

L'EQUAZIONE DI 24° GRADO DA CUI DIPENDE LA RICERCA  
DEI FLESSI NELLA CURVA GENERALE DI 4° ORDINE;

Nota 1<sup>a</sup> di **F. Gerbaldi**, in Palermo.

---

Adunanza del 13 agosto 1893.

---

1. È noto che l'equazione di una curva generale di quart'ordine  $C_4$  si può scrivere sotto la forma

$$PR - Q^2 = 0,$$

dove  $P = 0$ ,  $Q = 0$ ,  $R = 0$  sono le equazioni di tre coniche qualunque.

Affinchè i calcoli, che dobbiamo fare, acquistino simmetria, porremo

$$v_1 = \frac{1}{2}(P + R), \quad v_2 = \frac{1}{2i}(P - R), \quad v_3 = iQ;$$

allora potremo scrivere l'equazione della  $C_4$  nella maniera seguente

$$(1) \quad v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0,$$

e ritenere ancora che  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 0$ ,  $v_3 = 0$  siano le equazioni di

tre coniche qualunque. Queste determinano una rete, che si può considerare come rete polare rispetto ad una curva di 3° ordine  $C_3$ . Sia (in notazione simbolica)  $a_x^3 = 0$  l'equazione di questa  $C_3$  e siano  $y(y_1, y_2, y_3)$ ,  $z(z_1, z_2, z_3)$ ,  $t(t_1, t_2, t_3)$  i poli di quelle tre coniche, per guisa che si ha

$$(2) \quad v_1 = a_y a_x^2, \quad v_2 = a_z a_x^2, \quad v_3 = a_t a_x^2.$$

Osserviamo che i tre punti  $y, z, t$  non sono in linea retta, altrimenti le coniche  $v_1 = 0$ ,  $v_2 = 0$ ,  $v_3 = 0$  formerebbero fascio e la  $C_4$  si spezzerebbe in due coniche; pertanto, trattandosi di una  $C_4$  non degenera, il determinante  $(y z t)$  sarà certamente diverso da zero; denoteremo con  $Y_1, \dots, T_3$  i suoi siddeterminanti.

Poniamo ora

$$(3) \quad u_1 = a_x^2 a_t, \quad u_2 = a_x^2 a_z, \quad u_3 = a_x^2 a_y,$$

donde, per le (2),

$$v_1 = u_y, \quad v_2 = u_z, \quad v_3 = u_t.$$

Inversamente avremo:

$$(4) \quad \begin{aligned} (y z t) u_1 &= Y_1 v_1 + Z_1 v_2 + T_1 v_3, \\ (y z t) u_2 &= Y_2 v_1 + Z_2 v_2 + T_2 v_3, \\ (y z t) u_3 &= Y_3 v_1 + Z_3 v_2 + T_3 v_3. \end{aligned}$$

Poniamo infine

$$(5) \quad \begin{aligned} w_1 &= y_1 v_1 + z_1 v_2 + t_1 v_3, \\ w_2 &= y_2 v_1 + z_2 v_2 + t_2 v_3, \\ w_3 &= y_3 v_1 + z_3 v_2 + t_3 v_3. \end{aligned}$$

2. Ciò premesso, osserviamo che, qualunque siano i valori di  $\theta_1, \theta_2$ , la (1) è identicamente soddisfatta da

$$(6) \quad v_1 = \theta_1^2 - \theta_2^2, \quad v_2 = 2 \theta_1 \theta_2, \quad v_3 = i(\theta_1^2 + \theta_2^2).$$

Le jacobiane di queste tre forme binarie quadratiche in  $\theta_1, \theta_2$ , prese due a due, sono

$$(7) \quad (v_2, v_3) = -i v_1, \quad (v_3, v_1) = -i v_2, \quad (v_1, v_2) = -i v_3.$$

