

4. *Über die Schwärzung und Photometrie photographischer Platten; von Ludwig Geiger.*

Bei gleicher chemischer Behandlung ist die Schwärzung S einer photographischen Platte eine Funktion der Belichtungszeit t und der Intensität i des bestrahlenden Lichtes; sie kann außerdem von der Wellenlänge des Lichtes abhängen, weshalb ich mich im folgenden auf monochromatisches Licht beschränken will. Bekanntlich ist

$$S = \lg \frac{J}{J'},$$

worin J = Intensität des auf die geschwärzte Platte fallenden Lichtes, J' = Intensität des von der geschwärzten Platte durchgelassenen Lichtes ist.

§ 1. Beobachtete Schwärzungsfläche.

Wenn man benachbarte Stellen einer Platte mit der Intensität i_1 sukzessive t_1, t_2, \dots Sekunden lang belichtet, die resultierenden Schwärzungen photometrisch bestimmt und als Funktion von t aufzeichnet, so erhält man die bekannte Schwärzungskurve vom Habitus der Fig. 1; der Übersichtlichkeit halber ist darin t in logarithmischem Maßstabe gezeichnet. Man sieht, daß die Funktion bis $t = a$ allmählich wächst, zwischen $t = a$ und $t = b$ geradlinig verläuft, bei c ein Maximum passiert und sich weiterhin der t -Achse wieder nähert. Bekanntlich heißt das Gebiet unterhalb a „Unterbelichtung“, zwischen a und b „Normalbelichtung“, oberhalb b „Überbelichtung“ und zwar speziell jenseits c „Solarisation“. Wie gesagt gilt diese Funktion nur für die Intensität i_1 . Macht man analoge Versuche für die Intensitäten i_2, i_3, \dots , so erhält man ein System verwandter Kurven, die die $S, \lg t$ -Ebene bedecken

und die zusammen eine Fläche, die „Schwärzungsfläche“ bestimmen; diese Fläche charakterisiert die Platte unter den obigen Voraussetzungen völlig.

Statt in der $S, \lg t$ -Ebene kann man diese Schwärzungsfläche auch in der $S, \lg i$ -Ebene abbilden, wodurch man ein

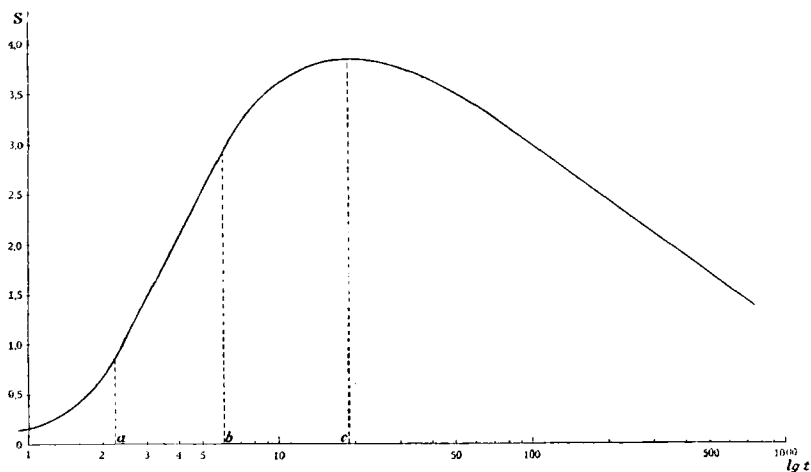


Fig. 1.

System von $S, \lg i$ -Kurve erhält, die man ebensogut hätte experimentell bestimmen können.

Im Folgenden sollen die geometrischen Eigenschaften der Schwärzungsfläche untersucht werden.

§ 2. Gesetze von Bunsen-Roscoe und von Schwarzschild.

Bunsen und Roscoe stellten das Gesetz auf, daß gleiche Energiemengen $i \cdot t$ gleiche Schwärzungen bewirken.

Schwarzschild zeigte experimentell, daß dieses Gesetz nur in roher Annäherung gilt, und ersetzte es durch das Gesetz, daß *gleiche Werte von $i \cdot t^p$ gleiche Schwärzungen bewirken*. Nach Versuchen von Koch¹⁾ und von Parkhurst²⁾ ist der Exponent p im allgemeinen eine Funktion der Schwärzung S , jedoch ist er nach Versuchen verschiedener Autoren³⁾ im Be-

1) P. P. Koch, Ann. d. Phys. (4). 30. p. 843. 1909.

