

mindestens annähernde experimentelle Bestätigung der Helmholtz'schen Theorie des Mitschwingens der tonempfindenden Organe im Ohre aufzufassen sein; es dürfte ferner feststellen, dass ein Ton von absolut genommen zwei Schwingungen in den Grenzen der beobachteten Tonhöhen von einem andauernden Tone jedenfalls dann als verschieden erkennbar ist, wenn er mit demselben ein Intervall von $\frac{24}{25}$ ¹⁾ bildet, und dass schliesslich in genügender Uebereinstimmung mit den Untersuchungen von Hrn. S. Exner und Hrn. Auerbach für ein Ohr von mittlerer Feinheit in Auffassung der Tonhöhen die mögliche Schärfe in der Definition der Höhe eines Tones nicht mehr merklich zunimmt, nachdem 16 Schwingungen desselben vergangen sind.

Physikal. Institut der Univ. Strassburg, Aug. 1879.

II. *Ueber die Torsion* ²⁾; von E. Warburg.

§ 1. Die vorliegende Untersuchung über die Torsion von Metalldrähten wurde ursprünglich unternommen in der Absicht, eine von mir entwickelte Theorie ³⁾ zu prüfen, in welcher ich die Hypothese, ein fester Körper bestehe aus beliebig gestalteten, gleichartigen Molecülen, in ihre Consequenzen verfolgte. Da ich indessen in dieser Theorie vorerst einen guten Leitfaden für die experimentelle Untersuchung nicht gefunden habe, so ziehe ich es vor, die Resultate der Versuche ohne Rücksicht auf die genannte Theorie darzustellen.

In dem von mir zur Untersuchung der Torsionselasticität benutzten Apparat wird das Torsionsmoment eines Drahtes

1) Vergl. Wied. Ann. 7. p. 336. 1879.

2) Ausführlicher mitgetheilt in den Freib. Ber. 7. p. 444—499. 1880.

3) Freib. Ber. 7. p. 225—59. 1878. — Wied. Ann. 4. p. 232—49.

verglichen mit dem Directionsmoment¹⁾, welches auf einen bifilar aufgehängten Körper K_1 wirkt. Der zu prüfende Draht hängt in der Mitte zwischen den Fäden herab und der an dem Draht aufgehängte Körper K_2 kann mit K_1 durch leichte Bügel verbunden werden, welche über Stahlspitzen geschoben sind und bewirken, dass die Drehungen von K_1 und K_2 um die gemeinschaftliche Drehungsaxe stets dieselben sind.

Taf. I Fig. 4 zeigt die einzelnen Theile des Apparates und ihre Anwendung.

Alles wird oben getragen von einem in die Wand eingelassenen starken eisernen Arm A , welcher aus einem geraden (g) und einem ringförmigen Theil (a) besteht. An den geraden Theil ist ein Halter h aus starkem Messingblech durch die Köpfe zweier Metallschrauben e, e befestigt, welche durch einen langen und breiten Schlitz in dem Halter hindurchgehen; in den untern Theil des Halters sind zwei schwach conische Löcher im Abstand von ungefähr 30 mm eingbohrt, in welchen mittelst zweier Metallpföcke f, f die beiden Enden des um die ungefähr 30 mm breite, leicht drehbare Rolle r geschlungenen Fadens festgeklemmt werden. Lockert man die Schrauben e , so kann durch Verschieben des Halters h die Mittellinie der beiden Fadentheile mit der Axe des zwischen ihnen herabhängenden Drahtes zur Coincidenz gebracht werden. An die Rolle ist das Schiffchen n

1) Das Drehungsmoment, welches auf einen kreisförmig cylindrischen Draht vom Radius R und der Länge L wirkt, wenn der untere Querschnitt gegen den obern um den Winkel φ verdreht ist, beträgt $\tau \cdot \frac{R^4}{L} \cdot \varphi = D_2 \cdot \varphi$, wo τ eine dem Material des Drahtes eigenthümliche Constante ist. τ nenne ich den Torsionscoefficienten, $D_2 = \tau \cdot \frac{R^4}{L}$ das Torsionsmoment des Drahtes. Das Drehungsmoment, welches auf einen bifilar aufgehängten Körper wirkt, wenn er um den unendlich kleinen Winkel Θ aus seiner Gleichgewichtslage herausgedreht ist, beträgt:

$$D_1 \Theta = (A + 2 \cdot T) \cdot \Theta,$$

wo A von der Schwere herrührt, und T das Torsionsmoment eines der Fäden ist. D_1 nenne ich das Directionsmoment des bifilar aufgehängten Körpers.

mit dem Gewicht p , dem Ablesespiegel m und den Stahlspitzen s_1, s_1 befestigt.

In dem ringförmigen Theil a des Armes A wird durch drei starke Schrauben der von Breithaupt angefertigte Torsionskreis T gehalten, der in ganze Grade getheilt ist und mittelst Nonius Zehntelgrade angibt. Die kreisförmige Alhidale trägt die Klemme k mit einer der Axe des Kreises entsprechenden Marke, welche den Befestigungspunkt des obern Drahtendes angibt. Das untere Drahtende ist in die um $\alpha\alpha$ drehbare Walze γ eingeklemmt; die Drehungsaxe $\alpha\alpha$ ist verbunden mit dem horizontalen Ring δ , welcher selbst um die zu $\alpha\alpha$ senkrechte Axe $\beta\beta$ drehbar ist. Mit der Drehungsaxe $\beta\beta$ ist sodann der vertikale Ring R verbunden. Die Aufhängung des Ringes R mittelst gekreuzter Axen hat erstens den Zweck, Biegungen des Drahtes zu vermeiden. In der That wird durch diese Aufhängung bewirkt, dass die Wirkungslinie des mit $\beta\beta$ verbundenen Gewichtes stets durch den Durchschnittspunkt von $\alpha\alpha$ und $\beta\beta$ hindurchgeht; endigt nun der Draht in diesem Punkt, so ist das auf ihn wirkende biegende Moment Null. Die Drehbarkeit der Axen $\alpha\alpha$ und $\beta\beta$ wird, wo es erforderlich scheint, durch Anziehen der Schrauben ϵ, ϵ und ι, ι aufgehoben. Durch diese Schrauben kann auch der Durchschnittspunkt von $\alpha\alpha$ und $\beta\beta$ verlegt werden, was bei einer andern Anwendung der besprochenen Aufhängung benutzt wird. Der Ring R geht um den Körper K_1 herum, er trägt zwei Stahlspitzen s_2, s_2 , über welche Glasperlen geschoben sind, und welche durch sehr leichte übergelegte Bügel b, b mit s_1, s_1 verbunden werden können. Durch ein an dem Ring R verschiebbares Laufgewicht q (galvan. Klemme) kann die Einstellung des Ringes R gegen das Schiffchen n verändert und dadurch bewirkt werden, dass, wenn durch passende Drehung des Drahtes der Abstand zweier Spitzen s_1, s_2 der Länge des einen Bügels gleich gemacht ist, dann der Abstand der andern beiden Spitzen s_1, s_2 der Länge des andern Bügels gleich kommt.

