# SUR LA THÉORIE DES SURFACES ALGÉBRIQUES;

par M. **Émile Picard**, à Paris.

(Dalla *Revue générale des sciences pures et appliquées*, 5e année, n° 24: 30 décembre 1894).

---

Je devrais faire une revue sommaire des travaux d'Analyse récemment parus; mais, comme je l'ai déjà expliqué, une telle tâche me paraît impossible à remplir ici. J'aime mieux, encore cette année, prendre un sujet mieux limité et reprendre cette causerie mathématique à laquelle le directeur de la *Revue* a eu déjà deux fois l'amabilité de m'inviter (*). J'ai choisi les surfaces algébriques, et je commence par une esquisse rapide du développement de la théorie des courbes algébriques, afin de pouvoir comparer l'état actuel des deux théories.

## I.

Prenant l'équation $f(x, y) = 0$, où $f$ est un polynôme de degré $m$ en $x$ et $y$, on a d'abord classé les courbes d'après leur degré. Après la ligne droite, les courbes du second degré ont été étudiées les premières et les courbes du troisième degré n'ont pas cessé, depuis Newton, de faire l'objet des recherches des géomètres. Vinrent ensuite de nombreuses monographies de courbes particulières, mais on doit surtout citer, parmi les ouvrages d'un caractère plus général, la célèbre introduction à l'analyse des courbes algébriques de Cramer; c'est à Cramer notamment que l'on doit ce théorème si remarquable qu'une courbe irréductible de degré $m$ ne peut avoir plus de $\frac{(m-1)(m-2)}{2}$ points doubles, nombre qui peut être effectivement atteint.

---

(*) Voir les numéros de la *Revue* du 30 novembre 1890, et du 15 novembre 1892; et ces *Rendiconti*, t. V (1891), p. 80 et suiv. et t. IX (1895), p. 150 et suiv.

Malgré tous ces travaux, on peut dire qu'il n'y avait pas là encore les bases d'une véritable théorie. Le degré $m$ de la courbe algébrique avait seul jusqu'ici joué un rôle dans la classification. Le calcul intégral allait mettre sur la voie d'un nombre fondamental dans la théorie des courbes algébriques. Le grand géomètre norwégien Abel commença l'étude des intégrales de différentielles algébriques, c'est-à-dire des intégrales de la forme:

$$\int^x R(x, y)\, dx \tag{1}$$

où $R$ est une fonction rationnelle de $x$ et de la fonction algébrique $y$ de $x$. On lui doit une proposition célèbre sur les sommes d'intégrales de cette forme; dans un de ses mémoires sur ce sujet, il reconnut que la somme d'un nombre quelconque $\mu$ d'intégrales (1), avec des limites supérieures arbitraires $x_1, x_2 \ldots, x_\mu$, peut s'exprimer à l'aide de fonctions élémentaires et d'un *certain nombre* (dépendant seulement de la courbe) d'intégrales de même forme dont les limites sont fonctions algébriques de $x_1, x_2, \ldots, x_\mu$. La mort prématurée d'Abel ne lui permit pas d'approfondir l'étude de ce nombre, et c'est à Riemann que revient la gloire d'avoir élevé, à la théorie des fonctions algébriques d'une variable, un monument qui est une des œuvres mathématiques les plus belles et les plus originales de ce siècle. Le point de départ de l'illustre géomètre est d'ailleurs tout différent de celui d'Abel; la théorie des fonctions d'une variable complexe avait été, dans l'intervalle, édifiée par Cauchy, et les singularités des fonctions algébriques étudiées par Puiseux. C'est dans la correspondance entre les systèmes de valeurs réelles ou complexes de $x$ et $y$, satisfaisant à l'équation $f(x, y) = 0$, et une certaine surface désignée aujourd'hui sous le nom de *surface de Riemann* que se trouve l'idée fondamentale du géomètre allemand. En modifiant seulement un peu la conception primitive de Riemann, on peut s'arranger de manière que cette surface soit, dans l'espace à trois dimensions, une surface fermée $S$, et il y a entre les points de cette surface et les points $(x, y)$ de la courbe $f = 0$ une correspondance bien déterminée. Or, sur une surface fermée, on peut distinguer un élément numérique très important: c'est le nombre maximum des courbes ne se coupant ni entre elles ni elles-mêmes, qu'il est possible de tracer sur la surface sans la décomposer en parties distinctes. Ainsi, pour une sphère ce nombre est nul; pour un tore, il est égal à un, et sera égal à deux pour une surface à deux trous telle qu'une cruche avec deux anses. Désignons d'une manière générale ce nombre par $p$: on l'appelle le *genre* de la courbe et on a:

