion von t, welche sich in der Form

$$(x-x_0)^{\frac{1}{n}} + (x-x_0)^{\frac{2}{n}}\,\mathfrak{P}\left((x-x_0)^{\frac{1}{n}}\right)$$

entwickeln läßt, wobei eventuell die Größe $(x-x_0)^{\frac{1}{n}}$ durch $(x-x_0)^{\frac{1}{\nu n}}$ bezw. $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{n}}$, $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\nu n}}$ zu ersetzen ist.

Ist der betrachtete Punkt (x_0, y_0) ein Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung für die Funktion $t(x, y)$, so existiert, wie wir bereits wissen, eine lineare Funktion von t, welche sich bei einem positiven Umlaufe des Punktes (x, y) um den erwähnten Verzweigungspunkt um die Größe $2\pi i$ vermehrt. Die Exponentialfunktion dieser Funktion vermittelt, wie durch eine der pag. 158 angestellten analoge Überlegung erkannt wird, eine umkehrbar eindeutige und konforme Abbildung der Umgebung des Punktes (x_0, y_0) auf ein schlichtes, ganz im Endlichen liegendes, zweifach zusammenhängendes Gebiet, dessen innere Begrenzung sich aus allgemeinen funktionentheoretischen Gründen (vergl. pag. 158) auf einen Punkt reduzieren muß. Die erwähnte Abbildungsfunktion läßt sich daher in der Form einer regulären Potenzreihe der Größe $(x-x_0)$ bezw. $(x-x_0)^{\frac{1}{\nu}}$, $\frac{1}{x}$, $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ entwickeln, welche im Punkte (x_0, y_0) in bezug auf die Entwicklungsgröße genau von der ersten Ordnung verschwindet. Die betrachtete lineare Funktion von t läßt sich dementsprechend in der Form

$$\log(x-x_0) + \mathfrak{P}(x-x_0)$$

entwickeln, wobei eventuell die Größe $(x-x_0)$ durch $(x-x_0)^{\frac{1}{\nu}}$ bezw. $\frac{1}{x}$, $\left(\frac{1}{x}\right)^{\frac{1}{\nu}}$ zu ersetzen ist.

Wir können jetzt den Schluß ziehen, daß die Funktion $t(x, y)$ einer Differentialgleichung dritter Ordnung folgender Form genügt

$$D(t)_x = R(x, y), \tag{3}$$

wobei mit $D(t)_x$ der durch die Gleichung

$$D(t)_x = \frac{2\dfrac{dt}{dx}\dfrac{d^3t}{dx^3} - 3\left(\dfrac{d^2t}{dx^2}\right)^2}{2\left(\dfrac{dt}{dx}\right)^2}$$

definierte *Schwarz*sche Differentialausdruck dritter Ordnung, mit $R(x, y)$ eine rationale Funktion von x und y bezeichnet ist.*)

---

*) Durch unsere Betrachtungen ist überhaupt folgender Satz bewiesen: *Wenn in der Umgebung einer Stelle x_0 der x-Ebene eine nur in dem Punkte x_0 möglicherweise wesentlich singuläre einwertige analytische Funktion $t(x)$ erklärt ist, welche bei einem Umlaufe des Punktes x um den Punkt x_0 eine lineare Substitution erfährt, so ist diese Substitution, je nachdem der Verzweigungspunkt x_0 von endlicher oder unendlich hoher Ordnung ist, elliptisch oder parabolisch, und es gibt im ersten Falle eine lineare Funktion von t, welche sich in der Form $(x-x_0)^{\frac{1}{n}} + (x-x_0)^{\frac{2}{n}}\,\mathfrak{P}\left((x-x_0)^{\frac{1}{n}}\right)$ entwickeln läßt, wobei mit n die Anzahl der Zweige bezeichnet ist, die um den Punkt x_0 herum zusammenhängen, im zweiten Falle eine lineare Funktion von t, welche sich in der Form $\log(x-x_0) + \mathfrak{P}(x-x_0)$ entwickeln läßt; mit $\mathfrak{P}$ ist in beiden Fällen eine reguläre Potenzreihe bezeichnet. Für die Funktion $t(x)$ besteht daher eine Differentialgleichung $D(t)_x = \varphi(x)$, wobei mit $\varphi(x)$ eine für die Umgebung des Punktes x_0 in der Form*

Denken wir uns umgekehrt eine Funktion $t(x, y)$ durch eine Differentialgleichung der obigen Form definiert, indem wir die rationale Funktion $R(x, y)$ willkürlich geben, so hängen die verschiedenen relativen Zweige dieser Funktion $t(x, y)$ durch lineare Substitutionen zusammen und die Anzahl der verschiedenen relativen Verzweigungspunkte der Funktion $t(x, y)$ ist endlich. Daraus ergibt sich, daß wir unseren Begriff der zur Kurve (x, y) gehörenden linear polymorphen uniformisierenden Variablen auch folgendermaßen fassen können:

Andere Definition der zu einer algebraischen Kurve gehörenden linear-polymorphen uniformisierenden Variablen: Eine Größe t heißt eine zur algebraischen Kurve (x, y) gehörende linear-polymorphe uniformisierende Variable, wenn die zu ihrer Erklärung dienende analytische Funktion $t(x, y)$ eine einwertige Funktion ist, welche einer Differentialgleichung der Form (3) genügt.

Wertegebiet der uniformisierenden Variablen und Existenzbereich des uniformisierenden Funktionenpaars. Die Gesamtheit derjenigen Werte, welche die Funktion $t(x, y)$ annimmt, soweit sie den Charakter algebraischer Funktionen besitzt, bezeichnen wir als das Wertegebiet T der Funktion $t(x, y)$. Diejenigen Funktionswerte, welche den etwa vorhandenen Verzweigungspunkten unendlich hoher Ordnung entsprechen, sollen also nicht mehr als zum Wertegebiet T gehörig betrachtet werden. Das Wertegebiet T besteht daher lediglich aus inneren Punkten. Bei Zugrundelegung dieser präzisen Definition des Wertegebiets gilt offenbar die Bemerkung, daß die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$, die wir als die *uniformisierenden Funktionen* bezeichnen wollen, zwei im ganzen Gebiete T eindeutig und mit dem Charakter rationaler Funktion von t definierte analytische Funktionen sind, deren keine über die Begrenzung von T hinaus analytisch fortgesetzt werden kann: ist $t^{(0)}$ irgend ein Punkt auf der Grenze des Gebietes T, so besitzt keine der Funktionen $x(t)$, $y(t)$ in diesem Punkte den Charakter einer algebraischen Funktion von t. Wir drücken dies kurz so aus: Das Wertegebiet T ist mit dem Existenzbereiche jeder einzelnen der uniformisierenden Funktionen $x(t)$, $y(t)$ identisch.

Der Umstand, daß je zwei Zweige der Funktionen $t(x, y)$ durch eine

---

$\left(1-\left(\frac{1}{n}\right)^2\right)\frac{1}{2(x-x_0)^2}+\frac{1}{(x-x_0)}\mathfrak{P}_1(x-x_0)$ *bezw. in der Form* $\frac{1}{2(x-x_0)^2}+\frac{1}{(x-x_0)}\mathfrak{P}_1(x-x_0)$ *darstellbare Funktion bezeichnet ist.*

Der Satz kann auch für lineare homogene Differentialgleichungen zweiter Ordnung mit wesentlich singulären Koeffizienten interpretiert werden. Das Neue an dem Satze gegenüber analogen bekannten Sätzen besteht gerade in der erwähnten Allgemeinheit der Voraussetzung, welche über das Verhalten der Funktion $t(x)$ im Punke x_0 selbst nichts aussagt.

lineare Substitution verknüpft sind, bedingt die Existenz einer, allgemein zu reden, aus unendlich vielen Substitutionen bestehenden *Gruppe linearer Substitutionen*, deren jede einzelne eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Gebiets T auf sich selbst vermittelt. Bei den Substitutionen dieser Gruppe bleiben die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ ungeändert, d. h.: Die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ sind *linear-automorphe Funktionen.*

C. Vorbereitende Untersuchung.

Die Uniformisierung algebraischer Kurven durch rationale Funktionen, rationale Funktionen einer Exponentialfunktion, elliptische Funktionen.

Bestimmung aller zu algebraischen Kurven (x, y) gehörenden linear-polymorphen uniformisierenden Variablen, deren Wertegebiet durch die ganze Ebene inkl. des unendlich fernen Punktes dargestellt wird. Wird mit t die uniformisierende Variable bezeichnet, so setzen wir erstens eine Gleichung der Form

$$D(t)_x = R(x, y)$$

voraus, zweitens machen wir die Voraussetzung, daß $x(t)$ und $y(t)$ in der ganzen t-Ebene inkl. des unendlich fernen Punktes den Charakter rationaler Funktionen von t haben. Daraus folgt, daß die Funktionen $x(t)$ und $y(t)$ rationale Funktionen von t sind. Die Funktion $t(x, y)$ ist nun jedenfalls eine endlich-vieldeutige Funktion des Ortes auf der Riemannschen Fläche F der Funktion $y(x)$. Diese Funktion besitzt die Eigenschaft, an einer und nur einer Stelle der Fläche F und zwar nur in einem einzigen Zweige unendlich groß zu werden von der ersten Ordnung. Bilden wir daher die Funktion $\sum_{\alpha=1}^{m} t_\alpha$, indem wir über alle m relativen Zweige der Funktion t summieren, so erhalten wir eine eindeutige Funktion des Ortes auf der Fläche F, welche nur an einer einzigen Stelle und zwar von der ersten Ordnung unendlich wird. Diese Funktion nimmt folglich auf F nach einem bekannten Satze jeden reellen oder komplexen Wert einmal und nur einmal an und vermittelt mithin eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Fläche F auf die Fläche einer Vollkugel. Das heißt aber: die Fläche F, bzw. die algebraische Kurve (x, y) ist vom Geschlecht *null.**)

Das soeben auf funktionentheoretischem Wege gefundene Resultat, daß die Kurve (x, y) vom Geschlecht *null* sein muß, kann auch durch

*) Vgl. Lüroths Satz über rationale Kurven. Math. Ann. Bd. 9, pag. 163—165.

folgende wesentlich auf Betrachtungen der Analysis situs beruhende Überlegung hergeleitet werden.

Zu der Funktion $t(x, y)$ gehört, sofern dieselbe als endlich-vieldeutige Funktion des Ortes auf der Fläche F erklärt ist, eine bestimmte über F ausgebreitet zu denkende Riemannsche Fläche Φ. Nehmen wir an, das Geschlecht p der Fläche F sei $\geqq 1$. Dann ist es auf Grund der Analysis-situs-Definition des Geschlechts möglich, auf der Fläche F einen die Fläche nicht zerstückelnden einfach geschlossenen Rückkehrschnitt A zu ziehen. Wir können uns nun vorstellen, daß wir diesen Schnitt durch sämtliche relativen Blätter der Fläche Φ ausführen. Da die Fläche Φ vom Geschlecht *null* ist, so wird sie nach Ausführung dieses durch alle Blätter geführten Schnitts notwendig in endlich viele Stücke zerfallen. Ist Φ_1 irgend eines dieser Stücke, so erkennt man sofort, daß die Anzahl der getrennten Begrenzungslinien, welche dieses Stück aufweist, mindestens gleich 2 ist, darum nämlich, weil man auf F eine Linie ziehen kann, welche von einem Ufer des Rückkehrschnitts A nach dem anderen führt, ohne A, also auch ohne eine Begrenzungslinie von Φ_1 zu treffen. Nun ist es aber offenbar unmöglich, eine geschlossene einfach zusammenhängende Fläche, was doch die Fläche Φ tatsächlich ist, in endlich viele Teilgebiete zu zerlegen, deren jedes mehr als eine geschlossene Begrenzungslinie aufweist. Damit ist die Annahme $p \geqq 1$ als unzulässig erkannt und das obige Resultat wieder gefunden, nämlich, daß $p = 0$ ist.

Gehen wir nun davon aus, daß $p = 0$ ist. Es ist dann zweckmäßig, die Riemannsche Fläche F als einblättrige x-Ebene (inkl. ∞) zu wählen, was ohne Beschränkung der Allgemeinheit der Untersuchung statthaft ist. Die linear-polymorphe uniformisierende Variable $t(x, y)$ werden wir dann entsprechend mit $t(x)$ bezeichnen. Die Riemannsche Fläche Φ der Funktion $t(x)$ ist relativ zur x-Ebene *„regulär verzweigt"*, d. h.: zieht man auf dieser Fläche von einem ihrer Punkte aus irgend eine auf derselben Fläche geschlossene Linie, so bleibt diese Linie auf der Fläche Φ geschlossen, wenn man den Ausgangspunkt in irgend eins der andern Blätter der Fläche Φ verlegt, ohne seine Lage in der x-Ebene zu ändern. Wir bezeichnen mit m die Anzahl der Blätter der Fläche Φ, mit n die Anzahl derjenigen x-Stellen, an welchen die Fläche Φ Windungspunkte hat, mit $l_1, l_2, \cdots, l_n$ die Anzahlen der an den genannten x-Stellen jedesmal zusammenhängenden Blätter.

Nach Riemann besteht für irgend eine geschlossene Riemannsche Fläche F die Formel

$$w - 2m = 2p - 2,$$

dabei ist w die Anzahl der Verzweigungspunkte, m die Blätterzahl, p das Geschlecht. Für unsere Fläche Φ haben wir

$$w = \sum_{\alpha=1}^{n} \frac{l_{\alpha-1}}{l_\alpha},$$

das gibt die Gleichung:

$$m\left(\sum_{\alpha=1}^{n}\left(1-\frac{1}{l_\alpha}\right)-2\right)=-2,$$

oder

(*) $$n-2-\sum\frac{1}{l_\alpha}=-\frac{2}{m}.$$

Nun ist

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{l_\alpha}\leqq\frac{n}{2},$$

also ergibt sich

$$\frac{n}{2}\leqq 2-\frac{2}{m},$$

mithin

$$n<4.$$

Der Fall $n=1$ ist von vorherein als topologisch unmöglich ausgeschlossen. Der Fall $n=2$ ist möglich, doch offenbar nur, wenn gleichzeitig $l_1=l_2$ ist. Nehmen wir $n=3$ an, so haben wir wegen der Gleichung (*) noch zu berücksichtigen

$$\sum_{\alpha=1}^{n}\frac{1}{l_\alpha}>1.$$

Wir erhalten also die bekannten Schwarzschen*) Vollkugel-Fälle:

$$l_1,\ l_2,\ l_3 = 2,\ 2,\ n\underset{\infty}{\geqq 2};\ 2,\ 3,\ 3;\ 2,\ 3,\ 4;\ 2,\ 3,\ 5;$$

Bestimmung aller zu algebraischen Kurven gehörenden linear-polymorphen uniformisierenden Variablen, deren Wertegebiet durch die ganze Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes dargestellt wird. Ist t eine linear-polymorphe uniformisierende Variable, welche zur algebraischen Kurve (x, y) gehört und deren Wertegebiet T von der ganzen Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes gebildet wird, so ist die Funktion $t(x, y)$ eine relativ zur Riemannschen Fläche F der algebraischen Funktion $y(x)$ notwendig *unendlich-vieldeutige* analytische Funktion. Sind t_1 und t_2 zwei verschiedene relative Zweige der Funktion $t(x,y)$, so hat die zwischen t_1 und t_2 bestehende lineare Beziehung, da sie eine umkehrbar eindeutige Abbildung der ganzen Ebene (exkl. ∞) auf sich selbst vermittelt, die Form

$$t_2 = at_1 + b,$$

*) Schwarz, Abhandlung über die hypergeometrische Reihe. Crelles Journal, Bd. 75. — Vgl. ferner Kleins Methode der Bestimmung aller endlichen Gruppen linearer Substitutionen in „Vorlesungen über das Ikosaeder", pag. 115—120.

wobei a und b Konstanten sind. Aus dem Umstande, daß jeder endliche Punkt der t-Ebene *innerer* Punkt des Wertegebiets T der Variablen t ist und folglich nicht Häufungspunkt äquivalenter Punkte sein kann, schließen wir, daß a entweder den Wert *Eins* hat oder eine Einheitswurzel ϱ ist. Im ersten Falle haben wir es mit einer parabolischen Substitution zu tun, im zweiten Falle mit einer elliptischen Substitution endlicher Ordnung. Betrachten wir nun die ganze Gruppe der zwischen den unendlich-vielen Zweigen der Funktion $t(x, y)$ geltenden linearen Substitutionen, so liefert uns dieselbe eine in der ganzen t-Ebene (exkl. ∞) *eigentlich diskontinuierliche* Gruppe euklidischer Bewegungen. Wir unterscheiden zwei Fälle:

Erster Fall: Die Gruppe enthält keine elliptischen Substitutionen.

Zweiter Fall: Die Gruppe enthält elliptische Substitutionen.

Sind *keine elliptischen Substitutionen* vorhanden (erster Fall), so schließen wir in bekannter Weise, daß die gesamte Gruppe entweder in der Form

$$(1) \qquad t_2 = t_1 + 2m\omega \qquad [m = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots]$$

oder in der Form

$$(2) \qquad t_2 = t_1 + 2m\omega + 2m'\omega' \qquad \left[{m \atop m'} = 0, \pm 1, \pm 2, \cdots; \quad \Re \frac{\omega'}{\omega i} \neq 0\right]$$

erhalten werden kann. Im ersteren Falle ergibt sich ein Parallelstreifen, im letzteren ein Parallelogramm als Fundamentalbereich (siehe Fig. 1 u. 2).

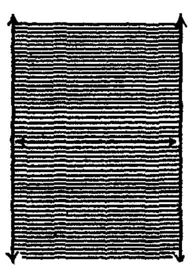

Fig. 1.

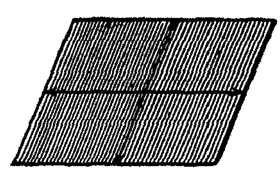

Fig. 2.

Der Periodenstreifen wird durch Vermittlung der Funktion $X(t) = e^{\frac{t\pi i}{\omega}}$ auf die zweifach punktierte Vollkugel, das Parallelogramm durch Vermittlung der Weierstraßschen Funktion $X(t) = \wp(t)$ auf eine geschlossene Riemannsche Fläche vom Geschlecht $p = 1$ abgebildet.

Sind *elliptische Substitutionen vorhanden* (zweiter Fall), so gelangen wir mit Benutzung bekannter Gedankenelemente in folgender Weise zur expliziten Aufstellung der Gruppe.*) Wir schließen zunächst, daß stets auch parabolische Substitutionen vorhanden sein müssen. Denn, wenn alle Substitutionen elliptisch wären, so könnten jedenfalls nicht alle diese Substitutionen einen und denselben endlichen Fixpunkt haben.

*) Vgl. z. B. Fricke-Klein, „Vorlesungen über automorphe Funktionen", Bd. I, pag. 222—224.

S_1 und S_2 seien daher zwei in der Gruppe vorkommende elliptische Substitutionen, deren Fixpunkte von einander verschieden sind. Bildet man dann die Substitution $S_1^{-1} S_2 S_1 S_2^{-1}$, so ist dieselbe, wie leicht zu sehen, eine von der identischen Substitution sicher verschiedene *parabolische* Substitution.

Die Gesamtheit aller in der betrachteten Gruppe vorkommenden Substitutionen der Form

$$t_2 = t_1 + b$$

bildet eine Untergruppe, welche entweder in der Form (1) oder (2) vollständig dargestellt wird. Um nun die zu dieser Gruppe hinzutretenden elliptischen Substitutionen zu finden, schicken wir folgende drei Bemerkungen voraus.

Zwei elliptische Substitutionen der Gruppe, welche einen und denselben Koeffizienten von t_1 aufweisen, unterscheiden sich in den hinzutretenden additiven Konstanten um eine in der Gruppe vorkommende Periode.

Sind ϱ_1 und ϱ_2 zwei Einheitswurzeln, welche als Koeffizienten vorkommen, so kommt auch $\varrho_1 \cdot \varrho_2$ und $\varrho_1 : \varrho_2$ als Koeffizient vor.

Ist 2ϖ eine in der Gruppe vorkommende Periode, ϱ eine in der Gruppe vorkommende Einheitswurzel, so kommen auch die durch folgenden Ausdruck dargestellten Größen als Perioden vor:

$$2\varpi(\varrho^\nu - (\pm 1)) \qquad [\nu = 0, 1, 2, \cdots].$$

Die letzte (dritte) Bemerkung gestattet, aus jeder vorkommenden Periode sofort eine *absolut noch kleinere Periode* herzuleiten, sofern nicht angenommen wird, daß der Exponent, zu welchem die Einheitswurzel ϱ gehört, einen der Werte 2, 3, 4, 6 hat. Da es nun eine absolut kleinste Periode sicher gibt, schließen wir, daß der Exponent, zu welchem ϱ gehört, einen der genannten Werte haben muß.

Die zweite Bemerkung in Verbindung mit dem soeben gefundenen Resultat gestattet uns folgenden weiteren Schluß zu ziehen: wenn ϱ_0 eine solche in der Gruppe vorkommende Einheitswurzel ist, welche zu einem möglichst hohen Exponenten gehört, so liefern die Potenzen von ϱ_0 alle in der Gruppe als Koeffizienten vorkommenden Einheitswurzeln.

Schließlich führt uns die erste Bemerkung in Verbindung mit dem jetzt feststehenden Resultat zur expliziten Aufstellung der Gruppe selbst in der Form

$$(*) \qquad t_2 = \varrho_0{}^\nu t_1 + b_0 + 2\varpi \qquad [\nu = 0, 1, \cdots, e-1],$$

wobei mit e der Exponent bezeichnet ist, zu welchem die Einheitswurzel ϱ_0 gehört, also eine der Zahlen 2, 3, 4, 6; die Größe 2ϖ durchläuft das vollständige System der Perioden.

Die Bemerkung, daß aus jeder Periode 2ϖ eine Periode $\varrho \cdot 2\varpi$ hergeleitet werden kann, führt noch zu einer genaueren Bestimmung des Periodensystems selbst in den Fällen, in welchen der Eponent e einen der Werte 3, 4, 6 hat. Man erhält nämlich in den Fällen $e = 3$ und $e = 6$ ein primitives Periodenpaar in der Gestalt eines aus zwei gleichseitigen Dreiecken zusammengesetzten Rhombus, im Falle $e = 4$ ein primitives Periodenparallelogramm in Gestalt eines Quadrats.

Die Einordnung der elliptischen Fixpunkte in das jeweilige Periodengitter wird aus dem Ansatze sofort klar. Man erhält nämlich als allgemeinen Ausdruck für die Fixpunkte der elliptischen Substitutionen

$$\frac{b_0}{1-\varrho_0^\nu} + \frac{2\varpi}{1-\varrho_0^\nu}.$$

Es genügt, die Lage derselben mit den zugehörenden Ordnungszahlen innerhalb eines einzelnen primitiven Periodenstreifens bzw. Periodenparallelogramms anzugeben. Das geschieht in folgenden Figuren (Fig. 3—7), in

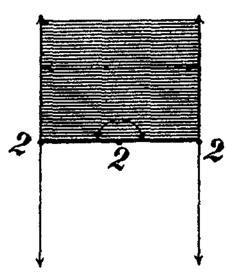

Fig. 3. ($e = 2$)

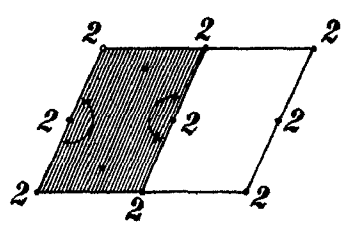

Fig. 4. ($e = 2$)

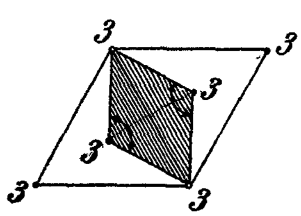

Fig. 5. ($e = 3$)

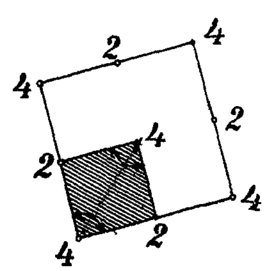

Fig. 6. ($e = 4$)

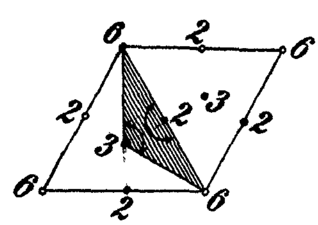

Fig. 7. ($e = 6$)

welchen die schraffierten Gebiete je einen Fundamentalbereich der betreffenden Gruppe darstellen. Der Flächeninhalt des Fundamentalbereichs ist jedesmal gleich ein e^{tel} von dem Flächeninhalte des gezeichneten fundamentalen Periodenparallelogramms bezw. Periodenstreifens.

