

13.

De l'équation différentielle *)

$$x^{n-1}(a_n + b_n x) \cdot y^{(n)} + x^{n-2}(a_{n-1} + b_{n-1} x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + (a_1 + b_1 x) y' + b_0 y = 0.$$

(Par Mr. le Dr. C. I. Malmstèn, Prof. des Mathém. de l'université d'Upsåla.)

Euler, comme on sait, s'est occupé plusieurs fois et de différentes manières de l'intégration de l'équation différentielle du 2^{ième} ordre

$$(1.) \quad x^2(a + bx) \cdot \frac{d^2y}{dx^2} + x(c + dx) \cdot \frac{dy}{dx} + (e + fx) \cdot y = 0:$$

équation qui aussi a traitée par Mr. *Pfaff* dans ses *Disquisitiones Analyticae*. Cette équation n'est qu'un cas particulier de la suivante:

$$(2.) \quad x^{n-1}(a_n + b_n x) \cdot y^{(n)} + x^{n-2}(a_{n-1} + b_{n-1} x) \cdot y^{(n-1)} + \dots \\ \dots + (a_1 + b_1 x) \cdot y' + b_0 \cdot y = 0,$$

dont l'intégration sera le sujet de ce mémoire.

Comme les cas où l'on peut trouver l'intégrale complète d'une équation différentielle du $n^{\text{ième}}$ ordre, sont très-rares, et que généralement ils sont bornés aux deux suivants:

$$A_n \cdot y^{(n)} + A_{n-1} \cdot y^{(n-1)} + A_{n-2} \cdot y^{(n-2)} + \dots + A_1 y' + A_0 y = 0$$

et

$$A_n x^n \cdot y^{(n)} + A_{n-1} \cdot x^{n-1} \cdot y^{(n-1)} + A_{n-2} x^{n-2} \cdot y^{(n-2)} + \dots + A_1 x \cdot y' + A_0 y = 0,$$

où A_0 , A_1 , A_2 , etc. sont constants, la recherche qu'on va lire ne sera pas sans intérêt, d'autant plus qu'elle présentera une application de la féconde „*Différentiation à indices quelconques*” à une équation d'un ordre supérieur, application parfaitement analogue à celle qu'a faite Mr. *Liouville* lui-même à l'intégration de l'équation différentielle

$$(3.) \quad (mx^2 + nx + p) \cdot y'' + (qx + r) \cdot y' + sy = 0.$$

*) Nous nous servirons dans la suite de la notation de *Lagrange*:

$$y' = \frac{dy}{dx}, \quad y'' = \frac{d^2y}{dx^2}, \quad \dots \quad y^{(n)} = \frac{d^n y}{dx^n}.$$

I.

Posons, pour abréger:

$$(4.) \quad \bar{\mu}_p = (\mu)_p = \frac{\mu \cdot \overline{\mu-1} \cdot \overline{\mu-2} \dots (\mu+1-p)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots p},$$

$$(5.) \quad [\mu]_p = \mu \cdot \overline{\mu-1} \cdot \overline{\mu-2} \dots \overline{\mu+1-p},$$

d'où l'on tire

$$[\mu]_p = I(p+1) \cdot \bar{\mu}_p.$$

En différentiant μ fois l'équation (2.) et en déterminant μ de manière que l'équation

$$(6.) \quad [\mu]_n \cdot b_n + [\mu]_{n-1} \cdot b_{n-1} + [\mu]_{n-2} \cdot b_{n-2} + \dots + \mu \cdot b_1 + b_0 = 0$$

soit satisfaite, on aura

$$(7.) \quad x^{n-1}(a_n + b_n x) \cdot y^{(\mu+n)} + x^{n-2}(A_{n-1} + B_{n-1} x) \cdot y^{(\mu+n-1)} + \dots \\ \dots + x^{n-r-1}(A_{n-r} + B_{n-r} x) \cdot y^{(\mu+n-r)} + \dots \\ \dots + x(A_2 + B_2 x) \cdot y^{(\mu+2)} + (A_1 + B_1 x) \cdot y^{(\mu+1)},$$