2) Parkhurst, Astrophys. J. 30. p. 33. 1909.

3) z. B. G. Leimbach, Göttinger Diss. 1909 u. Zeitschr. f. wiss. Photogr. 7. p. 257. 1909.

reich der Normalbelichtung konstant. Ist $p = 1$, so geht das Schwarzschild-Gesetz natürlich in dasjenige von Bunsen-Roscoe über.

Geometrische Deutung. Geometrisch bedeutet das Bunsen-Roscoe-Gesetz, daß in der i, t -Ebene die Linien gleicher Schwärzung, die ich „Äquiopaken“ nennen will, Hyperbeln sind, während das Schwarzschild-Gesetz sogenannte Polytropen annimmt. Fig. 2 zeigt eine Bunsen-Roscoe- und eine Schwarzschild-Äquiopake; bei letzterer ist $p = 0,8$ gesetzt.

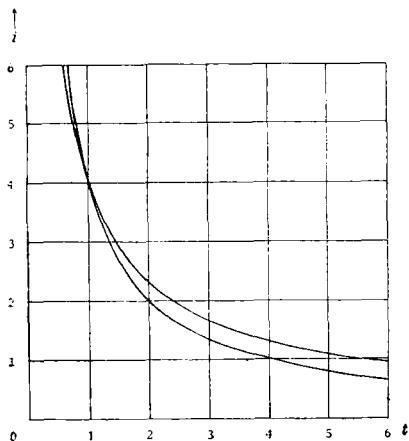


Fig. 2.

Einen tieferen Einblick in diese Gesetze erhält man, wenn man die Polytropen in der $\lg t, \lg i$ -Ebene abbildet: Schreibt man nämlich das Schwarzschild-Gesetz in der Form

$$(1) \quad i \cdot t^p = C,$$

worin C eine Konstante ist, so ist

$$(2) \quad \lg i + p \cdot \lg t = \lg C.$$

Setzt man darin

$$\lg t = x,$$

$$\lg i = y,$$

$$\lg C = k,$$

so lautet (2):

$$(3) \quad y = k - p x.$$

das ist aber die Gleichung einer Geraden. Die Steigung dy/dx dieser Geraden findet man, indem man (3) differenziert:

$$(4) \quad \frac{dx}{dy} = -p.$$

In der $\lg t, \lg i$ -Ebene sind also alle Polytropen Gerade, deren Steigung nur von p abhängt. Fig. 3 zeigt die in Fig. 2 gegebenen Polytropen in dieser Darstellung.

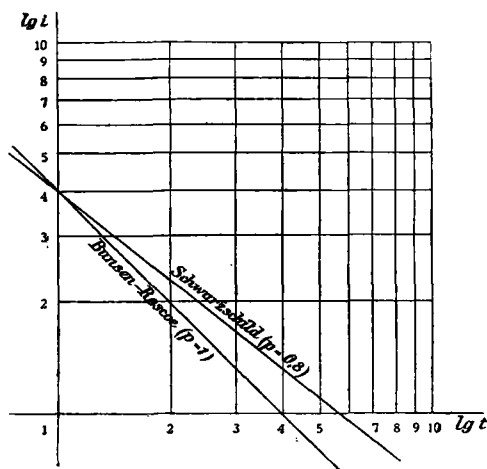


Fig. 3.

Als geometrisches Resultat der Betrachtungen dieses Paragraphen kann man also sagen, daß die Schwärzungsfläche in der $\lg t, \lg i$ -Ebene durch ein System geradliniger Äquiopaken dargestellt wird.

§ 3. Darstellung der Schwärzungsfläche in der $\lg t, \lg i$ -Ebene = Schwärzungsplan.