Analog wie in den Fällen der Figur 1 und 2 können wir auch von den vorliegenden Fundamentalbereichen (Fig. 3—7) durch Vermittelung ausdrucksmäßig angebbarer Funktionen den Übergang zu geschlossenen Riemannschen Flächen machen. Im Falle der Fig. 3 vermittelt die Funktion $X(t) = \cos\frac{t\pi i}{\omega}$ eine umkehrbar eindeutige Abbildung des Fundamentalbereichs (soweit er durch endliche Punkte dargestellt ist) auf die schlichte

x-Ebene mit Ausschluß des unendlich fernen Punktes. Im Falle der Figur 4 vermittelt die Funktion $X(t) = \wp(t)$ eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung des Fundamentalbereichs auf die schlichte x-Ebene inkl. des unendlich fernen Punktes; dasselbe leistet im Falle der Fig. 5 die Funktion $\wp'(t)$ (Ableitung der Funktion $\wp(t)$), im Falle der Figur 6 die Funktion $\wp^2(t)$, im Falle der Fig. 7 die Funktion $\wp'^2(t)$.*)

Durch Vermittelung der Funktion $X(t(x,y))$ wird nach dem Vorhergehenden die Riemannsche Fläche F umkehrbar eindeutig und konform auf eine Fläche F' bezogen, welche im Falle der Figur 2 vom Geschlecht *eins*, in allen anderen Fällen (Fig. 1, 3—7) vom Geschlecht *null* ist. Die Fläche F selbst muß daher vom Geschlecht *eins* bzw. *null* sein. Im Falle der Fig. 2 ist dann $t(x, y)$ offenbar nichts anderes als das zu dieser Fläche gehörende elliptische Integral erster Art. In den anderen Fällen, in welchen wir an Stelle der Fläche F eine schlichte x-Ebene treten lassen dürfen, erhalten wir, da die schlichte x-Ebene $(\equiv F)$ auf die schlichte X-Ebene $(\equiv F')$ umkehrbar eindeutig und konform bezogen ist, das Resultat, daß $X(x)$ eine lineare Funktion ist, so daß also die Funktion $t(x, y)$, die wir zweckentsprechend jetzt mit $t(x)$ bezeichnen werden, wesentlich mit der Umkehrungsfunktion der Funktion $X(t)$ identisch ist. Daraus ergibt sich nun auch sofort die relative Verzweigung der linear-polymorphen Funktion $t(x)$. Wir haben nämlich entweder nur zwei relative Verzweigungspunkte, beide von unendlich hoher Ordnung, oder drei Verzweigungspunkte mit den zugehörenden Verzweigungszahlen $2, 2, \infty$, bezw. $3, 3, 3$, bezw. $2, 4, 4$, bezw. $2, 3, 6$, oder schließlich vier Verzweigungspunkte mit den Verzweigungszahlen $2, 2, 2, 2$. Die Funktionen $t(x)$ lassen sich durch bekannte von Herrn Schwarz aufgestellte Integralausdrücke darstellen.**)

D. Erster (analytischer) Hauptteil.

Formulierung des Problems der Bestimmung aller zu einer beliebig gegebenen algebraischen Kurve gehörenden linear-polymorphen uniformisierenden Variablen mit reeller Substitutionsgruppe. Wertegebiet und charakteristische Signatur der einzelnen uniformisierenden Variablen.

Das Problem, dessen Behandlung den Hauptgegenstand dieser Abhandlung bilden soll, formulieren wir folgendermaßen:

---

*) Von der Richtigkeit dieser Behauptungen wird sich der Leser leicht Rechenschaft geben können. Es ist dabei angenommen worden, daß der Nullpunkt der t-Ebene als ein elliptischer Fixpunkt möglichst hoher Ordnung gewählt ist.

**) H. A. Schwarz: „Über einige Abbildungsaufgaben". (Crelles Journal, Bd. 70).

Es sollen, wenn mit (x, y) eine beliebig gegebene algebraische Kurve und mit F die über der x-Ebene ausgebreitet zu denkende Riemannsche Fläche der algebraischen Funktion $y(x)$ bezeichnet wird, alle zu dieser Kurve bezw. zu der algebraischen Funktion $y(x)$ oder der Riemannschen Fläche F gehörenden uniformisierenden Variablen t bestimmt werden, für welche die zwischen den einzelnen relativen Zweigen der Funktion $t(x, y)$ bestehenden linearen Substitutionen sämtlich reell sind, so daß also, wenn t_1 und t_2 irgend zwei dieser Zweige sind,

$$t_2 = \frac{\alpha t_1 + \beta}{\gamma t_1 + \delta}$$

ist, unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ reelle Konstanten verstanden, deren Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma$ von Null verschieden ist, im übrigen aber positiv oder negativ sein kann.

Je nachdem die Determinante $\Delta = \alpha\delta - \beta\gamma$ positiv oder negativ ist, besitzt die betreffende lineare Substitution die Eigenschaft, die beiden Halbebenen, in welche die t-Ebene durch die Achse des Reellen zerlegt wird, einzeln in sich zu transformieren oder miteinander zu vertauschen, wobei die Achse des Reellen selbst im ersten Fall mit Beibehaltung des Durchlaufungssinnes, im zweiten Falle mit Wechsel des Durchlaufungssinnes in sich transformiert wird.

Die Substitutionen mit $\Delta > 0$ bestehen aus *elliptischen*, *parabolischen* und *hyperbolischen* Substitutionen, die mit $\Delta < 0$ aus *hyperbolischen* und einer speziellen *elliptischen* Substitution der Periode *zwei*. Ist $t_2 = \frac{\alpha t_1 + \beta}{\gamma t_1 + \delta}$ irgend eine reelle Substitution, welche in der t-Ebene ausgeführt wird, so läßt sich diese Substitution, je nachdem welchem der fünf aufgeführten Typen sie angehört, durch eine passende reelle lineare Transformation der t-Ebene in eine τ-Ebene $\tau = \frac{\mu t + \nu}{\varrho t + \sigma}$ $(\mu\sigma - \varrho\nu > 0)$ auf eine der Formen bringen

1 a.	$\frac{\tau_2 + i}{\tau_2 - i} = \varrho\, \frac{\tau_1 + i}{\tau_1 - i}$	$[\lvert\varrho\rvert = 1]$
1 b.	$\tau_2 = \tau_1 + c$	[c reell und von Null verschieden]
1 c.	$\tau_2 = \varkappa \cdot \tau_1$	[$\varkappa$ reell positiv und von 1 verschieden]
2 a.	$\tau_2 = \varkappa \tau_1$	[$\varkappa$ reell negativ und von -1 verschieden] *)
2 b.	$\tau_2 = -\tau_1$.	

D, I. Die Gestalt des Wertegebiets T.

Für die folgende Untersuchung ist die Unterscheidung zweier charakteristisch unterschiedener Fälle fundamental:

---

*) Der von uns ebenso wie 1c als *hyperbolisch* bezeichnete Typus 2a wird gewöhnlich als *loxodromisch* bezeichnet.

Erster Fall. Der Wertebereich T der uniformisierenden Variablen t (welcher gemäß der von uns in den „*Vorbemerkungen*" (B) gegebenen präzisen Definition nur aus inneren Punkten besteht), enthält keinen Punkt der Achse des Reellen in seinem Innern.

Zweiter Fall. Der Wertebereich T enthält einen Punkt der Achse des Reellen und folglich auch ganze Stücke der Achse des Reellen in seinem Innern.

Wir beweisen jetzt folgenden, das Wertegebiet T betreffenden Satz.

Satz: *Je nachdem das Wertegebiet T der Variablen t die Achse des Reellen nicht trifft (s. erster Fall) oder trifft (s. zweiter Fall), ist das Gebiet T mit der ganzen oberen Halbebene (exkl. alle Punkte der Achse des Reellen) oder mit der ganzen Ebene (exkl. gewisse, im allgemeinen in unendlich großer Zahl vorhandene Punkte der Achse des Reellen) identisch.*

Beweis des ersten Teiles der in dem Satze aufgestellten Behauptung. Im ersten Falle, welcher dadurch charakterisiert ist, daß das Gebiet T sich vollständig in einer der beiden Halbebenen befindet, in welche die t-Ebene durch die Achse des Reellen zerlegt wird, stellt es offenbar keine wesentliche Beschränkung des Grades der Allgemeinheit der Untersuchung dar, wenn das Gebiet T vollständig in der oberen Halbebene liegend vorgestellt wird.

Wir beweisen die in dem Satze aufgestellte Behauptung über das Gebiet T *indirekt*, indem wir annehmen, das Gebiet T erfülle nicht die ganze obere Halbebene, und aus dieser Annahme einen Widerspruch herleiten.

Es sei a ein innerer Punkt des Gebiets T. Wir fassen die Schar derjenigen Kreise in der oberen t-Halbebene ins Auge, welche von allen durch den Punkt a hindurchgehenden Orthogonalkreisen der Achse des Reellen senkrecht geschnitten werden. Da unserer Annahme gemäß das Gebiet T nicht die ganze obere Halbebene ausfüllt, so gibt es unter den Kreisen der Schar einen ganz bestimmten endlichen Kreis, K_a, von der Beschaffenheit, daß alle inneren Punkte desselben dem Gebiete T angehören, während auf der Peripherie desselben mindestens *ein* Punkt der Grenze des Gebiets T liegt. Ein solcher Grenzpunkt auf der Peripherie von K_a sei t^*. Vom Punkte a aus denken wir uns nach dem Punkte t^* denjenigen Kreisbogen λ gezogen, dessen natürliche Fortsetzung über t^* hinaus die Achse des Reellen unter rechtem Winkel treffen würde.

Wenn wir uns mit t auf dem Kreisbogen λ von a nach t^* bewegen, wird der Kreis K_t, welcher in bezug auf den Punkt t ebenso definiert zu denken ist wie der Kreis K_a in bezug auf den Punkt a, letzteren Kreis beständig im Punkte t^* berühren und sich offenbar schließlich auf den Punkt t^* reduzieren. Das Verhältnis des Durchmessers von K_t durch den kürzesten Abstand dieses Kreises von der Achse des Reellen wird sich infolgedessen dem Werte *Null* unbegrenzt nähern.

Andererseits werden wir nunmehr zeigen, daß, wenn t irgend ein Punkt des Bereichs T ist, das Verhältnis des Durchmessers von K_t durch den kürzesten Abstand dieses Kreises von der Achse des Reellen einen oberhalb einer gewissen für alle t gleichmäßig geltenden, positiven, von *Null* verschiedenen Größe liegenden Wert besitzt; darin läge dann ein Widerspruch gegen das unmittelbar vorher gewonnene Resultat.

Zu dem Zwecke denken wir uns die Riemannsche Fläche F der algebraischen Funktion $y(x)$ durch $2p$ von einem Punkte der Fläche ausgehende und in demselben Punkte endigende Rückkehrschnitte und gewisse weitere von demselben Punkte auslaufende und in den relativen Verzweigungspunkten der Funktion $t(x, y)$ endigende Einschnitte in eine einfach zusammenhängende Fläche $\overline{F}$ verwandelt. Mit $t_0(x, y)$ werde ein beliebig gewählter Zweig der Funktion $t(x, y)$ bezeichnet; derselbe ist in der einfach zusammenhängenden Fläche $\overline{F}$ eindeutig erklärt. Dem Werte t_0 entspricht in der t-Ebene ein bestimmter endlicher Kreis K_{t_0} (vgl. die Definition von K_a und K_t) und folglich auch ein bestimmter positiver, von Null verschiedener Wert des Quotienten: Durchmesser von K_{t_0} durch kürzesten Abstand dieses Kreises von der Achse des Reellen. Dieser Verhältniswert Q kann mithin als eine Funktion des Ortes der Fläche $\overline{F}$ aufgefaßt werden. Die Funktion Q ist nur für diejenigen Punkte der Fläche $\overline{F}$ nicht erklärt, welche Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung für die Funktion $t(x, y)$ sind. An allen andern Stellen der Fläche $\overline{F}$ ist Q offenbar eine stetige Funktion des Ortes. (Die unendlich fernen Punkte von $\overline{F}$ hat man sich dabei mittels einer Hilfsabbildung durch reziproke Radien ins Endliche transformiert zu denken.)

Von besonderer Wichtigkeit ist jetzt die Bemerkung, daß die Funktion Q, deren Definition an die Auswahl eines Zweiges t_0 der Funktion t geknüpft wurde, von der Auswahl dieses Zweiges *unabhängig* ist. Die Richtigkeit dieser Bemerkung ergibt sich sofort aus dem Umstande, daß dem Übergange von dem Zweige t_0 zu einem beliebigen anderen Zweige jedesmal eine reelle lineare Substitution entspricht, durch deren Vermittelung eine umkehrbare eindeutige Transformation des Gebiets T in sich bewirkt wird. Gegenüber solchen Transformationen ist nun aber die Definition der Größe Q *invariant*, wie man sich sofort überzeugt, wenn man berücksichtigt, daß Q im wesentlichen mit derjenigen Doppelverhältnisinvariante identisch ist, welche dem von K_{t_0} und der Achse des Reellen gebildeten Kreispaare als Modul zugeordnet ist. Demnach ist die Funktion Q, welche ursprünglich für die Fläche $\overline{F}$ erklärt worden ist, auch in der unaufgeschnittenen Fläche F selbst unter Ausschluß der Verzweigungsstellen unendlich hoher Ordnung eine endliche, positive, eindeutige und stetige Funktion des Ortes, welche nirgends den Wert Null annimmt.

Wie verhält sich die Funktion Q an den *Verzweigungsstellen unendlich hoher Ordnung?* Ich behaupte, sie wird bei stetiger Annäherung an einen solchen Punkt bestimmt unendlich: es gibt, wenn mit M eine beliebig große positive Zahl bezeichnet wird, eine gewisse durch eine den Verzweigungspunkt nicht treffende Kreislinie abgrenzbare Umgebung dieses Punktes, so daß für alle Punkte dieser Umgebung $Q > M$ ist. Was den Nachweis dieser Behauptung anbetrifft, so können wir uns auf Grund des invarianten Charakters der Definition der Größe Q auf die Betrachtung der durch eine passend gewählte reelle lineare Funktion von $t(x, y)$ vermittelten konformen Abbildung beschränken. Wir wählen zu dem Zwecke diejenige reelle lineare Funktion t' von t, welche in dem betrachteten Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung sich in der Form

$$t' = -i \log(x - x_0) + \mathfrak{P}(x - x_0)$$

entwickeln läßt, wobei mit x_0 der Verzweigungspunkt, den wir uns etwa als einen gewöhnlichen Punkt der Fläche F vorstellen wollen, und mit $\mathfrak{P}(x - x_0)$ eine reguläre Potenzreihe von $(x - x_0)$ bezeichnet ist. Der Charakter der durch die Funktion t' vermittelten konformen Abbildung der Umgebung des Punktes x_0 wird wesentlich durch das Anfangsglied

$$-i \log(x - x_0)$$

bestimmt. Wir erkennen daraus, daß, wenn mit T' das vollständige Wertegebiet der uniformisierenden Variablen t' bezeichnet wird, T' alle Punkte der oberen Halbebene enthält, deren imaginäre Koordinate oberhalb einer gewissen endlichen positiven Größe g liegt. Es wird der imaginäre Teil von t' sicher dadurch unendlich, daß man sich auf der Fläche F stetig dem Verzweigungspunkte x_0 nähert; präziser ausgedrückt: es gibt nach Angabe einer beliebig großen positiven ganzen Zahl n eine positive von Null verschiedene Größe ε so, daß für alle x, die der Ungleichheitsbedingung

$$|x - x_0| < \varepsilon$$

genügen, der imaginäre Teil von t' größer ist als $n \cdot g$. Hieraus ergibt sich sofort die Richtigkeit unserer Behauptung, daß Q bei der Annäherung an den Punkt x_0 bestimmt unendlich wird. Denn es ist der Durchmesser des Kreises $K_{t'}$, welcher in bezug auf t' und T' ebenso definiert zu denken ist wie K_t in bezug auf t und T, sicher größer als der Abstand des Punktes t' von dem nächsten Begrenzungspunkte des Gebiets T', also auch größer als die kürzeste Entfernung des Punktes t' bis zu der im Abstande g von der Achse des Reellen zu letzterer parallelen Geraden, also größer als $(n-1)g$. Andererseits ist die kürzeste Entfernung des Kreises K_ν von der Achse des Reellen ersichtlich kleiner als g.

Von der Funktion Q wissen wir jetzt, daß dieselbe eine für die ganze Fläche F mit Ausschluß der, wenn überhaupt vorhandenen, so jedenfalls nur in endlicher Zahl vorhandenen Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung der Funktion t endliche, positive, eindeutige und stetige Funktion ist, welche nirgends verschwindet und in den Verzweigungspunkten unendlich hoher Ordnung bestimmt unendlich wird. (Man vergesse nicht, daß es sich hier lediglich um eine hypothetisch konstruierte Funktion handelt, deren Bildung die zu widerlegende Annahme, daß das Gebiet T nicht die ganze obere Halbebene ausfülle, zur Voraussetzung hatte.) Nach Weierstraßschen Prinzipien kann daher geschlossen werden, daß die Werte der Funktion Q alle oberhalb einer gewissen positiven, von Null verschiedenen Größe liegen.

Damit ist der oben (pag. 170) angekündigte Widerspruch hergeleitet und also der erste Teil der in dem Satze (pag. 170) aufgestellten Behauptung vollständig bewiesen.

Beweis des zweiten Teiles der in dem Satze (pag. 170) *aufgestellten Behauptung.* Für den zweiten nunmehr zu untersuchenden Fall (vgl. pag. 170) war es charakteristisch, daß das Gebiet T der uniformisierenden Variablen t sich über die Achse des Reellen hinwegerstreckte, so daß es also, allgemein zu reden, unendlich viele voneinander getrennte Stücke der Achse des Reellen gibt, deren Punkte dem Gebiete T angehören. (Es sei hier daran erinnert, daß gemäß der Definition des Gebiets T dieses nur von *inneren* Punkten gebildet wird.) Es soll bewiesen werden, daß das Gebiet T alle Punkte der oberen Halbebene sowie alle Punkte der unteren Halbebene in seinem Innern enthält. Darin liegt u. a. auch, daß das Gebiet T in bezug auf die Achse des Reellen zu sich selbst *symmetrisch* ist, eine Eigenschaft, die uns an dieser Stelle noch nicht bekannt ist.

Dem Umstande entsprechend, daß die Funktion $t(x, y)$ reeller Werte fähig ist, können wir eine Einteilung der Punkte der Riemannschen Fläche F vornehmen.

Wir bemerken zuvor, daß, wenn die Funktion $t(x, y)$ an einer Stelle der Fläche F reell wird, sie notwendig an der betreffenden Stelle in allen ihren Zweigen reell wird, da ja der Übergang von einem Zweige zum andern stets durch eine reelle lineare Substitution vermittelt wird.

Fassen wir irgend einen Punkt der Fläche F ins Auge, so sind folgende zwei Fälle zu unterscheiden:

a) Es ist möglich, um den betreffenden Punkt eine ihn selbst nicht treffende einfach geschlossene Linie auf der Fläche F zu ziehen, welche eine Umgebung des Punktes abgrenzt, innerhalb deren die Funktion $t(x, y)$ keinen reellen Wert annimmt.

b) Es ist nicht möglich, um den betreffenden Punkt eine Umgebung der genannten Beschaffenheit abzugrenzen; vielmehr gibt es in jeder noch so kleinen Nachbarschaft des betrachteten Punktes Stellen, an welchen die Funktion t reell wird.

Der Klasse a) gehören zuvörderst alle diejenigen Punkte der Fläche F an, an welchen die Funktion t sich nicht relativ verzweigt und außerdem nicht reell ist. (Der Wert ∞ ist als reell anzusehen, da er ja durch reelle lineare Transformation in einen endlichen Punkt der Achse des Reellen transformiert werden kann.) Weiter gehören zur Klasse a) alle diejenigen Punkte der Fläche F, an welchen die Funktion sich in der Weise verzweigt, daß die Anzahl der in dem betreffenden Punkte jedesmal zusammenhängenden Zweige der Funktion t größer als zwei ist. Ist der betreffende Punkt ein Verzweigungspunkt von endlicher Ordnung, so ist die einem Umlaufe um den Punkt entsprechende lineare Substitution elliptisch mit einer Periode, welche größer als *zwei* ist, und der Wert, welchen die Funktion t in dem Verzweigungspunkte selbst annimmt, bestimmt gerade die Lage eines Fixpunktes der Substitution, welch letzterer nicht reell sein kann. Ist jedoch der betreffende Punkt ein Verzweigungspunkt unendlich hoher Ordnung, so kann eine reelle lineare Funktion t' von t aufgestellt werden, die sich, wenn x_0 der etwa als allgemeiner Punkt der Fläche F vorgestellte Verzweigungspunkt ist, in der Form

$$t' = -i \log (x - x_0) + \mathfrak{P}(x - x_0)$$

entwickeln läßt; hierbei ist mit $\mathfrak{P}(x - x_0)$ eine reguläre Potenzreihe von $(x - x_0)$ bezeichnet. Die Darstellung der Funktion t' läßt erkennen, daß diese Funktion für alle Punkte einer hinreichend kleinen Umgebung von x_0 Werte mit von Null verschiedenem imaginärem Bestandteil, also *nichtreelle* Werte annimmt. Für die Funktion t ergibt sich daraus die entsprechende Bemerkung. Der Verzweigungspunkt selbst macht dabei allerdings insofern eine Ausnahme, als demselben ein wohldefinierter reeller Grenzwert entspricht, welcher aber gemäß unserer Definition dem Wertebereich T nicht zugerechnet wird. Zur Klasse a) gehören schließlich noch alle diejenigen Punkte, an welchen sich die Funktion in der Weise verzweigt, daß die Anzahl der jedesmal zusammenhängenden Blätter gleich *zwei* ist und daß die Umlaufssubstitution eine elliptische Substitution mit positiver Determinante ist, d. i. eine elliptische Substitution mit zwei in bezug auf die Achse des Reellen zueinander symmetrischen Fixpunkten.

Zur Klasse b) gehören alle unter a) nicht aufgeführten Punkte der Fläche F. Also erstens diejenigen Punkte, an welchen die Funktion $t(x,y)$

relativ unverzweigt ist und reelle Werte annimmt, ferner diejenigen Punkte, welche Verzweigungspunkte erster Ordnung für die Funktion $t(x, y)$ sind, wobei außerdem die einem Umlaufe um den betreffenden Punkt entsprechende elliptische Substitution der Periode 2 reelle Fixpunkte hat.

Betrachten wir einen Punkt der ersten der genannten beiden zu b) gehörenden Kategorien, so bemerken wir, daß durch Vermittelung der Funktion $t(x, y)$ die Umgebung des Punktes *umkehrbar eindeutig* auf ein gewisses einblättriges Stück der t-Ebene abgebildet wird, welches einen Teil der Achse des Reellen in seinem Innern enthält. Wir erkennen so, daß durch den betrachteten Punkt ein bestimmtes reguläres analytisches Linienstück geht, welches für eine hinreichend kleine Umgebung des Punktes alle und nur die Stellen der Fläche F enthält, an welchen die Funktion t reelle Werte annimmt. Durch dieses reguläre Linienstück wird die genannte Umgebung in zwei zueinander im analytischen Sinne spiegelbildlich symmetrische Hälften zerlegt.

Betrachten wir hingegen einen zur zweiten Kategorie gehörenden Punkt der Fläche F, so wird durch Vermittelung der Funktion t die Umgebung des Punktes *zweideutig* auf ein einblättriges t-Flächenstück abgebildet, welches ein Stück der Achse des Reellen in seinem Innern enthält. Die Zweideutigkeit der Abbildung findet, wenn wir uns die Funktion t durch eine passende im betrachteten Punkte verschwindende reelle lineare Funktion t' von t ersetzt denken, in der Weise statt, daß die Gleichung $t_2' = -t_1'$ die Zuordnung derjenigen Punkte der Nachbarschaft des Punktes $t' = 0$ bestimmt, welchen ein und derselbe Punkt der Fläche F entspricht. Insbesondere werden die beiden vom Nullpunkte ausgehenden Stücke der Achse der reellen oder rein imaginären t'-Werte durch die genannte Substitution aufeinander bezogen. Wir erkennen, daß es im vorliegenden Falle ein bestimmtes, durch den zu untersuchenden Punkt der Fläche F hindurchgehendes, reguläres analytisches Linienstück*) gibt, dessen eine vom genannten Punkte ausgehende Hälfte für eine hinreichend kleine Nachbarschaft des Punktes alle und nur die Stellen der Fläche F enthält, in welchen t reelle Werte annimmt. Das Bild der zweiten Hälfte des erwähnten regulären Linienstücks erstreckt sich in der t'-Ebene längs der Achse der rein imaginären t'-Werte.

Nachdem wir in der angegebenen Weise den Charakter jedes *einzelnen* Punktes der Fläche F im Hinblick auf die Realität der Funktion t fest-

*) Der Begriff „reguläres analytisches Linienstück“ wird dabei relativ zur Fläche F verstanden, insofern als man sich die Umgebung eines Windungspunktes vorher in eine schlichte Fläche transformiert zu denken hat. Ein durch einen Windungspunkt hindurchgehendes reguläres Linienstück geht dadurch in ein gewöhnliches reguläres Linienstück mit regulärer Fortschreitungsrichtung über.

gestellt haben, ist es uns jetzt leicht zu erkennen, daß die Gesamtheit aller derjenigen Punkte, an welchen die Funktion t reell ist, auf einer endlichen Anzahl voneinander getrennter teils geschlossener teils ungeschlossener regulärer analytischer Linienzüge angeordnet ist, welch letztere je zwei voneinander verschiedene Punkte der Fläche F verbinden und übrigens, sofern es sich lediglich um den Charakter dieser Linien als analytischer Linien handelt, über jeden dieser beiden Punkte hinaus regulär fortgesetzt werden können. In der Tat würde die Annahme des Gegenteils nach Weierstraßschen Prinzipien die Existenz eines Punktes P auf der Fläche F zur Folge haben, in dessen beliebig kleiner Nachbarschaft die Funktion t reell wird, ohne daß die betreffenden Punkte, in welchen t reell wird, in ihrer Gesamtheit ein durch den Punkt P hindurchgehendes reguläres analytisches Linienstück ganz oder zur einen Hälfte ausfüllen. Der Punkt P würde demnach keinem der von uns oben aufgeführten, auf F allein möglichen Typen angehören können.

Jeden einzelnen der genannten voneinander getrennten regulären Linienzüge, längs welchen die Funktion t nur reelle Werte annimmt, wollen wir als einen *vollständigen Realitätszug* bezeichnen.

Unsere Absicht ist nachzuweisen, daß das Wertegebiet T der Variablen t die Halbebenen zu *beiden* Seiten der Achse des Reellen vollständig ausfüllt. Der Gedanke, dessen wir uns zu diesem Nachweise bedienen wollen, ist im wesentlichen derselbe wie der beim Beweise des ersten Teiles unseres Satzes (pag. 170) von uns zur Anwendung gebrachte.

Durch das System der Realitätszüge wird die Fläche F entweder gar nicht in getrennte Gebiete zerlegt oder, wenn sie in mehrere Gebiete zerlegt wird, so jedenfalls nur in *endlich* viele voneinander verschiedene.