In virtù delle (6), le  $w_1, w_2, w_3$  diventano

$$(8) \quad \begin{aligned} w_1 &= (y_1 + i t_1) \theta_1^2 + 2 \zeta_1 \theta_1 \theta_2 - (y_1 - i t_1) \theta_2^2 \\ w_2 &= (y_2 + i t_2) \theta_1^2 + 2 \zeta_2 \theta_1 \theta_2 - (y_2 - i t_2) \theta_2^2 \\ w_3 &= (y_3 + i t_3) \theta_1^2 + 2 \zeta_3 \theta_1 \theta_2 - (y_3 - i t_3) \theta_2^2, \end{aligned}$$

e queste, essendo  $y, \zeta, t$  tre punti arbitrarii (reali o imaginarii), possono ritenersi come tre forme binarie quadratiche qualunque, che denoteremo con

$$(9) \quad w_1 = p_0^2, \quad w_2 = q_0^2, \quad w_3 = r_0^2.$$

Formiamone l'invariante simultaneo

$$K = \frac{1}{2} (q r) (r p) (p q) = -\frac{1}{2} \begin{vmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{22} \\ q_{11} & q_{12} & q_{22} \\ r_{11} & r_{12} & r_{22} \end{vmatrix}$$

avremo

$$K = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} y_1 + i t_1 & \zeta_1 & y_1 - i t_1 \\ y_2 + i t_2 & \zeta_2 & y_2 - i t_2 \\ y_3 + i t_3 & \zeta_3 & y_3 - i t_3 \end{vmatrix} = -i (y \zeta t);$$

sarà  $K \neq 0$ , perchè abbiamo notato che  $(y \zeta t) \neq 0$ . Possiamo supporre senza ledere le generalità  $K = \sqrt{3}$ ; infatti possiamo moltiplicare le 9 coordinate  $y_1, \dots, t_3$  per uno stesso numero  $\rho$ , con ciò il primo membro della (1) risulta moltiplicato per  $\rho^2$  e la  $C_4$  non

cambia; d'altra parte  $K$  risulta moltiplicato per  $\rho^3$ , e si può disporre di  $\rho$  in modo che il nuovo  $K$  sia uguale a  $\sqrt[3]{3}$ ; nello stesso tempo  $(yzt) = i\sqrt[3]{3}$ .

Formiamo ora le Jacobiane delle forme (9) due a due, avremo in virtù delle (5)

$$(w_2, w_1) = Y_1(v_2, v_3) + Z_1(v_3, v_1) + T_1(v_1, v_2), \text{ ecc.}$$

ed in virtù delle (7) e delle (4)

$$(w_2, w_3) = -(yzt)i u_1 = K u_1, \text{ ecc.}$$

Quindi, per aver preso  $K = \sqrt[3]{3}$ , abbiamo:

$$(10) \quad \sqrt[3]{3} \cdot u_1 = (qr)q_0r_0, \quad \sqrt[3]{3} \cdot u_2 = (rp)r_0p_0, \quad \sqrt[3]{3} \cdot u_3 = (pq)p_0q_0.$$

3. Consideriamo le  $w_1, w_2, w_3$  come le coordinate omogenee d'un punto  $w$ , e le  $u_1, u_2, u_3$  come le coordinate omogenee d'una retta  $u$ , legate ad un parametro  $\frac{\theta_1}{\theta_2} = \theta$  rispettivamente mediante le formole (9) e (10). Al variare del parametro  $\theta$  il punto  $w$  e la retta  $u$  generano una stessa conica  $C_2$ , in questo senso che, per ogni valore del parametro  $\theta$ , le  $w_1, w_2, w_3$  sono le coordinate d'un punto della  $C_2$ , e le  $u_1, u_2, u_3$  sono le coordinate della tangente in quel punto alla  $C_2$ .

Mettiamo ora in corrispondenza i punti della nostra curva di quart'ordine colle tangenti di questa conica. Quando è dato un punto della  $C_4$  per mezzo delle sue coordinate  $x_1, x_2, x_3$ , le (2) determinano valori di  $v_1, v_2, v_3$  che soddisfano la (1), e per questi valori di  $v_1, v_2, v_3$  è individuato dalle (6) un valore di  $\theta_1 : \theta_2$ . Così ad ogni punto della  $C_4$  corrisponde per mezzo del parametro  $\theta$  una tangente della  $C_2$ . Viceversa, quando è data una tangente della  $C_2$  per mezzo del parametro  $\theta$ , colle (10) si calcolano le coordinate  $u_1 : u_2 : u_3$  di essa, indi col mezzo delle (3) si deducono i valori di  $x_1 : x_2 : x_3$ ; or bene le (3) esprimono che la retta  $u$  è la retta polare del punto  $x$  rispetto alla  $C_3$ ; dunque data una tangente della  $C_2$  i punti ad essa corrispondenti nella  $C_4$  sono quattro, e sono i suoi quattro poli rispetto a  $C_3$ .