Die Konstruktion des Äquiopakensystems in der $\lg t, \lg i$ -Ebene gestaltet sich äußerst einfach: Man bestimmt dazu experimentell die Schwärzungskurve für die konstant gehaltene Intensität i_1 und für die konstant gehaltene Intensität i_2 , wobei man die beiden Intensitäten möglichst verschieden wählt. In der $\lg t, \lg i$ -Ebene heißt das, daß man zwei Versuchsreihen längs Geraden ausführt, die beide parallel zur $\lg t$ -Achse aber

in verschiedener Höhe liegen. Die Gerade mit der Intensität i_1 heiße ab , die andere cd . Fig. 4 zeigt z. B. das so gewonnene Diagramm für die Gerade ab , ein analoges Diagramm erhält man für die Gerade cd . Man legt jetzt etwa in den Höhen $S=0,1; 0,2; \dots$ horizontale Gerade, die die Schwärzungskurve in je zwei Punkten schneiden; diese Schnittpunkte fällt man auf ab , wodurch man auf ab die Schwärzungsfunktion für die konstante Intensität i_1 in skalarer Darstellung erhält. Analog erhält man die Schwärzungsskala auf cd . Diese beiden Skalen überträgt

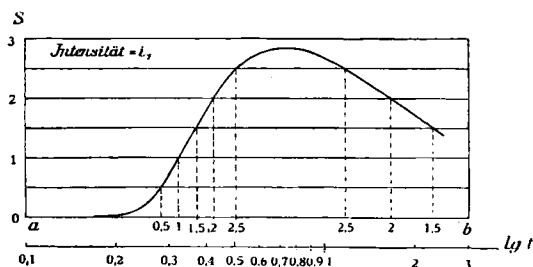


Fig. 4.

man in das $\lg t, \lg i$ -Diagramm und legt durch die gleichlautenden Punkte der beiden Skalen Gerade, womit die Darstellung der Schwärzungsfläche in der $\lg t, \lg i$ -Ebene beendet ist. Diese Darstellung der Schwärzungsfläche heiße „Schwärzungsplan“. Fig. 5 zeigt einen solchen Schwärzungsplan, wobei die Schwärzungskurven über ab und cd ganz beliebig angenommen sind. Es empfiehlt sich sehr, dabei logarithmisches Koordinatenpapier zu verwenden.

Im allgemeinen werden die Äquiopaken nicht parallel verlaufen, denn dann wäre ja der Exponent p des Schwarzschild-Gesetzes von S unabhängig. Auf den Spezialfall, daß p von S unabhängig ist, werde ich in § 4 näher eingehen.

Diese Darstellung der Schwärzungsfläche ist nichts anderes, als eine Höhenschichtenkarte. Man erkennt aus Fig. 5, daß die Schwärzungsfläche ein Bergrücken mit unsymmetrischem Profil ist. Wenn man aber einen derartigen Berg vermessen will, wird man sich stets bemühen, die Profile möglichst senkrecht zur Richtung des Bergrückens zu legen. Man wird also die beiden Versuchsreihen nicht längs ab bzw.

c d ausführen, sondern wird die „Versuchslinien“ um ca. 45° im entgegengesetzten Sinne des Uhrzeigers drehen, d. h. man wird i und t variieren. Die Koordinaten irgend eines Versuchspunktes auf diesen Versuchslinien geben direkt die einander zugeordneten Werte für i und t . Es ist natürlich nicht nötig, daß die beiden Versuchslinien parallel verlaufen.

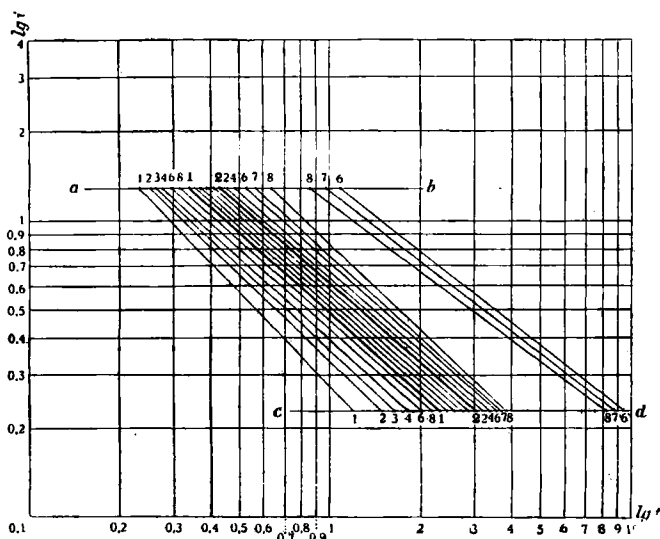


Fig. 5.