Wir betrachten eines dieser Gebiete, welches wir mit f bezeichnen, und untersuchen die konforme Abbildung, welche die Funktion t von diesem Gebiete entwirft, indem wir uns vorstellen, daß wir die Funktion t, ausgehend von einem gewissen beliebig wählbaren Zweige, durch analytische Fortsetzung, während welcher die Begrenzung von f nicht überschritten werden darf, weiter erklären. Dabei wird das von den Werten dieser Funktion erfüllte Gebiet T_f vollständig einer und derselben Halbebene angehören, die wir uns etwa als die obere Halbebene vorstellen wollen; denn die Funktion wird ja nur auf den Realitätszügen reell, und diese befinden sich gemäß der Definition von f nicht im Innern des Gebietes f.

Nehmen wir an, das Gebiet T_f erfülle nicht die ganze obere Halbebene, so können wir, wie früher, die Existenz eines nichtreellen Punktes t^* auf der Grenze von T_f nachweisen und zeigen, daß die der Funktion t für das Gebiet f entsprechende *hypothetische* Q-Funktion innerhalb f beliebig kleiner Werte fähig ist. Andererseits werden wir jetzt beweisen, daß die Werte, welche die Q-Funktion im Gebiete f annimmt, alle oberhalb einer von Null verschiedenen positiven Größe liegen.

Die Funktion Q ist für alle inneren Punkte des Gebietes f unter Ausschluß der etwa im Innern vorhandenen Verzweigungspunkte unendlich hoher Ordnung endlich, positiv, von Null verschieden, eindeutig und stetig erklärt. An den ausgeschlossenen Verzweigungspunkten wird sie in der früher (pag. 172) präzisierten Weise bestimmt positiv unendlich. Es fragt sich noch, wie sie sich auf der Grenze von f verhält, d. i. bei der Annäherung an einen der die Begrenzung bildenden Realitätszüge.

Fassen wir einen dieser Realitätszüge näher ins Auge. Wir denken uns dicht neben demselben herlaufend auf f eine geschlossene Linie l gezogen, welche zusammen mit dem Realitätszuge einen zweifach zusammenhängenden Flächenstreifen φ begrenzt. Indem wir von irgend einem Punkte auf l nach einem gegenüberliegenden Punkte des Realitätszuges eine Verbindungslinie konstruieren, entsteht aus φ ein einfach zusammenhängendes Flächenstück φ_0. Durch Vermittelung eines Zweiges der Funktion t, den wir beliebig gewählt denken, wird φ_0 umkehrbar eindeutig und konform auf ein gewisses ebenfalls einfach zusammenhängendes Flächenstück φ_0' in der t-Ebene abgebildet, welches ein Stück s der Achse des Reellen als Begrenzung hat. Die übrige Begrenzung von φ_0' zerfällt in drei Stücke s_1, l', s_2, von welchen s_1 und s_2 durch eine reelle lineare Substitution aufeinander bezogen sind und l' der Linie l entspricht. Das Gebiet φ_0' können wir uns ganz im Endlichen liegend vorstellen, da es gemäß der der Funktion Q zukommenden Invarianzeigenschaft keinen Unterschied macht, ob man die Funktion t selbst oder irgend eine reelle lineare Funktion derselben betrachtet. Nunmehr denken wir uns, daß sich eine in dem zweifach zusammenhängenden Flächenstreifen φ befindliche bewegliche geschlossene Linie λ, welche, ebenso wie l, dicht neben dem Realitätszuge hinläuft, mit allen ihren Punkten *gleichmäßig* stetig dem betrachteten Realitätszuge nähere. Innerhalb φ_0' bildet sich die Linie λ als eine Linie λ' ab, welche zwei einander korrespondierende Punkte von s_1 und s_2 verbindet und sich offenbar mit allen ihren Punkten gleichmäßig stetig der Linie s nähert. Denken wir uns für jeden Punkt t auf λ das Verhältnis Q des Durchmessers von K_t (vgl. wegen der Definition von K_t pag. 170) durch den Abstand dieses Kreises von der Achse des Reellen gebildet, so ist klar, daß einerseits die Abstandsgröße für alle Punkte der Linie λ' gleichmäßig gegen Null konvergiert, während andererseits ebenfalls sofort einleuchtet, daß der Durchmesser von K_t oberhalb einer endlichen von Null verschiedenen positiven Größe bleibt; (man beachte, daß das Gebiet φ_0', insbesondere über s_1 und s_2 hinaus, ein Stück erweitert werden kann durch Anfügung von Gebietsteilen, die ihrerseits noch vollständig im Innern von T liegen). Daraus folgt, daß zugleich mit dem gleichmäßig stetigen Übergange der Linie λ in den erwähnten Realitätszug die Werte der Funktion Q gleichmäßig gegen unendlich konvergieren.

Unsere Kenntnis der Funktion Q reicht jetzt aus, um nach Weierstraßschen Prinzipien schließen zu können, daß die Funktion Q an einer gewissen Stelle im Innern von f ihren kleinsten Wert annimmt, welcher demnach positiv und von Null verschieden sein muß. Damit ist der pag. 177 oben angekündigte Widerspruch hergeleitet.

Die Funktion t, wie wir sie unter Beschränkung der analytischen Fortsetzung auf das Gebiet f erklärt haben, erfüllt demnach mit ihren den Bereich T_f bildenden Werten die obere Halbebene vollständig.

Überschreiten wir auf der Fläche F, aus dem Innern von f kommend, einen der f begrenzenden Realitätszüge, so sind zwei Fälle möglich: entweder wir treten dabei wieder in f ein oder wir betreten ein neues der Gebiete, in welche F durch das System der Realitätszüge zerlegt wird; dies neue Gebiet heiße f_1. In beiden Fällen tritt die Variable t in die untere Halbebene ein und wir schließen auf Grund einer der vorangehenden analogen Überlegung, daß die Funktion t in dem Gebiete f bezw. f_1 jetzt notwendig alle Werte der *unteren* Halbebene annehmen muß. Daraus folgt einerseits, daß das Gebiet T, wie der Satz (pag. 170) in seinem zweiten Teile behauptet, seine sämtlichen Grenzpunkte auf der Achse des Reellen hat, andererseits daß die Anzahl der verschiedenen Gebiete, in welche die Fläche F durch das System der Realitätszüge zerlegt wird, nicht größer als *zwei* sein kann. D. h. die Fläche F wird durch die Realitätszüge entweder gar nicht in getrennte Gebiete zerlegt, bleibt also ein einziges zusammenhängendes Gebiet, in welchem je zwei Punkte durch eine keinen Realitätszug schneidende Linie verbunden werden können, oder sie wird genau in zwei getrennte Gebiete f und f_1 zerlegt, zwischen welchen nur über die Realitätszüge hinweg ein Zusammenhang hergestellt werden kann.

D, II. Die charakteristische Signatur der einzelnen uniformisierenden Variablen.

Jenachdem das Gebiet T der uniformisierenden Variablen t nur eine der beiden Halbebenen oder beide Halbebenen ausfüllt, in welche die t-Ebene durch die Achse des Reellen zerlegt wird, wollen wir sagen, die uniformisierende Variable t gehöre dem *ersten* oder dem *zweiten Typus* an.

Ist t eine uniformisierende Variable vom *ersten Typus*, so können wir versuchen, dieselbe durch charakteristische Bestimmungsstücke zu individualisieren.

Zunächst werden wir naturgemäß das algebraische Gebilde (x, y) bezw. die zu der algebraischen Funktion $y(x)$ gehörende Riemannsche Fläche F, welche mit Hilfe der Größe t uniformisiert wird, als Bestimmungsstück nennen. Sodann markieren wir auf F alle diejenigen Punkte, welche relative Verzweigungspunkte für die Funktion $t(x, y)$ sind. Die Anzahl dieser Punkte ist endlich; wir bezeichnen sie in irgend einer Reihenfolge mit $a_1, a_2, \cdots, a_n$. Jedem dieser Punkte ordnen wir diejenige positive ganze Zahl (eventuell ∞) zu, welche angibt, nach wieviel Umläufen um den betreffenden Punkt die Funktion $t(x, y)$ sich reproduziert; wir bezeichnen sie der Reihenfolge der Verzweigungspunkte entsprechend mit $l_1, l_2, \cdots, l_n$. Dann gilt folgender Satz.

Satz: *Es gibt außer der l. p. uniformisierenden Variablen t keine andere l. p. uniformisierende Variable des ersten Typus, welche zur Fläche F bezw. zu der algebraischen Funktion $y(x)$ gehört und, als Funktion des Ortes auf dieser Fläche betrachtet, dieselben Verzweigungsstellen wie $t(x, y)$ besitzt und in jedem dieser Verzweigungspunkte von derselben Ordnung wie t verzweigt ist.* (Hierbei werden zwei Funktionen, welche reelle lineare Funktionen voneinander sind, als nicht verschieden betrachtet).

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich sofort, wenn man folgendes beachtet. Ist τ irgend eine den im Satze aufgezählten Bedingungen genügende uniformisierende Variable des *ersten Typus*, so ist einerseits $\tau(t)$ eine in der t-Halbebene überall reguläre und folglich eindeutige analytische Funktion, andererseits $t(\tau)$ eine in der τ-Halbebene überall reguläre und folglich eindeutige analytische Funktion, so daß also durch Vermittelung der genannten Funktionen die t-Halbebene und die τ-Halbebene umkehrbar eindeutig konform aufeinander bezogen werden, wobei die Abbildungsbeziehung zunächst nur zwischen den inneren, nicht auf der Grenze befindlichen Punkten der beiden Halbebenen erklärt ist. Dies genügt, um auf Grund eines bekannten Satzes über die konforme Abbildung einer Kreisfläche auf eine andere zu schließen, daß die Funktion $\tau(t)$ eine reelle lineare Funktion ist. q. e. d.

Damit ist gezeigt, daß die oben angegebenen Stücke

$$F;\ a_1, a_2, \cdots, a_n;\ l_1, l_2, \cdots, l_n$$

die Größe t vollständig charakterisieren, sofern dieselbe eine l. p. uniformisierende Variable des *ersten Typus* ist. Wir wollen daher die Gesamtheit dieser Stücke, in Klammer gesetzt, als die *charakteristische Signatur der uniformisierenden Variablen t* bezeichnen. Hat die Funktion $t(x, y)$ keine relativen Verzweigungspunkte, so wollen wir $(F; 0; 0)$ als Signatur der Größe t bezeichnen.

Die Signatur kann nicht völlig willkürlich gegeben werden. Es sind jedenfalls folgende und, wie sich im zweiten Hauptteile zeigen wird, nur folgende Zusammenstellungen *ausgeschlossen:*

1) F vom Geschlecht Null; $n = 0, 1, 2$.

2) F vom Geschlecht Null; $n = 3$; $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} > 1$.

3) F vom Geschlecht Null; $n = 3$; $\frac{1}{l_1} + \frac{1}{l_2} + \frac{1}{l_3} = 1$.

4) F vom Geschlecht Null; $n = 4$; $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 2$.

5) F vom Geschlecht Eins; $n = 0$.

Die Fälle: „F vom Geschlecht Null, $n = 1$“, sowie „F vom Geschlecht Null, $n = 2$, $l_1 \gtrless l_2$“ sind illusorisch, weil das Vorhandensein eines Verzweigungspunktes bei Zugrundelegung einer Fläche F vom Geschlecht Null, die wir in der Gestalt der einblättrigen x-Ebene gegeben annehmen dürfen, aus Gründen der Analysis situs die Existenz mindestens noch eines weiteren Verzweigungspunktes notwendig macht, welcher, sofern er der einzige zum ersten hinzukommende Verzweigungspunkt ist, von derselben Ordnung wie der erste sein muß. In allen andern der aufgezählten Fälle existiert (vgl. C) eine als Funktion des Ortes auf der Fläche F endlich- oder unendlich-vieldeutig erklärte einwertige analytische Funktion $t(x, y)$, welche die betreffenden Verzweigungspunkte und nur diese Verzweigungspunkte besitzt, an denselben die vorgeschriebene Ordnung der Verzweigung hat und eine konforme Abbildung der Fläche F entweder auf die vollständige t-Ebene inkl. des unendlich fernen Punktes oder auf die vollständige t-Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes vermittelt, zwei Gebiete, deren keines mit einer Halbebene in eine umkehrbar eindeutige konforme Beziehung gesetzt werden kann, was möglich sein müßte, wenn es eine l. p. uniformisierende Variable vom *ersten Typus* mit der betreffenden Signatur gäbe.

Wir wollen jetzt die Frage nach einem vollständigen System charakteristischer Bestimmungsstücke für die uniformisierenden Variablen vom *zweiten Typus* zu beantworten suchen.

Ist t eine uniformisierende Variable vom *zweiten Typus*, so ziehen wir als Bestimmungsstück für dieselbe zunächst wieder die Fläche F heran, zu welcher die Größe t als uniformisierende Variable gehört. Sodann denken wir uns, wie vorher im Falle des *ersten Tpus*, auf der Fläche F alle relativen Verzweigungspunkte der Funktion $t(x, y)$ mit den zugeordneten Verzweigungszahlen markiert:

$$a_1, a_2, \cdots, a_n; \quad l_1, l_2, \cdots, l_n.$$

Schließlich markieren wir auf der Fläche F das System der Realitätszüge. Wie wir bereits wissen, wird die Fläche F durch die Realitätszüge entweder gar nicht in verschiedene voneinander getrennte Gebiete oder gerade in zwei getrennte Gebiete zerlegt. Ferner bemerken wir sogleich, daß auf einem geschlossenen Realitätszuge sicher keiner der markierten Verzweigungspunkte liegt, desgleichen, daß auf einem ungeschlossenen Realitätszuge stets zwei und nur zwei der markierten Verzweigungspunkte liegen, welche mit den Endpunkten des Realitätszuges zusammenfallen und als zugeordnete Verzweigungszahl die Zahl *zwei* haben. Es gilt nun folgender Satz.

Satz: *Es gibt außer der Variablen t keine andere l. p. uniformisierende Variable vom zweiten Typus, welche ebenfalls zur Fläche F gehört, ferner, als Funktion des Ortes auf der Fläche F betrachtet, dieselben und nur diese Verzweigungspunkte mit den gleichen Verzweigungszahlen wie die Funktion $t(x, y)$ besitzt und schließlich dieselben Realitätszüge wie $t(x, y)$ und nur diese Realitätszüge hat.*

Der Beweis dieses Satzes wird auf analoge Weise geführt, wie der Beweis des entsprechenden Satzes im Falle des *ersten Typus.* Wenn τ irgend eine von t verschiedene uniformisierende Variable vom *zweiten Typus* mit denselben erwähnten Bestimmungsstücken ist, so wird die Funktion $\tau(x, y)$ ebenso wie $t(x, y)$ in f (s. pag. 178) eine einwertige Funktion sein, deren Wertegebiet, soweit es bei analytischer Fortsetzung der Funktion unter Beschränkung auf f erhalten wird, eine von der Achse des Reellen begrenzte Halbebene vollständig ausfüllt. Durch Vermittelung der Funktion $\tau(t)$ wird somit eine t-Halbebene auf eine τ-Halbebene umkehrbar eindeutig und konform abgebildet, woraus, wie oben, gefolgert wird, daß die Funktion $\tau(t)$ eine lineare Funktion mit reellen Koeffizienten ist. q. e. d.

Die erwähnten charakteristischen Bestimmungsstücke, bestehend aus der Fläche F, den Verzweigungspunkten $a_1, \cdots, a_n$ mit den zugeordneten Verzweigungszahlen $l_1, \cdots, l_n$ und den Realitätszügen $R_1, \cdots, R_m$ bilden zusammen das, was wir die *charakteristische Signatur der l. p. uniformisierenden Variablen* t nennen wollen.

Die Bestimmungsstücke, welche in der Signatur vorkommen, unterliegen gewissen in der Natur der Sache liegenden Beschränkungen, die wir jetzt feststellen werden.

Zunächst enthalten, wie bereits früher bemerkt worden ist, die Realitätszüge, abgesehen von den Endpunkten der ungeschlossenen Realitätszüge, welche stets als Verzweigungspunkte erster Ordnung figurieren, keinen weiteren Verzweigungspunkt. Von fundamental einschneidender Bedeutung ist jedoch eine andere Bedingung, auf welche wir durch folgenden Satz geführt werden.

Satz: *Die Riemannsche Fläche F, zu welcher die l. p. uniformisierende Variable t vom zweiten Typus gehört, läßt eine symmetrische Umformung in sich selbst zu, bei welcher jeder auf einem Realitätszuge befindliche Punkt sich selbst entspricht, während ein Verzweigungspunkt der Funktion $t(x, y)$ entweder sich selbst oder einem anderen Verzweigungspunkte derselben Ordnung entspricht.*

Der Beweis dieses Satzes stützt sich hauptsächlich auf den pag. 173—178 bewiesenen Satz, daß das Wertegebiet T der Variablen t die Halbebenen zu beiden Seiten der Achse des Reellen beide vollständig ausfüllt und folglich in bezug auf die Achse des Reellen zu sich selbst symmetrisch ist.

Ist P irgend ein Punkt der Fläche F, welcher für die Funktion t nicht die Rolle eines Verzweigungspunktes unendlich hoher Ordnung spielt, so wählen wir irgend einen Wert aus, welchen die Funktion t im Punkte P annimmt, und suchen denjenigen Punkt P' auf F aus, in welchem die Funktion t den zu ersterem Wert konjugiert imaginären Wert annimmt. Dadurch wird eine bestimmte konforme Abbildung der Fläche F auf sich selbst mit Umlegung der Winkel den Prinzipien der analytischen Fortsetzung gemäß definiert. Wir bemerken, daß die den Punkt P in den Punkt P' überführende Ortsfunktion $P'(P)$ auf der Fläche F nach Ausschluß derjenigen Punkte, welche für die Funktion t die Rolle von Verzweigungspunkten unendlich hoher Ordnung spielen, überall eindeutig erklärt ist. Kehrt man nämlich auf einem geschlossenen Wege zu einem Ausgangspunkte P_1 zurück, in welchem der ursprünglich gewählte Wert der Funktion t gleich t_1 sei, so erhält man einen Wert t_2, welcher aus t_1 durch eine reelle lineare Substitution hervorgeht. Sucht man andererseits zu t_1 und t_2 die konjugiert imaginären Werte $\bar{t}_1$ und $\bar{t}_2$ auf, so geht letzterer aus ersterem durch genau dieselbe reelle lineare Substitution hervor, welche t_1 in t_2 überführte. Daraus folgt aber, daß die Werte $\bar{t}_1$ und $\bar{t}_2$ von der Funktion t in einem und demselben Punkte der Fläche F angenommen werden.

Die Ortsfunktion $P'(P)$ besitzt ferner folgende sofort erkennbare Eigenschaft: sie ordnet dem Punkt P' rückwärts den Punkt P zu. Sie vermittelt demnach eine reziproke Paarung unter allen denjenigen Punkten der Fläche F, welche nicht Windungspunkte unendlich hoher Ordnung sind. Bei dieser Paarung entspricht jeder auf einem Realitätszuge befindliche Punkt sich selbst. Einem Verzweigungspunkte endlicher Ordnung der Funktion t, welcher nicht auf einem Realitätszuge liegt, entspricht ein Verzweigungspunkt derselben Ordnung, welcher eventuell mit ersterem identisch ist (die Realitätszüge brauchen nämlich nicht alle Punkte zu enthalten, welche vermöge der betrachteten Symmetrie der Fläche F sich selbst entsprechen); es folgt dies einfach daraus, daß die Fixpunkte einer elliptischen Substitution erster Art in bezug auf die Achse des Reellen spiegelbildlich symmetrisch liegen.

Wie verhält sich die Ortsfunktion $P'(P)$, wenn sich der Punkt P einem der ausgeschlossenen Punkte stetig nähert? Beachtet man, daß jedem nicht ausgeschlossenen Punkte wieder ein nicht ausgeschlossener Punkt entspricht, so erkennt man, daß dem betrachteten ausgeschlossenen Punkte, in welchen P stetig einrückt, ein bestimmter anderer eventuell mit ersterem zusammenfallender ausgeschlossener Punkt entspricht, in welchen der Punkt P' stetig einrückt. Die betrachtete reziproke Paarung der Punkte der Fläche F erstreckt sich also auf alle Punkte dieser Fläche ausnahmslos. Aus allgemeinen funktionentheoretischen Gründen leuchtet daher ein, daß die durch die Ortsfunktion $P'(P)$ vermittelte konforme Abbildung der Fläche F auf sich selbst nicht nur durchweg stetig, sondern auch durchweg regulär ist. Diese Abbildungsbeziehung stellt also in der Tat eine symmetrische Umformung der Fläche F in sich selbst dar und zwar eine solche, bei welcher Punkt für Punkt sich selbst entsprechende Linien (*Symmetrielinien*) auf der Fläche F existieren.

An dem algebraischen Gebilde (x, y) läßt sich diese symmetrische Umformung in der Gestalt ausdrücken:

$$\bar{x}' = H_1(x, y), \qquad \bar{y}' = H_2(x, y),$$
$$\bar{x} = H_1(x', y'), \qquad \bar{y} = H_2(x', y'),$$

wobei mit (x', y') der dem Punkte (x, y) entsprechende Punkt, mit H_1 und H_2 rationale Funktionen ihrer Argumente und mit $\bar{x}$, $\bar{y}$, $\bar{x}'$, $\bar{y}'$ die konjugiert imaginären Werte zu x, y, x', y' bezeichnet sind.

Die tiefere Einsicht, welche wir damit in die spezielle Natur der Bestimmungsstücke der uniformisierenden Variablen t gewonnen haben, führt uns dazu, die *charakteristische Signatur* derselben in einer zweckmäßigen Gestalt zu schreiben. Statt F wollen wir in Rücksicht auf die symmetrische Natur dieser Fläche F_s schreiben. An der Schreibweise der Realitätszüge wollen wir nichts ändern, uns jedoch merken, daß dieselben vollständig in die Symmetrielinien der Fläche F_s hineinfallen.*) Von den Verzweigungspunkten der Funktion $t(x, y)$ brauchen die Endpunkte der etwa vorhandenen ungeschlossenen Realitätszüge nicht besonders notiert zu werden, da deren Existenz durch das Vorkommen eines solchen Realitätszuges von selbst mitbedingt ist. Die anderen Verzweigungspunkte zerfallen in solche, die sich vermöge der Symmetrie der Fläche F_s selbst entsprechen:

*) Es kann sein, daß die Fläche F_s mehrere voneinander verschiedene symmetrische Umformungen gestattet. In jedem einzelnen Falle wird jedoch nur *eine* dieser Symmetrieen ins Auge gefaßt.

$a_1, \cdots, a_p$ *) mit den zugeordneten Verzweigungszahlen $l_1, \cdots, l_p$, und solche, welche sich paarweise entsprechen: $\alpha_1, \alpha_1', \cdots, \alpha_q, \alpha_q'$ mit den zugeordneten Verzweigungszahlen $\lambda_1, \cdots, \lambda_q$.

Als charakteristische Signatur der uniformisierenden Variablen t erhalten wir so das Symbol:

$$(F_s;\ R_1, \cdots, R_m;\ a_1, \cdots, a_p,\ \alpha_1, \alpha_1', \cdots, \alpha_q, \alpha_q';\ l_1, \cdots, l_p,\ \lambda_1, \cdots, \lambda_q).$$

Das Nichtvorhandensein von Verzweigungspunkten drücken wir dadurch aus, daß wir die betreffenden Stellen des Symbols durch 0 ersetzen, also schreiben:

$$(F_s;\ R_1, \cdots, R_m;\ 0;\ 0).$$

Die Tatsache der Symmetrie der Fläche F_s wird auch durch folgenden Satz ausgedrückt.

Satz. *Die algebraische Kurve, zu welcher die l. p. uniformisierende Variable t des zweiten Typus gehört, kann durch birationale Transformation derart in eine reelle algebraische Kurve***) *transformiert werden, daß die Realitätszüge nach der Transformation in die reellen Züge der transformierten Kurve hineinfallen.****)

Der Beweis dieses Satzes ergibt sich folgendermaßen.

Es sei $u(x, y)$ irgend eine rationale Funktion von x und y. Bilden wir die rationale Funktion $u_1(x, y) = \bar{u}(x', y')$, welche in dem Punkte (x', y'), der vermöge der Symmetrie des betrachteten algebraischen Gebildes dem Punkte (x, y) entspricht, den zu dem Werte $u(x, y)$ konjugiert imaginären Wert besitzt, so ist die Funktion $U(x, y)$, welche durch die Gleichung

$$U(x, y) = u(x, y) + u_1(x, y)$$

---

*) p als Index und p als Geschlecht der Fläche F sind verschiedene Zahlen.

**) Unter einer *reellen* algebraischen Kurve verstehen wir in dieser Abhandlung stets eine algebraische Kurve, welche nicht nur durch eine irreduzible algebraische Gleichung mit reellen Koeffizienten definiert ist, sondern auch wirklich reelle Kurvenzüge besitzt.

***) Wir gewinnen an dieser Stelle den Anschluß an die von Herrn Klein herrührende Einteilung der symmetrischen Riemannschen Flächen bezw. reellen algebraischen Kurven. Die hier von uns gebrauchten Tatsachen versehe ich mit Beweisen, die man mit den entsprechenden Entwicklungen bei Klein vergleichen wolle.

F. Klein: „Über Riemanns Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale", pag. 72 (Leipzig, 1882). „Über konforme Abbildung von Flächen", Math. Ann., Bd. 19 (1881). „Über die Realitätsverhältnisse bei der einem beliebigen Geschlechte zugehörigen Normalkurve der φ", Math. Ann., Bd. 42 (1892). „Riemannsche Flächen", autographierte Vorlesung, Leipzig, Teubner.

S. auch G. Weichold, „Über symmetrische Riemannsche Flächen und die Periodizitätsmoduln der Abelschen Normalintegrale erster Gattung". Zeitschrift für Math. u. Phys., Bd. 28 (1883).

erklärt wird, eine bei passender Wahl von u von einer Konstanten sicher verschiedene rationale Funktion von x und y, für welche

$$\overline{U}(x, y) = U(x', y')$$

ist. Die Funktion $U(x, y)$ nimmt daher in jedem Punkte unseres algebraischen Gebildes, welcher vermöge der Symmetrie sich selbst entspricht, einen reellen Wert an.