où généralement

$$(8.) \quad \begin{cases} A_{n-r} = \bar{\mu}_r \cdot [n-1]_r \cdot a_n + \bar{\mu}_{r-1} \cdot [n-2]_{r-1} \cdot a_{n-1} + \dots \\ \quad \dots + \bar{\mu}_1 \cdot [n-r]_1 \cdot a_{n+1-r} + a_{n-r}, \\ B_{n-r} = \bar{\mu}_r \cdot [n]_r \cdot b_n + \bar{\mu}_{r-1} \cdot [n-1]_{r-1} \cdot b_{n-1} + \dots \\ \quad \dots + \bar{\mu}_1 \cdot [n+1-r]_1 \cdot b_{n+1-r} + b_{n-r}. \end{cases}$$

Cela étant, supposons

$$(9.) \quad y^{(\mu+1)} = x^s \cdot z.$$

L'équation (7.) se transformera alors en celle-ci:

$$(10.) \quad x^{n-1}(a_n + b_n x) z^{(n-1)} + x^{n-2}(C_{n-1} + D_{n-1} x) \cdot z^{(n-2)} + \dots \\ \dots + x^{n-p-1}(C_{n-p} + D_{n-p} x) \cdot z^{(n-p-1)} + \dots \\ \dots + x(C_2 + D_2 x) \cdot z' + (C_1 + D_1 x) \cdot z = 0,$$

où, pour abréger, nous avons fait:

$$(11.) \quad \begin{cases} C_{n-p} = (n-1)_p \cdot [s]_p \cdot a_n + (n-2)_{p-1} \cdot [s]_{p-1} \cdot A_{n-1} + \dots \\ \quad \dots + (n-p) \cdot [s]_1 \cdot A_{n-(p-1)} + A_{n-p}, \\ D_{n-p} = (n-1)_p \cdot [s]_p \cdot b_n + (n-2)_{p-1} \cdot [s]_{p-1} \cdot B_{n-1} + \dots \\ \quad \dots + (n-p) \cdot [s]_1 \cdot B_{n-(p-1)} + B_{n-p}. \end{cases}$$

Maintenant, si l'on détermine s de manière que $C_1 = 0$, c'est à dire que

$$(12.) \quad [s]_{n-1} \cdot a_n + [s]_{n-2} \cdot A_{n-1} + [s]_{n-3} \cdot A_{n-2} + \dots + [s]_1 \cdot A_2 + A_1 = 0,$$

$$x^{n-1}(a_n + b_n x) \cdot y^{(n)} + x^{n-2}(a_{n-1} + b_{n-1} x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + (a_1 + b_1 x)y' + b_0 y = 0. \quad 101$$

l'équation (10.), étant divisée par x , devient

$$(13.) \quad a^{n-2}(a_n + b_n x) \cdot z^{(n-1)} + x^{n-3}(C_{n-1} + D_{n-1}x) \cdot z^{(n-2)} + \dots \\ \dots + x(C_3 + D_3x) \cdot z'' + (C_2 + D_2x) \cdot z' + D_1 \cdot z = 0:$$

expression de la même forme que (2.), mais qui est seulement du $(n-1)^{\text{ième}}$ ordre.

L'intégration de l'équation différentielle (2.) du $n^{\text{ième}}$ ordre a donc été réduite à dépendre d'une autre équation de la même forme, mais seulement de l'ordre $n-1$, dont l'intégration peut être réduite à son tour à celle d'une équation de l'ordre $n-2$ etc., jusqu'à ce qu'on parviendra à une équation du $2^{\text{ième}}$ ordre et de la forme de celle de Mr. *Liouville*.

