SUR LES ÉQUATIONS DE LA PHYSIQUE MATHÉMATIQUE;

Par M. **H. Poincaré**, à Paris.

Adunanza del 25 marzo 1894.

On connaît l'équation des vibrations transversales d'une membrane tendue.

Si $d\omega$ désigne un élément de surface de la membrane, p sa tension, ρ sa densité superficielle, w la quantité dont le point x, y s'écarte de sa position d'équilibre (dans le sens transversal, c'est-à-dire perpendiculairement à la membrane ou parallèlement à l'axe des z), si T représente l'énergie cinétique et V l'énergie potentielle, on aura :

$$T = \frac{\rho}{2}\int\left(\frac{dw}{dt}\right)^2 d\omega, \qquad V = \frac{p}{2}\int\left[\left(\frac{dw}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dw}{dy}\right)^2\right] d\omega;$$

d'où l'on tire l'équation :

$$\frac{\rho}{p}\frac{d^2 w}{dt^2} = \frac{d^2 w}{dx^2} + \frac{d^2 w}{dy^2} = \Delta w.$$

Si le mouvement est périodique, on aura :

$$w = u \sin \frac{t - t_0}{\tau},$$

t_0 et τ étant des constantes et u une fonction de x et de y seulement; et il viendra :

$$\Delta u + \frac{\rho}{p\tau^2} u = 0. \tag{1}$$

D'autre part, sur le contour de la membrane on devra avoir $u = 0$.

La même équation se rencontre dans l'étude des petites vibrations d'une masse gazeuse enfermée dans un vase solide. Si Φ est le potentiel des vitesses, on devra avoir :

$$\frac{d^2\Phi}{dt^2} = a^2\Delta\Phi = a^2\left[\frac{d^2\Phi}{dx^2} + \frac{d^2\Phi}{dy^2} + \frac{d^2\Phi}{dz^2}\right].$$

La condition à la limite n'est pas alors $\Phi = 0$, mais

$$\frac{d\Phi}{dn} = 0.$$

On rencontre encore la même équation avec d'autres conditions aux limites dans les problèmes relatifs à l'élasticité des corps solides et dans beaucoup d'autres problèmes de physique mathématique.

J'insisterai seulement ici sur les problèmes relatifs à la théorie de la chaleur. Si V désigne la température, on aura :

$$\frac{dV}{dt} = K\Delta V, \tag{2}$$

K étant le coefficient de conductibilité; et à la surface du corps :

$$\frac{dV}{du} + hV = 0,$$

h étant une constante positive proportionnelle au pouvoir émissif. Si on veut que l'on ait :

$$V = ue^{-\alpha t},$$

u ne dépendant que de x et de y, il viendra :

$$\Delta u + \frac{\alpha}{K} u = 0. \tag{3}$$

Cela suppose qu'il n'y ait à l'intérieur du corps aucune source de chaleur. Supposons que dans l'élément de volume $d\tau$ du corps il y ait une source de chaleur qui produise, dans le temps dt, une quantité de chaleur :

$$q\,dt\,d\tau.$$

Soit ρ la densité du corps, μ sa chaleur spécifique; l'équation (2) deviendra :

$$\frac{dV}{dt} = K \Delta V + \frac{q}{\rho\mu}$$

et l'équation (3) :

$$\Delta u + \frac{\alpha}{K} u + \frac{q e^{\alpha t}}{\rho \mu K} = 0.$$

En posant enfin :

$$\frac{\alpha}{K} = \xi, \qquad \frac{q e^{\alpha t}}{\rho \mu K} = f$$

on trouvera :

$$\Delta u + \xi u + f = \sigma. \tag{4}$$

Pour que u soit indépendant de t, il faut supposer qu'il en est de même de f et par conséquent que q varie proportionnellement à l'exponentielle $e^{-\alpha t}$. Je regarderai f comme donnée.

Le cas le plus intéressant est celui où α et ξ sont nuls et où V et q sont indépendants du temps. L'équation (4) devient alors :

$$\Delta u + f = 0,$$

avec la condition aux limites :

$$\frac{du}{dn} + hu = 0.$$

C'est le problème des *températures stationnaires.*

Si le pouvoir émissif devient nul, la condition se réduit à

$$\frac{du}{dn} = 0.$$

Si h est infini, elle se réduit à

$$u = 0.$$

Nous nous poserons donc le problème suivant.

Soit D un domaine situé dans le plan ou dans l'espace à trois dimensions; soit F sa frontière qui sera une ligne dans le premier cas ou une surface dans le second. Je supposerai que F se compose d'un nombre fini de portions de surfaces ou d'arcs de courbe analytiques.

Je désignerai par $d\tau$ un élément de D et par $d\omega$ un élément de F; si D a trois dimensions, $d\tau$ sera un volume et $d\omega$ une surface; si D n'a que deux dimensions, $d\tau$ sera une surface et $d\omega$ une longueur. Je désignerai par $\frac{du}{dn}$ le rapport à dn de l'accroissement du que subit la fonction u quand on parcourt une longueur infiniment petite dn sur la normale à F en allant vers l'extérieur de D.

J'aurai trois coordonnées x, y, z ou deux seulement x, y selon le nombre des dimensions de D.

Je me propose de déterminer une fonction v satisfaisant, à l'intérieur de D, à la condition :

$$\Delta v + \xi v + f = 0,$$

et sur la frontière F à la condition :

$$\frac{dv}{dn} + hv = 0,$$

et qui de plus à l'intérieur de D est continue ainsi que ses dérivées des deux premiers ordres.

Les constantes ξ et h sont données ainsi que la fonction f.

Dans certains cas je supposerai $f = 0$, $u \neq 0$ et je ne supposerai plus que ξ soit donné.

Les cas de $\xi = 0$, $f = 0$, $h = 0$, $h = \infty$ méritent d'attirer particulièrement l'attention.

Pour des raisons qu'on comprendra plus tard, je me réserve de donner à ξ des valeurs positives, négatives, ou même imaginaires.

Le problème ainsi posé a déjà fait l'objet de travaux nombreux.

Le plus important est celui de M. Schwarz (« Festschrift zum Jubelgeburtstage des Herrn Weierstrass »), dont les résultats ont été complétés par une note de M. Picard insérée aux « Comptes Rendus » du 16 octobre 1893.

D'autre part M. Picard a traité, dans un mémoire inséré au tomo VI, 4ème série, du « Journal de Liouville », des questions qui se rapportent à des équations aux dérivées partielles, dans lesquelles celle qui nous occupe rentre comme cas particulier.

On pourra consulter avec fruit de nombreuses notes du même auteur dans divers volumes des « Comptes Rendus » depuis 1889.

J'ai eu moi-même l'occasion de m'occuper de ces équations dans un mémoire que j'ai publié dans le tome XII de l'« American Journal of Mathematics ».

Je ferai à tous ces ouvrages de nombreux emprunts, ainsi que je l'expliquerai dans la suite.

§ I.

Fonctions de Green.

L'étude de l'équation qui nous occupe se rattache directement à celle de l'équation de Laplace :

$$\Delta u = 0,$$

qui est, comme on sait, beaucoup plus avancée.

Le problème dit de Dirichlet consiste à trouver une fonction u qui à l'intérieur du domaine D satisfasse à l'équation de Laplace et qui prenne des valeurs données sur la frontière de ce domaine. Grâce aux travaux de Schwarz et de Neumann on sait résoudre ce problème dans un très grand nombre de cas.

On pourra aussi trouver une fonction u qui satisfera aux conditions suivantes. A l'intérieur de D on aura :

$$\Delta u = f$$

et sur la frontière

$$u = \varphi,$$

f et φ étant deux fonctions données.

Une fonction, connue sous le nom de Green, joue dans la solution de ces divers problèmes un rôle très important. Je vais rappeler sa définition et celles de ses propriétés qui me seront utiles dans la suite.

Soit m un point mobile dont les coordonnées seront les coordonnées courantes x, y, z; μ un point fixe dont les coordonnées seront ξ, η, ζ; r la distance $m\mu$; ces deux points sont supposés intérieurs à D.

La fonction de Green G satisfera aux conditions suivantes:

1° A l'intérieur de D, on aura :

$$\Delta G = 0.$$

2° A la frontière, on aura :

$$G = 0.$$

3° A l'intérieur de D, G sera finie et continue ainsi que ses dérivées, sauf pour $r = 0$, c'est-à-dire quand le point m viendra en μ.