Wir suchen jetzt eine zweite rationale Funktion $V(x, y)$ zu bestimmen, welche beim Übergange vom Punkte (x, y) zum Punkte (x', y') ebenfalls zum konjugiert-imaginären Werte übergeht und welche zusammen mit U ein solches rationales Funktionenpaar darstellt, daß auch rückwärts x und y sich rational durch U und V ausdrücken lassen. Eine solche Funktion kann folgendermaßen bestimmt werden. Es sei p das Geschlecht der algebraischen Kurve (x, y). Dann ist es möglich sukzessive $p+1$ voneinander verschiedene Punkte des Gebildes, $(x_1, y_1), \cdots, (x_{p+1}, y_{p+1})$ zu bestimmen, welche auch von ihren $p+1$ Bildpunkten $(x_1', y_1'), \cdots, (x'_{p+1}, y'_{p+1})$ verschieden sind und der Bedingung genügen, daß die Funktion $U(x, y)$ in den genannten $2p+2$ Punkten $2p+2$ voneinander verschiedene Werte annimmt. Wir konstruieren eine rationale Funktion $v(x, y)$, welche außer in den $p+1$ erstgenannten Punkten nirgends unendlich werden kann. Eine solche Funktion läßt sich bekanntlich aus Abelschen Integralen zweiter Art linear zusammensetzen und zwar so, daß die Funktion in jedem der erwähnten $p+1$ Punkte entweder überhaupt nicht oder genau von der ersten Ordnung unendlich wird. Bilden wir nun die Funktion

$$V(x, y) = v(x, y) + v_1(x, y); \quad v_1(x, y) = \bar{v}(x', y'),$$

so ist

$$\overline{V}(x, y) = V(x', y')$$

und es entspricht einem einzelnen Wertepaar (U, V) des irreduziblen algebraischen Gebildes (U, V) nur *ein* Wertepaar (x, y). Betrachten wir nämlich das Wertepaar $(U(x_\alpha, y_\alpha), V(x_\alpha, y_\alpha))$, indem wir mit (x_α, y_α) einen derjenigen Punkte bezeichnen, in welchem die Funktion $V(x, y)$ wirklich unendlich wird, so kann dieses Wertepaar, weil $V(x_\alpha, y_\alpha) = \infty$ ist, nur in einem der $2p+2$ oben betrachteten Punkte angenommen werden. Von diesen $2p+2$ Punkten kann jedoch nur der Punkt (x_α, y_α) wirklich in Betracht kommen; denn der Wert $U(x_\alpha, y_\alpha)$ wird in keinem der anderen $2p+1$ Punkte von der Funktion U angenommen gemäß der Definition dieser Funktion. Da ferner die Funktion V im Punkte (x_α, y_α) genau von der ersten Ordnung unendlich wird, können wir weiter schließen, daß nicht nur dem speziellen Wertepaare $(U(x_\alpha, y_\alpha), V(x_\alpha, y_\alpha))$ der eine bestimmte Punkt (x_α, y_α) entspricht, sondern daß auch das Wertepaar $U(x_\alpha + \varepsilon, y_\alpha + \eta), V(x_\alpha + \varepsilon, y_\alpha + \eta)$, (unter ε und η kleine veränderliche komplexe Größen verstanden, die nur der Bedingung unterworfen sind, daß $(x_\alpha + \varepsilon, y_\alpha + \eta)$ ein Punkt des algebraischen Gebildes (x, y) sein soll), von dem Funktionenpaar U, V nur in dem einen Punkte $(x_\alpha + \varepsilon, y_\alpha + \eta)$ angenommen wird. Daraus folgt aber, daß x und y zwei in dem ganzen Gebilde (U, V) mit dem Charakter rationaler Funktionen von U, V definierte Größen sind, die zugleich in diesem ganzen Gebilde eindeutig erklärt sind und folglich rational durch U und V ausgedrückt werden können.

Da sowohl die Funktion U als auch die Funktion V auf den Realitätszügen*) des Gebildes (x, y) reelle Werte annimmt, haben wir in (U, V) eine reelle algebraische Kurve, deren reelle Züge die transformierten Realitätszüge vollständig auf sich enthalten.

Der pag. 184 formulierte Satz ist hiermit vollständig bewiesen.

Wir bemerken noch, daß die Symmetrie des Gebildes (x, y) sich offenbar auf das Gebilde (U, V) überträgt und für dieses Gebilde die einfache Gestalt annimmt

$$U' = \overline{U}, \quad V' = \overline{V}.$$

Dieser Ausdruck für die Symmetrie der Riemannschen Fläche der algebraischen Funktion $V(U)$ läßt leicht erkennen, daß die Gesamtheit aller Punkte dieser Fläche, welche bei der betrachteten symmetrischen Umformung fest bleiben, eine endliche Anzahl voneinander getrennter, regulärer, geschlossener analytischer Züge bilden, welche mit dem System der den reellen Zügen der Kurve (U, V) auf der Riemannschen Fläche entsprechenden Linien zusammenfallen.

Die Methode unserer Betrachtung läßt überhaupt ganz allgemein den Satz erkennen:

Satz: *Wenn F irgend eine Riemannsche Fläche ist, welche die Verzweigung einer algebraischen Funktion darstellt, und wenn auf dieser Fläche eine umkehrbar eindeutige symmetrische Umformung definiert ist, bei welcher ein Punkt der Fläche festbleibt, so gibt es stets unendlich viele festbleibende Punkte, welche eine endliche Anzahl voneinander getrennter, regulärer, geschlossener Züge bilden, und es ist möglich, eine birationale Transformation der betreffenden algebraischen Kurve in eine reelle algebraische Kurve auszuführen, bei welcher das vollständige System der Symmetrielinien des ersteren algebraischen Gebildes in das vollständige System der reellen Züge des letzteren übergeht.*

Es fragt sich, ob die uns bisher bekannten Bedingungen, denen die Fläche F, die Verzweigungspunkte, Verzweigungszahlen und Realitätszüge unterworfen sein müssen, damit eine uniformisierende Variable vom Haupt-

*) Das sind, um es hier nochmals zu sagen, diejenigen teils geschlossenen, teils ungeschlossenen Züge, längs welcher die betrachtete Größe t reell ist.

kreistypus mit den erwähnten Bestimmungsstücken existiere, auch genügen, um die Existenz einer solchen Variablen erschließen zu können. Die vollständige Beantwortung dieser Frage werden wir erst im folgenden Teile dieser Abhandlung geben und zwar im bejahenden Sinne.

Eine Frage jedoch möge bereits an dieser Stelle ihre Erledigung finden. Wir wissen, daß, wenn es eine uniformisierende Variable vom Hauptkreistypus mit den erwähnten Bestimmungsstücken gibt, die Fläche F_s durch die Realitätszüge entweder gar nicht in getrennte Flächengebiete zerlegt wird oder aber genau in zwei getrennte Gebiete, die einander symmetrisch entsprechen. Um also sicher zu sein, daß wir auf den Symmetrielinien der Riemannschen Fläche F_s die Realitätszüge willkürlich wählen können, so daß wir sie beispielsweise auch mit dem vollständigen System der Symmetrielinien identisch wählen könnten, ist es notwendig, folgenden Hauptsatz über symmetrische Riemannsche Flächen algebraischer Funktionen festzustellen:

Satz. *Eine zu einer algebraischen Funktion gehörende symmetrische Riemannsche Fläche F_s mit Symmetrielinien zerfällt durch das vollständige System dieser Symmetrielinien entweder garnicht in getrennte Flächengebiete oder in genau zwei zueinander symmetrische Gebiete.**)

Beweis. Es sei f eines der Stücke, in welche die Fläche F_s durch die Symmetrielinien zerlegt wird, die wie erwähnt, völlig getrennt voneinander verlaufen. Zieht man von einem Punkte in f aus irgend eine sich selbst nicht schneidende Linie L nach einem beliebigen anderen Punkte der Fläche F_s, so kann es sein, daß man bei Durchlaufung dieser Linie einmal aus dem Gebiete f heraustritt. Dies kann jedenfalls nur dann stattfinden, wenn eine der Symmetrielinien von F_s, etwa die Linie S, überschritten wird. Dabei wird man in ein anderes derjenigen Gebiete gelangen, in welche F_s durch die Symmetrielinien zerlegt wird. Das neue Gebiet heiße f_1. Dasselbe entspricht offenbar dem Gebiete f umkehrbar eindeutig vermöge der betrachteten Symmetrie der Fläche F_s. Es kann nun sein, daß man bei Durchlaufung der Linie L auch aus dem Gebiete f_1 einmal heraustritt. In diesem Falle, behaupte ich, kehrt man notwendig in das Gebiet f zurück. In der Tat entspricht dem in f_1 befindlichen soeben durchlaufen gedachten Teile λ_1 der Linie L symmetrisch ein in f befindliches Linienstück λ. Die Linien λ und λ_1 zusammen bilden eine auf F sich selbst nicht schneidende Linie, welche geschlossen ist, weil die beiden Endpunkte von λ_1 je auf einer

*) Im ersten Falle wird die Riemannsche Fläche F_s nach Herrn Klein *diasymmetrisch* genannt, im zweiten Falle *orthosymmetrisch*. Der Satz läßt sich auch auf unendlich-vielblättrige Riemannsche Flächen allgemeinster Art ausdehnen, eine Tatsache, welche für die Uniformisierung reeller analytischer Kurven eine analoge Wichtigkeit besitzt. Vgl. Note IV.

Symmetrielinie liegen. Darin liegt ausgesprochen, daß man bei Durchlaufung der Linie L aus f_1 kommend notwendig wieder nach f zurückkehrt. Analog ergibt sich, daß, wenn man bei weiterer Verfolgung der Linie L noch einmal aus f heraustritt, man wieder nach f_1 zurückkehren muß. Da L auf F ganz beliebig gewählt war, so heißt dies: Die Fläche F zerfällt, sofern sie durch die Symmetrielinien überhaupt in getrennte Gebiete zerlegt wird, genau in zwei Gebiete, die zueinander symmetrisch sind. q. e. d.

E. Zweiter (synthetischer) Hauptteil.

Vollständige Lösung des Problems der Bestimmung aller zu einer beliebig gegebenen algebraischen Kurve gehörenden linear-polymorphen uniformisierenden Variablen mit reeller Substitutionsgruppe. Existenz der zu einer gegebenen Signatur gehörenden Variablen.

E, I. Formulierung der zu lösenden Einzelprobleme. Zerlegung jedes Einzelproblems in ein Problem der Analysis situs und ein Problem der konformen Abbildung.

Die Einzelprobleme, auf welche wir durch die Überlegungen des ersten Teiles dieser Abhandlung geführt worden sind und deren Erledigung die vollständige Lösung des Problems der Bestimmung aller zu einer beliebig gegebenen algebraischen Kurve gehörenden uniformisierenden Variablen mit reeller Substitutionsgruppe bedeuten würde, sind folgende:

Problem 1a: Gegeben sei eine Riemannsche Fläche F vom Geschlecht $p \geqq 2$, welche die Verzweigung einer beliebigen algebraischen Funktion $y(x)$ geometrisch darstellt. Es ist zu zeigen, daß zu dieser Fläche eine relativ unverzweigte linear-polymorphe uniformisierende Variable des *ersten Typus* mit der charakteristischen Signatur

$$(F;\ 0;\ 0)$$

gehört.*)

Problem 1b: Gegeben sei eine Riemannsche Fläche F vom Geschlecht $p \geqq 0$, welche die Verzweigung einer beliebigen algebraischen Funktion $y(x)$ geometrisch darstellt. Auf dieser Fläche seien n Verzweigungspunkte $a_1, \cdots, a_n$ gewählt mit den zugeordneten Verzweigungszahlen $l_1, \cdots, l_n$, deren jede einzelne $\geqq 2$ ist. Es ist zu zeigen, daß zu

*) Die uniformisierenden Variablen, deren Existenz in den Problemen 1a und 1b postuliert wird, stimmen als solche mit gewissen von Herrn Klein in Math. Ann., Bd. 20 und 21 l. c. postulierten Größen überein. Vgl. ferner Poincaré, Acta Math., t. IV bezw. I, Fricke-Klein, „Vorlesungen" Bd. II, pag. 45: Fundamentalproblem I.

der Fläche F eine l. p. uniformisierende Variable des *ersten Typus* mit der charakteristischen Signatur

$$(F;\ a_1, \cdots, a_n;\ l_1, \cdots, l_n)$$

gehört. Im Falle $p = 0$ wird dabei angenommen, daß $n \geqq 4$ ist und daß für $n = 4$ nicht alle Zahlen l gleich *zwei* sind.*)

Problem 2a: Gegeben sei eine zu einer beliebigen reellen algebraischen Kurve gehörende Riemannsche Fläche F_s. Auf den Symmetrielinien dieser Fläche, welche den reellen Zügen der Kurve entsprechen, sei eine endliche Anzahl von Realitätszügen $R_1, \cdots, R_m$ gewählt, die geschlossen oder ungeschlossen sein, auch mit dem vollständigen System der Symmetrielinien identisch sein können. Es ist zu zeigen, daß auf der Fläche F_s eine nur in den Endpunkten der etwa vorhandenen ungeschlossenen Realitätszüge relativ verzweigte linear-polymorphe uniformisierende Variable des *zweiten Typus* mit der charakteristischen Signatur

$$(F_s;\ R_1, \cdots, R_m;\ 0;\ 0)$$

existiert.**)

Problem 2b: Gegeben sei eine zu einer beliebigen reellen algebraischen Kurve gehörende Riemannsche Fläche F_s. Auf den Symmetrielinien derselben sei wieder eine endliche Anzahl von Realitätszügen $R_1, \cdots, R_m$ gewählt. Ferner seien auf F_s außerhalb der Realitätszüge teils auf den Symmetrielinien teils außerhalb derselben, im letzteren Falle symmetrisch angeordnet, Verzweigungspunkte $a_1, \cdots, a_p, \alpha_1, \alpha_1', \cdots \alpha_q, \alpha_q'$ mit den zugeordneten Verzweigungszahlen $l_1, \cdots, l_p, \lambda_1, \cdots, \lambda_q$ gewählt. Es ist zu zeigen, daß es auf der Fläche F_s eine uniformisierende Variable vom *zweiten Typus* mit der charakteristischen Signatur

$$(F_s;\ R_1, \cdots, R_m;\ a_1, \cdots, a_p, \alpha_1, \alpha_1', \cdots, \alpha_q, \alpha_q';\ l_1, \cdots, l_p, \lambda_1, \cdots, \lambda_q)$$

gibt.***)

Wir knüpfen hieran eine Bemerkung, den Fall betreffend, in welchem das Geschlecht der Fläche F_s gleich Null ist. In diesem Falle können wir die Fläche F_s als einblättrige Ebene wählen. Das System der Sym-

---

*) Der Fall $p = 0$, $n = 3$ wird durch die Schwarzsche s-Funktion erledigt. S. Schwarz' bereits mehrfach erwähnte Abhandlung über die hypergeometrische Reihe.

**) Ist in Problem 2a und 2b die Fläche F_s *orthosymmetrisch* und wird das *vollständige* System der Symmetrielinien als System der Realitätszüge gewählt, wobei dann in 2b die Verzweigungspunkte $a_1, \cdots, a_p$ wegfallen, so stimmen die betreffenden uniformisierenden Variablen als solche mit den von Fricke in Fricke-Klein, „Vorlesungen" Bd. II, pag. 46 (Fundamentaltheorem II) postulierten Größen überein.

Die von uns in 2a und 2b postulierten weiteren uniformisierenden Variablen sind gerade diejenigen und nur diejenigen, für welche die Gruppe reelle Substitutionen mit *negativer* Koeffizientendeterminante enthält. (Vgl. die Bemerkungen pag. 154.)

***) Vgl. die vorangehende Fußnote.

metrielinien besteht dann nur aus einer einzigen Linie, nämlich der Achse des Reellen, und die Realitätszüge sind einfach getrennt liegende Stücke der Achse des Reellen, sofern nicht die ganze Achse des Reellen als Realitätszug gewählt ist.

Es gilt nämlich der

Satz: *Jede symmetrische Umformung der x-Ebene (inkl. des unendlich fernen Punktes) in sich selbst* (das ist, um es nochmals besonders zu sagen, eine solche umkehrbar eindeutige konforme Transformation dieser Ebene in sich mit Umlegung der Winkel, welche bei einmaliger Wiederholung die Identität ergibt) *stellt, sofern bei dieser Transformation auch nur ein einziger Punkt fest bleibt, entweder eine Spiegelung an einem Kreise oder an einer Geraden dar.*

Der Beweis dieses Satzes stützt sich wesentlich auf den anderen, hier als bekannt vorausgesetzten Satz, daß jede umkehrbar eindeutige konforme Abbildung einer x-Ebene auf sich selbst, bei welcher keine Umlegung der Winkel stattfindet, durch eine lineare Funktion von x vermittelt wird.

Indem wir die x-Ebene durch eine passende lineare Transformation in eine X-Ebene überführen, wobei der in der x-Ebene definierten symmetrischen Umformung eine symmetrische Umformung der X-Ebene entspricht, können wir erreichen, daß bei letzterer Umformung der unendlich ferne Punkt fest bleibt. Ist X' der dem Punkte X bei der symmetrischen Umformung entsprechende Punkt, so ist, wenn mit $\overline{X}'$ der zu X' konjugiert imaginäre Wert bezeichnet wird, die Funktion $\overline{X}'(X)$ eine analytische Funktion von X, welche eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der X-Ebene auf sich selbst vermittelt und zwar eine solche, bei welcher der unendlich ferne Punkt fest bleibt, also eine lineare Funktion der Form

$$\overline{X}' = a X + b,$$

unter a und b Konstanten verstanden. Die Konstanten a und b sind jedoch nicht willkürlich wählbar. Denn, damit die durch die Gleichung definierte konforme Transformation des Punktes X in den Punkt X' eine symmetrische Umformung wird, müssen a und b so bestimmt werden, daß bei der Transformation dem Punkte X' rückwärts der Punkt X entspricht. Das ergibt die Gleichungen

$$a \cdot \bar{a} = 1, \quad a\bar{b} + b = 0,$$

bei deren Berücksichtigung man leicht erkennt, daß die bei der Transformation fest bleibenden Punkte der X-Ebene eine bestimmte Gerade erfüllen und daß die Transformation selbst mit der Spiegelung an dieser Geraden identisch ist. In der ursprünglich betrachteten x-Ebene haben wir es daher entweder mit einer Spiegelung an einem Kreise oder an einer Geraden zu tun. q. e. d.

Die aufgeführten vier Probleme 1a, 1b, 2a, 2b lassen sich je auf ein *Problem der Analysis situs* und ein *Problem der konformen Abbildung* reduzieren.

Ist t diejenige, wie wir bereits wissen, bis auf eine reelle lineare Substitution vollständig bestimmte Größe, welche die Lösung des Problems 1a darstellt, so ist $t(x, y)$ eine in der ganzen Fläche F mit dem Charakter rationaler Funktionen von x und y erklärte Größe. Zu der Funktion $t(x, y)$ gehört eine bestimmte Riemannsche Fläche F_t, welche wir uns über der Fläche F ausgebreitet vorstellen können, so daß also jedem relativen Zweige der Funktion $t(x, y)$ ein bestimmtes relativ zu F zu verstehendes Blatt der Fläche F_t entspricht. Die Fläche F_t besitzt in jedem ihrer Blätter an jeder einzelnen Stelle genau den topologischen Charakter, welchen die Fläche F an der betreffenden Stelle darbietet.

Durch die Funktion $t(x, y)$ wird eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung der Fläche F_t auf die Fläche einer schlichten Halbebene (exkl. deren Begrenzung) vermittelt. Daraus folgt, daß die Fläche F_t eine *einfach zusammenhängende* Fläche ist. Die Fläche F_t ist ferner unendlich-vielblättrig; denn andernfalls müßte sie zufolge ihrer erwähnten topologischen Beschaffenheit, welche das Vorhandensein von Grenzpunkten ausschließt, eine geschlossene Riemannsche Fläche sein; eine geschlossene Riemannsche Fläche kann aber offenbar nicht umkehrbar eindeutig und konform, nicht einmal umkehrbar eindeutig und stetig auf die Fläche einer Halbebene abgebildet werden.

Die Eigenschaft der Fläche F_t, eine über der Fläche F ausgebreitete einfach zusammenhängende Fläche zu sein, welche an jeder Stelle von F in jedem Blatte den topologischen Charakter von F besitzt, ist für die Fläche F_t vollständig *charakteristisch.*

Denn wenn man zwei über F ausgebreitet gedachte Flächen F_1 und F_2 von der genannten Beschaffenheit hat, so kann man folgendermaßen die Identität dieser beiden Flächen erkennen. Man wähle irgend einen Punkt P auf F aus, darauf einen Punkt P_1 auf F_1 und einen Punkt P_2 auf F_2, welch letztere beiden Punkte in unserer Vorstellung gerade über der durch den Punkt P bezeichneten Stelle der Fläche F liegen sollen; es ist gleichgültig, in welchem der relativen Blätter von F_1 bezw. F_2 die Punkte P_1 und P_2 gewählt sind. Man kann jetzt, ausgehend von der Zuordnung der Punkte P_1 und P_2, durch kontinuierliche Fortsetzung eine Punktezuordnung zwischen F_1 und F_2 herstellen, bei welcher je zwei einander entsprechende Punkte sich über einer und derselben Stelle der zugrunde liegenden Fläche F befinden. Beschreibt P_1 irgend eine geschlossene Linie auf F_1, so zeigt es sich, daß zugleich der korrespondierende Punkt P_2 auf F_2 eine geschlossene Bahn beschreibt. Wird nämlich mit L_1 die vom Punkte P_1 beschriebene geschlossene Linie bezeichnet, mit L_2 die korrespondierende vom Punkte P_2 beschriebene Linie, so ist es, weil F_1 einfach zusammenhängend ist, möglich, durch stetige Deformation die geschlossene Linie L_1 auf den Ausgangspunkt zusammenzuschnüren, wobei sich die Linie L_2 auf eine Linie reduzieren muß, welche in ihrer ganzen Ausdehnung die nächste Umgebung ihres Ausgangspunktes nicht verlassen kann und folglich ebenfalls geschlossen sein muß. Nun ist es aber offenbar nicht möglich, daß die Linie L_2 bei der erwähnten stetigen Deformation in eine geschlossene Linie übergeht, wenn sie nicht von vornherein auf F_2 geschlossen war. Es entspricht also der geschlossenen Linie L_1 auf F_1 stets eine geschlossene Linie L_2 auf F_2. Ebenso erkennen wir, daß auch umgekehrt jeder geschlossenen Linie L_2 auf F_2 eine geschlossene Linie L_1 auf F_1 entspricht. Diese beiden Tatsachen zusammen drücken die Identität der beiden Flächen F_1 und F_2 aus, die wir beweisen wollten.

Das Wesentliche ist, daß die Riemannsche Fläche F_t in einer von dem Uniformisierungsprobleme völlig losgelösten Form rein durch Eigenschaften der *Analysis situs* erklärt werden kann.

Wir können jetzt von dem Uniformisierungsprobleme 1a folgendes topologische Problem als ein Problem für sich abtrennen.

Problem 1a$^{(1)}$: Über der Riemannschen Fläche F soll eine andere relativ zu F unverzweigte einfach zusammenhängende Fläche Φ_F konstruiert werden.

Nachdem dieses Problem gelöst ist, bleibt nur noch der Nachweis zu führen, daß es möglich ist, die Fläche Φ_F umkehrbar eindeutig und konform auf die schlichte Fläche einer Halbebene (exkl. deren Begrenzung) abzubilden; denn diese Eigenschaft besitzt die Funktion $t(x, y)$ in bezug auf die Fläche F_t, und es ist diese Eigenschaft für die Funktion $t(x,y)$ völlig charakteristisch; es hängen nämlich je zwei Funktionen, welche die Fläche F_t umkehrbar eindeutig und konform auf eine Halbebene abbilden, durch eine lineare Transformation zusammen, wie durch eine einfache Überlegung sofort erkannt wird. Vgl. pag. 181.

Wir formulieren also als zweites Problem das folgende:

Problem 1a$^{(2)}$: Die einfach zusammenhängende Fläche Φ_F soll umkehrbar eindeutig und konform auf die schlicht zu denkende Fläche einer Halbebene abgebildet werden.

Das Problem 1b läßt sich auf Grund einer der vorangehenden analogen Überlegung folgendermaßen in zwei Teilprobleme zerlegen.

Problem 1b$^{(1)}$: Über der Riemannschen Fläche F soll eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche Φ_F' konstruiert werden, welche abgesehen von den Punkten $a_1, \cdots, a_n$ an allen Punkten der Fläche F

dieselbe topologische Beschaffenheit wie F selbst hat, während sie an den ausgeschlossenen Stellen relative Windungspunkte hat, in welchen bezw. immer je $l_1, \cdots, l_n$ Blätter zusammenhängen. Jeder dieser Windungspunkte ist dabei, wenn er von endlicher Ordnung ist, als innerer Punkt der Fläche Φ'_F, wenn er von unendlich hoher Ordnung ist, als Grenzpunkt der Fläche Φ'_F zu betrachten.

Problem $1\,b^{(2)}$: Es soll die Fläche Φ'_F (exkl. deren etwa vorhandene von Windungspunkten unendlich hoher Ordnung gebildete Grenzpunkte) umkehrbar eindeutig und konform auf die Fläche einer schlichten Halbebene (exkl. deren Begrenzung) abgebildet werden.

Wie steht es mit einer analogen Zerlegung des Problems 2a in zwei Teilprobleme $2\,a^{(1)}$ und $2\,a^{(2)}$? Zu der in Problem 2a gesuchten Funktion $t(x, y)$ gehört eine gewisse über der Fläche F_s ausgebreitet zu denkende Riemannsche Fläche, welche entsprechend der Form des Wertebereichs T in zwei zueinander symmetrische einfach zusammenhängende Hälften zerfällt. Die einzelne Hälfte $\Phi_{[F_s]}$ ist folgenden charakteristischen Bedingungen gemäß zu konstruieren.