Donc il ne reste qu'à démontrer, que l'intégrale complète de (13.) donne aussi l'intégrale complète de (2.). La valeur générale de z est formée, comme on sait, par la somme des $n-1$ intégrales particulières, chacune multipliée par sa constante arbitraire. Cette valeur nous donne, à l'aide de (9.), une expression de y , contenant:

Ou *A) $n-1$ constantes arbitraires.* Dans ce cas la $n^{\text{ième}}$ valeur particulière de y , qui reste, se trouvera au moyen du théorème suivant que nous avons démontré dans le mémoire *précédent*, savoir:

Soient y_1, y_2, \dots, y_{n-1} , $n-1$ intégrales particulières de l'équation linéaire

$$y^{(n)} + Py^{(n-1)} + Qy^{(n-2)} + \dots + Sy' + Ty = 0,$$

cette équation sera aussi satisfaite par

$$(13.') \quad y_n = y_1 z_1 + y_2 z_2 + \dots + y_{n-2} z_{n-2} + y_{n-1} z_{n-1},$$

où l'on a fait généralement

$$(13'') \quad \left\{ \begin{array}{l} z_r = (-1)^{n-1} \cdot \int \frac{dR}{dy_r^{(n-2)}} \cdot e^{-fPdx} dx \\ \text{et} \\ \frac{1}{R} = \Sigma \pm y_1 \cdot y_2' \cdot y_3' \dots y_{n-1}^{(n-2)}. \end{array} \right.$$

Ou *B) n constantes arbitraires*, précisément au nombre de celles que doit avoir l'intégrale complète.

Ou *C) plus de n constantes arbitraires*; et c'est généralement le cas où la valeur de μ est un nombre entier positif. Alors, en substituant dans l'équation (2.), on obtient quelques unes des constantes qui doivent avoir lieu pour que l'intégrale puisse satisfaire à la dite équation (2.). Par ce procédé le nombre des arbitraires est effectivement réduit à n .

L'équation (6.) qui donne la valeur de μ , est généralement du $n^{\text{ième}}$ degré, et par conséquent elle peut donner n valeurs différentes de μ . Parmi celles-ci on choisira, comme cela s'entend, celle qui conduit le plus aisément au bout. Quelquefois l'emploi de plusieurs valeurs de μ pourra faciliter le calcul; p. ex. dans le cas où de (13.) on peut sans difficulté tirer pour chacune des valeurs

$$\mu_1, \mu_2, \dots, \mu_n$$

une valeur correspondante

$$z(\mu_1), z(\mu_2), \dots, z(\mu_n).$$

Alors on tirera immédiatement de la formule (9.):

$$y = K_1 \cdot \int^{\mu_1+1} x^s z(\mu_1) dx^{\mu_1+1} + K_2 \cdot \int^{\mu_2+1} x^s z(\mu_2) dx^{\mu_2+1} + \dots \\ \dots + K_n \cdot \int^{\mu_n+1} x^s z(\mu_n) dx^{\mu_n+1}.$$

Cependant l'emploi de plusieurs valeurs de μ ne facilitera pas souvent le calcul; car l'équation (2.), étant d'un ordre supérieur, l'équation (13.) l'est également, et il faudra alors les plus souvent en entreprendre l'intégration spéciale pour chaque valeur particulière de μ . Il en est tout autrement si l'équation (2.) est de la forme de celle de Mr. *Liouville*. Dans ce cas l'équation (13.) devient du 1^{er} ordre.

II.

Nous appliqueront maintenant la méthode précédente à quelques exemples.

Exemple 1.

$$(14.) \quad x^3 y''' - 2x^2 y'' + 4xy' - 4y = 0;$$

n étant = 3 et

$$a_3 = a_2 = a_1 = 0,$$

$$b_3 = 1, \quad b_2 = -2, \quad b_1 = 4, \quad b_0 = -4.$$

L'équation (6.) devient

$$(15.) \quad \mu(\mu-1)(\mu-2) - 2\mu(\mu-1) + 4\mu - 4 = (\mu-1)(\mu-2)^2 = 0,$$

d'où

$$\mu_1 = 2, \quad \mu_2 = 1.$$

A) Pour $\mu = 2$ on tirera de (7.):

$$x^2 y^v + 4xy^{iv} + 2y''' = 0$$

et, si

$$y''' = z,$$

$$x^{n-1}(a_n + b_n x) \cdot y^{(n)} + x^{n-2}(a_{n-1} + b_{n-1} x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + (a_1 + b_1 x)y' + b_0 y = 0 \quad 103$$