Quindi il teorema: *se nel piano si hanno una conica ed una cubica, e di ciascuna delle tangenti alla conica si prendono i quattro poli rispetto alla cubica, il luogo di questi è una curva generale di quarto ordine.*

Noi ci proponiamo qui di formare l'equazione di 24° grado, che ha per radici i valori del parametro  $\theta$  corrispondenti ai 24 flessi della curva di quart'ordine.

## § 2.

4. Per determinare i flessi della  $C_4$  occorre calcolare l'Hessiana del primo membro della (1). A questo scopo poniamo

$$\begin{aligned} v_1 &= a_x^2 = a'_x{}^2 = \dots, & v_2 &= b_x^2 = b'_x{}^2 = \dots, & v_3 &= c_x^2 = c'_x{}^2 = \dots, \\ u_\alpha^2 &= (a a' u)^2, & u_\beta^2 &= (b b' u)^2, & u_\gamma^2 &= (c c' u)^2, \\ u_\rho^2 &= (b c u)^2, & u_\sigma^2 &= (c a u)^2, & u_\tau^2 &= (a b u)^2, \\ \Phi_{2,3} &= (\beta \gamma x)^2, & \Phi_{3,1} &= (\gamma \alpha x)^2, & \Phi_{1,2} &= (\alpha \beta x)^2, \\ \Psi_1 &= (\alpha \rho x)^2, & \Psi_2 &= (\beta \sigma x)^2, & \Psi_3 &= (\gamma \tau x)^2, \\ A_{111} &= (a a' a'')^2, & & \text{ecc.} \\ A_{112} &= (a a' b)^2, & & \text{ecc.} \\ A_{123} &= (a b c)^2, & J &= (a b c) a_x b_x c_x; \end{aligned}$$

e notiamo inoltre le relazioni (\*)

$$\begin{aligned} (\alpha \tau x)^2 &= A_{112} v_1 + \frac{1}{3} A_{111} v_2, & (\beta \tau x)^2 &= \frac{1}{3} A_{222} v_1 + A_{122} v_2, \\ (11) \quad (\beta \rho x)^2 &= A_{223} v_2 + \frac{1}{3} A_{222} v_3, & (\gamma \rho x)^2 &= \frac{1}{3} A_{333} v_2 + A_{233} v_3, \\ (\gamma \sigma x)^2 &= A_{331} v_3 + \frac{1}{3} A_{333} v_1, & (\alpha \sigma x)^2 &= \frac{1}{3} A_{111} v_3 + A_{311} v_1, \end{aligned}$$

---

(\*) V. le formole (7) e (9) della mia Memoria «*Sul sistema di due coniche*» (Annali di Matematica, t. XVII, 1889), e la formola (15) della mia Nota «*Sulla forma Jacobiana di tre forme ternarie*» (Giornale di Matematiche, t. XXVII, 1889).

$$(12) \quad \begin{aligned} 4 J^2 &= \Phi_{23} v_1^2 + \Phi_{31} v_2^2 + \Phi_{12} v_3^2 \\ &- 2 \Psi_1 v_2 v_3 - 2 \Psi_2 v_3 v_1 - 2 \Psi_3 v_1 v_2 + 4 A_{123} v_1 v_2 v_3. \end{aligned}$$