4° Si D a trois dimensions, la différence

$$G - \frac{1}{4\pi r}$$

restera finie et continue pour $r = 0$. Si D a deux dimensions, la différence

$$G + \frac{1}{2\pi} \log r$$

restera finie et continue pour $r = 0$.

Ces conditions suffisent pour déterminer la fonction G; il n'y a qu'une fonction de Green qui corresponde à un domaine D donné et à un point μ donné. De plus il y en a toujours une et on sait la former quand le domaine D est limité, comme nous le supposons, par un nombre fini de lignes ou de surfaces analytiques.

Si une fonction u satisfait à l'interieur de D à l'équation

$$\Delta u = f$$

et s'annule à la frontière, on aura :

$$u(x, y, z) = -\int G.f(\xi, \eta, \zeta)\, d\xi\, d\eta\, d\zeta; \tag{1}$$

G dépend en effet à la fois de x, y, z, et de ξ, η, ζ. Il va sans dire que si le domaine D n'avait que deux dimensions, u dépendrait seulement de x et y, f de ξ et η, G de x, y, ξ et η; et l'intégrale triple portant sur les différentielles $d\xi$, $d\eta$, $d\zeta$ devrait être remplacée par une intégrale double portant sur les différentielles $d\xi$, $d\eta$.

Il est aisé de trouver des inégalités auxquelles doit satisfaire la fonction de Green. Si le domaine D a trois dimensions on aura :

$$0 < G < \frac{1}{4\pi r}.$$

D'autre part, si r_0 et r_1 sont la plus petite et la plus grande distance du point μ à la frontière de D, on aura :

$$\frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi r_0} < G < \frac{1}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi r_1}.$$

Cela tient à ce que la fonction G ne peut avoir de minimum à l'intérieur de D et qu'elle s'annule à la frontière. D'autre part la différence $G - \frac{1}{4\pi r}$ ne peut avoir à l'intérieur de D ni maximum, ni minimum, et sur la frontière de D elle varie entre les limites $-\frac{1}{4\pi r_0}$ et $-\frac{1}{4\pi r_1}$.

Si le domaine D n'a que deux dimensions, ces inégalités doivent être remplacées par les suivantes :

$$G > 0, \qquad \log \frac{r_0}{r} < 2\pi G < \log \frac{r_1}{r}.$$

De tout cela on déduit immédiatement, si D a trois dimensions :

$$\int G\, d\tau = \int |G|\, d\tau < \frac{r_1^2}{2} < \frac{l^2}{2}; \quad \int G^2 d\tau < \frac{r_1}{4\pi} < \frac{l}{4\pi},$$

l étant la plus grande dimension de D; c'est-à-dire la plus grande distance de deux points de la frontière de D.

Si D n'a que deux dimensions ces inégalités doivent être remplacées par les suivantes :

$$\int |G|\, d\tau < \frac{r_1^2}{4} < \frac{l^2}{4}; \quad \int G^2 d\tau < \frac{r_1^2}{4\pi} < \frac{l^2}{4\pi}.$$

On peut également assigner une limite supérieure N à

$$\int \left|\frac{dG}{dx}\right| d\tau, \qquad \int \left|\frac{dG}{dy}\right| d\tau.$$

On peut déduire de là des conséquences importantes comme l'a montré M. Picard dans son mémoire cité plus haut du « Journal de Liouville ».

Revenons à la relation (1). Soit F le maximum de $|f|$, $M = \frac{l^2}{2}$ ou $\frac{l^2}{4}$, une limite supérieure de $\int G\, d\tau$. On aura :

$$|u| < M.F, \qquad \left|\frac{du}{dx}\right| < N.F, \qquad \left|\frac{du}{dy}\right| < N.F.$$

Si maintenant la fonction f a ses dérivées du 1^{er} ordre finies, et que F_1 soit une limite supérieure du module de ces dérivées, les dérivées secondes de u seront plus petites en valeur absolue que

$$PF + P_1 F_1,$$

P et P_1 étant deux constantes positives ne dépendant comme M et N que du domaine D.

§ II.

Intégrales de Schwarz.

Soit f une fonction donnée et ξ une constante donnée et proposons-nous de trouver une fonction v qui à l'intérieur de D satisfasse à l'équation :

$$(1) \qquad \Delta v + \xi v + f = 0$$

et qui s'annule sur la frontière. Je désignerai cette fonction, si elle existe, par la notation :

$$v = [f, \xi].$$

A l'exemple de M. Schwarz, je me propose de développer v suivant les puissances croissantes de ξ en écrivant :

$$(2) \qquad v = v_0 + v_1 \xi + v_2 \xi^2 + \dots$$

Je suis ainsi conduit à la suite d'équations :

$$(3) \qquad \begin{cases} \Delta v_0 + f = 0 \\ \Delta v_1 + v_0 = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \\ \Delta v_n + v_{n-1} = 0 \\ \dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

qui déterminent complètement les fonctions v_n si on adjoint la condition, à laquelle ces fonctions sont astreintes, de s'annuler sur la frontière de D. Si nous désignons par $d\tau'$ le produit des trois différentielles $d\xi\, d\eta\, d\zeta$, par f' et v'_n ce que deviennent f et v_n quand on y remplace x, y, z par ξ, η, ζ, nous trouverons :

$$v_0 = \int G f' d\tau', \quad v_1 = \int G v'_0 d\tau', \quad \ldots, \quad v_n = \int G v'_{n-1} d\tau', \quad \ldots$$

Si f est toujours positif, il en est de même de toutes les fonctions v_n. C'est ce qui arrive dans l'hypothèse de $f = 1$ envisagée particulièrement par M. Schwarz. Mais, si comme je le suppose, f peut avoir un signe quelconque, il en est de même de v_n, mais cela ne changera rien aux résultats essentiels.

Formons maintenant les intégrales considérées par M. Schwarz dans son mémoire cité :

$$W_{m.n} = \int v_m v_n d\tau; \quad V_{m.n} = \int \left(\frac{dv_m}{dx}\frac{dv_n}{dx} + \frac{dv_m}{dy}\frac{dv_n}{dy} + \frac{dv_m}{dz}\frac{dv_n}{dz} \right) d\tau.$$

M. Schwarz a démontré les théorèmes suivants :

1° On a

$$W_{m.n} = V_{m+1.n} = W_{m+1.n-1} = W_{0.m+n}$$

de sorte que nous pouvons simplifier la notation et écrire W_{m+n} au lieu de $W_{m.n}$.

2° Les intégrales $W_{m.n}$ et $V_{m.n}$ sont toujours positives.

3° Enfin on a :

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \ldots.$$

Ces résultats subsistent quelle que soit la fonction f et je n'ai rien à changer à la démonstration de M. Schwarz; le seul point, en effet, où le fait que v_n est positif semble jouer un rôle est le suivant :

« Weil dass Doppelintegral $W_{0,n-1}$, dit M. Schwarz, nur positive Elemente enthält so hat jedes Doppelintegral $\int v_0 v_{n-1} d\tau$ bei welchem die Integration über ein Theil des Gebietes D erstreckt wird einen endlichen Werth, welcher kleiner als $W_{0,n-1}$ ist ».

Il est clair que si v_{n-1} n'est pas toujours positif, on pourra encore assigner à cette intégrale double une limite supérieure qui ne sera plus $W_{0,n-1}$ mais :

$$\int |v_0 v_{n-1}| d\tau.$$

Le reste de la démonstration n'en serait pas changé.

En tenant compte de la relation

$$v_n = \int G v'_{n-1} d\tau',$$

on trouve ensuite, comme dans le mémoire de M. Schwarz:

$$v_n^2 < \int (v'_{n-1})^2 d\tau' \int G^2 d\tau',$$

ou

$$v_n^2 < Q^2 W_{2n-2}, \quad |v_n| < Q\sqrt{W_{2n-2}},$$

Q^2 étant égal à $\frac{l}{4\pi}$ ou à $\frac{l^2}{4\pi}$ suivant que D a trois ou deux dimensions.

Il en résulte que, si T désigne le volume ou la surface de D, il vient :

$$W_{2n} < Q^2 T W_{2n-2}.$$

Cette formule est toujours homogène; $Q^2 T$ est en effet toujours la quatrième puissance d'une longueur, que D ait trois ou deux dimensions.