An den Ring R kann mittelst der an seinen untern Theil angebrachten Klemme entweder eine Vorrichtung zur Aufnahme spannender Gewichte, oder ein Draht mit verticalem

Blech befestigt werden, welches in ein ringförmiges, mit Oel gefülltes Gefäss taucht; wo es weniger auf Schnelligkeit als auf grosse Präcision ankommt, wird die Oeldämpfung nicht benutzt.

Gegen Luftströmungen wird das Ganze durch ein Pappgehäuse mit passend angebrachten Durchsichten geschützt.

Weitere Vorrichtungen werden an dem gehörigen Ort beschrieben werden.

§ 2. Mittelst dieses Apparates können dreierlei Bestimmungen ausgeführt werden.

Erstens kann das Torsionsmoment D_2 des Drahtes bestimmt werden in Theilen des Directionsmomentes D_1 des bifilar aufgehängten Körpers, d. h. $\frac{D_2}{D_1}$ bestimmt werden durch Ablenkungsversuche. Dazu wird dem obern Drahtquerschnitt eine gemessene Drehung ertheilt und die dadurch hervorgebrachte Drehung der verbundenen Körper K_1 und K_2 beobachtet.

Der Torsionskreis werde um den Winkel $\varphi' - \varphi$ gedreht, und dabei gehe der Winkel Θ , um welchen der bifilar aufgehängte Körper K_1 aus seiner Gleichgewichtslage herausgedreht ist, in Θ' über; dann ist

$$(1) \quad \frac{D_2}{D_1} = \frac{\sin \Theta' - \sin \Theta}{\varphi' - \varphi - (\Theta' - \Theta)} \left\{ 1 + \frac{2T}{D_1} \left(\frac{\Theta' - \Theta}{\sin \Theta' - \sin \Theta} - 1 \right) \right\},$$

wo T das Torsionsmoment eines der beiden Fäden bedeutet, an welchen K_1 aufgehängt ist.

Indem man sich einen angenäherten Werth von $\frac{2T}{D_1}$ leicht verschafft, kann der Unterschied der Klammergrösse von der Einheit, wenn er überall innerhalb des zu Berücksichtigenden liegt, leicht mit hinlänglicher Genauigkeit berechnet werden.

Auch durch kleine temporäre Torsionen entstanden, wie schon Wertheim¹⁾ und G. Wiedemann²⁾ bei ähnlichen Versuchen gefunden haben, zwar nur sehr kleine, aber nicht unmerkliche permanente Torsionen, welche sich indess durch

1) Wertheim, Ann. de chim. et de phys. (3) 50. p. 221. 1857.

2) Wiedemann, Baseler Verhandlungen 2. p. 178. 1860.

Wiederholung der Drehung von φ auf φ' nicht vergrösserten. Für Θ wurde immer der Werth genommen, welchen der betreffende Winkel zeigte, wenn der Torsionskreis nach erfolgter Drehung von φ auf φ' wieder auf φ zurückgedreht worden war. Man bestimmte $\frac{D_2}{D_1}$ jedesmal für die Drehung um $\varphi' - \varphi$ nach der einen und nach der andern Seite und nahm aus beiden Bestimmungen das Mittel.

Zweitens kann die Bestimmung von $\frac{D_2}{D_1}$ durch Schwingungsversuche ausgeführt werden; dazu beobachtet man drei Schwingungsdauern; die Schwingungsdauer des bifilar aufgehängten Körpers K_1 (τ_1), des am Draht aufgehängten Körpers K_2 (τ_2) und des Systems, welches man bildet, indem man K_1 und K_2 durch die Bügel verbindet (τ_3).

Sind i_1, i_2, i_3 die vom Luftwiderstand herrührenden Vergrösserungen des Trägheitsmoments der Körper K_1, K_2 und des Systems bei den auf unendlich kleine Amplituden bezüglichen Schwingungsdauern τ_1, τ_2 und τ_3 , so ist:

$$(2) \quad \frac{D_2}{D_1} = \frac{\tau_3^2 - \tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_3^2} + 4\pi^2 \cdot \frac{i_3 - i_1 - i_2}{D_1 (\tau_3^2 - \tau_2^2)}.$$

Wäre die Vergrösserung des Trägheitsmoments durch den Luftwiderstand von der Schwingungsdauer unabhängig, so würde das zweite Glied auf der rechten Seite verschwinden, und man hätte:

$$(2a) \quad \frac{D_2}{D_1} = \frac{\tau_3^2 - \tau_1^2}{\tau_2^2 - \tau_3^2}.$$

Dass die letzte Formel für meinen Apparat ohne merklichen Fehler angewandt werden kann, lehrt folgendes Experiment. Es wurden an den Ring R zwei Cartonblätter so angeheftet, dass sie beim Schwingen mit ihren breiten Flächen gegen die Luft stiessen; die stossende Fläche des Ringes betrug beiläufig 73 qcm bei einem mittlern Abstand = 6 cm von der Drehungsaxe; die der Cartonblätter 128 qcm bei einem mittlern Abstand = 7 cm von der Axe. Es wurden nun die drei Schwingungsdauern τ_1, τ_2, τ_3 gemessen und $\frac{D_2}{D_1}$ für den Stahldraht (0,343 mm Durchmesser, 0,524 mm Länge), an welchem bei diesen Versuchen K_2 hing, berechnet. Es ergab sich:

Ring mit Cartonblättern		Ring ohne Cartonblätter	
Temp. 18°		Temp. 18°	
$\tau_1 = 1,4009''$		$\tau_1 = 1,4009''$	
$\tau_2 = 13,017$	$\frac{D_2}{D_1} = 0,2088$	$\tau_2 = 12,127$	$\frac{D_2}{D_1} = 0,2088$
$\tau_3 = 5,5577$		$\tau_3 = 5,1986$	

Aus der vollständigen Uebereinstimmung der in beiden Versuchsreihen gefundenen Werthe von $\frac{D_2}{D_1}$ folgt, dass die Gleichung 2a ohne merklichen Fehler benutzt werden darf.