5. Consideriamo ora le forme

$$U = U_x^4 = v_1^2 = a_x^2 a_x'^2,$$

$$V = V_x^4 = v_2^2 = b_x^2 b_x'^2,$$

$$W = W_x^4 = v_3^2 = c_x^2 c_x'^2;$$

ci occorre di calcolare in funzione delle forme invariantive fondamentali di  $v_1, v_2, v_3$  la forma

$$(UVW)^2 U_x^2 V_x^2 W_x^2.$$

La seconda polare di  $U_x^4$  è

$$3 U_x^2 U_y^2 = a_x^2 a_y'^2 + 2 a_x a_y a_x' a_y',$$

e, in virtù dell'identità

$$(\alpha x y)^2 = 2 a_x^2 a_y'^2 - 2 a_x a_y a_x' a_y',$$

si può scrivere

$$3 U_x^2 U_y^2 = 3 v_1 a_y^2 - (\alpha x y)^2;$$

analogamente

$$3 V_x^2 V_y^2 = 3 v_2 b_y^2 - (\beta x y)^2,$$

$$3 W_x^2 W_y^2 = 3 v_3 c_y^2 - (\gamma x y)^2.$$

Porremo per comodità

$$(\alpha x y)^2 = h_y^2, \quad (\beta x y)^2 = k_y^2, \quad (\gamma x y)^2 = l_y^2,$$

e osserveremo che si ha

$$(hku)^2 = (\alpha x, ku)^2 = (k_\alpha u_x - k_x u_\alpha)^2 = k_\alpha^2 u_x^2 = \Phi_{12} u_x^2.$$

Ciò posto dalle ultime tre equazioni si deduce

$$\begin{aligned} 3(UVu)^2 U_x^2 V_x^2 &= 3(Vau)^2 V_x^2 v_1 + (hVu)^2 V_x^2 \\ 3(Vau)^2 V_x^2 &= 3v_2 \cdot u_\tau^2 - (kau)^2 \\ 3(Vhu)^2 V_x^2 &= 3v_2 \cdot (bhu)^2 - \Phi_{12} \cdot u_x^2; \end{aligned}$$

e da queste si ha

$$9(UVu)^2 U_x^2 V_x^2 = 9v_1 v_2 \cdot u_\tau^2 - 3v_1 (kau)^2 - 3v_2 \cdot (bhu)^2 + \Phi_{12} \cdot u_x^2;$$

per conseguenza

$$\begin{aligned} 9(UVW)^2 U_x^2 V_x^2 W_x^2 &= 9v_1 v_2 \cdot W_\tau^2 W_x^2 - 3v_1 \cdot (Wak)^2 W_x^2 \\ &\quad - 3v_2 \cdot (Wbk)^2 W_x^2 + \Phi_{12} \cdot v_3^2. \end{aligned}$$

Or bene dalla formola che dà la seconda polare di  $W$  si ha

$$\begin{aligned} 3W_\tau^2 W_x^2 &= 3A_{123} v_3 - \Psi_3, \\ 3(Wak)^2 W_x^2 &= 3\Psi_2 v_3 - \Phi_{23} v_1, \\ 3(Wbk)^2 W_x^2 &= 3\Psi_1 v_3 - \Phi_{31} v_2; \end{aligned}$$

sostituendo nell'equazione precedente si ricava

$$\begin{aligned} 9(UVW)^2 U_x^2 V_x^2 W_x^2 &= \Phi_{23} v_1^2 + \Phi_{31} v_2^2 + \Phi_{12} v_3^2 \\ &\quad - 3\Psi_1 v_2 v_3 - 3\Psi_2 v_3 v_1 - 3\Psi_3 v_1 v_2 + 9A_{123} v_1 v_2 v_3, \end{aligned}$$

o più semplicemente, in virtù della relazione (12),

$$\begin{aligned} (13) \quad 9(UVW)^2 U_x^2 V_x^2 W_x^2 &= 4J^2 - \Psi_1 v_2 v_3 - \Psi_2 v_3 v_1 \\ &\quad - \Psi_3 v_1 v_2 + 5A_{123} v_1 v_2 v_3. \end{aligned}$$

6. In particolare supponiamo in primo luogo che  $v_3$  e  $v_2$  coincidano con  $v_1$ ; allora:

$$U = V, \quad W = U, \quad J = 0, \quad A_{123} = A_{111}$$

$$\Psi_1 = \Psi_2 = \Psi_3 = (\alpha \alpha' x)^2 = \frac{4}{3} A_{111} v_1;$$

e quindi dalla (13) si ha

$$9(U U' U'')^2 U_x^2 U_x'^2 U_x''^2 = A_{111} v_1^3.$$

Similmente

$$9(V V' V'')^2 V_x^2 V_x'^2 V_x''^2 = A_{222} v_2^3,$$

$$9(W W' W'')^2 W_x^2 W_x'^2 W_x''^2 = A_{333} v_3^3.$$

Supponiamo in secondo luogo che soltanto  $v_2$  coincida con  $v_1$ ; allora

$$V = U, \quad J = 0, \quad u_\rho^2 = u_\sigma^2, \quad u_\pi^2 = u_x^2$$

$$\Psi_1 = \Psi_2 = (\alpha \sigma x)^2 = \frac{1}{3} A_{111} v_3 + A_{113} v_1 \text{ per le (11),}$$