$$p = \frac{(m-1)(m-2)}{2} - d, \tag{2}$$

$d$ désignant le nombre des points doubles. Le genre est le nombre entrevu par Abel, et c'est une chose bien remarquable que deux ordres si différents de considérations: une réduction de sommes d'intégrales et une question de géométrie de situation conduisent au même élément. Sur la surface $S$ on peut tracer $2p$

courbes fermées sans fractionner la surface (ces courbes ayant par couples un point commun); ces *cycles* jouent un rôle fondamental dans l'étude des intégrales (1), ils correspondent à leurs *périodes*. Parmi ces intégrales, on désigne sous le nom d'intégrales de première espèce celles qui restent finies pour tout point $(x, y)$; leur nombre est précisément égal à $p$. On appelle intégrales de seconde espèce celles qui n'ont pas de points singuliers logarithmiques; elles peuvent se réduire à une combinaison linéaire de $2p$ d'entre elles et à une fonction rationnelle.

Riemann a encore introduit dans la science la notion capitale de *classe de courbes algébriques :* deux courbes appartiennent à la même classe si elles se correspondent point par point, en entendant par là que les coordonnées d'un point quelconque de la première peuvent s'exprimer rationnellement en fonction des coordonnées d'un point de la seconde, et inversement. Cette belle conception généralisait singulièrement une notion familière aux analystes qui avaient créé la théorie des formes algébriques. Deux courbes de même classe ont nécessairement le même genre, et le résultat le plus profond obtenu ici par Riemann est relatif au nombre des paramètres arbitraires dont dépend essentiellement une classe de courbes d'un genre donné $p$ : le nombre de ces paramètres, qu'on appelle les modules, est égal à $3p - 3$, quand $p$ est supérieur à un.

Le point de vue algébrique n'a pas été moins fécond que le point de vue transcendant, particulièrement entre les mains de MM. Brill et Noether. On y considère le genre comme le nombre des arbitraires figurant dans un polynôme en $x$ et $y$, d'ordre $m - 3$, qui s'annule pour les points doubles; ceci est conforme à la formule (2). La recherche des courbes les plus simples appartenant à une classe donnée appelait l'attention; Clebsch et Gordan avaient déjà montré qu'à toute courbe de genre $p$ on pouvait faire correspondre une courbe de degré $p + 1$, théorème qui est toutefois en défaut pour une classe bien définie de courbes (les hyperelliptiques); MM. Brill et Noether ont approfondi cette théorie des courbes *normales*.

Je n'insisterai pas davantage sur la théorie, aujourd'hui classique, des fonctions algébriques d'une variable. J'en ai rappelé seulement les lignes principales pour permettre la comparaison avec celle des fonctions algébriques de deux variables, dont je vais maintenant m'occuper.

## II.

La théorie des surfaces algébriques a nécessairement débuté par des monographies particulières. Dès les premiers degrés se sont présentées des surfaces très intéressantes; les surfaces du second degré, qui se rencontrent dans tant d'applications, ont fait jadis l'objet des recherches de géomètres illustres. Puis est venue ensuite l'étude des surfaces générales du troisième degré avec les diverses dispositions que peuvent présenter leurs vingt-sept droites; les surfaces réglées du troisième ordre ont peut-être offert, avec leur droite double, le premier exemple d'une surface ayant une ligne double, c'est-à-dire une ligne le long de laquelle se croisent deux nappes de la surface. Il faudrait une érudition qui me manque pour parler de tous les travaux relatifs aux surfaces du quatrième degré. Quelques-unes, toutefois, sont particulièrement célèbres. Ainsi, les surfaces du quatrième degré ayant une conique double ont été étudiées spécialement par M. Darboux et par M. Moutard, qui ont découvert un remarquable système triple orthogonal formé de telles surfaces. Citons ensuite la surface de Kummer qui a seize points doubles isolés; ce nombre est intéressant, car il représente le nombre maximum de points doubles que peut posséder une surface du quatrième ordre qui n'a pas de ligne double. La surface de Steiner mérite aussi d'être rappelée; elle possède trois droites doubles formant un angle trièdre dont le sommet est un point triple de la surface, et chacun de ses plans tangents la coupe suivant deux coniques.