Eine wichtige Fehlerquelle kann die Bestimmung von τ_3 beeinflussen. Es ist in der Theorie vorausgesetzt, dass die Drehungen der mittelst der Bügel verbundenen Körper K_1 und K_2 dieselben seien. Wenn nun die Reibung der Bügel an den Glasperlen, auf welchen sie ruhen, nicht hinreichend ist, so geschieht es, dass wenn beim Springen K_1 schon zur Ruhe gekommen ist, K_2 noch etwas weiter sich dreht, da die Bügel an den Spitzen nicht genau anschliessen. Diese Unregelmässigkeit, welche besonders leicht eintritt, wenn das Trägheitsmoment von K_2 gross ist, würde eine scharfe Bestimmung von τ_3 unmöglich machen. Ich vergrösserte daher die Reibung an den Bügeln dadurch, dass ich zwischen sie und die Perlen etwas Baumwolle brachte; wählte ich dabei die Amplituden hinreichend klein (etwa 1°), so fand ich die genannte Fehlerquelle unmerklich.

Wegen der thermischen Ausdehnung der verschiedenen Theile des Apparates, sowie wegen der Abhängigkeit des Torsionscoefficienten von der Temperatur müssen sowohl die statischen wie die dynamischen Versuche auf gleiche Temperatur reducirt werden; die erforderlichen Reductionsformeln sind in § 11 der ausführlichen Abhandlung zusammengestellt.

Drittens kann der Apparat zu einem beliebig empfindlichen Instrument für kleine Aenderungen des Torsionsmoments gemacht werden; dazu muss dem Draht eine Torsion ertheilt werden, durch welche das System um 90° oder mehr herumgedreht wird. Zur Erläuterung dieses Falls genügt es, aus einer im § 8 der ausführlichen Abhandlung durchgeführten Untersuchung hier zu bemerken, dass für

$\frac{D_2}{D_1} = \varepsilon$ kleiner als 1, wenn durch Θ_1 die kleinste positive Wurzel der Gleichung:

$$\varepsilon + \cos \Theta = 0$$

bezeichnet wird, nur Werthen von Θ , die kleiner als Θ_1 sind, stabile Gleichgewichtslagen entsprechen; ferner, dass für $\Theta = \Theta_1$ die Empfindlichkeit des Apparates in Bezug auf ε , welche mit $\frac{\partial \Theta}{\partial \varepsilon}$ proportional ist, unendlich gross wird. Durch passende Drehung des Torsionskreises kann man nun Θ dem Werth Θ_1 beliebig annähern und so die Empfindlichkeit beliebig gross machen.

Wie ich nachträglich gefunden, hat zuerst J. A. Broun¹⁾ und unabhängig von ihm Babinet²⁾ eine ähnliche Vorrichtung zur Messung der Variation der Schwere angegeben, deren Intensität in meinem Apparat als constant vorausgesetzt wird.

§ 3. Meine Versuche betrafen Drähte aus Stahl, Eisen, Kupfer, deren Durchmesser 0,3 bis 0,5 mm und deren Länge etwa 520 mm betrug; sämmtliche Drähte wurden vor den Versuchen in freier Luft oder im Wasserstoffstrom unter schwacher Spannung ausgeglüht; sie hingen dann, am obern Ende befestigt, auch ohne Belastung ganz gerade herunter.

Ich stellte mir zuerst die Frage, inwieweit diese Substanzen, wenn man ihr Verhalten bei sehr kleinen Deformationen untersucht, die Forderungen der Elasticitätstheorie für vollkommen elastische Körper erfüllen, und zwar waren mir dabei folgende Fragen von Interesse:

Erstens, inwieweit der dynamisch und statisch bestimmte Torsionscoefficient derselbe ist;

Zweitens, inwieweit die Spannung des Drahtes ohne Einfluss auf den Torsionscoefficienten ist.

Nach den Versuchen von Kupffer³⁾ würde der Elasti-

1) Broun, Compt. rend. 56. p. 1135. 1861.

2) Babinet, Compt. rend. 56. p. 244—48. 1863.

3) Kupffer, Compt. rend. Annuel 1852. Suppl. aux Annales de l'observatoire Phys. Central pour l'année 1850.

citätscoëfficient aus statischen Biegungsversuchen sich grösser ergeben, als aus Transversalschwingungen.¹⁾

Wertheim²⁾ findet, mit Ausnahme des Eisens, den Elasticitätscoëfficienten aus Verlängerungsversuchen durchweg kleiner, als aus Transversal- und Longitudinalschwingungen und zwar gewöhnlich um mehrere Procente.

Diese auch von andern Beobachtern bestätigte Thatsache rührt nach F. Kohlrausch³⁾ von der elastischen Nachwirkung her.

Der Einfluss der Spannung auf das Torsionsmoment ist von Kupffer⁴⁾ und neuerdings von F. Braun⁵⁾ untersucht worden; während aber Kupffer das Torsionsmoment eines 4 mm dicken Messingdrahtes durch Zufügen eines Zuges von $6,33 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ kaum mehr verkleinert fand, als die Veränderung der Dimensionen durch den Zug erwarten liess, würde nach F. Braun das Torsionsmoment einer 0,67 mm dicken Stahlsaite durch Zufügen eines Zuges von $8,55 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$ eine 30—50mal so grosse Verkleinerung erfahren haben, als die ist, welche durch Veränderung der Dimensionen eintreten musste.

Man kann demnach nicht sagen, dass das vorliegende Beobachtungsmaterial zur Entscheidung der gestellten Fragen ausreiche.

Ich lasse nun zuerst in Tab. 1 das vollständige Beobachtungsmaterial für einen Stahldraht folgen und stelle sodann in der Tab. 2 die Resultate aller Versuche, soweit sie die beiden genannten Fragen betreffen, zusammen.

1) nach Zöppritz Rechnung, Pogg. Ann. **129**. p. 219 fl. 1866.

2) Wertheim, Pogg. Ann. Ergbd. **2**. p. 1 fl. 1848.

3) Kohlrausch, prakt. Phys. 3. Aufl. p. 82. 1877.

4) Kupffer, Compt. rend. Annuel. 1851.

5) Braun, Pogg. Ann. **159**. p. 352—54. 1876.

Stahldraht.

Länge 524,2 mm. $\tau_1 = 1,397''$. Durchmesser 0,343 mm.Dynamische Bestimmung von $\frac{D_2}{D_1}$.