Il en résulte encore que :

$$\frac{W_{2n-1}}{W_{2n-2}} < Q\sqrt{T};$$

ou bien que :

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \ldots < Q\sqrt{T}.$$

Donc le rapport

$$\frac{W_{n+1}}{W_n}$$

tend vers une limite finie et déterminée, positive et plus petite que $Q\sqrt{T}$. Il en est de même du rapport

$$\sqrt{\frac{W_{2n+2}}{W_{2n}}}.$$

Donc la série :

$$(4) \quad Q\sqrt{W_0} + \xi Q\sqrt{W_2} + \xi^2 Q\sqrt{W_4} + \ldots + \xi^n Q\sqrt{W_{2n}} + \ldots$$

converge absolument, pourvu que

$$|\xi| < \frac{1}{Q\sqrt{T}}.$$

Or les termes de la série (4) sont indépendants de x, y, z et plus grands en valeur absolue que ceux de la série :

$$(5) \qquad v_1 + \xi v_2 + \xi^2 v_3 + \ldots .$$

Donc la série (5) converge absolument et uniformément (par rapport à x, y et z), pourvu que

$$|\xi| < \frac{1}{Q\sqrt{T}};$$

il en est donc de même de la série (2).

Je dis maintenant que la série (2) satisfait à l'équation (1).

En effet la série

$$\varphi = f + \xi v_0 + \xi^2 v_1 + \xi^3 v_2 + \dots \tag{6}$$

converge aussi absolument et uniformément, et on aura :

$$\varphi = f + \xi v.$$

D'autre part, chacun des termes de la série uniformément convergente (2) s'annulant à la frontière, il en est de même de v. Je dis maintenant que

$$\varphi = -\Delta v.$$

Il est évident d'abord que la série :

$$\frac{dv_0}{dx} + \xi \frac{dv_1}{dx} + \xi^2 \frac{dv_2}{dx} + \dots$$

converge aussi absolument et uniformément. On a, en effet :

$$\left|\frac{dv_n}{dx}\right| < N v_{n-1}^0 < QN\sqrt{W_{2n-4}},$$

N étant la quantité positive définie au § précédent et v_{n-1}^0 la plus grande valeur de $|v_{n-1}|$.

On a donc

$$\frac{d\varphi}{dx} = \frac{df}{dx} + \xi \frac{dv_0}{dx} + \xi^2 \frac{dv_1}{dx} + \xi^3 \frac{dv_2}{dx} + \dots;$$

de sorte que, si on peut assigner une limite supérieure à $\frac{df}{dx}$, ce que je suppose, on pourra en assigner une à $\frac{d\varphi}{dx}$. Il en est de même en ce qui concerne $\frac{d\varphi}{dy}$ et $\frac{d\varphi}{dz}$.

La série (6) étant uniformément convergente, je puis écrire :

$$\int G\varphi' d\tau' = \int G f' d\tau' + \xi \int G v_0' d\tau' + \xi^2 \int G v_1' d\tau' + \dots$$

ou bien :

$$\int G\varphi' d\tau' = v_0 + \xi v_1 + \xi^2 v_2 + \dots = v. \tag{7}$$

Comme on peut assigner à φ et à ses dérivées une limite supérieure, la relation (7) prouve, d'après ce que nous avons vu dans le § précédent, que v a des dérivées secondes et que

$$\Delta v = -\varphi. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Le problème est donc résolu quelle que soit la fonction f, pourvu que

$$|\xi| < \frac{1}{Q\sqrt{T}}.$$

Pour aller plus loin, il faut que j'aie recours à un théorème que j'ai démontré dans le tome XII de l'« American Journal » et dont je vais reproduire ici la démonstration afin d'y introduire certaines simplifications.

§ III.

Lemme préliminaire.

Soit V une fonction quelconque de x, y, z; posons :

$$A = \int V^2 d\tau, \qquad B = \int \left[\left(\frac{dV}{dx}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dy}\right)^2 + \left(\frac{dV}{dz}\right)^2\right] d\tau.$$

J'écrirai pour abréger ;

$$B = \int \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau.$$

Je suppose d'abord que V satisfasse à la condition :

$$\int V d\tau = 0$$

et je me propose d'évaluer une limite inférieure du rapport $\frac{B}{A}$.

Soient $d\tau$ et $d\tau'$ deux éléments de volume du corps, ayant respectivement pour coordonnées x, y, z et x', y', z'; et soient V et V' les valeurs de la fonction V au centre de ces deux éléments. On aura :

$$T = \int d\tau = \int d\tau'$$

et

$$B\,T = \int \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau\, d\tau',$$

$$A\,T = \int V^2 d\tau\, d\tau' = \int V'^2 d\tau\, d\tau',$$

$$0 = \int V d\tau \int V' d\tau' = \int V V' d\tau\, d\tau';$$

d'où enfin :

$$2\,A\,T = \int (V - V')^2 d\tau\, d\tau'.$$

Les intégrations doivent être étendues à tous les couples $d\tau$, $d\tau'$ d'éléments de volume du corps. Un couple formé de deux éléments de volume ε et ε_1 figurera deux fois; la première fois de telle façon que ε joue le rôle de $d\tau$ et ε_1 celui de $d\tau'$; la seconde fois de telle façon que ε_1 joue le rôle de $d\tau$ et ε celui de $d\tau'$.

Changeons maintenant de coordonnées en posant :

$$x = \xi + \rho \sin\theta \cos\varphi, \qquad x' = \xi + \rho' \sin\theta \cos\varphi,$$

$$y = \eta + \rho \sin\theta \sin\varphi, \qquad y' = \eta + \rho' \sin\theta \sin\varphi,$$

$$z = \rho \cos\theta, \qquad z' = \rho' \cos\theta.$$

Pour transformer une intégrale sextuple $\int F d\tau d\tau'$, il faut appliquer la règle de transformation des intégrales multiples. On trouve ainsi :

$$\int F d\tau\, d\tau' = \int F(\rho - \rho')^2 \sin\theta \cos\theta\, d\rho\, d\rho'\, d\xi\, d\eta\, d\theta\, d\varphi.$$

J'écrirai pour abréger :

$$\int F d\tau d\tau' = \int F(\rho - \rho')^2 d\rho\, d\rho'\, d\Omega,$$

en posant :

$$d\Omega = \sin\theta \cos\theta\, d\xi\, d\eta\, d\theta\, d\varphi.$$

Nous trouvons donc :

$$B\,T = \int \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 (\rho - \rho')^2 d\rho\, d\rho'\, d\Omega$$

et

$$2\,A\,T = \int (V - V')^2 (\rho - \rho')^2\, d\rho\, d\rho'\, d\Omega.$$

Voici quelles doivent être les limites d'intégration. Soit M le point x, y, z; M' le point x', y', z'; la droite MM' est définie par les quatres variables ξ, η, θ et φ; les deux autres variables ρ et ρ' définissent la position des points M et M' sur cette droite.

Supposons que le domaine D soit convexe; la droite MM' rencontrera la frontière en deux points que j'appellerai M_0 et M_1 et qui correspondront aux valeurs ρ_0 et ρ_1 de la variable ρ; les points M et M' étant situés alors entre les points M_0 et M_1, on aura :

$$\rho_0 < \rho < \rho_1; \quad \rho_0 < \rho' < \rho_1.$$

Par conséquent, regardant d'abord ξ, η, θ, φ comme des constantes, nous intégrerons par rapport à ρ et par rapport à ρ' entre les limites ρ_0 et ρ_1.

Regardant ensuite θ et φ comme des constantes, nous intégrerons par rapport à ξ et η en donnant à ces variables toutes les valeurs telles que la droite MM' rencontre D.

Nous intégrerons enfin par rapport à θ depuis zéro jusqu'à $\frac{\pi}{2}$ et par rapport à φ depuis zéro jusqu'à 2π.

Si donc nous posons :

$$b = \int \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 (\rho - \rho')^2 \, d\rho \, d\rho',$$

$$2a = \int (V - V')^2 (\rho - \rho')^2 \, d\rho \, d\rho',$$

il viendra :

$$BT = \int b \, d\Omega, \qquad AT = \int a \, d\Omega.$$

Il importe de remarquer que tous les éléments de toutes ces intégrales sont positifs.