Problem $2\,a^{(1)}$: Es soll über der Fläche $[F_s]$ (das ist, je nachdem die Fläche F_s durch die Realitätszüge in zwei zueinander symmetrische Hälften zerlegt wird oder ein Ganzes bleibt, die eine Hälfte von F_s oder die durch die Realitätszüge begrenzt zu denkende Fläche F_s selbst) eine relativ zu $[F_s]$ unverzweigte, über die Begrenzung von $[F_s]$ sich nicht hinwegstreckende, einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche $\Phi_{[F_s]}$ konstruiert werden, welche an jeder Stelle von $[F_s]$ in allen ihren Blättern denselben topologischen Charakter wie $[F_s]$ selbst besitzt.

Weiter handelt es sich um die Lösung des folgenden Abbildungsproblems.

Problem $2\,a^{(2)}$: Es soll die Fläche $\Phi_{[F_s]}$ umkehrbar eindeutig und konform auf die Fläche einer schlichten Halbebene abgebildet werden und gezeigt werden, daß bei dieser Abbildung jeder Begrenzungslinie von $\Phi_{[F_s]}$ in regulär-analytischer Weise ein Stück der die Halbebene begrenzenden Geraden entspricht.

Der zuletzt geforderte Nachweis ist wesentlich, damit geschlossen werden kann, daß die Funktion, welche die konforme Abbildung der Fläche $\Phi_{[F_s]}$ auf die Halbebene vermittelt, über die Begrenzungslinien von $\Phi_{[F_s]}$ hinaus gemäß dem Symmetrieprinzip analytisch fortgesetzt werden kann, eine Eigenschaft, die ja in der Tat der gesuchten Funktion $t(x, y)$ zukommen soll.

Für das Problem 2b erhalten wir schließlich folgende beiden Teilprobleme $2\,b^{(1)}$ und $2\,b^{(2)}$.

Problem $2\,b^{(1)}$: Es soll über der Fläche $[F_s]$ eine über die Begrenzung von $[F_s]$ sich nicht hinweg erstreckende einfach zusammenhängende Fläche $\Phi'_{[F_s]}$ konstruiert werden, welche, abgesehen von den Punkten $a_1, \cdots, a_{p\lambda}, \alpha_1, \alpha_1', \cdots, \alpha_q, \alpha_q'$, soweit dieselben in $[F_s]$ liegen*), an allen Punkten denselben topologischen Charakter wie $[F_s]$ selbst besitzt. An den erwähnten ausgeschlossenen Punkten soll die Fläche $\Phi'_{[F_s]}$ in allen Blättern Windungspunkte haben, und zwar sollen an jeder dieser Stellen immer so viel Blätter zusammenhängen, als die der betreffenden Stelle zugeordnete Verzweigungszahl l bezw. λ vorschreibt. Diejenigen Punkte der Fläche $\Phi'_{[F_s]}$, welche Windungspunkte endlicher Ordnung sind, sind dabei als innere Punkte der Fläche zu betrachten, während die etwa vorhandenen Windungspunkte unendlich hoher Ordnung als Grenzpunkte der Fläche anzusehen sind.

Problem $2\mathrm{b}^{(2)}$: Es soll die Fläche $\Phi'_{[F_s]}$ umkehrbar eindeutig und konform auf die Fläche einer schlichten Halbebene abgebildet werden und gezeigt werden, daß bei dieser Abbildung jeder Begrenzungslinie von $\Phi'_{[F_s]}$ in regulär analytischer Weise ein bestimmtes Stück der die Halbebene begrenzenden Geraden entspricht.

E, II. Lösung der Analysis-situs-Probleme.

Nachdem wir im Vorhergehenden jedes der zu lösenden *Einzelprobleme* 1a, 1b, 2a, 2b in ein *Problem der Analysis situs* und ein *Problem der konformen Abbildung* zerlegt haben, gehen wir nunmehr an die wirkliche Erledigung der vier genannten Probleme und beginnen mit der Erledigung der vier Analysis-situs-Probleme $1\mathrm{a}^{(1)}$, $1\mathrm{b}^{(1)}$, $2\mathrm{a}^{(1)}$, $2\mathrm{b}^{(1)}$, die wir der Reihe nach behandeln.

Erledigung des Problems $1\mathrm{a}^{(1)}$ (*Konstruktion der einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche* Φ_F). Wir haben bei diesem Problem $p \geq 2$ vorauszusetzen (vgl. die Problemstellung pag. 188). Auf der Riemannschen Fläche F denken wir uns p die Fläche nicht zerstückende Rückkehrschnittpaare gezogen in der Weise, wie man dies in der Theorie der algebraischen Funktionen und ihrer Integrale zu tun pflegt. Darauf lassen wir die p Rückkehrschnittpaare sich in der Weise deformieren, daß ihre p Kreuzungspunkte schließlich nach einem und demselben Punkte O der Fläche F zusammenrücken. Auf diese Weise entsteht aus der Fläche F

*) Der Fall, daß die genannten Verzweigungspunkte nicht sämtlich in $[F_s]$ liegen, tritt dann und nur dann ein, wenn die Fläche $[F_s]$ *orthosymmetrisch* ist und wenn das System der Realitätszüge mit dem System der Symmetrielinien identisch ist, so daß sich selbst entsprechende Verzweigungspunkte überhaupt nicht vorkommen, während von den paarweise einander entsprechenden Verzweigungspunkten aus jedem Paar einer der einen, der andere der anderen Hälfte von F_s angehört.

eine einfach zusammenhängende Fläche F_0, deren vollständige Begrenzungslinie in $4p$ ($\geqq 8$) Stücke (*Begrenzungsseiten*) zerfällt, deren jedes einzelne von O zu O läuft und genau einem vollständigen Rückkehrschnitt entspricht. Die $4p$ Punkte O, zu welchen man bei Durchlaufung der vollständigen Begrenzung von F_0 gelangt, werden wir zweckmäßig als die *Eckpunkte* der Begrenzung von F_0 bezeichnen. Den an einen Eckpunkt von F_0 anstoßenden Flächenteil von F_0 wollen wir als einen *Zipfel* von F_0 bezeichnen. Die Fläche F_0 hat demnach im ganzen $4p$ *Zipfel.*

Unsere Absicht ist, die Fläche Φ_F als Grenze

$$\Phi_F = \lim_{\nu=\infty} \Phi^{(\nu)}$$

zu konstruieren, wobei mit $\Phi^{(\nu)}$ eine Fläche von folgenden Eigenschaften bezeichnet wird:

Die Fläche $\Phi^{(\nu)}$ ist eine einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, welche wir uns über F ausgebreitet vorzustellen haben. Diese Fläche besitzt, relativ zu F, keine Windungspunkte und ist relativ zu F endlich-vielblättrig. Durchläuft man die vollständige Begrenzung von $\Phi^{(\nu)}$, so kann man wie bei F_0 *Seiten* und *Eckpunkte* unterscheiden. Jeder einzelne Eckpunkt koinzidiert der Lage nach mit dem Punkte O der Fläche F. Jede einzelne Seite führt von einem Eckpunkte O zum nächsten Eckpunkte und zwar koinzidiert sie nach Lage und Verlauf mit einer vollständigen Seite von F_0 (Rückkehrschnitt auf F). Aus den genannten Eigenschaften der Fläche $\Phi^{(\nu)}$ ergibt sich, daß man sich dieselbe gewissermaßen durch Zusammenheftung von endlich vielen Exemplaren F_0 entstanden denken kann; die relative Blätterzahl der Fläche $\Phi^{(\nu)}$ ist gleich der Anzahl der zur Bildung von $\Phi^{(\nu)}$ benützten Exemplare F_0.

Fassen wir einen einzelnen Eckpunkt O von $\Phi^{(\nu)}$ ins Auge, so wird der an diesen Eckpunkt anstoßende Flächenteil von $\Phi^{(\nu)}$ aus einer bestimmten endlichen Anzahl von F_0-*Zipfeln* gebildet sein. Wir können dementsprechend *einzipfelige* und *mehrzipfelige* Eckpunkte von $\Phi^{(\nu)}$ unterscheiden. Wir wollen nun der Fläche $\Phi^{(\nu)}$ noch folgende weitere wesentliche Eigenschaft zuschreiben: die Fläche $\Phi^{(\nu)}$ besitze außer *einzipfeligen* Eckpunkten nur noch *zweizipfelige* Eckpunkte, aber keinen Eckpunkt, der aus mehr als zwei F_0-Zipfeln gebildet ist. Diese Bedingung wollen wir die *Eckpunktsbedingung* nennen.

Die Fläche F_0 ist eine Fläche, welche alle für die Flächen $\Phi^{(\nu)}$ angegebenen Eigenschaften besitzt. Wir können daher

$$\Phi^{(0)} = F_0$$

wählen.

Die Hauptsache ist jetzt, ein *Rekursionsprinzip* anzugeben, welches lehrt, aus der Fläche $\Phi^{(\nu)}$ die Fläche $\Phi^{(\nu+1)}$ zu finden.

Wir bezeichnen dazu mit s_ν die Anzahl der Seiten von $\Phi^{(\nu)}$. Man hefte an jede der s_ν Seiten von $\Phi^{(\nu)}$ je ein Neuexemplar F_0. Dadurch geht die Fläche $\Phi^{(\nu)}$ über in eine Fläche $\varphi^{(\nu)}$, deren Eckpunkte O, soweit sie bereits Eckpunkte von $\Phi^{(\nu)}$ waren, (*kritische Eckpunkte* von $\varphi^{(\nu)}$), in *dreizipfelige* und *vierzipfelige* Eckpunkte zerfallen. Die Fläche $\varphi^{(\nu)}$ kann daher noch nicht als Fläche $\Phi^{(\nu+1)}$ genommen werden, weil die *Eckpunktsbedingung* verletzt ist. Man kann nun aber durch Anheftung noch weiterer Exemplare F_0 von der Fläche $\varphi^{(\nu)}$ zu einer Fläche $\varphi^{(\nu)'}$ übergehen, für welche jeder *kritische* Eckpunkt von $\varphi^{(\nu)}$ ein innerer Punkt ist. Um einen einzelnen der kritischen Eckpunkte zu beseitigen, benötigt man, je nachdem derselbe ein dreizipfeliger oder ein vierzipfeliger Eckpunkt ist, $4p-3$ oder $4p-4$ Neuexemplare, deren jedes einzelne einen und nur einen Zipfel hergibt, um aus dem betreffenden kritischen Eckpunkte einen inneren Punkt O zu machen, an welchem sich die hernach entstandene Fläche $\varphi^{(\nu)'}$ topologisch genau ebenso verhält wie die Fläche F im Punkte O. Jedes der $4p-3$ bezw. $4p-4$ Zusatzexemplare ist mit zwei und nur zwei aufeinander folgenden seiner Seiten geheftet. Die Fläche $\varphi^{(\nu)'}$ ist wieder eine einfach zusammenhängende Fläche, und, wie leicht zu sehen, ist jetzt die *Eckpunktsbedingung* erfüllt.

Wir können daher die Fläche $\varphi^{(\nu)'}$ als Fläche $\Phi^{(\nu+1)}$ nehmen.

Für spätere Zwecke ist es von Wichtigkeit, die Anzahl E_ν der zur Bildung der Fläche $\Phi^{(\nu)}$ benützten Exemplare F_0 abzuschätzen. Es kommt uns dabei nicht darauf an, die Abschätzung möglichst genau zu geben. Das Wesentliche für später ist vielmehr nur dieses, daß die Größe E_ν, als Funktion des Index ν betrachtet, mit einer *Exponentialfunktion* verglichen wird.

Aus der Art und Weise, wie die Fläche $\Phi^{(\nu+1)}$ aus $\Phi^{(\nu)}$ gebildet worden ist, ergibt sich, daß die Anzahl der dabei neu hinzugekommenen Exemplare F_0 größer ist als $s_\nu + s_\nu(4p-4) = s_\nu(4p-3)$. Folglich ist auch

$$E_{\nu+1} > s_\nu(4p-3).$$

Nun bietet jedes der neu hinzugekommenen Exemplare entweder $4p-3$ oder $4p-2$ ungeheftete Seiten dar, welche mithin Begrenzungsseiten von $\Phi^{(\nu+1)}$ werden. D. h. für die Anzahl $s_{\nu+1}$ der Begrenzungsseiten von $\Phi^{(\nu+1)}$ ergibt sich

$$s_{\nu+1} > s_\nu(4p-3)^2 \qquad [\nu = 0, 1, 2, \cdots].$$

Daraus folgt mit Rücksicht auf $s_0 = 4p$ die Abschätzungsformel

$$s_\nu > 4p\,(4p-3)^{2\nu}.$$

Nun war

$$E_{\nu+1} > s_\nu(4p-3),$$

mithin ist

$$E_{\nu+1} > 4p(4p-3)^{2\nu+1},$$

also

$$E_{\nu} > 4p(4p-3)^{2\nu-1} \qquad [\nu = 1, 2, 3, \cdots].$$

Erledigung des Problems 1b[1] (*Konstruktion der einfach zusammenhängenden Überlagerungsfläche* Φ'_F). Die zu konstruierende einfach zusammenhängende Überlagerungsfläche Φ'_F soll relativ zu F Windungspunkte haben, nämlich die auf der Fläche F mit $a_1, a_2, \cdots, a_n$ bezeichneten Punkte. Die Anzahl der im Punkte a_α $[\alpha = 1, \cdots, n]$ jedesmal zusammenhängenden Blätter wird durch die Zahl l_α angegeben, welche endlich oder unendlich sein kann.

Wir betrachten zunächst den Fall $p = 0$.

Konstruktion der Fläche Φ'_F *im Falle* $p = 0$. In diesem Falle haben wir vorauszusetzen (vgl. die Problemstellung pag. 189), daß $n \geqq 4$ ist und daß im Falle $n = 4$ nicht alle Zahlen l gleich *zwei* sind. Auf der Fläche F wählen wir einen beliebigen Punkt O, welcher jedoch von den Punkten $a_1, a_2, \cdots, a_n$ verschieden ist. Wir ziehen von O aus n Linien $C_1, C_2, \cdots, C_n$, von welchen die Linie C_α $[\alpha = 1, \cdots, n]$ den Punkt O mit a_α verbindet. Die Linien C sollen ferner so gewählt sein, daß keine zwei derselben außer dem Punkte O noch einen anderen Punkt gemeinschaftlich haben. Die geschlossene Fläche F ist dadurch in eine einfach zusammenhängende Fläche F_0 verwandelt, deren vollständige Begrenzung $2n$ *Seiten* und ebensoviel *Eckpunkte* unterscheiden läßt. Die einzelne Seite fällt der Lage und dem Verlaufe nach mit einer vollständigen Linie C zusammen. Die Eckpunkte sind entweder *O-Eckpunkte* oder *a-Eckpunkte*, je nachdem sie der Lage nach mit dem Punkte O oder mit einem Punkte a_α auf F koinzidieren. Den an einen Eckpunkt der Fläche F anstoßenden Flächenteil von F_0 wollen wir, wie oben, als einen *Zipfel* bezeichnen, wobei wir nun *O-Zipfel* und *a-Zipfel* zu unterscheiden haben.

Unsere Absicht ist, die Fläche Φ'_F als Grenze

$$\Phi'_F = \lim_{\nu=\infty} \Phi^{(\nu)}$$

herzustellen.

Diesmal wird mit $\Phi^{(\nu)}$ eine Fläche von folgenden Eigenschaften bezeichnet:

Die Fläche $\Phi^{(\nu)}$ ist eine endlich-vielblättrige einfach zusammenhängende Riemannsche Fläche, welche wir uns über F ausgebreitet zu denken haben. An jedem von $a_1, \cdots, a_n$ verschiedenen inneren Punkte der Fläche $\Phi^{(\nu)}$ besitzt die Fläche $\Phi^{(\nu)}$ dieselbe topologische Beschaffenheit wie die zugrundeliegende Fläche F. An jedem inneren Punkte der Fläche $\Phi^{(\nu)}$ jedoch, welcher mit einem Punkte a_α (l_α endlich) koinzidiert, besitzt die Fläche $\Phi^{(\nu)}$

einen relativen Windungspunkt der Ordnung $(l_\alpha - 1)$. Ein Punkt a_α schließlich, für welchen l_α unendlich ist, kommt überhaupt nicht als innerer Punkt, sondern nur als Grenzpunkt der Fläche $\Phi^{(\nu)}$ vor. Die Begrenzung der Fläche $\Phi^{(\nu)}$ zerfällt in endlich viele Stücke (*Begrenzungsseiten*), deren einzelnes seinem Verlaufe nach mit einer vollständigen Linie C koinzidiert. Entsprechend unterscheiden wir auf der Begrenzung der Fläche $\Phi^{(\nu)}$ eine mit der Anzahl der Seiten übereinstimmende Anzahl von *Eckpunkten*. Der einzelne Eckpunkt ist entweder ein *O-Eckpunkt* oder ein *a-Eckpunkt*. Durchläuft man die vollständige Begrenzung von $\Phi^{(\nu)}$, so begegnet man *abwechselnd* Eckpunkten O und a. Fassen wir einen einzelnen Eckpunkt ins Auge, so können wir, gleichgültig ob derselbe ein O-Eckpunkt oder ein a-Eckpunkt ist, die Anzahl der in diesem Eckpunkte zusammenstoßenden F_0-Zipfel zählen (bei einem a-Eckpunkte ist die Anzahl der zusammenstoßenden F_0-Zipfel offenbar gleich derjenigen ganzen Zahl, mit welcher 2π zu multiplizieren ist, um den in dem betreffenden Eckpunkte von den zusammenstoßenden Begrenzungsseiten gebildeten Winkel zu erhalten). Die Fläche $\Phi^{(\nu)}$ genüge nun folgender weiteren Bedingung (*Eckpunktsbedingung*): jeder Eckpunkt O ist entweder *einzipfelig* oder *zweizipfelig*; ebenso ist jeder Eckpunkt a_α, für welchen $l_\alpha \geqq 3$ und endlich ist, entweder einzipfelig oder zweizipfelig; jeder Eckpunkt a_α hingegen, für welchen $l_\alpha = 2$ ist, ist *einzipfelig*; jeder Eckpunkt a_α schließlich, für welchen $l_\alpha = \infty$ ist, ist endlich-vielzipfelig, im übrigen aber *beliebig-vielzipfelig.*

Die Fläche F_0 selbst besitzt alle Eigenschaften, welche die Flächen $\Phi^{(\nu)}$ besitzen sollen. Wir können daher

$$\Phi^{(0)} = F_0$$

wählen. Es ist nur noch erforderlich, ein *Rekursionsprinzip* zur Bildung von $\Phi^{(\nu+1)}$ aus $\Phi^{(\nu)}$ anzugeben.

Jeden Eckpunkt a_α von $\Phi^{(\nu)}$, für welchen l_α endlich ist, verwandeln wir, je nachdem dieser Eckpunkt ein- oder zwei-zipfelig ist, durch Anfügung von $(l_\alpha - 1)$ oder $(l_\alpha - 2)$ Exemplaren F_0 in einen inneren Eckpunkt. Jeden Eckpunkt a_α, für welchen l_α unendlich ist, verwandeln wir durch Anfügung je eines Exemplares F_0 an jede der beiden im Eckpunkte zusammenstoßenden Begrenzungsseiten in einen neuen Eckpunkt a_α mit einer um *zwei* vermehrten Zahl der Zipfel. Die Ausführung der genannten Operationen bietet keine Schwierigkeiten dar, weil niemals zwei a-Eckpunkte unmittelbar aufeinanderfolgen, sondern stets ein Eckpunkt O dazwischen liegt. Nach Ausführung der genannten Operationen ist aus der Fläche $\Phi^{(\nu)}$ eine Fläche $\varphi^{(\nu)}$ geworden, welche in sämtlichen O-Eckpunkten, die bereits Eckpunkte von $\Phi^{(\nu)}$ waren, die Eckpunktsbedingung verletzt, im übrigen aber alle von der Fläche $\Phi^{(\nu+1)}$ zu verlangenden

Eigenschaften hat. Die erwähnten O-Eckpunkte, als Eckpunkte von $\varphi^{(\nu)}$ betrachtet, zerfallen in dreizipfelige und vierzipfelige Eckpunkte. Jeden dieser Eckpunkte können wir daher durch Hinzufügung von $n-3$ bezw. $n-4$ Neuexemplaren F_0 in einen inneren Punkt O verwandeln. (Ist n gerade gleich vier, also $n-4=0$, so würde bei einem vierzipfeligen Eckpunkt die Hinzufügung eines neuen Exemplares F_0 überhaupt nicht erforderlich sein, sondern lediglich eine Zusammenheftung zweier Seiten von $\varphi^{(\nu)}$ vorzunehmen sein, um den betreffenden Eckpunkt O zu einem inneren Punkte zu machen.)

Die Fläche $\varphi^{(\nu)'}$, welche wir auf diese Weise aus $\varphi^{(\nu)}$ gewonnen haben, ist wieder einfach zusammenhängend und besitzt offenbar lauter ein- oder zweizipfelige Eckpunkte O bezw. a_α (mit endlichem l_α). Es braucht jedoch die *Eckpunktsbedingung* für die Fläche $\varphi^{(\nu)'}$ noch nicht vollständig erfüllt zu sein, insofern als $\varphi^{(\nu)'}$ auch zweizipfelige Eckpunkte a_α, für die $l_\alpha = 2$ ist, haben kann. Man kann aber jeden derartigen Eckpunkt sofort beseitigen, indem man die beiden in dem betreffenden Eckpunkte zusammenstoßenden Begrenzungsseiten von $\varphi^{(\nu)'}$ einfach zusammenheftet, wodurch der betreffende Eckpunkt in einen inneren Punkt a_α verwandelt wird, während gleichzeitig die beiden durch a_α getrennten O-Eckpunkte von $\varphi^{(\nu)'}$ zu einem neuen und zwar zweizipfeligen Eckpunkte O zusammentreten; die beiden zusammentretenden Eckpunkte sind nämlich, wie man sich leicht überzeugt, sicher einzipfelige Eckpunkte von $\varphi^{(\nu)}$.

Die auf diese Weise aus $\varphi^{(\nu)'}$ durch den geschilderten (nur unter Umständen vorzunehmenden) Heftungsprozeß ohne Hinzufügung neuer Exemplare F_0 entstandene Fläche können wir nun mit $\Phi^{(\nu+1)}$ bezeichnen, da sie alle verlangten Eigenschaften besitzt.

Für später ist es wiederum von Wichtigkeit, eine *Abschätzungsformel* für die Anzahl E_ν der zur Bildung von $\Phi^{(\nu)}$ im ganzen benützten Exemplare F_0 zu haben. Die Abschätzung geschieht wieder durch eine *Exponentialfunktion* von ν.

Aus dem Umstande, daß auf der Begrenzung von $\Phi^{(\nu)}$ Eckpunkte O und a sich stets abwechselnd folgen, schließen wir, daß die Anzahl der a-Eckpunkte gleich $\frac{s_\nu}{2}$ ist. Beim Übergange von $\Phi^{(\nu)}$ zu $\varphi^{(\nu)}$ werden demnach mindestens $\frac{s_\nu}{2}$ Neuexemplare F_0 gebraucht. Beim Übergange von $\varphi^{(\nu)}$ zu $\varphi^{(\nu)'}$ werden mindestens $\frac{s_\nu}{2}(n-4)$ Neuexemplare gebraucht. Im ganzen werden also zur Bildung von $\Phi^{(\nu+1)}$ aus $\Phi^{(\nu)}$ mindestens $\frac{s_\nu}{2}(n-3)$ Neuexemplare F_0 benötigt; d. h. es ist:

$$E_{\nu+1} > \frac{s_\nu}{2}(n-3).$$

Betrachten wir nur ein einzelnes dieser hinzugekommenen Exemplare, so erkennen wir bald, daß keines derselben, als Exemplar von $\Phi^{(\nu+1)}$ aufgefaßt, mit mehr als sechs Seiten geheftet ist (dabei sind auch die beim Übergange von $\varphi^{(\nu)'}$ zu $\Phi^{(\nu+1)}$ ev. vorzunehmenden Heftungen in Rechnung gezogen). Demnach ergibt sich, weil jedes Exemplar F_0 $2n$ Seiten hat

$$s_{\nu+1} > \frac{s_\nu}{2}(n-3)(2n-6).$$

Daraus folgt durch Rekursion auf $\Phi^{(0)} = F_0$

$$s_\nu > 2n\left(\frac{(n-3)(2n-6)}{2}\right)^\nu,$$

und demnach

$$E_{\nu+1} > n(n-3)^{2\nu+1},$$

mithin

$$E_\nu > n(n-3)^{2\nu-1}.$$

Wird $n = 4$ angenommen, in welchem Falle wir zugleich voraussetzen, daß nicht alle l gleich 2 sind, so ist $n-3=1$ und die vorstehende Abschätzungsformel wird für unsere Zwecke unbrauchbar. Wir müssen also eine diesem Falle entsprechende schärfere Abschätzung vornehmen, um eine Vergleichung der Funktion E_ν mit einer *Exponentialfunktion* zu gewinnen. Der Nachweis muß sich dabei wesentlich auf die Tatsache des Vorkommens mindestens eines Punktes a_α mit einer Verzweigungszahl $l_\alpha > 2$ gründen, weil im Falle $l_1 = l_2 = l_3 = l_4 = 2$ (elliptisches Integral erster Art) die Anzahl E_ν bekanntlich wesentlich durch die Funktion ν^2 dargestellt wird, also sicher nicht mit einer Exponentialfunktion vergleichbar ist.