1. Reihe: Belastung A. 12. März.

Amplitude	Temp.	τ_2	τ_3	τ_2 und τ_3 red. auf 22°	
1° 6' bis 0° 50'	22,1°	—	5,2128''	5,2128''	$\tau_1 = 1,397''$
1° 23' „ 0° 43'	22,2°	—	5,2131''	5,2130''	$\tau_3 = 5,2129''$
4° 6' „ 3° 20'	22,5°	12,1604''	—	12,159''	$\tau_2 = 12,159''$
3° 3' „ 2° 10'	22,5°	12,1600''	—	12,159''	$\frac{D_2}{D_1} = 0,2090$ bei 22°

2. Reihe: Belastung A + B. 14. März.

1° 54' bis 0° 48'	20,9°	—	5,8836''	5,8839''	$\tau_1 = 1,397''$
1° 57' „ 0° 32'	22°	—	5,8835''	5,8835''	$\tau_3 = 5,8838''$
4° 14' „ 3° 7'	22,5°	13,8302''	—	13,828''	$\tau_2 = 13,825''$
3° 8' „ 2° 24'	22,8°	13,8233''	—	13,820''	$\frac{D_2}{D_1} = 0,2087$ bei 22°

3. Reihe: Belastung A. 14. März.

				red. auf 21°	
1° 39' bis 0° 43'	21°	—	5,2118''	—	$\tau_1 = 1,397''$
2° 6' „ 0° 48'	20,9°	—	5,2123''	—	$\tau_3 = 5,2121''$
2° 7' „ 1° 12'	21°	12,1551''	—	12,155''	$\tau_2 = 12,156''$
6° 13' „ 4° 29'	20,8°	12,1559''	—	12,157''	$\frac{D_2}{D_1} = 0,2091$ bei 21° 0,2090 bei 22°

4. Reihe: Belastung A + B. 14. März.

1° 10' bis 0° 28'	21°	—	5,8847''	—	$\tau_1 = 1,397''$
1° 21' „ 0° 38'	21°	—	5,8851''	—	$\tau_3 = 5,8849''$
6° 2' „ 2° 51'	21,2°	13,8228''	—	13,822''	$\tau_2 = 13,822''$
2° 38' „ 2° 4'	21,3°	13,8231''	—	13,822''	$\frac{D_2}{D_1} = 0,2089$ bei 21° 0,2088 bei 22°

5. Reihe: Belastung A. 14. März.

				red. auf 22°	
1° 50' bis 0° 48'	21,5°	—	5,2120''	5,2122''	$\tau_1 = 1,397''$
2° 19' „ 0° 51'	21,7°	—	5,2114''	5,2115''	$\tau_3 = 5,2119''$
3° 8' „ 2° 15'	22,2°	12,1539''	—	12,153''	$\tau_2 = 12,155''$
3° 10' „ 2° 13'	22,4°	12,1587''	—	12,157''	$\frac{D_2}{D_1} = 0,2091$ bei 22°

Statische Bestimmung von $\frac{D_2}{D_1}$.

$$\Theta_0 = - 0^\circ 2' 21''$$

Torsion nach der posit. Seite	Torsion nach der negat. Seite
$\Theta = - 0^\circ 3' 19''$	$\Theta = + 0^\circ 0' 41''$
$\Theta' = + 6^\circ 44' 9''$	$\Theta' = - 6^\circ 10' 12''$
$\varphi = 0$	$\varphi' = 0$
$\varphi' = + 25^\circ 30'$	$\varphi' = - 25^\circ 30'$
$\Delta\alpha = - 0^\circ 5' 6$	$\Delta\alpha = + 0^\circ 17' 6$
$\frac{D_2}{D_1} = 0,2104$	$\frac{D_2}{D_1} = 0,2072$

$$\text{Mittel } \frac{D_2}{D_1} = 0,2088 \text{ bei } 22,8^\circ.$$

$$0,2089 \text{ „ } 22^\circ.$$

Erklärung der Bezeichnung. Θ_0 ist der Winkel, um den der bifilar aufgehängte Körper K_1 nach dem Einlegen der Bügel aus seiner Gleichgewichtslage herausgedreht wurde, die Torsion des Drahtes beträgt dabei immer nur einige Minuten, der Index des Torsionskreises hat dabei die durch $\varphi = 0$ bezeichnete Stellung. Nachdem die Torsion, welche durch das Drehen des Kreises von φ auf φ' hervorgerufen worden, wieder aufgehoben war, hatte der Draht eine kleine permanente Torsion erfahren, infolge deren bei gleicher Stellung des Torsionskreises ($\varphi = 0$) Θ_0 in Θ übergegangen war. Die Verschiebung $\Delta\alpha$ der Torsionsgleichgewichtslage infolge der stattgehabten Deformation berechnet sich nach der Formel $\Delta\alpha = (\Theta - \Theta_0) \cdot \frac{D_1 + D_2}{D_2}$

Tabelle 2.

Material	Spannung A = 390 g			Spannung A + B = 1309 g	
	Temp.	$\frac{D_2}{D_1}$ dyn.	$\frac{D_2}{D_1}$ stat.	$\frac{D_2}{D_1}$ dyn.	$\frac{D_2}{D_1}$ stat.
Stahl	22°	0,20903	0,20885	0,20875	—
Eisen	20°	0,2123	0,2109	0,2124	0,2109
Kupfer	20°	0,4082	0,3999	0,4089	0,3987

Dimensionen der benutzten Drähte:

	Länge	Durchmesser
Stahl	524,2 mm	0,343 mm
Eisen	520 „	0,332 „
Kupfer	520 „	0,464 „

In Betreff der Versuche sei noch bemerkt, dass bei ihnen eine Oeldämpfung nie benutzt ward; dass die Spannung *B* durch den in der Figur mit *B* bezeichneten schwach conischen Bleiklotz zugefügt wurde; endlich dass vor Beginn der definitiven Versuche durch mikroskopische Beobachtung constatirt ward, dass durch Zufügen des Gewichts *B* keine permanente Verlängerung des Drahtes eintrat.

Die Tabelle 2 zeigt nun Folgendes:

1) Die statisch bestimmten Torsionsmomente sind sämmtlich kleiner als die dynamisch bestimmten, die Differenzen steigen von 1 pro Mille für Stahl auf 6 pro Mille für Eisen und 28 pro Mille für Kupfer. Elastische Nachwirkung beeinflusste bei all diesen Versuchen nicht merklich die statische Bestimmung.¹⁾ Auf die Erklärung dieser Thatsachen weist der Umstand hin, dass, wie schon Kupffer²⁾ und Pisati³⁾ gezeigt haben, die Schwingungsdauer eines Metalldrahtes mit wachsender Amplitude wächst; für den von mir benutzten Kupferdraht war die Schwingungsdauer bei einer Amplitude von 7° schon im Verhältniss von 1,0023:1 grösser, als bei sehr kleinen Amplituden. Beim Stahl und Eisen war zwar bis zu Amplituden von 11° — den grössten, welche vorkamen — die Schwingungsdauer nicht merklich von der Amplitude abhängig; allein es wurden bei den statischen Versuchen Torsionen von 25° , bei den dynamischen hingegen sehr kleine angewandt. Die obigen Thatsachen scheinen daher ihre einfachste Erklärung darin zu finden, dass die elastischen Pressungen etwas langsamer wachsen, als die Deformationen, und zwar ist die Abweichung von der Proportionalität für Kupfer grösser als für Eisen, und für Eisen grösser als für Stahl, für das letztere Material bei den an-

1) Es soll damit nicht gesagt sein, dass die Bemerkung von Kohlrausch p. 20 bei anderen Materialien nicht in Kraft treten könne. Noch sei hier bemerkt, dass die Kraft, welche Ursache der Drahtdämpfung ist, bei der beobachteten Kleinheit der letzteren die dynamische Bestimmung des Torsionscoëfficienten höchstens um einige Milliontel des ganzen Werthes beeinflussen kann.