$$\Psi_3 = \Phi_{13}, \quad A_{123} = A_{113},$$

e quindi dalla (13) si ha

$$9(U U' W)^2 U_x^2 U_x'^2 W_x^2 = -\Phi_{13} v_1^2 - \frac{2}{3} A_{111} v_1 v_3^2 + 3 A_{113} v_1^2 v_3.$$

Similmente si trova

$$9(U U' V)^2 U_x^2 U_x'^2 V_x^2 = -\Phi_{12} v_1^2 - \frac{2}{3} A_{111} v_1 v_2^2 + 3 A_{112} v_1^2 v_2,$$

$$9(V V' U)^2 V_x^2 V_x'^2 U_x^2 = -\Phi_{12} v_2^2 - \frac{2}{3} A_{222} v_2 v_1^2 + 3 A_{222} v_1 v_2^2, \text{ ecc.}$$



7. Ed ora possiamo esprimere la Hessiana  $H$  di  $v_1^2 + v_2^2 + v_3^2$  per mezzo delle forme invariantive di  $v_1, v_2, v_3$ . Invero si ha

$$\begin{aligned} H = & (U U' U'')^2 U_x^2 U_x''^2 U_x'''^2 + \dots \\ & + 3 (U U' V)^2 U_x^2 U_x''^2 U_x'''^2 + \dots \\ & + 6 (U V W)^2 U_x^2 V_x^2 W_x^2. \end{aligned}$$

In virtù della (13) e de' suoi casi particolari si ottiene

$$\begin{aligned} 9 H = & 24 J^2 - 6 \Psi_1 v_2 v_3 - 6 \Psi_2 v_3 v_1 - 6 \Psi_3 v_1 v_2 \\ & + A_{111} v_1^3 + A_{222} v_2^3 + A_{333} v_3^3 + 30 A_{123} v_1 v_2 v_3 \\ & + 9 A_{112} v_1^2 v_2 + 9 A_{223} v_2^2 v_3 + 9 A_{331} v_3^2 v_1 \\ & + 9 A_{122} v_1 v_2^2 + 9 A_{233} v_2 v_3^2 + 9 A_{311} v_3 v_1^2 \\ & - 2 A_{111} v_1 (v_2^2 + v_3^2) - 2 A_{222} v_2 (v_3^2 + v_1^2) - 2 A_{333} v_3 (v_1^2 + v_2^2) \\ & - 3 \Phi_{23} (v_2^2 + v_3^2) - 3 \Phi_{31} (v_3^2 + v_1^2) - 3 \Phi_{12} (v_1^2 + v_2^2). \end{aligned}$$

Scrivendo per brevità

$$\sum A_{ijk} v_i v_j v_k = A_{111} v_1^3 + \dots + 3 A_{112} v_1^2 v_2 + \dots + 6 A_{123} v_1 v_2 v_3,$$

e tenendo conto della identità (12), abbiamo finalmente

$$\begin{aligned} (14) \quad 3 H = & 12 J^2 + \sum A_{ijk} v_i v_j v_k \\ & - (v_1^2 + v_2^2 + v_3^2) \left[ \Phi_{23} + \Phi_{31} + \Phi_{12} + \frac{2}{3} (A_{111} v_1 + A_{222} v_2 + A_{333} v_3) \right] \end{aligned}$$