Nous avons maintenant :

$$\left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 = \left(\frac{dV}{dx} \sin\theta \cos\varphi + \frac{dV}{dy} \sin\theta \sin\varphi + \frac{dV}{dz} \cos\theta\right)^2 < \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2,$$

d'où

$$b > \int \left(\frac{dV}{d\rho}\right)^2 (\rho - \rho')^2 \, d\rho \, d\rho'. \tag{1}$$

Pour aller plus loin je vais employer une inégalité dont Mr. Schwarz a fait aussi un fréquent usage; on a, quelles que soient les fonctions φ et ψ,

$$\left[\int \varphi \psi \, dx\right]^2 < \int \varphi^2 \, dx \int \psi^2 \, dx.$$

Si donc $\rho' > \rho$, on aura :

$$(V' - V)^2 = \left[\int_\rho^{\rho'} \frac{dV}{d\sigma} d\sigma\right]^2 < (\rho' - \rho) \int_\rho^{\rho'} \left(\frac{dV}{d\sigma}\right)^2 d\sigma. \tag{2}$$

Les éléments de l'intégrale $2a$ peuvent se répartir en deux groupes, ceux pour lesquels $\rho' > \rho$ et ceux pour lesquels $\rho > \rho'$; comme la quantité sous le signe $\int$ ne change pas quand on permute ρ et ρ', l'intégrale étendue aux éléments du 1^er^ groupe est égale à l'intégrale étendue aux éléments du 2^d^ groupe, de sorte qu'on aura :

$$a = \int (V - V')^2 (\rho - \rho')^2 \, d\rho \, d\rho'$$

en bornant l'intégration aux éléments du 1^er^ groupe, c'est-à-dire que les inégalités qui définissent les limites d'intégration s'écriront :

$$\rho_0 < \rho < \rho' < \rho_1.$$

Il vient alors, en vertu de l'inégalité (2) :

$$a < \int \left(\frac{dV}{d\varepsilon}\right)^2 (\rho' - \rho)^3 \, d\rho \, d\rho' \, d\varepsilon, \tag{3}$$

les limites de l'intégration étant définies par les inégalités :

$$\rho_0 < \rho < \varepsilon < \rho' < \rho_1. \tag{4}$$

Nous allons maintenant transformer l'intégrale du second membre de (1). Considérons d'abord l'intégrale étendue à tous les éléments du 1^er^ groupe; j'aurai alors :

$$\rho_0 < \rho < \rho' < \rho_1$$

et si je change ρ en ε, l'intégrale s'écrira :

$$\int \left(\frac{dV}{d\varepsilon}\right)^2 (\rho' - \varepsilon)^2 \, d\rho' \, d\varepsilon. \qquad (\rho_0 < \varepsilon < \rho' < \rho_1)$$

Envisageons maintenant l'intégrale étendue à tous les éléments du 2^d^ groupe; on a :

$$\rho_0 < \rho' < \rho < \rho_1.$$

Si on change ρ' en ρ, et ρ en $\mathfrak{G}$, l'intégrale devient :

$$\int\left(\frac{dV}{d\mathfrak{G}}\right)^2(\mathfrak{G}-\rho)^2\,d\rho\,d\mathfrak{G}. \qquad (\rho_0<\rho<\mathfrak{G}<\rho_1).$$

Ainsi l'inégalité (1) devient :

$$b>\int\left(\frac{dV}{d\mathfrak{G}}\right)^2(\rho'-\mathfrak{G})^2\,d\rho'\,d\mathfrak{G}+\int\left(\frac{dV}{d\mathfrak{G}}\right)^2(\mathfrak{G}-\rho)^2\,d\rho\,d\mathfrak{G}.$$
$$(\rho_0<\rho<\mathfrak{G}<\rho'<\rho_1)$$

Si alors nous posons :

$$\alpha=\int(\rho'-\rho)^3\,d\rho\,d\rho',$$

$$\beta=\int(\rho'-\mathfrak{G})^2\,d\rho'+\int(\mathfrak{G}-\rho)^2\,d\rho,$$

il viendra :

$$a<\int\alpha\left(\frac{dV}{d\mathfrak{G}}\right)^2d\mathfrak{G};\qquad b>\int\beta\left(\frac{dV}{d\mathfrak{G}}\right)^2d\mathfrak{G}.$$

Les limites de l'intégration sont définies par les inégalités (4). On trouve aisément :

$$\alpha=\frac{(\rho_1-\rho_0)^5-(\rho_1-\mathfrak{G})^5-(\mathfrak{G}-\rho_0)^5}{20},$$

$$\beta=\frac{(\rho_1-\mathfrak{G})^3+(\mathfrak{G}-\rho_0)^3}{3}.$$

Quand $\mathfrak{G}$ varie de ρ_0 à ρ_1, on voit aisément que α atteint son maximum et β son minimum pour

$$\mathfrak{G}=\frac{\rho_1+\rho_0}{2}.$$

On a donc:

$$\alpha < (\rho_1 - \rho_0)^5 \cdot \frac{3}{64},$$

$$\beta > \frac{(\rho_1 - \rho_0)^3}{12},$$

d'où

$$\frac{\beta}{\alpha} > \frac{16}{9} \frac{1}{(\rho_1 - \rho_0)^2} > \frac{16}{9 l^2},$$

l désignant comme plus haut la plus grande dimension du domaine D.

Il en résulte:

$$\frac{b}{a} > \frac{\int' \beta \left(\frac{dV}{d\mathcal{E}}\right)^2 d\mathcal{E}}{\int \alpha \left(\frac{dV}{d\mathcal{E}}\right)^2 d\mathcal{E}} > \frac{16}{9 l^2}$$

et

$$\frac{B}{A} > \frac{\int b \, d\Omega}{\int a \, d\Omega} > \frac{16}{9 l^2}.$$

C'est la limite cherchée.

Dans le memoire de l'« American Journal » j'avais trouvé une limite différente:

$$\frac{B}{A} > \frac{3 T}{2 l^5}.$$

Celle que j'adopte ici est plus maniable.

Si D n'a que deux dimensions, le même calcul donnerait:

$$\frac{B}{A} > \frac{24}{7 l^2}.$$

Je suppose maintenant que l'on ait :

$$V = \alpha_1 \varphi_1 + \alpha_2 \varphi_2 + \ldots + \alpha_p \varphi_p,$$

$\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_p$ étant p fonctions données de x, y, z, et les α étant p coefficients arbitraires, et je me propose de chercher si on peut choisir les α de façon que le rapport $B : A$ soit plus grand qu'un nombre donné convenablement choisi.

Je dis d'abord que si on peut décomposer le domaine D en $p - 1$ solides partiels convexes de telle façon que la plus grande dimension de chacun de ces solides soit plus petite que l, on pourra choisir les α de telle façon que le rapport $B : A$ soit plus grand que

$$\frac{16}{9 l^2}.$$

Soient en effet $R_1, R_2, \ldots R_{p-1}$ ces $p - 1$ solides partiels dont l'ensemble forme le domaine D.

Soit B_i l'intégrale

$$\int \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau$$

étendue au solide R_i; soit A_i l'intégrale

$$\int V^2 d\tau$$

étendue au solide R_i; soit enfin C_i l'intégrale

$$\int V d\tau$$

étendue au solide R_i. On aura :

$$B = B_1 + B_2 + \ldots + B_{p-1},$$
$$A = A_1 + A_2 + \ldots + A_{p-1}.$$

B_i, A_i et C_i dépendront des coefficients α; B_i et A_i seront des polynômes homogènes du 2^d degré par rapport à ces coefficients, pendant que les C_i seront des polynômes homogènes du 1^er degré. Je pourrai donc choisir les p coefficients α de façon à satisfaire aux $p - 1$ relations linéaires :

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_{p-1} = 0.$$

On aura alors, puisque C_i est nul et que la plus grande dimension de R_i est plus petite que l :

$$\frac{B_i}{A_i} > \frac{16}{9 l^2};$$

et par conséquent :

$$\frac{B}{A} > \frac{16}{9 l^2}.$$ C. Q. F. D.

Si le domaine D est convexe et contenu tout entier dans un cube dont le côté soit égal à Λ, nous pourrons partager ce cube en q^3 cubes égaux dont le côté sera égal a $\frac{\Lambda}{q}$. Le solide commun à l'un de ces petits cubes et à D sera convexe et sa plus grande dimension sera plus petite que

$$\frac{\Lambda\sqrt{3}}{q}.$$

Si p est égal au nombre de ces solides plus un, on pourra choisir les α de façon que

$$\frac{B}{A} > \frac{16 q^2}{27 \Lambda^2}.$$

On le pourra encore *a fortiori* si p est plus grand que ce nombre.