Arrivons maintenant à la théorie générale. Nous avons signalé, pour une courbe algébrique d'ordre $m$, l'importance des courbes adjointes d'ordre $m-3$; Clebsch vit le premier qu'une théorie analogue était à développer pour les surfaces; il faut seulement, pour une surface d'ordre $m$, considérer les surfaces adjointes d'ordre $m-4$, c'est-à-dire, en me bornant, pour plus de simplicité, au cas où la surface n'a que des points doubles, les surfaces d'ordre $m-4$ passant par les lignes doubles. L'étude de ces surfaces a été reprise par M. Noether dans un mémoire d'une grande importance où il établit le caractère invariant du nombre $p$ de ces adjointes linéairement indépendantes; ce nombre est dit le *genre de la surface*, et il présente une grande analogie avec le nombre désigné par la même lettre dans la théorie des courbes. M. Noether a découvert pour les surfaces un second nombre invariant que nous désignerons par $p'$; celui-ci représente le genre riemannien de la courbe mobile d'intersection de la surface donnée avec les surfaces adjointes d'ordre $m-4$. Voici donc deux nombres fondamentaux $p$ et $p'$ introduits dans la théorie des surfaces algébriques.

On peut donner aussi au nombre $p$ une origine transcendante. M. Noether considère les intégrales doubles de la forme

$$\int\int\frac{Q(x, y, z)\,dx\,dy}{f'_z},$$

$Q$ étant un polynôme adjoint d'ordre $m-4$. On peut les appeler des intégrales doubles de première espèce, car elles restent toujours finies, quel que soit le champ de l'intégration. Le nombre $p$ apparaît comme le nombre des intégrales doubles de première espèce linéairement indépendantes.

Nous avons maintenant une remarque très importante à faire relativement au nombre $p$, remarque qui n'a pas eu son analogue dans le cas des courbes. Pour calculer $p$, il faudrait pouvoir calculer le nombre des arbitraires figurant dans les surfaces d'ordre $m-4$ et passant, avec le degré voulu de singularité, par les lignes multiples et les points multiples de la surface proposée. Or, étant donné l'ensemble de ces lignes et de ces points, on peut trouver une telle formule pour une surface d'un ordre suffisamment grand $N$; mais on ne sait rien sur la valeur minima au-dessous de laquelle la formule cesse d'être applicable. Si donc on fait dans cette formule $N = m - 4$, on pourra trouver un nombre $P$ différent de $p$. C'est, je crois, M. Cayley qui a appelé le premier l'attention sur cette circonstance; il peut même arriver que le nombre $P$ soit négatif, tandis que $p$ est évidemment positif ou nul. MM. Cayley et Zeuthen ont montré que $P$, comme $p$, jouit de la propriété d'invariance, c'est-à-dire qu'il est le même pour les surfaces se correspondant point par point. On désigne $p$ sous le nom de genre *géométrique*, et $P$ sous le nom de genre *numérique*. Les surfaces réglées algébriques sont les plus simples surfaces pour lesquelles on ait $P \neq p$; on a pour elles $p = 0$, tandis que $P$ n'est pas nul en général.

La notion de classe s'applique évidemment aux surfaces comme aux courbes. La question du nombre des modules se présente alors aussi. D'après M. Noether, pour les surfaces correspondant aux nombres $p$ et $p'$, le nombre des modules est égal à $10\,p + 12 - 2\,p'$; peut-être ce beau résultat aurait-il besoin d'être l'objet d'une démonstration plus rigoureuse. Il semble, en tout cas, qu'il ne s'applique qu'aux surfaces pour lesquelles on a $P = p$.

Nous avons considéré plus haut des intégrales doubles attachées à la surface. On peut aussi faire correspondre à une surface $f(x, y, z) = 0$ des intégrales de différentielles totales de la forme