### § 3.

8. I punti di flesso della  $C_4$  sono determinati dalle equazioni

$$v_1^2 + v_2^2 + v_3^2 = 0, \quad H = 0;$$

e noi, in virtù dell'identità (14), alla equazione  $H = 0$  sostituiremo la seguente

$$(15) \quad 12 J^2 + \sum A_{ijk} v_i v_j v_k = 0.$$

Ciò posto, ritorniamo alla notazione del § 1, dove considerammo le  $v_1, v_2, v_3$  come coniche polari dei punti  $y, z, t$  rispetto a una cubica  $a_x^3$ . Allora abbiamo

$$J = (abc) a_y b_z c_t a_x b_x c_x = \frac{1}{6} (yzt) (abc)^2 a_x b_x c_x.$$

Denotiamo con  $\Delta$  l'Hessiana della cubica  $a_x^3$ , poniamo cioè

$$\Delta = \Delta_x^3 = (abc)^2 a_x b_x c_x;$$

ricordando che si è preso  $(yzt) = i\sqrt{3}$ , avremo

$$(16) \quad J = \frac{i\sqrt{3}}{6} \Delta_x^3.$$

Inoltre consideriamo il discriminante di una conica qualunque della rete

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 v_3 = 0,$$

per esso abbiamo le espressioni seguenti

$$\begin{aligned} \sum A_{ijk} \lambda_i \lambda_j \lambda_k &= \text{Hess} (\lambda_1 a_x^2 a_y + \lambda_2 a_x^2 a_z + \lambda_3 a_x^2 a_t) \\ &= \text{Hess} a_x^2 a_\mu = (abc)^2 a_\mu b_\mu c_\mu = \Delta_\mu^3, \end{aligned}$$

dove si è posto

$$\mu_1 = y_1 \lambda_1 + z_1 \lambda_2 + t_1 \lambda_3,$$

$$\mu_2 = y_2 \lambda_1 + z_2 \lambda_2 + t_2 \lambda_3,$$

$$\mu_3 = y_3 \lambda_1 + z_3 \lambda_2 + t_3 \lambda_3.$$

Se ora a  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3$  sostituiamo  $v_1, v_2, v_3$ , le  $\mu_1, \mu_2, \mu_3$  in causa delle (5) diventano  $w_1, w_2, w_3$ ; quindi concludiamo

$$(17) \quad \sum A_{ijk} v_i v_j v_k = \Delta_m^3.$$

Adunque, mercè le (16) e (17) l'equazione (15) si può scrivere

$$(18) \quad (\Delta_x^3)^2 = \Delta_m^3.$$

E così siamo giunti a questo teorema generale: Imaginiamo che la curva di quart'ordine sia generata mediante una cubica ed una conica, e che dalle coordinate omogenee d'un punto della  $C_4$  siano dedotte le coordinate omogenee del punto corrispondente della  $C_2$  nella maniera indicata al n° 3; *l'Hessiana della  $C_3$  è una funzione tale delle coordinate d'un punto, che il quadrato del valore che essa piglia in un punto mobile della  $C_4$  coincide col valore che piglia nel punto corrispondente della  $C_2$  allora, ed allora soltanto, quando il punto mobile passa per un flesso della  $C_4$ .*

9. Ed ora volendo formare l'equazione in  $\theta$ , che dà i parametri dei flessi di  $C_4$ , siamo ridotti ad eliminare  $x_1, x_2, x_3$  tra le quattro equazioni

$$(3) \quad u_1 = a_x^2 a_1, \quad u_2 = a_x^2 a_2, \quad u_3 = a_x^2 a_3,$$

$$(18) \quad (\Delta_x^3)^2 = \Delta_m^3,$$

ed a sostituire al posto delle  $w$  tre forme binarie quadratiche in  $\theta_1, \theta_2$ , di cui l'invariante simultaneo sia uguale a  $\sqrt{3}$ , ed al posto delle  $u$  le loro Jacobiane divise per  $\sqrt{3}$ .

A questo scopo, insieme all'Hessiana  $\Delta$  della forma ternaria cubica  $f = a_x^3$ , introduciamo anche (seguendo la notazione di Clebsch e Gordan) i contravarianti  $\Sigma, T, F$  e gli invarianti  $S$  e  $T$ . Denotiamo poi con  $[\Sigma], [T], [F]$  ciò che diventano rispettivamente  $\Sigma, T, F$ , quando alle  $u_1, u_2, u_3$  si sostituiscano le (3), e poniamo  $\frac{f}{\Delta} = \rho$ . Con ciò sussistono le relazioni seguenti (\*)