Or le nombre de ces solides est au plus égal à q^3; il suffit donc que

$$p \geqq q^3 + 1.$$

Nous pourrons donc choisir les α de telle façon que

$$\frac{B}{A} > L_p$$

si nous posons :

$$L_p = \frac{16\, q^2}{27\, \Lambda^2},$$

q^3 étant le plus grand cube parfait contenu dans $p - 1$.

Si le domaine D n'est pas convexe, on pourra toujours le décomposer en m solides convexes; si chacun de ces solides convexes est contenu à l'intérieur d'un cube de côté égal a Λ, nous pourrons décomposer chacun de ces cubes en q^3 cubes de côté égal à $\frac{\Lambda}{q}$; les plans des faces de ces petits cubes partageront chacun de nos m solides convexes en solides partiels dont le nombre sera au plus égal à q^3; nous devrons donc choisir q de telle façon que

$$p \geqq m q^3 + 1;$$

et nous aurons encore :

$$\frac{B}{A} > L_p, \qquad L_p = \frac{16\, q^2}{27\, \Lambda^2},$$

q^3 étant le plus grand cube parfait contenu dans $\frac{p-1}{m}$.

Si D n'avait que deux dimensions et se décomposait en m domaines convexes, contenus chacun dans un carré de côté Λ, on trouverait :

$$\frac{B}{A} > L_p, \qquad L_p = \frac{7\, \Lambda^2}{12\, q^2},$$

q^2 étant le plus grand carré parfait contenu dans $\frac{p-1}{m}$.

Dans tous les cas on peut choisir les α de telle façon que

$$\frac{B}{A} > L_p,$$

L_p étant un nombre qui ne dépend que du domaine D et du nombre p et qui croît indéfiniment avec p.

Le nombre L_p est du même ordre de grandeur que $p^{\frac{2}{3}}$, si D a trois dimensions; et du même ordre de grandeur que p, si D n'a que deux dimensions.

§ IV.

Théorème fondamental.

Soient $f_1, f_2, \ldots f_p$ p fonctions quelconques de x, y et z; soient, en reprenant les notations du § II :

$$\begin{aligned} w_1 &= [f_1, \xi], \\ w_2 &= [f_2, \xi], \\ &\cdots\cdots \\ w_p &= [f_p, \xi]. \end{aligned}$$

Soient maintenant $\alpha_1, \alpha_2, \ldots \alpha_p$ p coefficients arbitraires; posons :

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p$$

et

$$v = \alpha_1 w_1 + \alpha_2 w_2 + \ldots + \alpha_p w_p;$$

d'où :

$$(1) \quad v = [f, \xi] = v_0 + v_1 \xi + v_2 \xi^2 + \ldots + v_n \xi^n + \ldots.$$

Nous pourrons, à l'aide des fonctions v_i, construire les intégrales de Schwarz W_n. D'après ce que nous avons vu le rapport $\frac{W_{n+1}}{W_n}$ sera constamment croissant; mais comme il ne pourra pas croître au delà de toute limite, il tendra vers une certaine limite λ quand n croîtra indéfiniment.

Je dis qu'on peut toujours, quelles que soient les fonctions $f_1, f_2, \dots f_p$, choisir les coefficients arbitraires α de telle façon que:

$$\lambda < \frac{1}{L_p}.$$

En effet, d'après le lemme qui précède on pourra toujours choisir les α de telle façon que:

$$\frac{V_{n.n}}{W_{n.n}} > L_p,$$

ou:

$$\frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} < \frac{1}{L_p},$$

ou enfin:

$$(2) \qquad \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_1} < \dots < \frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} < \frac{1}{L_p}.$$

Je considère un instant $\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$ comme les coordonnées homogènes d'un point M dans l'espace à $p - 1$ dimensions; on peut choisir ce point M de façon à satisfaire aux inégalités (2). Il y aura donc dans l'espace à p dimensions un domaine δ_n tel que, quand le point M est dans ce domaine, les inégalités (2) soient satisfaites.

En changeant n en $n + 1$, je vois qu' il existe un domaine δ_{n+1} tel que, quand M est dans ce domaine, les inégalités

$$(2^{\text{bis}}) \quad \frac{W_2}{W_1} < \frac{W_3}{W_2} < \dots < \frac{W_{2n}}{W_{2n-1}} < \frac{W_{2n+1}}{W_{2n}} < \frac{W_{2n+2}}{W_{2n+1}} < \frac{1}{L_p}$$

soient satisfaites.

Mais les inégalités (2^{bis}) entraînent les inégalités (2). *Donc le domaine* δ_{n+1} *est tout entier contenu dans le domaine* δ_n.

J'aurai donc une série de domaines

$$\delta_1,\ \delta_2,\ \ldots\ \delta_n,\ \delta_{n+1},\ \ldots$$

tels que chacun d'eux soit tout entier contenu dans le précédent. *Tous ces domaines auront donc une partie commune* δ qui pourra se réduire à un point.

Si alors les coefficients α sont choisis de telle sorte que le point M appartienne à δ, on aura, quelque grand que soit n:

$$\frac{W_{n+1}}{W_n} < \frac{1}{L_p}$$

et par conséquent

$$\lambda \leqq \frac{1}{L_p}.$$

Il en résulte, en résonnant comme au § II, que la série

$$\sqrt{W_0} + \xi\sqrt{W_2} + \xi^2\sqrt{W_4} + \ldots$$

converge, pourvu que

$$|\xi| < L_p,$$

et par conséquent que la série (1) converge absolument et uniformément toutes les fois que

$$|\xi| < L_p.$$

Le rayon de convergence de la série (1) n'est donc plus égal à

$$\frac{1}{\rho\sqrt{T}}$$

comme dans le § II, mais à L_p.

Soit maintenant f, une fonction quelconque et

$$v = [f,\ \xi] = v_0 + \xi v_1 + \xi^2 v_2 + \ldots.$$

Soit

$$u_2 = [v_0, \xi] = v_1 + \xi v_2 + \xi^2 v_3 + \dots$$

$$u_3 = [v_1, \xi] = v_2 + \xi v_3 + \xi^2 v_4 + \dots$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

$$u_p = [v_{p-2}, \xi] = v_{p-1} + \xi v_p + \xi^2 v_{p+1} + \dots$$

Soient

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots \alpha_p$$

p coefficients arbitraires, et

$$w = \alpha_1 v + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \dots + \alpha_p u_p;$$

je puis écrire aussi :

$$w = [\alpha_1 f + \alpha_2 v_0 + \alpha_3 v_1 + \dots + \alpha_p v_{p-2}, \xi];$$

ou bien, en développant w suivant les puissances de ξ :

$$w = w_0 + w_1 \xi + w_2 \xi^2 + \dots \tag{3}$$

avec

$$w_n = \alpha_1 v_n + \alpha_2 v_{n+1} + \alpha_3 v_{n+2} + \dots + \alpha_p v_{n+p-1}.$$

On aura donc les p équations linéaires :

$$\left\{\begin{aligned} \alpha_1 v + \alpha_2 u_2 + \alpha_3 u_3 + \dots + \alpha_p u_p &= w \\ v - u_2 \xi &= v_0 \\ u_2 - u_3 \xi &= v_1 \\ \dots\dots\dots & \\ u_{p-1} - u_p \xi &= v_{p-2}. \end{aligned}\right. \tag{4}$$

D'après ce que nous venons de voir nous pourrons choisir les α de telle façon que le rayon de convergence de la série (3) soit plus grand que L_p.

Des équations linéaires (4) nous pourrons tirer v et nous trouverons :

$$v = \frac{P}{D},$$

où :

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ 1 & -\xi & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\xi & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\xi \end{vmatrix}$$

$$= \alpha_p - \xi\alpha_{p-1} + \xi^2\alpha_{p-2} - \ldots + (-\xi)^{p-1}\alpha_1.$$

Ainsi D est un polynôme entier en ξ à coefficients constants. D'autre part :

$$P = \begin{vmatrix} w & \alpha_2 & \alpha_3 & \ldots & \alpha_{p-1} & \alpha_p \\ v_0 & -\xi & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & -\xi & \ldots & 0 & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ v_{p-2} & 0 & 0 & \ldots & 1 & -\xi \end{vmatrix}.$$

Pour rendre cela plus clair, j'écris l'expression complète des déterminants D et P en supposant $p = 4$:

$$D = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ 1 & -\xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\xi \end{vmatrix}, \quad P = \begin{vmatrix} w & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ v_0 & -\xi & 0 & 0 \\ v_1 & 1 & -\xi & 0 \\ v_2 & 0 & 1 & -\xi \end{vmatrix}.$$

Comme v_0, v_1, ... v_{p-2} ne dépendent pas de ξ; et que w est holomorphe en ξ pour

$$|\xi| < L_p,$$

il en sera de même de P.