on a

$$x^2 z'' + 4xz' + 2z = 0,$$

dont l'intégrale est

$$z = y''' = \frac{K_1}{x} + \frac{K_2}{x^2}.$$

Cela posé, on obtient

$$y'' = K_1 \log x - \frac{K_2}{x} + K_3,$$

$$y' = K_1(x \log x - x) - K_2 \log x + K_3 x + K_4,$$

$$y = K_1 \left(\frac{x^2 \log x}{2} - \frac{3x^2}{4} \right) - K_2(x \log x - x) + K_3 \frac{x^2}{2} + K_4 x.$$

Mais comme cette valeur de y contient quatre constantes, il faut en déterminer une au moyen de la substitution dans (14.). Cette substitution donnera $K_2 = 0$; donc l'intégrale de (14.) se réduit, après une modification légère des constantes, à

$$(16.) \quad y = K_1 \cdot x_2 \log x + K_2 x_2 + K_3 x.$$

B) Pour l'autre valeur $\mu = 1$ on tirera de (7.)

$$xy^{iv} + y''' = 0$$

et, si $y''' = z$,

$$xz' + z = 0,$$

d'où, en intégrant, on aura

$$z = y''' = \frac{K_1}{x},$$

$$y'' = K_1 \log x + K_2,$$

$$y' = K_1(x \log x - x) + K_2 x + K_3,$$

et enfin, après une transformation très simple des constantes arbitraires,

$$y = K_1 \cdot x^2 \log x + K_2 x^2 + K_3 x;$$

ce qui est précisément la même valeur qui a été trouvée plus haut.

Exemple 2.

$$(17.) \quad x^3 y''' + x(7x + 1)y'' + (10x + 1)y' + 2y = 0;$$

n étant $= 3$ et

$$a_3 = 0, \quad a_2 = 1, \quad a_1 = 1,$$

$$b_3 = 1, \quad b_2 = 7, \quad b_1 = 10, \quad b_0 = 2.$$

L'équation (6.) donne ici

$$\mu(\mu-1)(\mu-2) + 7\mu(\mu-1) + 10\mu + 2 = (\mu+2)(\mu+1)^2 = 0,$$

d'où

$$\mu_1 = -2, \quad \mu_2 = -1.$$

A) Pour $\mu = -2$, l'équation (7.) devient

$$(18.) \quad x^3 y' + x(x+1)y - \int y dx.$$

Supposons

$$\int y dx = xu,$$

d'où

$$(19.) \quad \begin{aligned} y &= xu' + u, \\ y' &= xu'' + 2u'. \end{aligned}$$

Cela, substitué dans (18.), donnera

$$(20.) \quad x^2 u'' + (3x+1)u' - u = 0.$$

En intégrant, on obtiendra

$$u = K_1 \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} + K_2 \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x} \cdot \int \frac{e^{-\frac{1}{x}} dx}{x},$$

et à l'aide de (19.), avec une modification légère des constantes arbitraires,

$$y = K_1 \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} + K_2 \cdot \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot \int e^{-\frac{1}{x}} dx.$$

Ayant trouvé deux intégrales particulières de l'équation (17.), savoir

$$y_1 = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \quad \text{et} \quad y_2 = \frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \cdot \int e^{-\frac{1}{x}} dx,$$

nous en tirerons cette troisième à l'aide des formules (13') et (13'') (n étant = 3):

$$(21.) \quad y_3 = y_1 z_1 + y_2 z_2, \quad \text{où}$$

$$z_1 = \int \frac{y_2 e^{-\int P dx}}{(y_1 y_2' - y_2 y_1')^2} dx, \quad z_2 = - \int \frac{y_1 e^{-\int P dx}}{(y_1 y_2' - y_2 y_1')^2} dx,$$

c'est à dire par la substitution des valeurs de y_1 et de y_2 , et en observant

que $P = \frac{7x+1}{x^2},$

$$z_1 = \int \left(\frac{1}{x} \int e^{-\frac{1}{x}} dx \right) dx = \log x \int e^{-\frac{1}{x}} dx - \int e^{-\frac{1}{x}} \log x dx,$$