(\*) Vedi le formole (3), (4), (9) della mia Nota « *Sulle curve piane del terz'ordine* » (questi Rendiconti, t. VII, 1893, pp. 19-25).

$$(19) \quad [\Sigma] = \Delta^2 \left( \frac{1}{4} S \rho^2 - \frac{1}{6} \right)$$

$$(20) \quad [F] = \Delta^2 \rho \left( 2 [T] \rho - \frac{T}{3} \Delta^2 \rho^2 - \frac{2}{27} \Delta^2 \right).$$

Se il punto  $x$  è un flesso della  $C_4$ , per la (18),  $\Delta^2$  coincide col valore che assume  $\Delta$  sostituendo alle  $x_i$  le  $w_i$ , valore che denoteremo con  $[\Delta]$ ; allora le relazioni precedenti diventano

$$\frac{2}{3} (6 [\Sigma] + [\Delta]) = S [\Delta] \rho^2$$

$$9 T [\Delta]^2 \rho^4 - 54 [\Delta] [T] \rho^2 + 27 [F] = -2 [\Delta]^2 \rho,$$

da cui, eliminando  $\rho$ , si ricava

$$(21) \quad \begin{aligned} & 3 \{ 4 T (6 [\Sigma] + [\Delta])^2 - 36 S [T] (6 [\Sigma] + [\Delta]) + 27 S^2 [F] \}^2 \\ & = 8 S^3 [\Delta]^3 (6 [\Sigma] + [\Delta]). \end{aligned}$$

Questa equazione, se con  $[\Delta]$  si intende la forma binaria di 6° grado, che nasce dal sostituire in  $\Delta_w^3$  alle  $w_1, w_2, w_3$  tre forme binarie quadratiche coll'invariante simultaneo  $K = \sqrt{3}$ , e se con  $[\Sigma], [T], [F]$  s'intendono le forme binarie dei gradi 6, 6, 12, che nascono dal sostituire nei contravarianti  $\Sigma, T, F$  alle  $u_1, u_2, u_3$  le Jacobiane, divise per  $\sqrt{3}$ , di quelle forme quadratiche, è di 24° grado, e determina i parametri  $\theta$  corrispondenti ai flessi della  $C_4$ . Risolta questa equazione di 24° grado, per avere le coordinate  $x_1, x_2, x_3$  del flesso corrispondente ad una radice  $\theta$ , bisogna sostituire questa radice nelle (9) e (10) per calcolare le  $w$  e le  $u$ ; indi, note le  $u$ , bisogna risolvere le (3) rispetto alle  $x$  e si avranno (n° 3) quattro soluzioni, tra le quali bisogna scegliere quella per cui è verificata la (18).

10. È notevolissimo il caso, in cui la curva di 3° grado, che si adopera per generare quella di 4°, è equianarmonica. Allora si ha

$S = 0$ , e l'equazione (21) si semplifica, riducendosi ad una equazione di 6° grado in  $\theta$

$$(21') \quad 6[\Sigma] + [\Delta] = 0,$$

di cui le radici sono da contarsi ciascuna quattro volte. Ora i quattro punti corrispondenti a ciascuna di queste radici sono tutti quattro flessi di  $C_4$ ; infatti, dato  $\theta$ , per tutti quattro i punti  $x$  ricavati dalle (3) si ha ora, in virtù della (19),

$$[\Sigma] = -\frac{1}{6}(\Delta_x^3)^2;$$

e però, se  $\theta$  soddisfa alla (21') per tutti quattro quei punti è verificata la (18).

Pertanto, se la  $C_3$  è equianarmonica, i flessi della  $C_4$  si distribuiscono in sei quaterne; ogni quaterna corrisponde ad una radice della equazione (21') di 6° grado in  $\theta$  e, in virtù delle (3), è base d'un fascio di coniche contenuto in una rete (la rete di coniche polari rispetto alla  $C_3$ ); di qui segue che due qualunque delle quaterne considerate di flessi sono otto punti d'una conica. E però possiamo concludere, che, se la  $C_3$  è equianarmonica, i 24 flessi della  $C_4$  stanno 8 a 8 sopra  $\binom{6}{2} = 15$  coniche.

Palermo, luglio 1893.

F. GERBALDI.

---