Donc la fonction

$$v = \frac{P}{D}$$

sera méromorphe en ξ pour

$$|\xi| < L_p,$$

et comme je puis prendre p aussi grand que je veux, *la fonction v sera méromorphe dans tout le plan.*

Étudions les propriétés de la fonction P; je vois d'abord, en développant w par la formule (3), que P peut se développer en série procédant suivant les puissances croissantes de ξ

$$P = P_0 + P_1\xi + P_2\xi^2 + \dots \tag{5}$$

et que cette série converge absolument et uniformément, pourvu que

$$|\xi| < L_p.$$

A la frontière w, v_0, v_1, ... v_{p-2} s'annulent, il en est donc de même du déterminant P.

On a d'ailleurs, en supposant encore $p = 4$:

$$\frac{dP}{dx} = \begin{vmatrix} \frac{dw}{dx} & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \frac{dv_0}{dx} & -\xi & 0 & 0 \\ \frac{dv_1}{dx} & 1 & -\xi & 0 \\ \frac{dv_2}{dx} & 0 & 1 & -\xi \end{vmatrix}$$

et comme les dérivées des deux premiers ordres de w, v_0, v_1, ... v_{p-2} sont finies, on en conclut qu'il en est de même de celles de P.

Enfin on a

$$\Delta w + \xi w + \alpha_1 f + \alpha_2 v_0 + \alpha_3 v_1 + \ldots + \alpha_p v_{p-2} = 0$$

$$\Delta v_0 + f = \Delta v_1 + v_0 = \ldots = \Delta v_{p-2} + v_{p-1} = 0,$$

d'où, en supposant toujours $p = 4$:

$$\Delta P + \xi P = \begin{vmatrix} -\alpha_1 f - \alpha_2 v_0 - \alpha_3 v_1 - \alpha_4 v_2 & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ \xi v_0 - f & -\xi & 0 & 0 \\ \xi v_1 - v_0 & 1 & -\xi & 0 \\ \xi v_2 - v_1 & 0 & 1 & -\xi \end{vmatrix}$$

ou

$$\Delta P + \xi P = \begin{vmatrix} -\alpha_1 f & \alpha_2 & \alpha_3 & \alpha_4 \\ -f & -\xi & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -\xi & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -\xi \end{vmatrix},$$

ce qui donne enfin l'équation :

$$\Delta P + \xi P + f.D = 0. \tag{6}$$

La série (5) est uniformément convergente pour

$$|\xi| < L_p$$

et il est aisé de vérifier qu'il en est de même de la série :

$$\Delta P = \Delta P_0 + \xi \Delta P_1 + \xi^2 \Delta P_2 + \ldots.$$

Si je désigne par P', P'', ... ; D', D'', ... les dérivées successives de P et de D par rapport à ξ, il est aisé de vérifier que :

$$P', \quad \Delta P', \quad \frac{d\,\Delta P}{d\xi}$$

sont développables en séries uniformément convergentes :

$$P' = P_1 + 2\xi P_2 + 3\xi^2 P_3 + \dots$$

$$\Delta P' = \Delta P_1 + 2\xi \Delta P_2 + 3\xi^2 \Delta P_3 + \dots$$

$$\frac{d\Delta P}{d\xi} = \Delta P_1 + 2\xi \Delta P_2 + \dots$$

et par conséquent que

$$\Delta P' = \frac{d\Delta P}{d\xi}.$$

On peut alors par différentiation tirer de l'équation (6) les suivantes :

$$(6^{bis}) \qquad \begin{cases} \Delta P' + \xi P' + P + f.D' = 0 \\ \Delta P'' + \xi P'' + 2P' + f.D'' = 0 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \end{cases}$$

§ V.

Existence des harmoniques.

Les pôles de la fonction méromorphe v dont le module sera plus petit que L_p seront les racines de l'équation

$$D = 0.$$

Soit k une racine de cette équation; et soient P_k, P'_k, P''_k ce que deviennent P, P', P'' quand on y fait $\xi = k$.

Supposons d'abord que k soit une racine simple.

Si alors dans l'équation (6) je fais $\xi = k$, D s'annule et on voit que P_k satisfait à l'équation :

$$(1) \qquad \Delta P_k + k P_k = 0.$$

De plus P_k s'annule à la frontière. J'appellerai *fonction harmonique* toute fonction qui satisfera à ces deux conditions. Le nombre k sera le *nombre caractéristique* de cette fonction.

Il pourrait se faire, il est vrai, que P_k soit identiquement nulle; mais dans ce cas la valeur $\xi = k$ serait un zéro pour P et pour D, et un zéro simple pour D; ce ne serait donc pas un pôle pour v.

Supposons maintenant que k soit une racine multiple, une racine triple par exemple. Alors D, D' et D'' s'annulent pour $\xi = k$. Si nous faisons $\xi = k$ dans les équations (6) et (6^{bis}) elles deviendront :

$$(1^{\text{bis}}) \qquad \begin{cases} \Delta P_k + k P_k = 0, \\ \Delta P'_k + k P'_k + P_k = 0, \\ \Delta P''_k + k P''_k + 2 P'_k = 0. \end{cases}$$

De plus P_k, P'_k et P''_k s'annulent à la frontière, de sorte que le théorème de Green nous donne :

$$\int (P'_k \Delta P_k - P_k \Delta P'_k)\, d\tau = \int (P''_k \Delta P'_k - P'_k \Delta P''_k)\, d\tau = 0,$$

ou, en tenant compte des équations (1^{bis}) :

$$\int P_k^2\, d\tau = 2 \int P_k'^2\, d\tau = 0,$$

ce qui montre que P_k et P'_k sont identiquement nulles.

Si P''_k n'est pas identiquement nulle, c'est une fonction harmonique et $\xi = k$ est un pôle simple pour v.

Si P''_k est identiquement nulle, $\xi = k$ n'est plus un pôle pour v.

Ainsi la fonction méromorphe v n'admet que des pôles simples et les résidus sont des fonctions harmoniques.

Voici pour quelle raison j'appelle ces fonctions harmoniques.

Les divers sons simples que peut émettre une membrane sont caractérisés par des équations de la forme :

$$\Delta u + k u = 0,$$

la fonction u étant assujettie à s'annuler à la frontière. On sait que ces sons simples ont reçu le nom d'harmoniques.

A chaque pôle de v correspond une fonction harmonique. L'existence de ces fonctions sera donc établie dès qu'on pourra montrer que la fonction v ne peut être holomorphe dans tout le plan. Or cela est presque évident.

Reprenons en effet les inégalités

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \ldots < \frac{W_{n+1}}{W_n} < \ldots .$$

Soit λ la limite du rapport

$$\frac{W_{n+1}}{W_n}$$

pour n infini. Je dis que le rayon de convergence de la série :

$$(2) \qquad v = v_0 + v_1 \xi + v_2 \xi^2 + \ldots$$

est égal à $\frac{1}{\lambda}$. En effet nous avons vu déjà qu'il est au moins égal à $\frac{1}{\lambda}$. Il me reste à montrer qu'il ne peut pas arriver que la série converge, quelles que soient les valeurs de x, y et z, pour une valeur de $|\xi|$ plus grande que $\frac{1}{\lambda}$. En effet la série

$$\int v_0 v_0 d\tau + \xi \int v_0 v_1 d\tau + \xi^2 \int v_0 v_2 d\tau + \ldots$$

c'est-à-dire

$$W_0 + \xi W_1 + \xi^2 W_2 + \ldots$$

convergerait également, ce qui n'a pas lieu.

Or,

$$\frac{1}{\lambda} < \frac{W_0}{W_1}.$$

Donc le rayon de convergence de la série (2) est plus petit que $\frac{W_0}{W_1}$; donc la fonction v ne peut pas être holomorphe dans tout le plan. C. Q. F. D.