2) Kupffer, Mém. de l'acad. imp. des sciences de St. Pétersbourg. 5. p. 251. 1853; 6. p. 423 ff. 1857.

3) Pisati, Gaz. chim. ital. 7. p. 181. 1876.

gewandten Torsionen in der That kaum merklich. Es scheint damit zusammenzuhängen, dass die Elasticitätsgrenze für Stahl höher als für Eisen und für dieses höher als für Kupfer liegt.

2) Eine Abhängigkeit des Torsionscoefficienten von der Spannung hat sich innerhalb der Versuchsgrenzen nicht ergeben.

Das grösste Gewicht hat das für den Stahl erhaltene Resultat, die angegebenen Werthe sind die Mittel aus bz. 2 und 3 unabhängigen Versuchen, wobei die einzelnen Werthe nicht um $\frac{1}{2000}$ des ganzen Werthes von einander abweichen. Der durch die Spannung B zugefügte Zug betrug $9,95 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$; berechnet man danach mittelst der Elasticitätsconstanten des Stahls, indem man den Torsionscoefficienten als constant betrachtet, $\frac{D_2}{D_1}$ für die Spannung $A + B$ aus dem für die Spannung A erhaltenen Werth, so erhält man wegen der Veränderung der Dimensionen bei $A + B$ 0,20883, welche Zahl von der beobachteten 0,20875 nicht um 0,0004 des ganzen Werthes abweicht.

Die für Eisen angegebenen, aus den dynamischen Bestimmungen folgenden Werthe sind die Mittel aus je 4 unabhängigen Versuchen, welche etwas grössere Abweichungen vom Mittel zeigen, aber nur einmal eine $\frac{2}{5}$ Proc. erreichende. Der zugefügte Zug betrug $11,06 \frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$.

Beim Kupfer zeigte sich die Schwingungsdauer abhängig von der seit einer Spannungsänderung verflossenen Zeit, und zwar mit wachsender Zeit abnehmend, mochte die Spannungsänderung in einer Zu- oder Abnahme der Spannung bestehen. Ueber diesen Punkt setze ich folgende Versuchsreihe hierher.

Die Spannung des Kupferdrahtes wurde am 20. März 12^h 5' von A auf $A + B$ gebracht und die Aenderung der Schwingungsdauer mit der seit der Spannungsänderung verflossenen Zeit t verfolgt, wobei immer als unendlich klein anzusehende Amplituden benutzt wurden.

Zeit t	Temp.	Amplitude	τ_2	τ_2 red. auf 20°
0 ^h 12'	21,4°	1° 7' bis 0° 39'	9,904''	9,899''
0 ^h 48'	21,8°	1° 35' „ 1° 15'	9,900''	9,894''
4 ^h —	—	—	—	9,881''
23 ^h —	—	—	—	9,872''

Am 21. März wurde das spannende Gewicht fortgenommen und wiederum die Aenderung der Schwingungsdauer mit der seit der Spannungsänderung verflossenen Zeit verfolgt. Wegen der durch die Fortnahme des Gewichts hervorgebrachten Aenderung des Trägheitsmoments sind die absoluten Werthe der Schwingungsdauern der folgenden Reihe mit den entsprechenden Werthen der vorhergehenden nicht vergleichbar.

Zeit t	Temp.	Amplitude	τ_2	τ_2 red. auf 20°
0 ^h 5'	21,5°	1° 34' bis 0° 52'	8,703''	8,699''
0 ^h 38'	21,7°	1° 1' „ 0° 50'	8,689''	8,684''
18 ^h —	—	—	—	8,678''
24 ^h —	—	—	—	8,671''

Diese Versuche zeigen, dass die Schwingungsdauer mit der seit einer Spannungsänderung verflossenen Zeit abnimmt.

Was hier für die Schwingungsdauer gezeigt ist, haben Pisati¹⁾ und P. M. Schmidt²⁾ für die Dämpfungsconstante bei verschiedenen Metallen gezeigt, auch fand Pisati³⁾ die Schwingungsdauer eines Silberdrahtes, nachdem das spannende Gewicht mehrere Tage entfernt und dann wieder angehängt worden, von 2,4245'' auf 2,4327'' gestiegen. Die Versuche, aus welchen die Werthe der Tabelle 2 hergeleitet sind, wurden jedesmal erst gemacht, wenn die Schwingungsdauer sich mit der Zeit nicht mehr änderte.

§ 4. Nachdem diese Fragen erledigt waren, wandte ich mich zu der Untersuchung der Eigenschaften von Drähten, welche eine permanente Torsion erhalten haben. An das

1) Pisati, Gaz. chim. ital. 6. p. 69—71. 1876.

2) Schmidt, Wied. Ann. 2. p. 66. 1877.

3) Pisati, Gaz. chim. ital. 6. p. 70. 1876.

zu verwendende Material glaubte ich folgende Forderungen stellen zu müssen:

Erstens, dass die Drähte sich selbst überlassen (ungespannt) vollkommen gerade seien.

Zweitens, dass die permanente Torsion über den ganzen Draht hin nahezu dieselbe sei, d. h. dass die permanenten Verdrehungen irgend zweier Querschnitte sich nahezu verhalten wie ihre Abstände vom befestigten Ende.