Wenn man will, kann man auch mehr als zwei Versuchslinien ermitteln, wodurch die Schwärzungsfläche überbestimmt wird. Man berücksichtigt dann alle Versuche, wenn man die Äquiopaken-Geraden ausgleichend durch die gleichlautenden Punkte der verschiedenen Skalen legt. Dabei ist die Anwendung der Methode kleinster Quadrate nicht nötig, eine Ausgleichung nach Augenmaß genügt völlig.

§ 4. Das Starksche Schwärzungsgesetz.

Sind in einem Gebiete des Schwärzungsplanes die Äquiopaken parallel, so bedeutet dies, daß der Exponent p des Schwarzschild-Gesetzes in diesem Gebiete von der Schwärzung S unabhängig ist. Sind die Äquiopaken parallel und äqui-

distant, so ist die Schwärzungsfläche eine Ebene. In diesem Falle kann man also die Gleichung der Schwärzungsfläche angeben. Die Gleichung einer Ebene im $\lg t$, $\lg i$, S -Raum lautet

$$(5) \quad A \cdot \lg i + B \cdot \lg t + C \cdot S + D = 0,$$

also

$$(6) \quad S = -\frac{D}{C} - \frac{A}{C} \lg i - \frac{B}{C} \lg t.$$

Setzt man

$$-\frac{D}{C} = \lg k; \quad -\frac{A}{C} = m; \quad -\frac{B}{C} = n,$$

so lautet (6)

$$(7) \quad S = \lg k + m \cdot \lg i + n \cdot \lg t$$

oder

$$(8) \quad S = \lg(k \cdot i^m \cdot t^n);$$

das ist aber das Starksche Schwärzungsgesetz¹⁾; daß es das Schwarzschild-Gesetz involviert, ist nach dem Vorstehenden selbstverständlich. Stark beschränkt die Gültigkeit seines Gesetzes ausdrücklich „auf das Gebiet der normalen Schwärzung“. Dies trifft bei vielen Platten zu, aber es ist sehr gut möglich, daß auch in ganz andern Gebieten die Schwärzungsfläche eben ist, so daß die Starksche Formel (8) auch dort gilt, freilich mit völlig anderen Konstanten.

Herr Koch²⁾ nennt das Stark-Gesetz „eine kleine Erweiterung des Schwarzschildschen Gesetzes“; das scheint mir nun allerdings nicht richtig, denn das Stark-Gesetz gibt eine Formel für ein Gebiet der Schwärzungsfläche, während das Schwarzschild-Gesetz die Äquiopakenlinien formuliert. Es ist natürlich ganz selbstverständlich, daß man das Stark-Gesetz auch nur in seinem Gültigkeitsbereich anwenden darf, denn außerhalb ist es grundfalsch.

Bestimmung der Konstanten k , m , n . Diese drei Konstanten können prinzipiell aus je drei Beobachtungsgleichungen

$$(9) \quad \begin{cases} S_1 = \lg(k \cdot i_1^m \cdot t_1^n), \\ S_2 = \lg(k \cdot i_2^m \cdot t_2^n), \\ S_3 = \lg(k \cdot i_3^m \cdot t_3^n) \end{cases}$$

berechnet werden, jedoch hängt die erreichte Genauigkeit stark von der Wahl der drei Versuchspunkte ab. Man wird immer

1) J. Stark, Ann. d. Phys. (4). 35. p. 461. 1911.

2) P. P. Koch, Phys. Zeitschr. 12. p. 12. 1911.

zwei Punkte in der Nähe des einen Randes, und zwar möglichst weit voneinander entfernt, den dritten Punkt in der Nähe des anderen Randes der Ebene wählen. Ob das gebildete Dreieck gleichschenkelig, schief- oder rechtwinklig ist, ist unwesentlich.