Wir bezeichnen mit $\tau_{\nu+1}$ die Anzahl derjenigen a-Eckpunkte auf der Begrenzung von $\Phi^{(\nu+1)}$, für welche die zugehörende Zahl l größer ist als 2. Beim Übergange von $\Phi^{(\nu)}$ zu $\varphi^{(\nu)}$ werden, wie wir bereits oben feststellten, mindestens $\frac{s_\nu}{2}$ Neuexemplare F_0 benötigt. Ein einzelnes dieser Exemplare kann, als Exemplar von $\Phi^{(\nu+1)}$ betrachtet, höchstens mit sechs seiner acht im ganzen vorhandenen Begrenzungsseiten geheftet sein. Tritt dies bei einem Exemplare wirklich ein, so liefert dasselbe Exemplar, wie man sich sofort überzeugt, für die Fläche $\Phi^{(\nu+1)}$ notwendig einen einzipfeligen a-Eckpunkt, für welchen l größer als 2 ist. Es ergibt sich also

$$s_{\nu+1} + \tau_{\nu+1} > \frac{s_\nu}{2} \cdot 3.$$

Gehen wir nun zur Bildung von $\Phi^{(\nu+2)}$ über, so können wir jetzt die $\tau_{\nu+1}$ vorhandenen einzipfeligen a-Eckpunkte mit von 2 verschiedenem l berücksichtigen und finden, daß die Anzahl der beim Übergange von $\Phi^{(\nu+1)}$ zu $\varphi^{(\nu+1)}$, also auch zu $\Phi^{(\nu+2)}$ neuzubenützenden Exemplare F_0

größer ist als $\frac{s_{\nu+1}}{2} + \tau_{\nu+1}$. Von diesen Exemplaren liefert jedes sicher mindestens $2n - 6 = 2$ Begrenzungsseiten von $\Phi^{(\nu+2)}$. Wir bekommen also

$$s_{\nu+2} > s_{\nu+1} + 2\tau_{\nu+1} > s_{\nu+1} + \tau_{\nu+1} > \frac{s_\nu}{2} \cdot 3,$$

mithin

$$s_{\nu+2} > s_\nu \cdot \frac{3}{2};$$

also

$$s_{2\nu} > 8 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\nu.$$

Nun ist $E_{2\nu+1}$ größer als die Anzahl der bei der Bildung von $\Phi^{(2\nu+1)}$ aus $\Phi^{(2\nu)}$ benützten Neuexemplare F_0, also ist $E_{2\nu+1} > \frac{s_{2\nu}}{2}$; folglich

$$E_{2\nu+1} > 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\nu.$$

Wegen

$$E_{2\nu} > E_{2\nu-1} = E_{2(\nu-1)+1}$$

ist daher

$$E_{2\nu} > 4 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu-1}.$$

Konstruktion der Fläche Φ_F' für $p > 0$. Die Erledigung dieser Aufgabe wird uns nach dem Vorhergehenden keine erhebliche Schwierigkeit darbieten. Die Riemannsche Fläche F denken wir uns wie im Falle des Problems 1a[1] durch p Rückkehrschnittpaare kanonisch zerschnitten und die p Kreuzungspunkte nach einem Punkte O zusammengezogen, der von den Punkten $a_1, a_2, \cdots, a_n$ verschieden ist. Die Rückkehrschnitte sind so zu ziehen, daß keiner derselben einen der Punkte a trifft. Wir verbinden jetzt den Punkt O auch noch mit den Punkten $a_1, a_2, \cdots, a_n$ durch n Züge $C_1, C_2, \cdots, C_n$, deren jeder einzelne in O beginnt und in dem betreffenden Punkte a endigt. Die Züge C sollen sich gegenseitig nicht treffen außer im Punkte O, desgleichen sollen sie keinen der vorher gezogenen Rückkehrschnitte treffen. Die auf diese Weise aus F entstandene einfach zusammenhängende Fläche mit $4p + 2n$ *Begrenzungsseiten* bezeichnen wir wiederum mit F_0. Durchläuft man die vollständige Begrenzung von F_0, so liegt jeder Eckpunkt a zwischen zwei Eckpunkten O. Es kommt jedoch vor, daß zwei oder mehr Eckpunkte O aufeinander folgen.

Wir setzen wieder in der Absicht, Φ_F' als Grenze

$$\Phi_F' = \lim_{\nu=\infty} \Phi^{(\nu)}$$

zu konstruieren,

$$\Phi^{(0)} = F_0.$$

Die Flächen $\Phi^{(\nu)}$ werden *rekurrent* gefunden. Die zu verlangenden Eigenschaften der einzelnen Fläche $\Phi^{(\nu)}$ sind im wesentlichen dieselben wie die bei der Bildung von Φ_F' im Falle $p = 0$ formulierten. Als Begrenzungsseiten von $\Phi^{(\nu)}$ treten jetzt selbstverständlich nicht nur Seiten C, wie im Falle $p = 0$, auf, sondern auch Seiten, welche ihrem Verlaufe nach mit einem Rückkehrschnitte koinzidieren. Auch gilt nicht mehr die im Falle $p = 0$ gemachte Bemerkung, daß man bei Durchlaufung der vollständigen Begrenzung von $\Phi^{(\nu)}$ abwechselnd Punkten a und 0 begegnet. Es bleibt jedoch soviel richtig, daß jeder Eckpunkt a zwischen zwei Eckpunkten O liegt. Das ist aber auch das für die Wiederanwendbarkeit des oben im Falle $p = 0$ formulierten *Rekursionsprinzips* allein Wesentliche.

Die Vergleichung der Funktion E_ν mit einer *Exponentialfunktion* vollzieht sich jetzt folgendermaßen.

Da jeder a-Eckpunkt zwischen zwei O-Eckpunkten liegt, so ist die Anzahl der O-Eckpunkte von $\Phi^{(\nu)}$ mindestens gleich $\frac{s_\nu}{2}$. Nun werden beim Übergange von $\varphi^{(\nu)}$ zu $\varphi^{(\nu)'}$ an jedem einzelnen dieser O-Eckpunkte von $\Phi^{(\nu)}$ mindestens $(4p + n - 4)$ Neuexemplare F_0 benötigt, deren einzelnes, als Exemplar von $\varphi^{(\nu)'}$ betrachtet, mit genau zwei Seiten geheftet ist. Beim Übergange von $\varphi^{(\nu)'}$ zu $\Phi^{(\nu+1)}$ könnte es jedoch sein, daß noch zwei weitere Seiten geheftet werden müssen (um die *Eckpunktsbedingung* zu erfüllen), sodaß nur $(4p + 2n - 4)$ ungeheftete Seiten bleiben. Es ergibt sich also für $s_{\nu+1}$ folgende Abschätzungsformel

$$s_{\nu+1} > \frac{s_\nu}{2}(4p + n - 4)(4p + 2n - 4) = s_\nu(4p + n - 4)(2p + n - 2),$$

eine Formel, welche im Falle $p = 1$, $n = 1$ für unsere Zwecke ungeeignet wird. In diesem Ausnahmefalle ist jedoch zu bemerken, daß beim Übergange von $\varphi^{(\nu)'}$ zu $\Phi^{(\nu+1)}$ unmöglich bei einem und demselben Exemplare F_0 *zwei* Heftungen vorzunehmen sind, weil dies voraussetzt, daß das betreffende Exemplar mindestens zwei verschiedene a-Eckpunkte aufweist, während doch im betrachteten Falle das einzelne Exemplar F_0 nur *einen* a-Eckpunkt besitzt. Wir finden also in dem betrachteten Spezialfalle folgende schärfere Abschätzungsformel

$$s_{\nu+1} > \frac{s_\nu}{2}(4p + n - 4)(4p + 2n - 3) = \frac{s_\nu}{2} \cdot 3.$$

Es ergibt sich nun durch Rekursion

$$s_\nu > (4p + 2n)\,[(4p + n - 4)(4p + 2n - 4)]^\nu$$

bezw. bei $p = 1$, $n = 1$

$$s_\nu > 6 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^\nu.$$

Daraus ergibt sich

$$E_\nu > (2p + n)\,[(4p + n - 4)\,(2p + n - 2)]^{\nu - 1}$$

bezw.

$$E_\nu > 3 \cdot \left(\frac{3}{2}\right)^{\nu - 1}.$$

Erledigung des Problems 2a(1). (*Konstruktion der Fläche* $\Phi_{[F_s]}$). Die Fläche $[F_s]$ besitzt eine endliche Anzahl von Begrenzungslinien und eine bestimmte endliche Ordnung des Zusammenhanges. Ist $Q + 1$ die Ordnungszahl des Zusammenhanges, so lassen sich nach bekannten Prinzipien der Analysis situs Q voneinander getrennte Querschnitte konstruieren, durch deren Vermittlung die Fläche $[F_s]$ in eine einfach zusammenhängende Fläche $[F_0]$ verwandelt wird. Jeder einzelne der Querschnitte verbindet zwei voneinander verschiedene Begrenzungspunkte von $[F_s]$ miteinander und liefert für die vollständige Begrenzung von $[F_0]$ zwei verschiedene der Lage nach koinzidierende Begrenzungsseiten (*Querschnittseiten*). Durchläuft man die vollständige Begrenzung von $[F_0]$, so begegnet man abwechselnd Stücken auf den Realitätszügen und Querschnittseiten.

Die gesuchte Fläche $\Phi_{[F_s]}$ bauen wir nun aus lauter Exemplaren $[F_0]$ auf, indem wir sie als Grenze

$$\Phi_{[F_s]} = \lim_{\nu = \infty} [\Phi^{(\nu)}]$$

konstruieren. Wir wählen

$$[\Phi^{(0)}] = [F_0].$$

Die Fläche $[\Phi^{(1)}]$ lassen wir aus $[\Phi^{(0)}]$ dadurch entstehen, daß wir an jede Querschnittseite von $[\Phi^{(\nu)}]$ ein neues Exemplar $[F_0]$ ansetzen. Die Fläche $[\Phi^{(2)}]$ lassen wir aus $[\Phi^{(1)}]$ entstehen, indem wir an jede Querschnittseite von $[\Phi^{(1)}]$ ein Neuexemplar $[F_0]$ ansetzen und so fort in infinitum. Es ist klar, daß das Verfahren wirklich ohne Ende fortsetzbar ist, so daß die Fläche $\Phi_{[F_s]}$ stets *unendlich-vielblättrig* wird, es sei denn, daß die Verwandlung der Fläche $[F_s]$ in die einfach zusammenhängende Fläche $[F_0]$ keinen einzigen Querschnitt erfordert. Das letztere tritt dann und nur dann ein, wenn die Fläche $[F_s]$ *selbst bereits einfach zusammenhängend ist.* Ist aber $[F_s]$ einfach zusammenhängend, so kann nur ein einziger Realitätszug vorhanden sein und es ergibt sich sofort, daß die Fläche F_s vom Geschlecht *Null* ist.

Wird dann F_s in der Form der schlichten x-Ebene angenommen, so haben wir entweder den Fall, in welchem die ganze Achse des Reellen oder den Fall, in welchem nur ein Stück $x_1 \cdots x_2$ der Achse des Reellen, welches ganz im Endlichen liegen oder sich durchs Unendliche hindurch erstrecken kann, als Realitätszug gegeben ist. Im ersten Falle ist die gesuchte Funktion $t(x)$ eine reelle lineare Funktion von x selbst, im zweiten Falle eine reelle lineare Funktion von $\sqrt{\frac{x - x_1}{x - x_2}}$ bezw. $i\sqrt{\frac{x - x_1}{x - x_2}}$.

Erledigung des Problems 2b[1]. (*Konstruktion der Fläche* $\Phi'_{[F_s]}$). Wir denken uns die vorher erwähnten Q Querschnitte so gezogen, daß sie keinen der gegebenen relativen Windungspunkte $a_1, \cdots, a_p, \alpha_1, \alpha_1', \cdots, \alpha_q, \alpha_q'$ (soweit diese Punkte überhaupt innerhalb $[F_s]$ liegen), trifft. Darauf denken wir uns von diesen Windungspunkten aus, soweit sie innerhalb $[F_s]$ liegen, je einen Einschnitt nach einem Punkte auf einem der Realitätszüge (d. i. auf der Begrenzung von $[F_s]$) so gezogen, daß keiner dieser Einschnitte einen anderen oder einen der vorher gezogenen Q Querschnitte trifft. Die Fläche $[F_s]$ ist dadurch wieder in eine einfach zusammenhängende Fläche verwandelt, welche wir mit $[F_0]$ bezeichnen. Die vollständige Begrenzung weist $2Q$ *Querschnittseiten* und $2Q'$ *Einschnittseiten* auf, wenn mit Q' die Anzahl der im Innern von $[F_s]$ liegenden gegebenen relativen Windungspunkte bezeichnet wird.

Wir setzen

$$[\Phi^{(0)}] = [F_0]$$

und konstruieren $\Phi'_{[F_s]}$ als Grenze

$$\Phi'_{[F_s]} = \lim_{\nu=\infty} [\Phi^{(\nu)}].$$

Die Fläche $[\Phi^{(\nu+1)}]$ bilden wir aus $[\Phi^{(\nu)}]$, indem wir an die Querschnittseiten von $[\Phi^{(\nu)}]$ je ein Neuexemplar $[F_0]$ anheften und gleichzeitig jeden Begrenzungspunkt a bezw. α von $[\Phi^{(\nu)}]$, dem ein endliches l bezw. λ zugeordnet ist, durch Hinzunahme von $l-1$ bezw. $\lambda - 1$ Neuexemplaren $[F_0]$ in einen inneren Windungspunkt verwandeln. Jedes der letzteren Exemplare ist dabei mit genau zwei auf einander folgenden seiner Seiten geheftet, nämlich mit denjenigen beiden Einschnittseiten, welche von dem betreffenden Eckpunkte a bezw. α ausgehen. Bei einem Eckpunkte a bezw. α von $[\Phi^{(\nu)}]$ mit unendlich großem l bezw. λ begnügen wir uns, an jede der beiden dort zusammenstoßenden Begrenzungsseiten von $[\Phi^{(\nu)}]$ *ein* Neuexemplar $[F_0]$ anzuheften.

Unser offenbar in infinitum anwendbares Konstruktionsprinzip für die Flächen $[\Phi^{(\nu)}]$ $[\nu = 1, 2, 3, \cdots]$ läßt sofort erkennen, in welchen Fällen die Fläche $\Phi'_{[F_s]}$ *endlich-vielblättrig* ausfällt. Dazu ist notwendig und hinreichend, daß $Q = 0$ und $Q' = 1$ ist. Außerdem muß der einzige innerhalb $[F_s]$ gegebene relative Windungspunkt ein endliches l bezw. λ haben. Daraus folgt wieder, daß die Fläche F_s vom Geschlecht *Null* sein muß.

Nehmen wir dann F_s als schlichte x-Ebene an, so haben wir folgende zwei Fälle. Erster Fall: die ganze Achse des Reellen ist Realitätszug; zu beiden Seiten der Achse des Reellen sind zueinander symmetrisch zwei Windungspunkte α, α' mit der zugehörigen endlichen Verzweigungszahl λ gegeben. Die gesuchte Funktion $t(x)$ ist in diesem Falle eine lineare Funktion von $\sqrt[l]{\frac{x-\alpha}{x-\alpha'}}$. Zweiter Fall: Nur ein Stück $x_1 \cdots x_2$ der Achse des Reellen ist Realitätszug, und ein (zu sich selbst symmetrischer) Punkt a der Achse des Reellen, welcher nicht auf dem Realitätszuge liegt, ist als relativer Windungspunkt mit endlichem l gegeben. Die gesuchte Funktion $t(x)$ wird, wenn man sich durch eine reelle lineare Substitution die Punkte x_1, x_2, a in die Punkte 0, ∞, 1 übergeführt denkt, wobei dem erwähnten Stück $x_1 \cdots x_2$ das Stück vom Nullpunkte nach dem Punkte $-\infty$ entsprechen möge, eine lineare Funktion von $\sqrt[l]{\frac{\sqrt{x}-1}{\sqrt{x}+1}}$.

E, III. Lösung der Abbildungsprobleme. (Problem 1a$^{(2)}$, 1b$^{(2)}$, 2a$^{(2)}$, 2b$^{(2)}$).*)

Es ist jetzt der Nachweis zu führen, daß es möglich ist, die in E, II konstruierten unendlich-vielblättrigen einfach zusammenhängenden Riemannschen Flächen Φ_F, Φ_F', $\Phi_{[F_s]}$, $\Phi_{[F_s]}'$ umkehrbar eindeutig und konform je auf eine schlichte Halbebene abzubilden, wobei bei den zwei letztgenannten Abbildungsproblemen zugleich auch darzutun ist, daß die konforme Abbildung sich in *regulär analytischer* Weise auf die Begrenzung der Flächen $\Phi_{[F_s]}$ und $\Phi_{[F_s]}'$ ausdehnen läßt. Die Begrenzung der letzteren Flächen wird, allgemein zu reden, von unendlich vielen getrennten Zügen gebildet, deren einzelner mittels unendlich oft wiederholter Durchlaufung eines Realitätszuges entsteht und folglich ungeschlossen ist.**)

Es gibt nur wenige *Ausnahmefälle*, in welchen die vollständige Begrenzung von $\Phi_{[F_s]}$ bezw. $\Phi_{[F_s]}'$ nur aus *endlich* vielen getrennten (ungeschlossenen) Zügen besteht. Diese Ausnahmefälle treten, wie die Betrachtung unserer oben dargelegten Konstruktionsmethode für die Flächen $\Phi_{[F_s]}$ und $\Phi_{[F_s]}'$ sofort erkennen läßt, dann und nur dann ein, wenn das vollständige System der Querschnittseiten und Einschnittseiten von $[F_0]$ entweder nur aus zwei Querschnittseiten, die von einem und demselben Querschnitte herrühren, oder nur von zwei Einschnittseiten, die von einem und demselben Einschnitte herrühren, gebildet wird. D. h.: damit die Fläche $\Phi_{[F_s]}$ *nur endlich viele getrennte (ungeschlossene) Begrenzungszüge*

*) Vgl. pag. 192—194.

**) Das Auftreten eines geschlossenen Begrenzungszuges würde, da ja die Flächen $\Phi_{[F_s]}$ und $\Phi_{[F_s]}'$ einfach zusammenhängend sind, zur Folge haben, daß diese Flächen außer jener geschlossenen Linie keine weitere Begrenzungslinie haben könnten und folglich *endlich-vielblättrig* sein müßten. Die Fälle, in welchen Endlich-Vielblättrigkeit stattfindet, können wir jedoch jetzt ausschließen; die explizite Bestimmung aller dieser Fälle haben wir vorher gegeben.

aufweist, muß entweder $p = 0$ sein*) und die Anzahl der Realitätszüge gleich 2 oder $p = 1$ und die Anzahl der Realitätszüge gleich 1 oder 2, wobei noch im Falle $p = 1$ jeder Realitätszug geschlossen sein muß. Die Anzahl der getrennten Begrenzungszüge von $\Phi_{[F_s]}$ wird dann gleich 2 und die konforme Abbildung der Fläche $\Phi_{[F_s]}$ auf die schlichte Halbebene wird durch das mit einer Exponentialfunktion zusammengesetzte *elliptische Integral erster Art* geliefert. Damit die Fläche $\Phi'_{[F_s]}$ *nur endlich viele getrennte (ungeschlossene) Begrenzungszüge* aufweist, muß $p = 0$ sein und die Anzahl der Realitätszüge $= 1$, schließlich die Anzahl der gegebenen relativen Windungspunkte innerhalb $[F_s]$ gleich 1, die letzterem Windungspunkte zugeordnete Zahl l gleich ∞. Die Anzahl der Begrenzungszüge von $\Phi'_{[F_s]}$ wird dann gerade gleich 1 und die konforme Abbildung der Fläche $\Phi'_{[F_s]}$ auf die Halbebene ist elementar durch Anwendung der Quadratwurzel und des Logarithmus ausführbar.

Indem wir nunmehr zur allgemeinen Behandlung der Abbildungsprobleme $1\mathrm{a}^{(2)}$, $1\mathrm{b}^{(2)}$, $2\mathrm{a}^{(2)}$, $2\mathrm{b}^{(2)}$ übergehen, ändern wir die Reihenfolge und behandeln zunächst die Probleme $2\mathrm{a}^{(2)}$ und $2\mathrm{b}^{(2)}$ als die leichteren.

Erledigung der Probleme $2\mathrm{a}^{(2)}$ *und* $2\mathrm{b}^{(2)}$. *Konforme Abbildung der Fläche* $\Phi_{[F_s]}$ *bezw.* $\Phi'_{[F_s]}$ *auf die Fläche einer schlichten Halbebene.* Analog wie man bei der konformen Abbildung einer endlich-vielblättrigen von endlich vielen analytischen Kurvenstücken begrenzten einfach zusammenhängenden Fläche verfährt, suchen wir auch hier im Falle der unendlich-vielblättrigen Fläche $\Phi_{[F_s]}$ bezw. $\Phi'_{[F_s]}$ die zu dieser Fläche gehörende Potentialfunktion u zu konstruieren, welche für diese Fläche die Rolle der zugehörenden Greenschen Funktion spielt. Dem Umstande entsprechend, daß die Fläche $\Phi_{[F_s]}$ bezw. $\Phi'_{[F_s]}$ als Grenze *endlich-vielblättriger* Flächen dargestellt ist, nämlich

$$\Phi_{[F_s]} = \lim_{\nu=\infty} [\Phi^{(\nu)}], \qquad \Phi'_{[F_s]} = \lim_{\nu=\infty} [\Phi'^{(\nu)}], \tag{1}$$

werden wir die Greensche Funktion u als Grenze der entsprechenden Greenschen Funktionen der Bereiche $[\Phi^{(0)}]$, $[\Phi^{(1)}]$, $\cdots$ konstruieren.

Im Innern des Gebiets $[\Phi^{(0)}]$ wählen wir einen willkürlichen Punkt O als Unstetigkeitspunkt der zu konstruierenden Greenschen Funktion u. Zu dem Bereiche $[\Phi^{(\nu)}]$ gehört eine bestimmte der partiellen Differentialgleichung

$$\Delta u_\nu = \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u_\nu}{\partial y^2} = 0$$

genügende Greensche Funktion u_ν, welche im ganzen Innern des Gebiets

---

*) p bezeichnet hier das Geschlecht der Fläche F_s bezw. der reellen Kurve (x, y).

$[\Phi^{(\nu)}]$ eindeutig und abgesehen vom Punkte O stetig erklärt ist, im Punkte O $(x = x_0)$ hingegen unendlich wird wie

$$\log \frac{1}{|x - x_0|} = \log \frac{1}{r}$$

und auf der ganzen Begrenzung von $[\Phi^{(\nu)}]$ stetig in den Wert Null übergeht.

Die Entwickelung der Funktion u_ν an der Stelle O hat die Form

$$u_\nu = \log \frac{1}{r} + c_\nu + ((0)),$$

wobei mit c_ν eine Konstante, mit $((0))$ eine im Punkte O verschwindende reguläre Potentialfunktion bezeichnet ist. Da $[\Phi^{(\nu)}]$ ganz im Innern des Bereichs $[\Phi^{(\nu+1)}]$ liegt, so ist die Funktion $u_{\nu+1} - u_\nu$ im ganzen Innern von $[\Phi^{(\nu)}]$ eindeutig und regulär erklärt. Die von dieser Funktion auf der Begrenzung von $[\Phi^{(\nu)}]$ angenommenen sich stetig ändernden Randwerte sind teils *Null*, teils positiv, woraus folgt, daß der Wert der Funktion $u_{\nu+1} - u_\nu$ in jedem inneren Punkte von $[\Phi^{(\nu)}]$ positiv und von Null verschieden ist. Insbesondere ist also auch der Wert der Funktion $u_{\nu+1} - u_\nu$ an der Stelle O positiv und von Null verschieden. Dieser Wert ist aber, wie sich aus den Entwickelungen für die Funktionen $u_{\nu+1}$ und u_ν an der Stelle O ergibt, gleich $c_{\nu+1} - c_\nu$. Man erhält also

$$c_0 < c_1 < c_2 < \cdots.$$

Aus diesen Ungleichheiten ergibt sich, daß der Nachweis der Konvergenz der Reihe $c_0, c_1, c_2, \cdots$ lediglich den Nachweis der Existenz einer Größe C erfordert, welche sicher größer ist als alle Größen der Reihe. Eine solche Größe läßt sich nun in der Tat angeben durch Aufstellung einer *Majorante* für die Funktionen

$$u_0 < u_1 < u_2 < \cdots.$$

Dazu betrachten wir die zu dem mehrfach zusammenhängenden Bereiche $[F_s]$ gehörende auf der ganzen Begrenzung von $[F_s]$ verschwindende Greensche Funktion $u_{[F_s]}$*) mit der Unendlichkeitsstelle O, wobei jetzt O als Punkt auf $[F_s]$ aufgefaßt wird. An der Unstetigkeitsstelle O besitzt die Funktion $u_{[F_s]}$ eine Entwickelung der Form

$$u_{[F_s]} = \log \frac{1}{r} + C + ((0)).$$

Da der Bereich $[\Phi^{(\nu)}]$ über der Fläche $[F_s]$ ausgebreitet ist, so kann die Funktion $u_{[F_s]}$ als Funktion des Ortes auf der Fläche $[\Phi^{(\nu)}]$ auf-

*) Die hier als Majorante angewandte Potentialfunktion $u_{[F_s]}$ stimmt mit der von mir in Note III angegebenen überein. Vgl. auch die von mir in II benützte Majorante.

gefaßt werden. Da nun die Funktion $u_{[F_s]}$ auf $[F_s]$ eindeutig erklärt ist, so ist sie eo ipso auch auf $[\Phi^{(\nu)}]$ eindeutig erklärt. Die Anzahl der Unstetigkeiten der Funktion $u_{[F_s]}$, als Funktion auf $[\Phi^{(\nu)}]$ betrachtet, ist jedoch nicht mehr gleich 1, sondern gleich der Anzahl der Exemplare $[F_0]$, welche zur Bildung der Fläche $[\Phi^{(\nu)}]$ verwandt worden sind, das ist gleich der relativen Blätterzahl der Fläche $[\Phi^{(\nu)}]$ relativ zu $[F_s]$.

Auf der Begrenzung von $[\Phi^{(\nu)}]$ ist die Funktion $u_{[F_s]}$ stetig, teils Null, teils positiv, nämlich Null längs derjenigen Teile der Begrenzung von $[\Phi^{(\nu)}]$, welche mit den Realitätszügen koinzidieren, positiv längs aller übrigen Begrenzungsstücke.