Die erste Forderung erfüllen Drähte aus Stahl, Eisen, Kupfer, welche in freier Luft oder im Wasserstoffstrom unter schwacher Spannung gegläht worden sind. Um an solchen Drähten die zweite Forderung zu prüfen, wurden an den zu untersuchenden Draht, wie dies zu einem ähnlichen Zwecke in ähnlicher Weise von Boltzmann¹⁾ und O. E. Meyer²⁾ ausgeführt ist, in gemessenen Abständen vom befestigten Ende zwei kleine, leichte, versilberte Glasspiegel mittelst eines Tropfens Leim befestigt und die permanenten Drehungen beobachtet, welche diese Spiegel erlitten, wenn dem Drahte eine permanente Torsion ertheilt wurde. Da es sich nur um eine rohe Schätzung handelte, indem die zweite Forderung bei keinem der untersuchten Drähte genau erfüllt war, so wurde der Draht in der Nähe der Spiegel mitten durch zwei Pappringe von 1 cm Durchmesser hindurchgeführt, um welche innen eine Millimeterscala gelegt war; eine feste Absehlinie war dabei durch den Draht und einen gegenüberliegenden Scalenstrich gegeben, und es wurden die Verdrehungen der Spiegel in Scalentheilen mit blossem Auge abgelesen. Solche Versuche haben nun ergeben, dass bei weichen Kupferdrähten innerhalb weiter Grenzen der permanenten Torsionen dieselben sich nahezu gleichförmig über den ganzen Draht erstrecken. Bei Eisendrähten hingegen, die in der beschriebenen Weise behandelt worden, war dies auch nicht annähernd der Fall, vielmehr betrafen grössere permanente Torsionen gewöhnlich allein eine kleine Stelle des Drahtes. Dass diese Stelle in der Regel

1) Boltzmann, Wien. Ber. **76**. p. 832. 1877.

2) Meyer, Wied. Ann. **4**. p. 253 ff. 1878.

sehr klein sei, davon habe ich mich überzeugt, indem ich in kleinen Abständen an einen solchen Draht Papierstreifen klebte¹⁾, welche vor der permanenten Torsion alle in einer Ebene lagen. Nach Eintritt der permanenten Torsion zerfielen diese Streifen gewöhnlich in zwei Theile, weder die oberen noch die unteren waren gegen einander verdreht, sondern nur die oberen gegen die unteren. Entsprechend findet man, wenn man einen nach obiger Vorschrift behandelten Eisendraht in eine Kreisform zu biegen sucht, dass permanente Biegungen in Form eines ziemlich scharfen Knickes eintreten, wobei die übrigen Theile des Drahtes ganz gerade bleiben²⁾, während der permanent gebogene Kupferdraht gleichförmig gekrümmt erscheint.

Das Verhalten des Stahls lag zwischen dem Verhalten des Eisens und Kupfers.

Nach diesen Erfahrungen habe ich eingehendere Untersuchungen nur an Kupferdrähten vorgenommen.

Der Vorgang, durch welchen ein Draht eine permanente Torsion erhält, kann nun ein doppelter sein:

Erstens kann der Draht, indem die Moleküle desselben bleibend eine andere Anordnung annehmen, wenn er isotrop war, auch isotrop bleiben. In Bezug auf ein solches Verhalten würde der Draht einer Flüssigkeit zu vergleichen sein.

Oder es kann zweitens die permanente Torsion dadurch eintreten, dass die Materie des Drahtes in der Richtung der Hauptdruckaxen nachgibt, wobei auch die kleine Drehung bestehen bleiben mag, welche die Elemente des Drahtes ausser der Compression und Dilatation in zwei zu einander senkrechten Richtungen bei der Torsion erfahren. In dem zuletzt betrachteten Falle würde der Draht durch die Torsion anisotrop geworden sein, und zwar an jeder Stelle sich verhalten wie ein Krystall des rhombischen Systems, dessen Axen gewisse Richtungen haben.

Ich habe eine Erscheinung an permanent tordirten

1) Durch solche Papierstreifen kann, wie beiläufig bemerkt sei, das Wesen der Torsion in Vorlesungen bequem demonstriert werden.

2) Diese Erscheinung habe ich an Eisendrähten bis zu 0,9 mm Durchmesser beobachtet.

Kupferdrähten aufgefunden, welche mit völliger Regelmässigkeit verläuft, welche durch die Annahme, dass durch die permanente Torsion der Draht in der bezeichneten Weise anisotrop geworden sei, vollständig erklärt werden kann, und welche nicht stattfinden könnte, wenn der Draht isotrop geblieben wäre.

Betrachten wir erstens einen Draht, welchem eine gewisse permanente Torsion ertheilt worden ist. Wenn man einen solchen Draht belastet, so entzieht man ihm dadurch, wie Hr. Wiedemann¹⁾ gezeigt hat, dauernd einen Theil seiner permanenten Torsion; bei einer folgenden Entlastung bleibt nämlich die verkleinerte Torsion bestehen oder verringert sich noch mehr. Wiederholte Belastung und Entlastung wirkt in demselben Sinne mit abnehmender Intensität, und schliesslich gelangt der Draht in einen Zustand, in welchem eine dauernde Aenderung der permanenten Torsion durch Belastung und Entlastung nicht mehr eintritt.

Wenn man den Draht in diesem Zustande belastet, so tordirt er sich und kehrt nach Fortnahme der Belastung in seine alte Lage zurück. Der Sinn dieser temporären Torsion ist derselbe wie der Sinn der permanenten Torsion, welche dem Drahte ertheilt wurde. Es wird ferner diese temporäre Torsion nahe proportional mit der Belastung gefunden, ferner nimmt sie zu mit der permanenten Torsion, welche dem Drahte ertheilt wurde, aber viel langsamer als diese.

Betrachten wir zweitens einen Draht, welcher durch ein auf seinen untern Endquerschnitt wirkendes tordirendes Moment tordirt gehalten wird; durch abwechselndes Belasten und Entlasten nimmt, wie Hr. G. Wiedemann²⁾ gezeigt hat, der permanente Theil dieser Torsion zu bis zu einer gewissen Grösse, bei welcher ein weiterer Belastungswechsel keine Aenderung der permanenten Torsion mehr hervorbringt.

Wenn man in diesem Zustande den Draht belastet, so tordirt er sich und kehrt nach Fortnahme

1) Wiedemann, Wied. Ann. 6. p. 485 ff. 1879.

2) l. c.

der Belastung wieder in seine alte Lage zurück. Der Sinn dieser temporären Torsion ist wieder derselbe, wie der Sinn der permanenten Torsion, welche dem Drahte durch das tordirende Moment ertheilt wurde; die genannte temporäre Torsion ist nahe proportional der zugefügten Belastung und wächst mit der ertheilten permanenten Torsion, viel langsamer als diese.

Das Gesagte bezieht sich auf nach der gegebenen Vorschrift behandelte Kupferdrähte; ein im natürlichen Zustande nicht ganz gerader Eisendraht, bei welchem aber die permanente Torsion sich nahe gleichmässig über den Draht erstreckte, zeigte qualitativ dasselbe Verhalten. An den von ihm untersuchten Messingdrähten hat Hr. G. Wiedemann diese Erscheinungen nicht beobachtet.