Die Auflösung der Gleichungen (9) geschieht am besten in folgender Weise: Man setzt

$$(10) \quad \lg i = a, \quad \lg t = b,$$

dann lautet (9):

$$(11) \quad \begin{cases} a_1 m + b_1 n + \lg k - S_1 = 0, \\ a_2 m + b_2 n + \lg k - S_2 = 0, \\ a_3 m + b_3 n + \lg k - S_3 = 0. \end{cases}$$

Zur Kontrolle berechnet man gleichzeitig die Quersummen

$$(12) \quad s_n = a_n + b_n + 1 + S_n.$$

Man multipliziert die erste Gleichung (11) mit

$$\begin{cases} \frac{a_2}{a_1} \text{ und subtrahiert sie von der zweiten,} \\ \frac{a_3}{a_1} \text{ „ „ „ „ „ dritten} \end{cases}$$

und erhält

$$(13) \quad \begin{cases} b_2' \cdot n + c_2' \cdot \lg k - S_2' = 0, \\ b_3' \cdot n + c_3' \cdot \lg k - S_3' = 0. \end{cases}$$

Dann multipliziert man die erste Gleichung (13) mit b_3'/b_2' , subtrahiert sie von der zweiten und erhält

$$(14) \quad c_3'' \cdot \lg k - S_3'' = 0,$$

was $\lg k$ liefert. Durch Rückwärtssubstituieren in (13) und (11) erhält man dann auch m und n . Es empfiehlt sich, dabei nach folgendem Schema zu rechnen:

Nr.	m	n	$\lg k$		s
(1)	a_1	b_1	1	S_1	s_1
(2)	a_2	b_2	1	S_2	s_2
(3)	*	$\frac{a_2}{a_1} b_1$	$\frac{a_2}{a_1} 1$	$\frac{a_2}{a_1} S_1$	$\frac{a_2}{a_1} s_1$
(4)	a_3	b_3	1	S_3	s_3
(5)	*	$\frac{a_3}{a_1} b_1$	$\frac{a_3}{a_1} 1$	$\frac{a_3}{a_1} S_1$	$\frac{a_3}{a_1} s_1$

Nr.	m	n	$\lg k$		s
(6) = (2) - (3)	*	b_2'	c_2'	S_2'	s_2'
(7) = (4) - (5)	*	b_3'	c_3'	S_3'	s_3'
(8)	*	*	$\frac{b_3'}{b_2'} c_2'$	$\frac{b_3'}{b_2'} S_2'$	$\frac{b_3'}{b_2'} s_2'$
(9) = (7) - (8)	*	*	c_3''	S_3''	s_3''

§ 5. Anwendung des Schwärzungsplanes auf Photometrie.

Wenn für eine Platte der Schwärzungsplan gemäß § 3 ermittelt ist, kann man ohne jede Rechnung photographisch photometrieren. Hat man nämlich mit der unbekannten Intensität i_x während der gemessenen Zeit t belichtet, und dabei die Schwärzung S gefunden, so findet man i_x , indem man in dem Schwärzungsplane an der Stelle t eine Ordinate errichtet, die die Äquiopake S im Punkte P schneidet. Eine durch P gelegte Horizontale schneidet die $\lg i$ -Achse im Punkte i_x . Es sei ausdrücklich bemerkt, daß diese Methode nicht auf das Gebiet der Gültigkeit des Stark-Gesetzes beschränkt ist, sondern ganz allgemein angewendet werden kann.

§ 6. Photometrie vorbelichteter Platten.

Wenn man sehr lichtschwache Erscheinungen, wie schwache Spektrallinien, photometrieren will, ist es üblich, die Platte vor dem eigentlichen Versuch in diffusem Lichte so stark zu belichten, daß, wenn man die Platte dann schon entwickeln würde, eine geringe Schwärzung vorhanden wäre.¹⁾ Die Lichtquelle, mit der vorbelichtet wird, muß die gleiche Farbe wie die darüber photographierte Erscheinung haben. Wie kann man dann die Intensität der darüber photographierten Erscheinung ermitteln? Bei der Vorbelichtung wird die Platte auf irgend eine Weise auf die Schwärzung S_1 gebracht, und bei der Hauptbelichtung während der gemessenen Zeit t mit der gesuchten Intensität i belichtet. Fig. 6 veranschaulicht dieses Prozeß.

1) R. W. Wood, Phys. Zeitschr. 9. p. 355. 1908.