Il ne peut pas y avoir plus de $p - 1$ fonctions harmoniques linéairement indépendantes dont le nombre caractéristique soit plus petit que L_p.

Supposons en effet qu'il y en ait p, et soient

$$U_1, \; U_2, \; \dots \; U_p$$

ces p fonctions.

On aura :

$$\Delta U_i + k_i U_i = 0. \qquad (k_i < L_p)$$

On en déduit :

$$[U_i, \xi] = \frac{U_i}{\xi - k_i}.$$

Si les fonctions U_i étaient linéairement indépendantes, la fonction :

$$[\alpha_1 U_1 + \alpha_2 U_2 + \dots + \alpha_p U_p, \xi] = \sum \frac{\alpha_i U_i}{\xi - k_i}$$

admettrait au moins un pôle plus petit que L_p et cela *quels que soient les coefficients arbitraires* α, ce qui est contraire au théorème fondamental.

Il résulte de là qu'à un même nombre caractéristique ne peuvent convenir qu'un nombre fini de fonctions harmoniques linéairement indépendantes.

Observons que, d'après un théorème bien connu, le nombre caractéristique d'une fonction harmonique ne peut être que réel positif. Tous les pôles de v sont donc réels et positifs.

Je particulariserai une fonction harmonique U_i en ajoutant aux conditions qui la définissent :

$$\Delta U_i + k_i U_i = 0 \qquad \text{à l'intérieur de } D,$$

$$U_i = 0 \qquad \text{à la frontière,}$$

la condition suivante:

$$\int U_i^2 \, d\tau = 1 \,;$$

ce que je puis faire sans restreindre la généralité d'une manière essentielle.

Soit alors k_i un pôle de v, et R_i le résidu correspondant. On aura alors :

$$R_i = U_i A_i,$$

A_i étant un coefficient constant. Il est aisé de vérifier que ce coefficient est égal à

$$\int f \, U_i \, d\tau.$$

On a alors :

$$v = \sum \frac{U_i \int f \, U_i \, d\tau}{\xi - k_i} + g(\xi),$$

la sommation indiquée par le signe $\sum$ s'étendant à tous les pôles k_i de v plus petits que L_p, et $g(\xi)$ étant holomorphe pour

$$|\xi| < L_p.$$

§ VI.

Inégalités diverses.

Une fonction u peut atteindre sa plus grande (ou sa plus petite) valeur soit à l'intérieur de D soit sur la frontière de ce domaine.

Si le maximum est atteint à l' intérieur de D, Δu devra être négatif au point ou il est atteint; si le maximum est atteint sur la frontière de D, $\frac{du}{dn}$ devra être positif au point où il est atteint.

S'il s'agit d'un minimum, c'est le contraire; Δu devra être positif et $\frac{du}{dn}$ négatif.

Si l'on a :

$$\frac{du}{dn} + hu = 0 \qquad \text{sur la frontière de } D,$$

$$\Delta u = f \qquad \text{à l'intérieur de } D,$$

$$f > 0, \; h > 0,$$

la fonction u sera négative dans tout le domaine. Si, en effet, elle devenait positive, elle devrait avoir un maximum positif, ce qui ne peut avoir lieu, ni à l'intérieur de D parce que Δu est positif, ni sur la frontière de D parce que $\frac{du}{dn}$ est de signe contraire à u.

Si l'on a :

$$\frac{du}{dn} + hu = 0, \qquad \Delta u = \xi u, \qquad h > 0, \; \xi > 0$$

on voit qu'à l'intérieur de D, Δu et u sont toujours de même signe, et qu'à la frontière $\frac{du}{dn}$ et u sont toujours de signe contraire. La fonction u ne peut donc avoir ni maximum positif, ni minimum négatif. Elle ne peut donc devenir ni positive, ni négative; elle est donc identiquement nulle.

C'est ce qu'on savait déjà d'autre part.

Soit maintenant :

$$\frac{du}{dn} + hu = \varphi, \qquad \Delta u + f = 0.$$

$$h > 0, \quad \varphi > 0, \quad f > 0.$$

Je dis que la fonction u est toujours positive.

Je dis en effet qu'elle ne peut avoir de minimum négatif. Elle ne peut en avoir à l'intérieur de D parce que Δu est négatif et elle n'en peut avoir non plus à la frontière parce qu'on aurait :

$$u < 0, \quad \frac{du}{dn} = \varphi - hu > 0.$$

Donc on a, dans tout le domaine :

$$u > 0. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Supposons maintenant que le domaine D soit contenu tout entier dans une sphère S de centre O et de rayon ρ.

Soient h_1 et h_2 deux nombres positifs tels que

$$h_1 > h_2 > 0.$$

Soient u_1 et u_2 deux fonctions définies de la manière suivante; on devra avoir :

à l'intérieur de D	$\Delta u_1 + 1 = 0$
à la frontière de D	$\dfrac{du_1}{dn} + h_1 u_1 = 0$
à l'intérieur de S	$\Delta u_2 + 1 = 0$
à la frontière de S	$\dfrac{du_2}{dn} + h_2 u_2 = 0$

Je dis que :

$$u_2 > u_1 > 0.$$

Déterminons d'abord la fonction u_2.

Si je désigne par r la distance du point x, y, z au point O, u_2 ne dépendra que de r et il viendra :

$$\frac{d^2u_2}{dr^2} + \frac{2}{r}\frac{du_2}{dr} + 1 = 0,$$

d'où :

$$u_2 = -\frac{r^2}{6} + \frac{A}{r} + B;$$

A et B étant deux constantes d'intégration; A doit être nulle pour que u_2 reste finie au point O. La condition à la frontière de S déterminera B.

On trouve :

$$B = \frac{\rho^2}{6} + \frac{\rho}{3h_2}.$$

D'où :

$$u_2 = \frac{\rho^2 - r^2}{6} + \frac{\rho}{3h_2}$$

Comme r est plus petit que ρ, on voit que u_2 est positif, ce que le théorème que nous venons de démontrer permettait de prévoir. Le même théorème montre que u_1 est positif.

Il reste à montrer que

$$u_2 > u_1.$$

En effet, on a, pour $r > \rho$,

$$\frac{du_2}{dr} + h_2 u_2 = \frac{\rho - r}{3} + h_2\frac{\rho^2 - r^2}{6} > 0.$$

D'autre part, à l'intérieur de D on a :

$$(1) \qquad \Delta(u_2 - u_1) = 0.$$

A la surface de D on a :

$$\frac{d u_2}{d n} = \frac{d u_2}{d r} \cos \psi,$$

ψ étant l'angle que fait la normale à cette surface avec le rayon vecteur mené au point O.

Je dis d'autre part que :

$$(2) \qquad \frac{d(u_2 - u_1)}{d n} + h_1(u_2 - u_1) > 0.$$

En effet, en tenant compte des relations :

$$\frac{d u_1}{d n} + h_1 u_1 = 0, \qquad \frac{d u_2}{d n} = \frac{d u_2}{d r} \cos \psi,$$

cette inégalité devient :

$$\frac{d u_2}{d r} \cos \psi + h_1 u_2 > 0.$$

Or, si nous posons :

$$\frac{d u_2}{d r} = - \lambda u_2,$$

il vient :

$$\lambda = \frac{2 r h_2}{h_2(\rho^2 - r^2) + 2\rho} > 0.$$

Quand r croît de zéro à ρ, le numérateur croît et le dénominateur décroît; donc λ croît de zéro à h_2.

Donc:

$$0 < \lambda < h_2.$$

Or l'inégalité à démontrer devient ainsi :

$$u_2(h_1 - \lambda \cos\psi) > 0$$

ou, puisque u_2 est positif:

$$h_1 - \lambda \cos\psi > 0.$$

Or il est clair que:

$$\lambda \cos\psi < \lambda < h_2 < h_1.$$

L'inégalité (2) est donc démontrée.