Um bei diesen Versuchen die Spannung anzubringen, versah ich die Schraubenspindeln, deren Spitzen den Ring δ hielten, mit Muttern, die nach unten zu kehrende Haken η , η trugen. An diese wurden die Enden eines um eine 8 cm breite Rolle geschlungenen Fadens geknüpft (s. Taf. I Fig. 5); an die Scheere dieser Rolle war ein Haken angebracht, an den eine Wagschale gehängt werden konnte; um dabei Stösse möglichst zu vermeiden, war über den Haken ein Stück Kautschukschlauch geschoben. Das Arretiren der Wagschale geschah mittelst eines langen Hebels, welcher vom Sitze des Beobachters aus gehandhabt wurde. Hr. G. Wiedemann¹⁾, dessen Arbeit über die Torsion ich nach Beendigung meiner Untersuchung erhielt, hat eine bessere Art der Belastung angewandt; indessen fand ich auch mein Verfahren dem von mir verfolgten Zwecke entsprechend.

Wenn der Angriffspunkt der Resultante der von beiden Fäden ausgeübten Züge in den Endpunkt des verticalen Drahtes fällt, so wird beim Belasten keine Verlegung des am Drahte aufgehängten Körpers K_2 eintreten. Der genannte Angriffspunkt konnte nun durch Verstellen der Walze γ und des Ringes δ an den bezeichneten Ort gebracht.

1) I. c. p. 496.

werden. Um beurtheilen zu können, ob eine Verlegung von K_2 , und in welchem Sinne diese eintrat, brachte ich an den Fortsatz des Ringes R ungefähr senkrecht zueinander zwei Spiegel an (in der Figur nicht gezeichnet), deren Drehung ich durch Scala und Fernrohr beobachtete; es wurde so lange an den Schrauben regulirt, bis eine Verlegung nicht mehr eintrat; übrigens wurden durch kleine Verlegungen von K_2 die Resultate nicht merklich beeinflusst. Da es sich bei der vorzunehmenden Untersuchung weniger um äusserste Präcision als um Anstellung vieler Versuche handelte, so wurde die Oeldämpfung angewandt und dazu in der Klemme c des Ringes R ein passend gebogener Draht befestigt, welcher ein in das ringförmige Oelgefäss tauchendes Blech trug.

Schliesslich sei noch bemerkt, dass, solange bei kleinen permanenten Torsionen die Wirkung der Belastung klein war, dem Apparat eine empfindliche Stellung gegeben wurde, d. h. Drehungen Θ angewandt wurden gleich oder grösser als 90° .

Die folgende Tabelle enthält einen Theil der diesen Gegenstand betreffenden Versuche. p bedeutet die permanente Torsion des Drahtes, t die durch den angewandten Zug erzielte temporäre Torsion. Wo das tordirende Moment auf den Draht noch einwirkt, ist ϑ die durch dasselbe hervorgebrachte temporäre Torsion gerechnet von der permanenten Torsionsgleichgewichtslage aus. Da die Grösse von ϑ zu t in keiner wesentlichen Beziehung steht, so ist unter II. 1 und III. 1 ϑ nicht mit Genauigkeit bestimmt worden; unter II. 1 ist ϑ ungefähr bezüglich 45° , 90° , 173° , unter III. 1 jedesmal ungefähr 173° . Der Durchmesser der Drähte ist 0,427 mm; der zugefügte Zug unter I. und II. immer 3,22 kg auf das Quadratmillimeter; die Länge der Drähte betrug 530 mm.

I. Kupferdraht in der Luft gegläht.

1) Der Draht steht unter der Wirkung des tordirenden Moments, welches die permanente Torsion hervorgebracht hat.

ϑ	p	t	$\frac{D_2}{D_1}$
45°	$2,2^\circ$	$0,14^\circ$	1,264
90°	$17,2^\circ$	$0,35^\circ$	0,669
173°	$402,8^\circ$	$1,6^\circ$	0,342

2) Auf den Draht wirkt kein tordirendes Moment:

$$p = 15,8^\circ, \quad 398,1^\circ,$$

$$t = 0,1^\circ, \quad 1,1^\circ.$$

II. Kupferdraht im Wasserstoffstrom gegläht.

1) Das tordirende Moment wirkt ein:

$$p = 13,5^\circ, \quad 68,9^\circ, \quad 266,5^\circ, \quad 749,5^\circ,$$

$$t = 0,19^\circ, \quad 0,58^\circ, \quad 1,14^\circ, \quad 1,68^\circ.$$

2) Auf den Draht wirkt kein tordirendes Moment:

$$p = 10,6^\circ, \quad 67,4^\circ, \quad 259,3^\circ, \quad 716,5^\circ,$$

$$t = 0,09^\circ, \quad 0,53^\circ, \quad 0,82^\circ, \quad 1,23^\circ.$$

III. Kupferdraht im Wasserstoffstrom gegläht.

1) Das tordirende Moment wirkt ein:

Zugefügter Zug in $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$	p	t	berechnet nach der Annahme, dass t prop. dem zugefügten Zug
3,22	643°	$1,48^\circ$	—
1,83	643°	$0,78^\circ$	$0,84^\circ$

2) Auf den Draht wirkt kein tordirendes Moment:

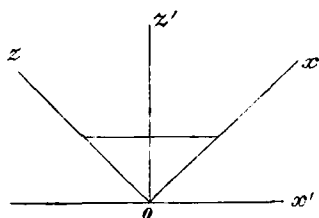
Zugefügter Zug in $\frac{\text{kg}}{\text{mm}^2}$	p	t	berechnet nach der Annahme, dass t prop. dem zugefügten Zug
3,22	636°	$1,17^\circ$	—
1,83	636°	$0,68^\circ$	$0,66^\circ$

§ 5. Bei der Erklärung dieser Erscheinungen wollen wir den Fall ins Auge fassen, in welchem auf den permanent tordirten Draht ein tordirendes Moment nicht wirkt; die Erklärung des andern Falls wird dieselbe sein.

Die permanente Torsion stelle ich mir ganz oder zum Theil so vor, dass die Materie in der Richtung der Hauptdruckaxen nachgegeben hat. In jedem Punkt des Drahtes liegt die eine der Hauptdruckaxen im Querschnitt in der

Richtung des Radius vector, und nach dieser Richtung findet weder Compression noch Dilatation statt; die beiden andern Hauptdruckaxen liegen in einer Ebene senkrecht zum Radius vector unter 45° gegen die Drahtaxe geneigt, und nach der einen findet Compression, nach der andern Dilatation statt. Durch die permanente Torsion ist demnach der Draht in einen anisotropen Körper verwandelt worden und zwar verhält er sich in jedem Punkte wie ein Krystall des rhombischen Systems, aber an den verschiedenen Punkten haben die Axen verschiedene Richtung, und es wird ferner der Grad der Anisotropie von der Drahtaxe nach aussen zu wachsen, da in derselben Richtung die Verzerrungen der Elemente wachsen.