$$z_2 = -\log x.$$

Ces valeurs, substituées dans (21.), donneront

$$y_3 = -\frac{e^{\frac{1}{x}}}{x^2} \int e^{-\frac{1}{x}} \log x dx$$

$$x^{n-1}(a_n + b_n x) \cdot y^{(n)} + x^{n-2}(a_{n-1} + b_{n-1} x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + (a_1 + b_1 x) y' + b_0 y = 0. \quad 105$$

d'où l'on aura l'intégrale complète

$$(22.) \quad y = \frac{e^x}{x^2} \left\{ K_1 + K_2 \int e^{-\frac{1}{x}} dx + K_3 \int e^{-\frac{1}{x}} \log x dx \right\}.$$

B) Pour $\mu = -1$ l'équation (7.) donne

$$x^2 y'' + (4x + 1) y' + 2y = 0,$$

et en intégrant:

$$y = K_1 \frac{e^x}{x^2} + K_2 \cdot \frac{e^x}{x^2} \int e^{-\frac{1}{x}} dx;$$

c'est à dire les mêmes valeurs particulières (20'), que nous avons obtenues en supposant $\mu = -2$. Voilà donc un des cas, où l'emploi de valeurs différentes de μ ne donne pas des résultats différents, et où conséquemment le profit en est nul.

III.

Avant de quitter ce sujet nous nous occuperons des deux équations suivantes:

$$(23.) \quad x^n (a_n + b_n x^r) \cdot y_x^{(n)} + x^{n-1} (a_{n-1} + b_{n-1} x^r) \cdot y_x^{(n-1)} + \dots \\ \dots + x (a_1 + b_1 x^r) y_x' + (a_0 + b_0 x^r) \cdot y = 0,$$

et

$$(24.) \quad (a_n + b_n e^{rx}) \cdot y_x^{(n)} + (a_{n-1} + b_{n-1} e^{rx}) \cdot y_x^{(n-1)} + \dots \\ \dots + (a_1 + b_1 e^{rx}) \cdot y_x' + (a_0 + b_0 e^{rx}) \cdot y = 0,$$

dont l'intégration se réduit facilement à celle de (2.).

Quant à la première (23.), en posant $x^r = v$ et en faisant comme à l'ordinaire

$$y_x^{(p)} = \frac{d^p y}{dx^p} \quad \text{et} \quad y_v^{(k)} = \frac{d^k y}{dv^k},$$

on aura généralement

$$x^p \cdot y_x^{(p)} = \sum_{k=1}^{k=p} \varphi(p, k) \cdot v^k \cdot y_v^{(k)},$$

où

$$(25.) \quad \varphi(p, k) = (-1)^k \cdot \frac{\Gamma(p+1)}{\Gamma(k+1)} \cdot \sum_{i=1}^{i=k} (-1)^i \cdot (k)_i \cdot (ir)_p.$$

En substituant dans (23.) il vient

$$(26.) \quad v^n (M_n + N_n v) \cdot y_v^{(n)} + v^{n-1} (M_{n-1} + N_{n-1} v) \cdot y_v^{(n-1)} + \dots \\ \dots + v^2 (M_2 + N_2 v) \cdot y_v'' + v (M_1 + N_1 v) \cdot y_v' + (M_0 + N_0 v) y = 0,$$

où, pour abréger, nous avons posé les expressions

$$M_0 = a_0 \text{ et } M_k = \sum_{p=k}^{p=n} S. \varphi(p, k) \cdot a_p \text{ pour } k > 0,$$

$$N_0 = b_0 \text{ et } N_k = \sum_{p=k}^{p=n} S. \varphi(p, k) \cdot b_p \text{ pour } k > 0,$$