Bilden wir nun die Differenz $u_{[F_s]} - u_\nu$, so ist diese Funktion auf $[\Phi^{(\nu)}]$ eindeutig erklärt. Auf der Begrenzung von $[\Phi^{(\nu)}]$ ist sie überall stetig und zwar Null oder positiv, im Innern besitzt sie endlich viele Unstetigkeiten des Typus $\log \frac{1}{r}$, nämlich eine Unstetigkeit weniger als die Funktion $u_{[F_s]}$ auf $[\Phi^{(\nu)}]$ besitzt. Die Funktion $u_{[F_s]} - u_\nu$ ist demzufolge im ganzen Innern der Fläche $[\Phi^{(\nu)}]$ positiv und von Null verschieden. Insbesondere ergibt sich im Punkte O innerhalb $[\Phi^{(0)}]$:

$$C - c_\nu > 0.$$

Wir sind daher sicher, daß ein endlicher Grenzwert der Größen $c_0 < c_1 < c_2 < \cdots$ existiert. Wir setzen

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = c.$$

Um jetzt den Nachweis der gleichmäßigen Konvergenz der Reihe der Funktionen $u_0 < u_1 < u_2 < \cdots$ gegen eine Grenzfunktion zu führen, schicken wir folgenden Hilfssatz voraus.

Hilfssatz I. *Mit S werde ein im Innern des schlicht zu denkenden Einheitskreises einer Z-Ebene liegender einfach zusammenhängender schlichter Bereich bezeichnet, welcher den Nullpunkt in seinem Innern enthält und dessen Begrenzungslinie s vom Nullpunkte den kürzesten Abstand d habe (die Linie s kann auch Teile der Peripherie des Einheitskreises enthalten). Mit G werde die zum Bereiche S gehörende Greensche Funktion bezeichnet, welche im Punkte $Z = 0$ unendlich wird wie $\log \frac{1}{r} = \log \frac{1}{|Z|}$, ferner mit γ das konstante Glied in der Entwickelung dieser Funktion an der Nullstelle.*

*Ist eine positive Größe D gemäß der Bedingung $0 < D < 1$ gegeben, so gibt es eine Größe $\Gamma < 0$, welche so beschaffen ist, daß für alle S, für die $d \leqq D$ ist, $\gamma < \Gamma$ besteht.**) **)

*) Der Satz ist die Umkehrung eines anderen leicht zu beweisenden Satzes, bei welchem von der Existenz der Größe $\Gamma < 0$ ausgegangen wird und auf die Größe D zwischen 0 und 1 (exkl. 0 und 1) geschlossen wird.

**) Hilfssatz I gestattet uns, den Harnackschen Satz über positive Potentiale, Beweis: Es sei α ein Punkt auf s, in welchem die Linie s dem Nullpunkte möglichst nahe kommt, so daß also $|\alpha| = d$ ist. Dann ist es möglich, vom Punkte α aus eine sich selbst nicht schneidende Linie L nach einem Punkte der Peripherie des Einheitskreises zu ziehen, welche nicht in das Innere von s eintritt. Außer dem erwähnten Punkte der Peripherie des Einheitskreises möge die Linie L keinen weiteren Punkt der Peripherie enthalten. Durchlaufen wir die Linie L umgekehrt, ausgehend von dem genannten Punkte der Peripherie des Einheitskreises so werden wir, da $|\alpha| \leqq D < 1$ ist, einmal zum ersten Male nach einem Punkte der Linie L gelangen, dessen Abstand vom Nullpunkte genau die Größe D hat. Es sei dies der Punkt $Z = \delta$. Das Stück der Linie L, welches den Punkt δ mit der Peripherie des Einheitskreises verbindet, möge mit l bezeichnet werden. Die Linie l zusammen mit der Peripherie des Einheitskreises begrenzt einen einfach zusammenhängenden Bereich S', welcher offenbar den Bereich S vollständig in seinem Innern enthält. Ist daher G' die zu dem Bereiche S' gehörende Greensche Funktion, welche im Nullpunkte unendlich wird, so hat man innerhalb S $G' \geqq G$ und folglich, wenn mit γ' das konstante Glied in der Entwicklung der Funktion G' an der Nullstelle bezeichnet wird,

$$(G' - G)_{Z=0} = \gamma' - \gamma \geqq 0,$$

also

$$\gamma' \geqq \gamma$$

Wir konstruieren nunmehr eine mehrblättrige *zweifach zusammenhängende* Hilfsfläche H', welche nur noch von δ abhängt und S', also auch S, vollständig in ihrem Innern enthält. Zu dem Zwecke schneiden wir aus der Riemannschen Fläche der Funktion $\sqrt{Z - \delta}$ zwei einfach zusammenhängende Stücke aus, nämlich erstens das durch die Ungleichheitsbedingung $|Z| > 1$ definierte zweiblättrige kreisförmig begrenzte Flächenstück, zweitens eines der beiden durch die Ungleichheitsbedingung

$$|Z| < |\delta| = D$$

definierten einblättrigen kreisförmigen Flächenstücke. Die auf diese Weise aus der Riemannschen Fläche der Funktion $\sqrt{Z - \delta}$ entstandene Fläche H' enthält in der Tat S' als Teilbereich. Wird daher mit G'' die zur Fläche H' gehörende, im Nullpunkte logarithmisch unendlich werdende, auf beiden Begrenzungslinien von H' verschwindende Greensche Funktion bezeichnet,

von welchem ich in früheren Arbeiten (II, III, IV, V, VI) noch Gebrauch mache, zu vermeiden, was mir in gewisser Hinsicht als eine wesentliche Vervollkommnung, wenn auch vielleicht nicht gedankliche Vereinfachung erscheint. Man vgl. unten Hilfssatz II pag. 215.

mit Γ das konstante Glied in der Entwicklung der Funktion G'' an der Stelle $Z = 0$, so hat man

$$(G'' - G')_{Z=0} = \Gamma - \gamma' > 0,$$

also

$$\Gamma > \gamma' \geqq \gamma.$$

Es ist jetzt noch zu zeigen, daß

$$\Gamma < 0,$$

oder, anders ausgedrückt, daß das konstante Glied in der Entwicklung der Greenschen Funktion der Fläche H' kleiner ist als das konstante Glied in der Entwicklung der Greenschen Funktion des Einheitskreises selbst, welch letztere Greensche Funktion ja direkt durch den Ausdruck $\log \frac{1}{r}$ dargestellt wird. Zu dem Zwecke bemerken wir, daß die Funktion $G'' - \log \frac{1}{r}$ auf der ganzen Fläche H' eindeutig und regulär erklärt ist. Diese Funktion nimmt ferner auf der einen Begrenzungslinie von H' den Wert Null, auf der anderen den Wert $-\log \frac{1}{D}$ an, welch letzterer wegen $D < 1$ kleiner ist als Null. Daraus folgt, daß die Werte der Funktion $G'' - \log \frac{1}{r}$ im ganzen Innern von H' negativ und von Null verschieden sind; insbesondere ist also

$$\Gamma = \left(G'' - \log \frac{1}{r}\right)_{Z=0} < 0 \quad \text{q. e. d.*)}$$

Aus dem soeben bewiesenen Hilfssatze ergibt sich folgender Satz.

Folgerung: *Es sei S ein veränderlich vorgestellter, einfach zusammenhängender, schlichter Bereich im Innern des Einheitskreises, welcher den Nullpunkt enthält. γ habe in bezug auf S dieselbe Bedeutung wie oben, desgleichen d; es ist also $\gamma < 0$ und $d < 1$.*

Ist ε eine beliebig kleine von Null verschiedene positive Größe, so gibt es eine andere, von Null verschiedene, negative Größe η, so daß für alle S, für welche die Ungleichheitsbedingung $\eta \leqq \gamma < 0$ erfüllt ist, auch die Ungleichheitsbedingung $1 - d \leqq \varepsilon$ gilt.

Gäbe es nämlich ein solches η nicht, so würde das heißen: es gibt Bereiche S, für welche der kürzeste Abstand $d \leqq 1 - \varepsilon$ ist (ε gegeben)

*) Die Konstante Γ stellt, worauf es hier allein ankommt, nur eine *obere Schranke* der Werte γ dar, die zu allen möglichen Bereichen S mit einem kürzesten Abstande $d \leqq D$ vom Nullpunkte gehören. Die wahre obere Grenze wird vermutlich für denjenigen einfach zusammenhängenden Bereich S' erreicht, dessen vollständige Begrenzung von der Peripherie des Einheitskreises und der geradlinigen Verbindungsstrecke zwischen dem Punkte D und dem Punkte $+1$ dargestellt wird.

und für welche das zugehörende γ der *Null* beliebig nahe käme. Das steht aber mit dem soeben bewiesenen Hilfssatze in Widerspruch.

Wir setzen nunmehr unsere oben unterbrochene Konvergenzuntersuchung fort.

Wir hatten gefunden $\lim\limits_{\nu=\infty} c_\nu = c =$ endliche Größe: d. h. nach Angabe einer absolut beliebig kleinen negativen von Null verschiedenen Größe η gibt es eine positive ganze Zahl N, so daß für alle $\nu \geqq N$ und beliebig gewähltes von Null verschiedenes ganzzahliges ν' die Ungleichheitsbeziehung

$$(*) \qquad |\eta| \geqq c_{\nu+\nu'} - c_\nu > 0$$

besteht. Ist nun $v_{\nu+\nu'}$ das konjugierte Potential zu $u_{\nu+\nu'}$, so wird durch Vermittlung der Funktion

$$z_{\nu+\nu'} = e^{-(u_{\nu+\nu'} + i v_{\nu+\nu'})}$$

eine konforme Abbildung des Gebiets $[\Phi^{(\nu+\nu')}]$ auf das Innere der schlicht zu denkenden Fläche des Einheitskreises vermittelt, wobei der Punkt O in den Nullpunkt übergeht, während gleichzeitig der ganz im Innern von $[\Phi^{(\nu+\nu')}]$ liegende Bereich $[\Phi^{(\nu)}]$ in einen Teilbereich $\varphi'_{\nu,\nu'}$ des Einheitskreises übergeht, welcher gewisse Begrenzungsteile auf der Peripherie des Einheitskreises hat. Die Funktionen $u_{\nu+\nu'}$ und u_ν können jetzt als Funktionen des Punktes $z_{\nu+\nu'}$ betrachtet werden. Als solche sind sie wieder Greensche Funktionen, nämlich $u_{\nu+\nu'}$ für den Einheitskreis, u_ν für die Fläche $\varphi'_{\nu,\nu'}$. Es seien $c'_{\nu+\nu'}$ und $c'_{\nu,\nu'}$ die Konstanten in der Entwicklung dieser Greenschen Funktionen an der Stelle $z_{\nu+\nu'} = 0$. Man findet dann sofort aus dem Ansatze der Transformation

$$c'_{\nu+\nu'} - c'_{\nu,\nu'} = c_{\nu+\nu'} - c_\nu.$$

Nun ist

$$c'_{\nu+\nu'} = 0, \quad \text{also} \quad - c'_{\nu,\nu'} = c_{\nu+\nu'} - c_\nu.$$

Daher wegen (*)

$$\eta \leqq c'_{\nu,\nu'} < 0$$

Wird mit $d_{\nu,\nu'}$ der Abstand der Begrenzung des Bereichs $\varphi'_{\nu,\nu'}$ vom Punkte $z_{\nu+\nu'} = 0$ bezeichnet, so ergibt sich nunmehr durch eine Anwendung des oben als *Folgerung* bezeichneten Hilfssatzes:

$$|1 - d_{\nu,\nu'}| \leqq \varepsilon.$$

Diese Ungleichheit ermöglicht es uns, in der $z_{\nu+\nu'}$-Ebene eine Abschätzung für die Differenz $u_{\nu+\nu'} - u_\nu$ anzugeben. Diese Differenz ist nämlich im ganzen Gebiete $\varphi'_{\nu,\nu'}$ regulär erklärt und nimmt auf der Begrenzung von $\varphi'_{\nu,\nu'}$ die Werte der Funktion $u_{\nu+\nu'}$ (als Funktion von $z_{\nu+\nu'}$ betrachtet) an. Letztere Funktion ist aber mit $\log \frac{1}{|z_{\nu+\nu'}|}$ identisch. D. h. es ist auf der Begrenzung von $\varphi'_{\nu,\nu'}$ und folglich im ganzen Innern von $\varphi'_{\nu,\nu'}$, also auch im Innern von $[\Phi^{(\nu)}]$ (einschließlich der Begrenzung)

$$(**) \qquad u_{\nu+\nu'} - u_\nu = |u_{\nu+\nu'} - u_\nu| < \log \frac{1}{1-\varepsilon}.$$

Hiermit ist die gleichmäßige Konvergenz der Funktionenfolge

$$u_0 < u_1 < u_2 < \cdots$$

bewiesen und zwar in einem wesentlich präziseren Sinne als dies mit Hilfe des Harnackschen Satzes möglich gewesen wäre, welcher keinen direkten Schluß auf gleichmäßige Konvergenz längs der Begrenzung selbst gestattet. Weitere Vorteile unserer Abschätzung werden sich sogleich darbieten.

Die Grenzfunktion

$$\lim_{\nu=\infty} u_\nu = u$$

ist jedenfalls, infolge eines bekannten Satzes über Potentialfunktionen, auch eine Potentialfunktion. Diese Potentialfunktion ist auf der ganzen Fläche $\Phi_{[F_s]}$ bezw. $\Phi'_{[F_s]}$, ausgenommen nur den in $[\Phi^{(0)}]$ befindlichen Punkt O, eindeutig und regulär erklärt. Im Punkte O wird sie unendlich wie $\log \frac{1}{|x-x_0|}$.

Die Funktion u hat ferner wegen der auch auf der Begrenzung jedes Gebietes $[\Phi^{(\nu)}]$ gleichmäßig stattfindenden Konvergenz der Reihe die Eigenschaft, längs jeder der unendlich vielen mit den Realitätszügen koinzidierenden Begrenzungszüge der Fläche $\Phi_{[F_s]}$ bezw. $\Phi'_{[F_s]}$ stetig in den Wert Null überzugehen. Unsere Methode des Konvergenzbeweises läßt weiter die Tatsache erkennen, daß die Werte, welche die (überall positive) Funktion u auf der vollständigen Begrenzung von $[\Phi^{(\nu)}]$ annimmt, sämtlich $\leqq \log \frac{1}{1-\varepsilon}$ sind, sofern nur $\nu \geqq N$ ist. Man braucht, um dies einzusehen, nur in $(**)$ $u_{\nu+\nu'}$ durch u zu ersetzen. Man kann demnach von der Funktion u in einem übertragenen Sinne sagen, sie gehe gleichmäßig in den Wert Null über, wenn man sich gleichmäßig der Grenze des unendlich vielblättrigen einfach zusammenhängenden Bereichs $\Phi_{[F_s]}$ bezw. $\Phi'_{[F_s]}$ nähert, eine Eigenschaft, welche einer Greenschen Funktion, die zu einem gewöhnlichen endlich-vielblättrigen Bereiche gehört, in unmittelbarem Sinne zukommt.

Bezeichnen wir mit v die zu u gehörende konjugierte Potentialfunktion, welche auf der ganzen Fläche $\Phi_{[F_s]}$ bezw. $\Phi'_{[F_s]}$, ausgenommen den Punkt O, eindeutig und regulär erklärt ist, im Punkte O selbst hingegen sich wie die konjugierte Potentialfunktion der Funktion $\log \frac{1}{|x-x_0|}$ verhält, so ist

$$z = e^{-(u+iv)}$$

eine auf der ganzen Fläche $\Phi_{[F_s]}$ bezw. $\Phi'_{[F_s]}$ eindeutig und regulär erklärte analytische Funktion des Ortes. Diese analytische Funktion verhält sich auch auf den Begrenzungslinien der Fläche $\Phi_{[F_s]}$ bezw. $\Phi'_{[F_s]}$ völlig regulär, weil u längs jeder dieser Begrenzungslinien stetig in den Wert Null übergeht, also nach einem bekannten Satze über diese Begrenzungslinien hinaus durch *Spiegelung analytisch fortgesetzt* werden kann.

Was für eine konforme Abbildung vermittelt die Funktion z? Zu dem Zwecke sehen wir zu, in was für ein Gebiet bei der durch die Funktion z vermittelten Abbildung der Teilbereich $[\Phi^{(\nu)}]$ übergeführt wird. Das Bildgebiet von $[\Phi^{(\nu)}]$ werde mit f_ν bezeichnet. Da $u \leqq 0$ ist, so liegt f_ν jedenfalls ganz innerhalb des Einheitskreises der z-Ebene. Da u nur an einer Stelle, nämlich O, unendlich wird, so wird f_ν den Nullpunkt der z-Ebene genau einmal bedecken. Wird mit m_ν das Maximum der Funktion u auf der Begrenzung von $[\Phi^{(\nu)}]$ bezeichnet, so ist m_ν eine positive Größe, welche, wie sich oben ergab, zugleich mit $\frac{1}{\nu}$ unendlich klein wird. Das Bild der Begrenzungslinie von $[\Phi^{(\nu)}]$ wird demnach eine Linie in der z-Ebene sein, deren kürzester Abstand d_ν vom Punkte $z = 0$ eine Größe ist, die mit wachsendem n gegen 1 konvergiert. Aus dem Umstande, daß der Nullpunkt der z-Ebene von f_ν nur *einfach* bedeckt wird, folgt, daß das ganze durch die Ungleichheitsbedingung $|z| < d_\nu$ definierte kreisförmige Gebiet der z-Ebene, das ja keinen Grenzpunkt von f_ν enthalten kann, von der Fläche f_ν überall genau *einblättrig* überdeckt wird. Lassen wir daher ν ins Unendliche gehen, wobei, wie erwähnt, d_ν gegen 1 konvergiert, so ergibt sich:

$$\lim_{\nu=\infty} f_\nu = \text{schlichte Fläche des Einheitskreises.}$$

Von der Fläche des Einheitskreises können wir nun durch lineare Transformation zur Fläche einer t-Halbebene übergehen. Auch haben wir die gewünschte Gewißheit erlangt, daß die hiermit gefundene Abbildungsfunktion $t(x, y)$ über die Begrenzungslinien von $\Phi_{[F_s]}$ bezw. $\Phi'_{[F_s]}$ hinaus durch *Spiegelung analytisch fortgesetzt* werden kann.

Erledigung der Probleme $1a^{(2)}$ *und* $1b^{(2)}$. *(Konforme Abbildung der Flächen* Φ_F *und* Φ'_F *auf die schlichte Fläche einer Halbebene.)* Wir gehen nunmehr zur Behandlung der Abbildungsprobleme $1a^{(2)}$ und $1b^{(2)}$ über. Das charakteristisch Neue gegenüber den vorher behandelten Abbildungsproblemen ist jetzt, daß die abzubildenden Bereiche *keine Begrenzungslinien* besitzen, welche es uns ermöglichen eine Majorante analog der Funktion $u_{[F_s]}$ aufzustellen.

Wir haben Φ_F bezw. Φ'_F konstruiert als Grenze

$$\Phi_F = \lim_{\nu=\infty} \Phi^{(\nu)}, \qquad \Phi'_F = \lim_{\nu=\infty} \Phi^{(\nu)};$$

dabei liegt $\Phi^{(\nu)}$ ganz im Innern von $\Phi^{(\nu+1)}$. Wir nehmen analog wie oben einen willkürlichen Punkt O $(x = x_0)$ im Innern von $\Phi^{(0)}$ an, und konstruieren die Reihe der Potentiale $u_0, u_1, u_2, \cdots$ als Greensche Funktionen für die Bereiche $\Phi^{(0)} < \Phi^{(1)} < \Phi^{(2)} < \cdots$. Wiederum haben wir

$$u_0 < u_1 < u_2 < \cdots.$$

Bezeichnen wir mit c_ν das konstante Glied in der Entwicklung der Funktion u_ν an der Stelle O, so daß also an dieser Stelle eine Entwicklung der Form

$$u_\nu = \log \frac{1}{r} + c_\nu + ((0))$$

besteht, so ergibt sich, wie oben,

$$c_0 < c_1 < c_2 < \cdots.$$

Wenn wir beweisen können, daß

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = \text{endliche Größe}$$

ist, so gelangen wir, genau wie vorher, zu einer konformen Abbildung der Fläche Φ_F bezw. Φ'_F auf die schlichte Fläche des Einheitskreises bezw. einer Halbebene.

Wir führen den Nachweis, daß $\lim\limits_{\nu=\infty} c_\nu$ ein endlicher Wert ist, *indirekt*.

Wir machen also jetzt die Annahme

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = \infty$$

in der Absicht, dieselbe auf einen Widerspruch zu führen. Wir beweisen nämlich, daß aus der Annahme $\lim\limits_{\nu=\infty} c_\nu = \infty$ gefolgert werden kann, daß die Fläche Φ_F bezw. Φ'_F umkehrbar eindeutig und konform auf die schlichte ganze Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes abbildbar ist, so daß wir zu einer linear-polymorphen uniformisierenden Variablen gelangen würden, deren Wertegebiet durch die ganze Ebene exkl. ∞ gebildet wird. Darin liegt dann der Widerspruch mit Rücksicht auf das Ergebnis des Abschnitts C dieser Abhandlung. Eine andere Methode, um den Widerspruch zu erkennen, bieten uns die in E, II für die Größe E_ν gefundenen Abschätzungsformeln.

Die Anlage des Beweises ist derart allgemein, daß durch die Entwicklungen dieses Teiles der Abhandlung überhaupt der in der Einleitung genannte *allgemeine Abbildungssatz über einfach zusammenhängende Be-*

reiche vollständig bewiesen wird, indem jeder derartige Bereich Φ als Grenze

$$\Phi = \lim_{\nu=\infty} \Phi^{(\nu)}$$

aufgefaßt werden kann, wobei dann bei der Bildung der analogen Potentiale $u_0, u_1, u_2, \cdots$ sich entweder

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = \text{endliche Größe}$$

oder

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = \infty$$

ergeben wird.

Mit $U_1, U_2, U_3, \cdots$ *) werde eine neue Reihe von Potentialen bezeichnet, welche folgendermaßen definiert sind: Die Potentialfunktion U_ν ist eindeutig in $\Phi^{(\nu)}$, sie wird auf der ganzen Begrenzung von $\Phi^{(\nu)}$ Null und nur im Punkte O $(x = x_0)$ unstetig, nämlich wie

$$\Re\left(\frac{1}{x - x_0}\right).$$

Die Funktion U_ν hat im Punkte O eine Entwicklung der Form

$$U_\nu = \Re\left(\frac{1}{x - x_0}\right) + \text{regulärer Bestandteil.}$$

Wir werden nun beweisen, daß, wenn ε eine beliebig klein gegebene, positive, von Null verschiedene Größe ist, es stets eine positive ganze Zahl N gibt, so daß für alle $\nu \geqq N$ und beliebiges ν' innerhalb und auf der Begrenzung von $\Phi^{(\nu)}$ die Ungleichheit besteht

$$|U_{\nu+\nu'} - U_\nu| < \varepsilon.$$

Dazu brauchen wir einen neuen Hilfssatz:

Hilfssatz II. *Es sei S ein endlicher schlichter Bereich der Z-Ebene, der den Nullpunkt in seinem Innern enthält, d sei der kürzeste Abstand des Nullpunktes von der Begrenzungslinie s des Bereichs S, γ das konstante Glied in der Entwicklung der zu S gehörenden Greenschen Funktion mit dem Nullpunkte als Unstetigkeitsstelle.*

Ist D_0 eine beliebig gegebene, von Null verschiedene, positive Größe, so gibt es eine Größe Γ_0, so daß für alle Bereiche S, für die $d \leqq D_0$ ist, $\gamma < \Gamma_0$ ist. **) ***)

*) Vgl. Note IV, pag. 202.

**) Der Satz ist die Umkehrung eines anderen leicht zu beweisenden Satzes. (Vgl. die analoge Bemerkung zu Hilfssatz I, pag. 208.)

***) Man kann von diesem Satze leicht zu folgendem bemerkenswerten Satze übergehen:

Wird die schlichte Fläche des Einheitskreises umkehrbar eindeutig und konform auf einen anderen schlichten endlichen Bereich Σ abgebildet, wobei nur der Be-

Beweis:*) Der Beweis wird in analoger Weise geführt, wie der Beweis des ersten Hilfssatzes. Wir wählen auf s einen Punkt α so, daß $|\alpha| = d$ ist. Darauf verbinden wir α mit dem unendlich fernen Punkte der z-Ebene durch eine Linie L, welche nicht in das Innere von S eintritt. Nunmehr bestimmen wir, auf L aus dem Unendlichen kommend, den ersten Punkt δ auf L, für welchen $|\delta| = D_0$ ist. Das Stück l der Linie L, welches den Punkt δ mit dem unendlich fernen Punkte verbindet, begrenzt einen unendlich großen, einfach zusammenhängenden Bereich S', welcher den Bereich S in seinem Innern enthält. Wir bilden jetzt eine Hilfsfläche H, indem wir aus der Riemannschen Fläche der Funktion $\sqrt{Z-\delta}$ *eine* endliche schlichte Kreisfläche ausschneiden, deren Punkte der Ungleichheitsbedingung $|Z| < |\delta| = D_0$ genügen. Die Fläche H ist einfach zusammenhängend und enthält den Bereich S', also auch S vollständig in ihrem Innern. Es ist folglich, wenn wieder mit G die zu S, mit G'' die zu H gehörende Greensche Funktion mit dem Nullpunkte als Unstetigkeitsstelle bezeichnet wird, innerhalb S

$$G'' > G.$$

Wenn daher mit Γ_0 das konstante Glied in der Entwicklung der Funktion G'' an der Nullstelle bezeichnet wird, so können wir schließen

$$(G'' - G)_{Z=0} = \Gamma_0 - \gamma > 0. \qquad \text{q. e. d.}$$

Wir ziehen aus dem zweiten Hilfssatze sofort folgenden Schluß:

Folgerung. *Ist ε eine beliebig klein gegebene, positive, von Null verschiedene Größe, so gibt es eine andere positive, von Null verschiedene Größe η_0, so daß für alle endlichen schlichten Bereiche S, die den Nullpunkt in ihrem Innern enthalten und für welche γ größer ist als $\frac{1}{\eta_0}$, die kürzeste Distanz d größer als $\frac{1}{\varepsilon}$ ist.* **)

---

dingung genügt sein soll, daß der Nullpunkt bei der konformen Abbildung sich selbst entspricht und daß das Vergrößerungsverhältnis an dieser Stelle den Wert eins hat, so gibt es eine von der Wahl des Bereichs Σ unabhängige von Null verschiedene Größe ϱ, so daß der kürzeste Abstand d der Begrenzungslinie des Bereichs Σ vom Nullpunkte zwischen den Größen ϱ und 1 liegt. (Vgl. Note IV, pag. 204: „Zweite Form des zweiten Hilfssatzes".)