Die Vorbelichtung ist z. B. durch die Gerade $0 a$ gegeben; man geht dann auf der Äquiopaken S_1 bis in die Höhe der Intensität i (Punkt b). Die Hauptbelichtung ist durch die horizontale Strecke bc gegeben, die die Platte auf die Schwärzung S_2 bringt. bc kann berechnet werden: Die Projektionen

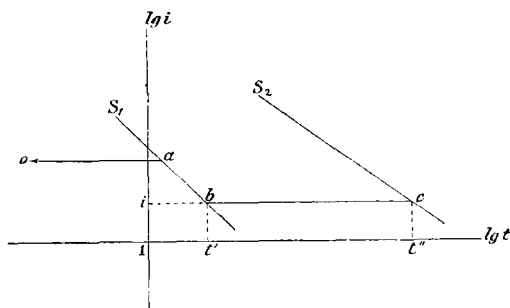


Fig. 6.

der Punkte b bzw. c auf die $\lg t$ -Achse heißen t' bzw. t'' . Dann ist

$$t' + t = t'',$$

also

$$\lg(t' + t) = \lg t''.$$

Ferner ist

$$\begin{aligned} bc &= \lg t'' - \lg t' \\ &= \lg(t' + t) - \lg t', \end{aligned}$$

oder

$$(15) \quad bc = \lg \left(\frac{t + t'}{t'} \right).$$

Weil (15) transzendent ist, kann die Lösung der photometrischen Aufgabe nicht direkt erfolgen. Man wird vielmehr so verfahren: S_1 , S_2 , t sind gemessen, i kann stets abgeschätzt werden $= \bar{i}$. Man legt in der Höhe \bar{i} eine Horizontale und liest das zugehörige t' und bc ab. Diesen Wert für t' setzt man in (15) ein und findet \bar{bc} , was von bc verschieden sein wird. Einige variierte \bar{i} -Werte liefern variierte \bar{bc} -Werte, so daß man $\bar{bc} - bc$ als Funktion von \bar{i} aufzeichnen kann. Der Schnittpunkt dieser Kurve mit der \bar{i} -Achse ist dann die gesuchte Intensität i . Die Ermittlung der Werte \bar{bc} erfolgt ohne Rechnung, wenn man eine logarithmische Skala und eine Zirkel benutzt.

Wenn man ein lichtschwaches Bild nur örtlich fixieren, aber nicht photometrieren will, so kann man natürlich die Hilfsbelichtung ebensogut nach der Aufnahme vornehmen.

Diese Methode der Photometrie vorbelichteter Platten ist an gar kein bestimmtes Gebiet der Schwärzungsfläche gebunden, sie ist also auch dann anwendbar, wenn die Schwärzung S_2 noch im Gebiete der Unterbelichtung liegt. Für die Spektroskopie scheint mir dies von großem Nutzen zu sein, während bei der Messung von Sternhelligkeiten die Aufgabe dadurch viel komplizierter ist, daß das Sternlicht nicht monochromatisch ist.

Zusammenfassung.

Bei gegebener Behandlung und für monochromatisches Licht ist eine photographische Platte in bezug auf die Schwärzung durch die „Schwärzungsfläche“ völlig charakterisiert.

Die Darstellung dieser Schwärzungsfläche in der $\lg t$, $\lg i$ -Ebene, der „Schwärzungsplan“, geschieht durch eine Schar verschieden steiler Gerader.

Der Schwärzungsplan wird am genauesten und raschesten gewonnen durch zwei Versuchsreihen, bei denen die Intensität und die Belichtungszeit von Fall zu Fall variiert werden.

Das Starksche Schwärzungsgesetz für das Gebiet der Normalbelichtung ergibt sich aus der Analyse der Schwärzungsfläche; die beste Bestimmungsart der drei Starkschen Konstanten wird untersucht.

Der Schwärzungsplan gestattet, in jedem Schwärzungsgebiet photographisch zu photometrieren.

Auch vorbelichtete Platten können photometriert werden, selbst wenn die Gesamtschwärzung noch im Gebiete der Unterbelichtung liegt.

Göttingen, 25. Oktober 1911.

(Eingegangen 7. November 1911.)