$$\int P(x, y, z)\,dx + Q(x, y, z)\,dy, \tag{3}$$

où $P$ et $Q$ sont rationnelles en $x$, $y$ et $z$. J'ai commencé autrefois l'étude de ces intégrales, et je demande la permission de rappeler les résultats principaux auxquels je suis parvenu. Tout d'abord j'ai considéré les intégrales de différentielles totales de première espèce. On rencontre dès le début une différence bien profonde entre le cas d'une variable et celui de deux variables. La courbe la plus générale d'un degré donné possède un certain nombre d'intégrales de première espèce. Il en est tout autrement pour les surfaces algébriques, car il n'existe pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce correspondant à la surface la plus générale de degré $m$. J'ai montré comment on pourrait reconnaître si une surface donnée possède des intégrales de première espèce. J'ai abordé aussi la question, beaucoup plus difficile, des intégrales de seconde et de troisième espèce; j'entends par intégrales de seconde espèce celles qui n'ont que des courbes polaires (analogues aux pôles des intégrales de seconde espèce), les intégrales de troisième espèce ayant, en plus, des courbes logarithmiques. Pour la surface la plus générale de son degré, toute intégrale de seconde espèce est une fonction rationnelle des coordonnées, et le problème de reconnaître si une surface donnée admet des intégrales de seconde espèce non rationnelles ne laisse pas d'être assez délicat; d'ailleurs, quand il existe de telles intégrales, le nombre de ces intégrales distinctes est égal au nombre de leurs périodes. Quant aux intégrales de troisième espèce, on peut rattacher leur théorie à celle des intégrales de seconde espèce; mais, bien des points demanderaient encore à être approfondis. J'ai même dû laisser en suspens une question qui se pose pourtant dès le début; il ne me paraît guère douteux que, pour la surface la plus générale de son degré, toutes les intégrales de la forme (3) doivent se réduire à la somme d'une fonction rationnelle de $x$, $y$, $z$ et de logarithmes de telles fonctions multipliés par des constantes, mais je n'en possède pas une démonstration rigoureuse.

Nous avons dit plus haut comment Riemann avait introduit dans la théorie des courbes des points de vue empruntés à la géométrie de situation. Aucune recherche analogue n'avait été tentée pour les surfaces, et, d'autre part, mes précédentes études sur les intégrales de différentielles totales me montraient là une lacune à combler. J'eus donc tout naturellement la pensée de chercher à poser les bases d'une théorie des *cycles* dans les surfaces. Je fus ainsi conduit à remarquer que la généralisation peut se faire dans deux directions différentes; il y a à considérer, pour les surfaces, des cycles à une dimension ou *linéaires* et des cycles *à deux dimensions;* d'où deux théories entièrement distinctes. En pénétrant dans la première étude, on rencontre un résultat au premier abord inattendu: c'est qu'en général il n'y a pas de cycles linéaires, c'est-à-dire qu'ils se réduisent à des cycles nuls, et ce résultat donne la véritable raison du fait signalé plus haut qu'il n'y a pas, en général, d'intégrales de première et de seconde espèce. Si le nombre $p_1$ des cycles linéaires est nul généralement, il en est autrement pour le nombre $p_2$ des cycles à deux dimensions, et c'est, par suite, dans les cycles à deux dimensions d'une surface qu'il faut chercher la généralisation des cycles d'une courbe algébrique.

Mes recherches sur les intégrales de différentielles totales m'ont permis d'aborder l'étude d'une classe intéressante de surfaces: ce sont les surfaces pour lesquelles les coordonnées d'un point quelconque s'expriment par des fonctions uniformes quadruplement périodiques de deux paramètres, et cela de telle manière qu'à un point arbitraire de la surface ne corresponde qu'un seul système de valeurs de deux paramètres, abstraction faite des multiples des périodes. J'ai établi que la condition nécessaire et suffisante pour qu'une surface jouisse de cette propriété est qu'elle soit de genre *un* ($p = 1$) et possède deux intégrales distinctes de première espèce. Avant le sixième degré, il n'existe pas de surface de la classe précédente; on en peut trouver pour le sixième degré, mais les fonctions quadruplement périodiques se ramènent aux fonctions doublement périodiques.

Dans un mémoire extrêmement intéressant, couronné il y a deux ans par l'Académie, M. Humbert a approfondi l'étude des surfaces précédentes et établi des théorèmes d'une rare élégance. Parmi les résultats relatifs aux surfaces adjointes, citons au moins celui qui concerne les adjointes d'ordre $m - 3$: le nombre de ces adjointes linéairement distinctes est égal au genre des sections planes de la surface diminué d'une unité. Signalons encore que le genre numérique $P$ est égal à $-1$ et est, par suite, distinct du genre géométrique. M. Humbert étudie aussi des surfaces remarquables d'ordre *huit*, ayant pour lignes doubles les arêtes d'un tétraèdre, qui sont jusqu'ici les surfaces de moindre degré correspondant à des fonctions hyperelliptiques non réductibles aux fonctions doublement périodiques. D'après ce que j'ai dit plus haut, il resterait à voir s'il existe de telles surfaces pour les degrés *six* et *sept;* il est bien vraisemblable que *huit* est le degré minimum.

M. Humbert s'est aussi occupé, dans son mémoire, de la surface de Kummer, qui se rattache aux fonctions quadruplement périodiques, mais ne rentre pas dans la famille précédente: car à un point arbitraire de la surface correspondent *deux* valeurs des paramètres, aux périodes près; il fait une étude très complète des courbes tracées sur la surface et des propriétés des surfaces passant par ces courbes.