Die genaue untere Schranke für den kürzesten Abstand wird vermutlich erreicht, wenn die vollständige Begrenzung des Bereichs Σ von dem unendlichen Halbstrahle gebildet wird, der den Punkt $\frac{1}{4}$ mit dem Punkte $+\infty$ verbindet.

*) Vgl. Note IV, pag. 203—204.

**) Vgl. die auf analoge Weise aus dem ersten Hilfssatze gewonnene „*Folgerung*"

Der Beweis für die gleichmäßige Konvergenz der Reihe der Funktionen $U_0, U_1, \cdots$ gestaltet sich nun folgendermaßen.*)

Um die Differenz $U_{\nu+\nu'} - U_\nu$, welche für das Gebiet $\Phi^{(\nu)}$ eindeutig und regulär erklärt ist, abzuschätzen, bilden wir den Bereich $\Phi^{(\nu+\nu')}$ umkehrbar eindeutig und konform auf die Fläche eines schlichten Kreises $K_{\nu+\nu'}$ ab, so, daß bei dieser Abbildung der Punkt O in den Mittelpunkt des Kreises $K_{\nu+\nu'}$ übergeht, welcher mit dem Nullpunkte zusammenfallend vorgestellt werde, und daß der Differentialquotient der Abbildungsfunktion im Punkte O gerade den Wert 1 erhält. Diese Abbildung wird vermittelt durch die Funktion

$$Z_{\nu+\nu'} = e^{-[(u_{\nu+\nu'} - c_{\nu+\nu'}) + iv_{\nu+\nu'}]}$$

wobei über die in $v_{\nu+\nu'}$ noch verfügbare additive Konstante so verfügt sei, daß das konstante Glied in der Entwicklung dieser Funktion an der Stelle O verschwindet. Der Radius des Kreises $K_{\nu+\nu'}$ ist gleich $e^{c_{\nu+\nu'}}$, wächst also mit wachsendem Index ν ins Unendliche. Bei der betrachteten konformen Abbildung geht die Fläche $\Phi^{(\nu)}$ über in eine schlichte Fläche $\varphi_{\nu,\nu'}$, welche im Innern der Fläche $K_{\nu+\nu'}$ als Teil enthalten ist. Die Funktionen $U_{\nu+\nu'}$ und U_ν, welche als Funktionen des Ortes auf der Fläche $\Phi^{(\nu+\nu')}$ bezw. $\Phi^{(\nu)}$ erklärt sind, können vermöge der betrachteten Abbildungsbeziehung als Funktionen des Ortes auf der Fläche $K_{\nu+\nu'}$ bezw. $\varphi_{\nu,\nu'}$ betrachtet werden. Als solche mögen sie mit $\overline{U}_{\nu+\nu'}$ und $\overline{U}_{\nu,\nu'}$ bezeichnet werden. Die Funktionen $\overline{U}_{\nu+\nu'}$ und $\overline{U}_{\nu,\nu'}$ sind in den erwähnten Gebieten eindeutig, $\overline{U}_{\nu+\nu'}$ verschwindet auf der Begrenzung von $K_{\nu+\nu'}$, $\overline{U}_{\nu,\nu'}$ auf der Begrenzung von $\varphi_{\nu,\nu'}$. An der Nullstelle werden beide Funktionen unendlich und zwar wie $\mathfrak{R}\left(\frac{1}{Z_{\nu+\nu'}}\right)$. Beide Funktionen werden nämlich, als Funktionen des Ortes auf der ursprünglichen Fläche betrachtet, in O unendlich wie

$$\mathfrak{R}\left(\frac{1}{x - x_0}\right).$$

Nun ist in der Nähe des Punktes O die Abbildungsfunktion durch eine Entwicklung der Form gegeben

$$Z_{\nu+\nu'} = (x - x_0) + (x - x_0)^2\, \mathfrak{P}(x - x_0).$$

Woraus folgt, daß $\frac{1}{x - x_0}$ als Funktion von $Z_{\nu+\nu'}$ betrachtet in der Gestalt

$$\frac{1}{x - x_0} = \frac{1}{Z_{\nu+\nu'}} + \mathfrak{P}_1(Z_{\nu+\nu'})$$

entwickelt werden kann; dabei werden mit $\mathfrak{P}$ und $\mathfrak{P}_1$ reguläre Potenzreihen der betreffenden Argumente bezeichnet.

---

*) Vgl. die entsprechende Entwicklung in IV, pag. 205.

Wird mit $d_{\nu,\nu'}$ der kürzeste Abstand der Begrenzungslinie des Bereichs $\varphi_{\nu,\nu'}$ vom Punkte $Z_{\nu+\nu'}=0$ bezeichnet, so ist $d_{\nu,\nu'} < e^{c_{\nu+\nu'}}$, nämlich kleiner als der Radius des Kreises $K_{\nu+\nu'}$. Es ist nun

$$(\overline{U}_{\nu+\nu'}-\overline{U}_{\nu,\nu'}) = (\overline{U}_{\nu+\nu'}-r^{-1}\cos\varphi) - (\overline{U}_{\nu,\nu'}-r^{-1}\cos\varphi)\,^{*)}$$

also

$$|\overline{U}_{\nu+\nu'}-\overline{U}_{\nu,\nu'}| \leqq |\overline{U}_{\nu+\nu'}-r^{-1}\cos\varphi| - |\overline{U}_{\nu,\nu'}-r^{-1}\cos\varphi|.$$

Die einzelnen absoluten Beträge der rechten Seite sind nun weiter abzuschätzen. Da die Funktion $\overline{U}_{\nu+\nu'} - r^{-1}\cos\varphi$ innerhalb $K_{\nu+\nu'}$ und $\overline{U}_{\nu,\nu'} - r^{-1}\cos\varphi$ innerhalb $\varphi_{\nu,\nu'}$ eine reguläre Potentialfunktion ist, so wird das Maximum des absoluten Betrages der Werte jeder einzelnen dieser Funktionen auf der Begrenzung angenommen. Wir erhalten daher

$$(*)\qquad |\overline{U}_{\nu+\nu'}-r^{-1}\cos\varphi| \leqq \frac{1}{e^{c_{\nu+\nu'}}} < \frac{1}{d_{\nu,\nu'}}$$

und

$$|\overline{U}_{\nu,\nu'}-r^{-1}\cos\varphi| \leqq \frac{1}{d_{\nu,\nu'}}\cdot$$

Hieraus ergibt sich für die im Gebiete $\varphi_{\nu,\nu'}$, in welchem beide Funktionen $\overline{U}_{\nu+\nu'}$ und $\overline{U}_{\nu,\nu'}$ regulär erklärt sind, angenommenen Werte die Beziehung

$$(**)\qquad |\overline{U}_{\nu+\nu'}-\overline{U}_{\nu,\nu'}| \leqq \frac{2}{d_{\nu,\nu'}}\cdot$$

Nun bemerke man, daß, wenn mit $\bar{u}_{\nu,\nu'}$ die zu dem Bereiche $\varphi_{\nu,\nu'}$ gehörende Greensche Funktion mit dem Nullpunkt als logarithmischer Unstetigkeitsstelle bezeichnet wird, die Entwicklung dieser Funktion an der Nullstelle die Form hat

$$\bar{u}_{\nu} = \log\frac{1}{r} + c_{\nu} + ((0))$$

wobei mit c_{ν} *dieselbe Konstante* bezeichnet ist, die sich für die Greensche Funktion u_{ν} des Bereichs $\Phi^{(\nu)}$ ergab. Es geht nämlich $\bar{u}_{\nu,\nu'}$ aus u_{ν} einfach vermöge der zwischen $\Phi^{(\nu)}$ und $\varphi_{\nu,\nu'}$ hergestellten konformen Abbildung hervor. Es hat u_{ν} an der Stelle O die Entwicklung

$$u_{\nu} = \log\frac{1}{r} + c_{\nu} + ((0)).$$

Bei Einführung der Größe $Z_{\nu+\nu'}$ geht diese Entwicklung über in eine Entwicklung der Form

$$\bar{u}_{\nu,\nu'} = \Re\left[\log\frac{1}{Z_{\nu+\nu'}(1+Z_{\nu+\nu'}\cdot\mathfrak{P}(Z_{\nu+\nu'}))}\right] + c_{\nu} + ((0))$$
$$= \Re\left(\log\frac{1}{Z_{\nu+\nu'}}\right) + ((0)) + c_{\nu} + ((0)).$$

---

*) $r^{-1}\cos\varphi = \Re\left(\frac{1}{Z_{\nu+\nu'}}\right)\cdot$

Da nun

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = \infty$$

angenommen worden ist, so schließen wir mit Benützung des als Folgerung aus dem zweiten Hilfssatze gefundenen Satzes (pag. 216), daß, sofern nur ν oberhalb einer hinreichend großen ganzen Zahl N liegt, die Größe $d_{\nu,\nu'}$ oberhalb einer beliebig groß vorgegebenen Größe liegt. Die Ungleichheit (*) besagt daher, wenn wir sie sogleich für die Gebiete $\Phi^{(\nu+\nu')}$ und $\Phi^{(\nu)}$ interpretieren, die zu beweisende gleichmäßige Konvergenz der Reihe der Funktionen $U_1, U_2, \cdots$

Unser Konvergenzbeweis läßt sofort erkennen, daß die auf der ganzen Fläche Φ_F bezw. Φ'_F eindeutige, nur in O unstetige Grenzfunktion

$$\lim_{\nu=\infty} U_\nu = U$$

bei gleichmäßiger Annäherung an die Grenze der Fläche Φ_F bezw. Φ'_F *gleichmäßig* in den Wert Null übergeht. Wir folgern nämlich aus der Ungleichheit

$$|U_{\nu+\nu'} - U_\nu| \leqq \frac{2}{d_{\nu,\nu'}}$$

welche der Gleichung (**) entspricht, wegen der gleichmäßigen Konvergenz sofort die Ungleichheit

$$|U - U_\nu| \leqq \frac{2}{d_\nu}\ ^{*)}$$

für das ganze Innere und die Begrenzung von $\Phi^{(\nu)}$. Weil auf der Begrenzung von $\Phi^{(\nu)}$ nun $U_\nu = 0$ ist, ergibt sich

$$(***) \qquad |U| \leqq \frac{2}{d_\nu}$$

auf der Begrenzung von $\Phi^{(\nu)}$, wobei $\lim\limits_{\nu=\infty} d_\nu = \infty$ ist.

Ebenso wie die Reihe der Funktionen $U_1, U_2, \cdots$ ist es möglich eine Reihe von Funktionen $U_1', U_2', \cdots$ zu definieren, indem man an Stelle der Unstetigkeit $\Re\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$ die Unstetigkeit $\Im\left(\frac{1}{x-x_0}\right)$ **) treten läßt. Es ergibt sich dann auf ganz analoge Weise die gleichmäßige Konvergenz der Reihe dieser Potentiale, so daß wir setzen können

$$\lim_{\nu=\infty} U'_\nu = U'.$$

---

*) Mit d_ν bezeichnen wir die untere Grenze der Werte aller $d_{\nu,\nu'}$ $[\nu' = 1, 2, 3, \cdots]$. Diese untere Grenze ist wegen des zweiten Hilfssatzes sicher größer als Null; auch gilt wegen der „Folgerung", die wir aus dem zweiten Hilfssatze schlossen (pag. 216), die Limesgleichung

$$\lim_{\nu=\infty} d_\nu = \infty.$$

**) Das Zeichen $\Im$ soll bedeuten: Imaginärer Teil.

Die Funktion U' ist eine für die ganze Fläche Φ_F bezw. Φ'_F eindeutig erklärte Potentialfunktion, welche nur in dem Punkte O unstetig wird und sich dort in der Form

$$U' = \Im\left(\frac{1}{x - x_0}\right) + \text{regulärer Bestandteil}$$

entwickeln läßt. Die Funktion U' geht ferner ebenso wie U gleichmäßig in den Wert Null über, wenn man sich der Grenze der unendlich-vielblättrigen Fläche Φ_F bezw. Φ'_F nähert. Es gelten überhaupt für die Funktionen U'_ν und U' genau dieselben Ungleichheiten, welche wir oben für U_ν und U aufgestellt haben, mit dem einzigen Unterschiede, daß an Stelle des Potentials $r^{-1} \cos \varphi$ das Potential $-r^{-1} \sin \varphi$ tritt.

Die Funktion

$$U + iU'$$

ist ebenfalls auf der ganzen Fläche Φ_F bezw. Φ_F eindeutig erklärt, sie geht dem absoluten Betrage ihrer Werte nach gleichmäßig in den Wert Null über, wenn man sich gleichmäßig der Grenze von Φ_F bezw. Φ'_F nähert, sie wird im Punkte O unendlich wie $\frac{1}{x - x_0}$. Es fragt sich jedoch, ob $U + iU'$ eine *analytische Funktion des Ortes* ist, oder, anders ausgedrückt *ob U' die konjugierte Potentialfunktion zu U ist.* Dies versteht sich darum nicht von selbst, weil U'_ν ja nicht die konjugierte Funktion zu U_ν ist.*)

Betrachten wir die Funktion $U + iU'$ im Gebiete $\Phi^{(\nu)}$, so haben wir nach Abbildung des Gebiets $\Phi^{(\nu)}$ auf die schlichte Kreisfläche K_ν mit dem Radius $e^{c\nu}$ die Ungleichheiten (vgl. (*) pag. 218)

$$|\overline{U}_\nu - r^{-1} \cos \varphi| \leqq \frac{1}{e^{c\nu}}, \qquad |\overline{U}'_\nu - (-r^{-1} \sin \varphi)| \leqq \frac{1}{e^{c\nu}}$$

so daß sich ergibt

$$|(\overline{U}_\nu + i\overline{U}'_\nu) - (r^{-1} \cos \varphi - ir^{-1} \sin \varphi)| \leqq \frac{2}{e^{c\nu}}.$$

Die Funktion $r^{-1} \cos \varphi - ir^{-1} \sin \varphi$ ist nun eine analytische Funktion des Ortes innerhalb K_ν, nämlich gleich $\frac{1}{Z_\nu}$. Diese Funktion können wir vermöge der zwischen K_ν und $\Phi^{(\nu)}$ bestehenden konformen Abbildung als Funktion des Ortes auf letzterer Fläche auffassen. Dann ergibt sich mit Rücksicht darauf, daß $\frac{1}{e^{c\nu}}$ mit wachsendem Index ν unendlich klein wird, der Satz, daß die Funktion $U + iU'$ in jedem Teilgebiete von Φ_F bezw. Φ'_E

*) Man kann auch in der Weise vorgehen, daß man das zu U konjugierte Potential U' als Grenzfunktion der zu den Potentialen $U_1, U_2, U_3, \cdots$ konjugierten Potentiale auffaßt. (Vgl. Note IV.) Die hier mitgeteilte Methode ist in der Behandlung des reellen und imaginären Teiles symmetrisch.

mit beliebig vorgegebener Annäherung durch eine analytische Funktion des Ortes approximiert werden kann. Nun gilt aber der Satz, daß *eine komplexe Funktion, welche in einem bestimmten Gebiete mit beliebig vorgegebener Annäherung gleichmäßig durch eine analytische Funktion approximiert werden kann, in diesem Gebiete eine analytische Funktion des Ortes ist;* dieser Satz ist nämlich inhaltlich gleichbedeutend mit dem Satze, daß eine gleichmäßig konvergente Reihe von analytischen Funktionen als Grenzfunktion wieder eine analytische Funktion ergibt.

Es ist somit bewiesen, daß die Funktion $U + iU'$ eine analytische Funktion des Ortes auf der Fläche Φ_F bezw. Φ'_F ist.

Was für eine konforme Abbildung vermittelt die Funktion $U+iU'$?

Wir wollen die Funktion $U + iU'$ mit Rücksicht darauf, daß U konjugiert zu U' ist, jetzt mit

$$U + iV$$

bezeichnen, indem wir $U' = V$ setzen.

Wir untersuchen das Bild f_ν, welches die Funktion $U + iV$ von der Fläche $\Phi^{(\nu)}$ entwirft. Die Fläche f_ν ist jedenfalls endlich-vielblättrig und bedeckt den unendlich fernen Punkt jedenfalls nur einfach. Die vollständige Begrenzung von f_ν hat vom Nullpunkte eine weiteste Entfernung $\leqq \frac{4}{d_\nu}$; denn wir haben auf der Begrenzung von $\Phi^{(\nu)}$ wegen (***)

$$|U+iV| \leqq |U| + |V| \leqq \frac{2}{d_\nu} + \frac{2}{d_\nu} = \frac{4}{d_\nu}.$$

Hieraus schließen wir, daß derjenige Teil der $(U+iV)$-Ebene, welcher durch die Ungleichheitsbedingung $|U+iV| > \frac{4}{d_\nu}$ definiert wird, von der Fläche f_ν überall genau *einblättrig* bedeckt wird (vgl. die Betrachtungsweise pag. 213). Gehen wir mit ν zur Grenze über, so haben wir $\lim\limits_{\nu=\infty} d_\nu = \infty$ und erkennen, daß $\lim\limits_{\nu=\infty} f_\nu$ mit der *einblättrig zu denkenden ganzen Ebene (inkl. Unendlichkeitspunkt, exkl. Nullpunkt)* zusammenfällt.

Die Funktion

$$W = \frac{1}{U+iV}$$

vermittelt demnach eine Abbildung der Fläche Φ_F bezw. Φ'_F auf die ganze Ebene exkl. des unendlich fernen Punktes.*)

*) Die Funktion W kann auch als Grenze der pag. 217 definierten Funktionen $Z_1, Z_2, \cdots$ erhalten werden. Die durch W vermittelte konforme Abbildung der Fläche $\lim\limits_{\nu=\infty} \Phi^{(\nu)}$ wird dabei als Grenze von konformen Abbildungen der Flächen $\Phi^{(0)}, \Phi^{(1)}, \Phi^{(2)}, \cdots$ auf schlichte *Kreisflächen mit* ins Unendliche *wachsenden Radien* erhalten, ein Verfahren, welches in beiden Fällen $\lim\limits_{\nu=\infty} c_\nu = \begin{cases} c \\ \infty \end{cases}$ konvergiert. (Vgl. Note IV pag. 206—207.) Auch die Reihe $U_1, U_2, \cdots$ ist in beiden Fällen konvergent.

An dieser Stelle zeigt es sich nun, daß die oben (pag. 214) gemachte Annahme

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = \infty$$

unzutreffend ist.

Um dies zu erkennen, gehen wir aus von der Bemerkung, daß die Fläche Φ_F bezw. Φ'_F aus lauter Exemplaren F_0 gebildet ist. Sind $F_0^{(1)}$ und $F_0^{(2)}$ irgend zwei dieser Exemplare, so ist jedem Punkte $P^{(1)}$ des einen Exemplares ein bestimmter Punkt $P^{(2)}$ des anderen Exemplares, welcher mit ersterem der Lage nach (relativ zu F) koinzidiert, umkehrbar eindeutig zugeordnet. Diese Beziehung zwischen $F_0^{(1)}$ und $F_0^{(2)}$ läßt sich zu einer Beziehung der ganzen Fläche Φ_F bezw. Φ'_F auf sich selbst erweitern, welche auch ihrerseits umkehrbar eindeutig ist.

Bei der konformen Abbildung der Fläche Φ_F bezw. Φ'_F auf die vollständige W-Ebene ergibt sich entsprechend der Zerlegung der Fläche Φ_F bezw. Φ'_F in lauter Exemplare F_0 eine Zerlegung der W-Ebene in lauter Exemplare $\overline{F}_0$, deren je zwei voneinander verschiedene durch eine umkehrbar eindeutige konforme Abbildung auf einander bezogen sind, die ihrerseits für die ganze W-Ebene (exkl. ∞) als eine umkehrbar eindeutige Abbildung erklärt werden kann. Die Funktion, welche diese konforme Abbildung vermittelt, muß daher eine ganze lineare Funktion sein. Demnach ist die Größe W eine *linear-polymorphe uniformisierende* Variable, welche als Funktion auf der Fläche F betrachtet, gerade die von uns gewünschte relative Verzweigung bezw. Nichtverzweigung besitzt. Da das Wertegebiet der Größe W mit der ganzen Ebene zusammenfällt, muß die Funktion W einem der in C pag. 164—168 gefundenen Fälle entsprechen. Das ist aber nicht der Fall, weil der Verzweigungstypus (*Signatur*) der Funktion W (relativ zu F) keinem der erwähnten Ausnahmefälle entspricht.

Zu einer anderen bemerkenswerten Methode, den Widerspruch zu erkennen, gibt uns die in E, II bewiesene Tatsache Anlaß, daß die Anzahl der bei der Bildung von $\Phi^{(\nu)}$ benützten Exemplare F_0 mit einer *Exponentialfunktion* von ν verglichen werden kann. Betrachten wir die W-Ebene, so haben wir in derselben als Bild von $\Phi^{(\nu)}$ ein Gebiet $\overline{\Phi}^{(\nu)}$. Die Exemplare $\overline{F}_0$ sind sämtlich im *euklidischen Sinne kongruent.* Sind $F_0^{(1)}$ und $F_0^{(2)}$ irgend zwei Exemplare F_0 von $\Phi^{(\nu)}$, so kann man mit Rücksicht auf die rekurrente Entstehung von $\Phi^{(\nu)}$ offenbar von jedem dieser beiden Exemplare zu dem Exemplare $\Phi^{(0)} = F_0$ durch Anwendung von höchstens ν Schritten gelangen, deren einzelner darin besteht, daß man von einem Exemplare F_0 innerhalb $\Phi^{(\nu)}$ zu einem seiner Nachbarexemplare F_0 innerhalb $\Phi^{(\nu)}$ übergeht, d. i. einem solchen Exemplare, welches mit ersterem entweder eine Seite oder, wenn dies nicht der Fall ist, wenigstens einen

Eckpunkt gemeinsam hat. Daraus ergibt sich, daß man von $F_0^{(1)}$ zu $F_0^{(2)}$ durch Anwendung von höchstens 2ν Schritten gelangen kann.

Wir nehmen zunächst an, daß sich unter den auf F gegebenen relativen Verzweigungspunkten *a keiner von unendlich hoher Ordnung* befindet. Wir bezeichnen mit Δ die Länge des unter der gestellten Voraussetzung sicher *endlichen* größten Durchmessers des einzelnen Exemplares $\overline{F}_0$. Dann ist nach dem Vorhergehenden der größte Durchmesser von $\overline{\Phi}^{(\nu)}$ kleiner oder gleich $\Delta(2\nu+1)$, folglich der euklidische Flächeninhalt I_ν von $\overline{\Phi}^{(\nu)}$ kleiner als $\pi[\Delta(2\nu+1)]^2$. Wird daher mit I_0 der euklidische Inhalt des einzelnen Exemplares $\overline{F}_0$ bezeichnet, so finden wir für die Anzahl E_ν der in $\overline{\Phi}^{(\nu)}$ enthaltenen Exemplare $\overline{F}_0$ die Abschätzungsformel:

$$E_\nu \leqq \frac{\pi[\Delta(2\nu+1)]^2}{J_0}.$$

Nun haben wir oben (E, II pag. 194—203) in allen von uns betrachteten Fällen eine Abschätzung folgender Form gefunden

$$E_\nu > \alpha \cdot \beta^\nu,$$

wobei α eine positive Zahl, β eine positive Zahl > 1 ist. Das ist ein Widerspruch, da für hinreichend großes ν

$$\alpha \cdot \beta^\nu > \frac{\pi[\Delta(2\nu+1)]^2}{J_0}$$

ist.

Der bei der zweiten Methode bisher ausgeschlossene Fall, in welchem auch relative *Windungspunkte unendlich hoher Ordnung* gegeben sind, ist dieser Methode ebenfalls zugänglich, wenn auch nicht unmittelbar. Man denke sich aus der Fläche F kleine einfach zusammenhängende Umgebungen um die betreffenden Windungspunkte unendlich hoher Ordnung abgegrenzt. Die mit diesen Umgebungen koinzidierenden Teile des Exemplars F_0 denke man sich aus F_0 und entsprechend aus allen Flächen $\Phi^{(\nu)}$ ausgeschnitten. Dabei bleibt die Fläche $\Phi^{(\nu)}$ einfach zusammenhängend. Auf die reduzierten Gebiete ist nun die vorhergehende Betrachtung sofort wieder anwendbar.

Nachdem jetzt feststeht, daß die Annahme

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = \infty$$

für die Fläche Φ_F bezw. Φ_F' einen Widerspruch zur Folge hat, ist damit bewiesen, daß

$$\lim_{\nu=\infty} c_\nu = \textit{endliche Größe}$$

ist. Also kann nach den Entwickelungen pag. 206—214 die Fläche Φ_F bezw. Φ_F' umkehrbar eindeutig und konform auf die Fläche einer schlichten Halbebene abgebildet werden.

F. Schlußbemerkungen.

Der vorliegenden Abhandlung beabsichtige ich eine zweite „*Über die Uniformisierung der algebraischen Kurven. II*“ folgen zu lassen. In dieser Abhandlung werde ich mich mit solchen linear-polymorphen Uniformisierungstranszendenten beschäftigen, bei welchen das vollständige Wertegebiet der uniformisierenden Variablen, allgemein zu reden, weder selbst einfach zusammenhängend ist noch in zwei zueinander symmetrische einfach zusammenhängende Hälften zerfällt, vielmehr ein von unendlich vielen, in nicht abzählbarer Menge vorhandenen, in der Ebene verstreut liegenden diskreten Punkten begrenzter Bereich ist, wie z. B. bei dem bekannten Schottkyschen Typus automorpher Funktionen.

Auch wird sich Gelegenheit bieten, auf die hier behandelten linear polymorphen Uniformisierungstranszendenten mit reeller Substitutionsgruppe vom *zweiten Typus* zurückzukommen. Diese Uniformisierungstranszendenten nehmen in der Tat in gewisser Hinsicht eine Mittelstellung zwischen den in der vorliegenden und den in der erwähnten folgenden Abhandlung untersuchten Transzendenten ein.