Es entsteht die Aufgabe, die Deformationen zu bestimmen, welche ein longitudinaler Zug in einem solchen Draht hervorbringt. Weil indessen nicht bekannt ist, wie der Grad der Anisotropie sich von der Axe des Drahtes nach der Peripherie hin ändert, so habe ich vorgezogen, eine einfachere Aufgabe zu behandeln, von der man sagen kann, dass sie ein Volumelement des Drahtes betreffe. Versetzen wir uns nämlich in einen Punkt des Drahtes und stellen uns dort ein parallelepipedisches Volumelement vor, dessen erste Kanten a die Richtung des Radius vector haben, dessen zweite Kanten b im Querschnitt senkrecht zum Radius vector sind und dessen dritte Kanten c der Axe des Drahtes parallel laufen.



Die Verzerrung, welche dieses Element bei der Torsion erleidet, besteht darin, dass es einer Schiebung¹⁾ unterworfen wird, indem die beiden Flächen ab Verschiebungen in der Richtung b von verschiedener Grösse erleiden. Durch die permanente

Deformation ist das Volumelement dreiaxig (rhombisch) anisotrop geworden, und zwar liegen die Axen in der Richtung a (oy) und in der Ebene bc unter 45° gegen c und b ge-

1) Thomson u. Tait, deutsche Uebers. 1. p. 118 ff.

neigt (ox und oz). Es entsteht die Aufgabe, die Deformation zu finden, welche ein longitudinaler Zug K in der Richtung c (oz) in diesem Element oder einem ihm ähnlichen Block von endlicher Grösse hervorbringt.

Diese Aufgabe löst man leicht durch die Formeln, welche für einen rhombischen, nicht hemimorphen Krystall die Spannungscomponenten (X_x etc.) mit den Deformationscomponenten ($\alpha, \beta, \gamma, \varphi, \chi, \psi$ in der Bezeichnung von Clebsch) verknüpfen. Diesen Formeln kann man folgende Gestalt geben:

$$(3) \quad \begin{cases} E_1 \cdot \alpha = -X_x + \mu_{12} \cdot Y_y + \mu_{13} \cdot Z_z \\ E_2 \cdot \beta = \mu_{21} \cdot X_x - Y_y + \mu_{23} \cdot Z_z \\ E_3 \cdot \gamma = \mu_{31} \cdot X_x + \mu_{32} \cdot Y_y - Z_z \\ \sigma_1 \cdot \varphi = Y_z \quad \sigma_2 \cdot \chi = Z_x \quad \sigma_3 \cdot \psi = X_y \end{cases}$$

Zwischen den 9 Coëfficienten μ_{ik} und E_i finden folgende Beziehungen statt:

$$(4) \quad \frac{E_2}{E_1} = \frac{\mu_{21}}{\mu_{12}}, \quad \frac{E_3}{E_2} = \frac{\mu_{32}}{\mu_{23}}, \quad \frac{E_1}{E_3} = \frac{\mu_{13}}{\mu_{31}},$$

sodass nur 6 dieser Coëfficienten unabhängig voneinander sind; diese Beziehungen drücken die Bedingungen dafür aus, dass die elastischen Kräfte ein Potential haben. Die in den Formeln (3) auftretenden Coëfficienten haben sämtlich eine einfache experimentelle Bedeutung. Unterwirft man z. B. die Endflächen eines Prismas, dessen Axe parallel der x -Axe ist, einem Zug in der Richtung der x -Axe, so ist $E_1 = \frac{\text{Zug}}{\text{Längsdilatation}}$; μ_{12} und μ_{13} sind bezüglich die Verhältnisse der Quercontraction in der Richtung der y - und z -Axe zur Längsdilatation in der Richtung der x -Axe.

Durch Anwendung der Formeln (3) auf die vorliegende Aufgabe findet man nun leicht, dass durch den longitudinalen Zug K ausser der Dilatation in der Richtung des Zuges und den Contractionen in Richtungen senkrecht zum Zug, eine Schiebung eintritt, indem die Ebenen ab übereinander hingleiten, und diese Schiebung hat den Werth:

$$(4) \quad \chi' = \frac{K}{2} \cdot \frac{E_3 - E_1}{E_1 \cdot E_3},$$

wo E_1 und E_3 zwei Constanten sind, welche man die Elasticitätscoëfficienten in Bezug auf die Richtungen ox und oz

nennen kann. Dass die Schiebung prop. K sei, wird durch die Versuche bestätigt.

Diese lehren weiter, dass wenn die Schiebung, durch welche der Block anisotrop wurde, die Richtung des Pfeils hat, dann die durch den Zug K eintretende dieselbe Richtung hat; hieraus kann man schliessen, dass $E_3 > E_1$ oder dass der Elasticitätscoëfficient für die Richtung, in welcher die permanente Dehnung stattgefunden hat, kleiner ist, als für die Richtung, in welcher die permanente Compression eingetreten ist.

III. *Ueber stehende Schwingungen einer schweren Flüssigkeit; von G. Kirchhoff.*

(Aus dem Monatsber. d. k. Akad. d. Wiss. zu Berlin, 15. Mai 1879.)

Unter den wenigen Flüssigkeitsbewegungen, für welche man die Differentialgleichungen bisher hat integrieren können, nehmen eine wesentliche Stelle die unendlich kleinen Schwingungen ein, die eine schwere, nicht reibende, incompressible Flüssigkeit in einem verticalen, cylindrischen oder prismatischen Gefässe mit horizontalem Boden ausführen kann. Die Schwingungen einer solchen Flüssigkeit in einem Gefässe, dessen Boden nicht horizontal ist, sind meines Wissens bis jetzt nicht behandelt. Es sollen im Folgenden einige hierher gehörige Fälle, und zwar Fälle, in denen der Boden aus einer schiefen Ebene oder aus zwei schiefen Ebenen gebildet ist, erörtert werden. Dabei wird vorausgesetzt, dass die Bewegung nur von einer horizontalen Ordinate abhängt, die Flüssigkeit also in einer Richtung durch zwei parallele, verticale Wände begrenzt ist.

Es sei x die horizontale Ordinate eines Punktes, die diesen Wänden parallel ist, z die verticale Ordinate und φ das Geschwindigkeitspotential in diesem Punkte zur Zeit t ; dann ist:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0 \qquad \text{oder:}$$