$\varphi(p, k)$ étant déterminé par (25.). Cela étant, faisons

$$y = v^s \cdot z,$$

et nous aurons

$$y_v^{(p)} = \sum_{i=0}^{i=p} S[s]_{p-i} \cdot (p)_i \cdot v^{s+i-p} \cdot z_v^{(i)},$$

et en substituant dans (26.):

$$(27.) \quad v^n (M'_n + N'_n v) \cdot z_v^{(n)} + v^{n-1} (M'_{n-1} + N'_{n-1} v) \cdot z_v^{(n-1)} + \dots \\ \dots + v^2 (M'_2 + N'_2 v) z_v'' + v (M'_1 + N'_1 v) z_v' + (M'_0 + N'_0 v) \cdot z = 0,$$

où, pour abréger, nous avons fait

$$M'_k = \sum_{p=k}^{p=n} S[s]_{p-k} \cdot (p)_k \cdot M_p, \text{ et } N'_k = \sum_{p=k}^{p=n} S[s]_{p-k} \cdot (p)_k \cdot N_p.$$

En déterminant s de manière que $M'_0 = 0$, c'est à dire que

$$(28.) \quad [s]_n \cdot M_n + [s]_{n-1} \cdot M_{n-1} + [s]_{n-2} \cdot M_{n-2} + \dots + [s]_1 \cdot M_1 + M_0 = 0,$$

nous aurons, en vertu de (27.),

$$(29.) \quad v^{n-1} (M'_n + N'_n v) \cdot z_v^{(n)} + v_{n-2} \cdot (M'_{n-1} + N'_{n-1} v) \cdot z_v^{(n-1)} + \dots \\ \dots + v (M'_2 + N'_2 v) \cdot z'' v + (M'_1 + N'_1 v) \cdot z_v' + N'_0 z,$$

c'est à dire une équation de la forme (2.) traitée plus haut. Dans le cas de

$$b_n = b_{n-1} = b_{n-2} = \dots = b_1 = 0, \\ a_{n-1} = a_{n-2} = a_{n-3} = \dots = a_1 = a_0 = 0,$$

en posant

$$r - n = m \text{ et } \frac{b_0}{a^n} = c,$$

nous tirerons de l'équation (23.) celle-ci:

$$\frac{d^n y}{dx^n} = c x^m y,$$

équation, dont Mr. *Kummer* n'a trouvé l'intégrale que pour le cas où m est un nombre *entier positif* (Voy. *Crelle Journ.* Tome XIX. p. 286).

Quant à l'équation (24.), faisons $e^x = v$, d'où

$$y_x^{(k)} = \sum_{i=1}^{i=k} S. C^{(k-i)}(i) \cdot v^i y_v^{(i)},$$

$$x^{n-1}(a_n + b_n x) \cdot y^{(n)} + x^{n-2}(a_{n-1} + b_{n-1} x) \cdot y^{(n-1)} + \dots + (a_1 + b_1 x) y' + b_0 y = 0. \quad 107$$

où $C_{(n)}^{(p)}$ désigne la p^{me} classe de toutes les combinaisons (avec répétitions) des nombres 1, 2, 3, n , où tous les éléments sont considérés comme facteurs et tous les termes liés entre eux par le signe $+$. En substituant dans (24.), on aura

$$(29.) \quad \begin{cases} v^n(K_n + L_n v^r) \cdot y_v^{(n)} + v^{n-1}(K_{n-1} + L_{n-1} v^r) \cdot y_v^{(n-1)} + \dots \\ \dots + v^k(K_k + L_k v^r) \cdot y_v^{(k)} + \dots \\ \dots + v^2(K_2 + L_2 v^r) \cdot y_v'' + v(K_1 + L_1 v^r) \cdot y_v' + (K_0 + L_0 v^r) \cdot y = 0 \end{cases}$$

où

$$\left. \begin{aligned} K_0 &= a_0, \text{ et généralement } K_k = \sum_{i=k}^{i=n} S C^{(i-k)}(k) \cdot a_i \\ L_0 &= b_0, \text{ et généralement } L_k = \sum_{i=k}^{i=n} S C^{(i-k)}(k) \cdot b_i \end{aligned} \right\} \text{ pour } k > 0.$$

L'équation (30.) a la forme de celle (23.), que nous venons de discuter.

Upsàla le 18 Mars 1849.