D'une manière générale, l'étude des courbes algébriques tracées sur une surface est un point très important de la théorie. Dans leurs célèbres mémoires de 1880, Halphen et M. Noether ont donné à ce sujet quelques propositions générales. Ce sont surtout les systèmes continus de courbes tracées sur une surface qui ont fait, dans ces derniers temps, l'objet de travaux importants, particulièrement en Italie, avec MM. Guccia, Segre, Bertini, Castelnuovo, Enriques, etc. Les systèmes linéaires de courbes sont particulièrement intéressants. On désigne sous ce nom un système de courbes découpées (totalement ou partiellement) sur $F$ par les surfaces d'un système linéaire. M. Enriques a remarqué qu'un système de courbes dépendant de $r$ paramètres et découpées totalement ou partiellement sur $F$ par les surfaces d'un système *algébrique* (on ne dit pas *linéaire*), est nécessairement linéaire si $r$ est supérieur à *un*, et si par $r$ points généraux de $F$ passe une seule courbe du système. Tout récemment, M. Humbert s'est occupé des séries simplement infinies de courbes sur une surface, et il a montré qu'une telle série de courbes, se coupant deux à deux en un ou plusieurs points mobiles, est comprise dans une série linéaire (deux fois infinie au moins) de courbes du même ordre, pourvu que la surface ne possède pas d'intégrales de différentielles totales de première espèce; on entend ici par série linéaire de courbes des courbes découpées par les surfaces d'un système linéaire, chaque surface mobile ne coupant la proposée, en dehors de courbes fixes, que suivant une seule courbe mobile.

Les surfaces appelées *unicursales*, pour lesquelles les coordonnées s'expriment en fonctions rationnelles de deux paramètres, ont fait depuis Clebsch l'objet de nombreux travaux. Une lacune importante subsistait dans cette théorie. Peut-on, pour une telle surface, faire la représentation paramétrique de manière qu'à un point arbitraire de la surface ne corresponde qu'un seul système de valeurs des deux paramètres? Cette question très délicate restait en suspens; nous savons maintenant, grâce à M. Castelnuovo, qu'elle doit être résolue par l'affirmative. On peut déduire de là que, si une surface contient une simple infinité de courbes rationnelles, infinité dépendant rationnellement d'un paramètre, elle est unicursale.

Quelques travaux ont encore été consacrés récemment à l'étude des surfaces d'après le genre de leurs sections planes. J'avais cherché autrefois les surfaces dont toutes les sections planes sont unicursales et montré qu'elles se réduisent aux surfaces réglées unicursales et à la surface de Steiner. M. Castelnuovo a cherché les surfaces dont toutes les sections planes sont de genre *un* et il a établi que ces surfaces sont unicursales ou réglées. M. Enriques est arrivé à la même conclusion pour les surfaces dont les sections sont des courbes hyperelliptiques de genre quelconque. Rappelons encore, dans le même ordre d'idées, un théorème énoncé en 1886 par Kronecker et que vient d'établir M. Castelnuovo, d'après lequel les seules surfaces irréductibles admettant une double infinité de sections planes décomposables en deux courbes distinctes sont les surfaces réglées et la surface de Steiner.

L'étude des transformations d'une surface en elle-même, au moyen de transformations birationnelles, est importante pour la théorie qui nous occupe. Il y a ici encore une grande différence entre le cas des courbes et celui des surfaces. Tandis qu'une transformation birationnelle d'une courbe en elle-même, dépendant de paramètres arbitraires, fait nécessairement partie d'un groupe fini et continu au sens de M. Lie, il peut en être autrement pour les surfaces. J'ai pu étudier le cas des surfaces admettant un groupe fini et continu de transformations birationnelles; mais les cas où celles-ci ne forment pas un groupe paraissent d'un bien autre intérêt.

On voit que, malgré tant de travaux et particulièrement ceux de M. Noether qui ont tant contribué aux progrès de la théorie générale des surfaces algébriques, celle-ci est loin d'être aussi avancée que celle des courbes. Il semble que d'autres nombres invariants que ceux qui ont été jusqu'ici considérés soient à introduire. Ainsi, il y a un grand nombre de classes de surfaces pour lesquelles il n'y a rien à tirer de la notion de genre géométrique; j'ai lieu d'espérer qu'au moins dans des cas étendus, un nouvel invariant sur lequel j'ai récemment appelé l'attention et d'autres nombres analogues pourront n'être pas dénués d'intérêt.

ÉMILE PICARD,
de l'Académie des Sciences,
Professeur de Calcul différentiel et intégral
à la Faculté des Sciences de Paris.