Les relations (1) et (2) montrent alors que $u_2 - u_1$ doit être positif. Donc:

$$u_2 > u_1. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

Or on a:

$$u_2 < \frac{\rho_2}{6} + \frac{\rho}{3h_2};$$

on aura donc *a fortiori* :

$$u_1 < \frac{l^2}{6} + \frac{l}{3h_2}$$

(l étant la plus grande dimension du domaine D), et comme h_2 peut être pris égal à h_1 :

$$u_1 < \frac{l^2}{6} + \frac{l}{3h_1}.$$

Soit maintenant une fonction u définie par les conditions :

$$\frac{du}{dn} + hu = 0, \qquad \Delta u + f = 0.$$

Supposons toujours h positif, et soit g le maximum de $|f|$. Introduisons une fonction auxiliaire u_1 définie par les conditions :

$$\frac{du}{dn} + h u_1 = 0, \qquad \Delta u_1 + 1 = 0.$$

D'après ce que nous venons de voir, on aura :

$$0 < u_1 < \lambda,$$

en posant :

$$\lambda = \frac{l^2}{6} + \frac{l}{3h}.$$

Il viendra alors :

$$\frac{d(g u_1 - u)}{dn} + h(g u_1 - u) = 0, \qquad \Delta(g u_1 - u) = f - g < 0;$$

$$\frac{d(g u_1 + u)}{dn} + h(g u_1 + u) = 0, \qquad \Delta(g u_1 + u) = -f - g < 0;$$

et par conséquent :

$$g u_1 - u > 0, \qquad g u_1 + u > 0;$$

ou bien encore :

$$|u| < g u_1,$$

ou enfin :

$$|u| < g \lambda;$$

ce qui donne une limite supérieure du module de u.

Supposons une fonctions u satisfaisant à l'équation

$$\Delta u + \xi u = 0$$

à l'intérieur de D.

Nous avons toujours jusqu'ici regardé la constante ξ comme réelle. Il y a lieu également d'examiner ce qui se passe quand cette constante est imaginaire.

Je dis que, *si la partie réelle de* ξ *est négative,* le module de u ne pourra pas avoir de maximum à l'intérieur de D.

Supposons en effet que ce maximum existe; soit m ce maximum, ω la valeur correspondante de l'argument de u, de telle façon qu'au point P où ce maximum est atteint on ait :

$$u = m e^{i\omega}.$$

Posons :

$$v = u e^{-i\omega}.$$

Le module de v sera égal à celui de u, et au point P on trouvera :

$$v = m.$$

Soit

$$v = v' + i v'', \qquad \xi = \xi' + i \xi''.$$

Au point P on aura :

$$v' = m, \qquad v'' = 0.$$

Je dis que la partie réelle v' atteint son maximum au point P. En un autre point en effet on aura :

$$v' < |v|, \qquad v' < |u|, \qquad v' < m.$$

D'autre part ξ' est négatif par hypothèse; d'ailleurs v satisfait comme u à l'équation :

$$\Delta v + \xi v = 0,$$

ce qui donne, en égalant les parties réelles,

$$\Delta v' + \xi' v' - \xi'' v'' = 0.$$

On aura donc au point P :

$$\Delta v' = -\xi' v' + \xi'' v'' = -\xi' m > 0.$$

Cela est absurde, car v' ne peut atteindre son maximum au point P si $\Delta v'$ est positif.

Le module de u ne peut donc avoir de maximum. C. Q. F. D.

Soit maintenant :

$$\frac{du}{dn} + hu = \varphi, \qquad \Delta u = 0$$

et

$$|\varphi| < g,$$

g étant une constante positive.

On aura :

$$\frac{d\left(u - \frac{g}{h}\right)}{dn} + h\left(u - \frac{g}{h}\right) = \varphi - g < 0, \qquad \Delta\left(u - \frac{g}{h}\right) = 0,$$

$$\frac{d\left(u + \frac{g}{h}\right)}{dn} + h\left(u + \frac{g}{h}\right) = \varphi + g > 0, \qquad \Delta\left(u + \frac{g}{h}\right) = 0,$$

et par conséquent :

$$u - \frac{g}{h} < 0, \qquad u + \frac{g}{h} > 0,$$

ou

$$|u| < \frac{g}{h}.$$

Si on connaît une limite supérieure de $|\varphi|$, on aura donc aussi une limite supérieure de $|u|$ et cette limite sera d'autant plus faible que h sera plus grand.

Soit une fonction u satisfaisant aux conditions suivantes :

$$\frac{du}{dn} + hu = \varphi, \tag{3}$$

$$\Delta u + f = 0. \tag{4}$$

Soit maintenant une fonction v quelconque, que je suppose seulement continue, ainsi que ses dérivées du premier ordre. On aura :

$$\int\left(v\frac{du}{dn} - u\frac{dv}{dn}\right)d\omega = \int(v\Delta u - u\Delta v)\,d\tau,$$

d'où

$$\int vf\,d\tau + \int u\Delta v\,d\tau + \int v\varphi\,d\omega = \int u\left(hv + \frac{dv}{dn}\right)d\omega. \tag{5}$$

La condition (5) est donc une conséquence de la condition (3).

Réciproquement, si la condition (5) est satisfaite quelle que soit la fonction v, la condition (3) devra l'être également, *pourvu que* u *et* $\frac{du}{dn}$ *soient des fonctions finies, déterminées et continues.*

Mais il pourra arriver dans certains cas que nous ne sachions pas si $\frac{du}{dn}$ est une fonction déterminée et continue; nous ne pouvons pas alors affirmer que la condition (5) entraîne la condition (3) et même il est possible que cette condition (3) n'ait aucun sens.

Supposons donc que la fonction u soit finie et continue, mais que nous ne sachions rien de $\frac{du}{dn}$. Je suppose de plus que la condition (5) (que j'appellerai pour abréger *condition modifiée*) soit remplie quelle que soit la fonction v.

On peut se demander si, quand la condition (3) a été ainsi remplacée par la condition modifiée, les conclusions de ce § subsistent encore.

Ces conclusions reposent, on se le rappelle, sur le lemme suivant :

Si φ est positif ainsi que f, u ne peut avoir de minimum négatif.

D'abord ce minimum ne peut avoir lieu à l'intérieur de D, puisque Δu est négatif : supposons donc que ce minimum ait lieu en un point M de la frontière.

Soit u_0 ce minimum. Soient ε, ε', ε'', ε''' quatre quantités positives très petites rangées par ordre de grandeur croissante. Les surfaces :

$$u = u_0 + \varepsilon, \quad u = u_0 + \varepsilon', \quad u = u_0 + \varepsilon'', \quad u = u_0 + \varepsilon'''$$

s'enveloppent mutuellement et enveloppent le point M, dont elles sont très voisines.

Nous partagerons le domaine D en cinq régions R_i caractérisées par les inégalités suivantes :

$$\begin{array}{ll}
R_1, & u < u_0 + \varepsilon \\
R_2, & u_0 + \varepsilon < u < u_0 + \varepsilon' \\
R_3, & u_0 + \varepsilon' < u < u_0 + \varepsilon'' \\
R_4, & u_0 + \varepsilon'' < u < u_0 + \varepsilon''' \\
R_5, & u_0 + \varepsilon''' < u.
\end{array}$$

Je pourrai choisir la fonction v de façon à satisfaire aux conditions suivantes :

$$\begin{array}{ll}
1^\circ \text{ A l'intérieur de } D, & v \geqq 0 \\
2^\circ \text{ A la frontière,} & \dfrac{dv}{dn} = 0 \\
3^\circ \text{ Dans } R_1, & v = 1 \\
4^\circ \text{ Dans } R_2, & \Delta v < 0 \\
5^\circ \text{ Dans } R_3, & \Delta v = 0 \\
6^\circ \text{ Dans } R_4, & \Delta v > 0 \\
7^\circ \text{ Dans } R_5, & v = 0.
\end{array}$$

Il résulte de là que l'on doit avoir :

$$\int \Delta v \, d\tau = 0,$$

l'intégrale étant étendue au domaine D, c'est-à-dire que l'intégrale étendue à R_2 est négative et égale en valeur absolue à la même intégrale étendue à R_4 qui est positive.

Cela posé, reprenons la condition (5) et examinons les intégrales du 1^er membre.

La première est essentiellement positive.

La seconde a tous ses éléments nuls sauf ceux qui correspondent aux régions R_2 et R_4; car partout ailleurs Δv s'annule.

L'intégrale étendue à R_2 est positive; car u et Δv sont négatifs.

L'intégrale étendue à R_4 est négative; car u et Δv sont de signes contraires. Mais je dis que

$$\left| \int_{R_2} u \Delta v \, d\tau \right| > \left| \int_{R_4} u \Delta v \, d\tau \right|.$$

Nous avons en effet

$$\left| \int_{R_2} \Delta v \, d\tau \right| = \left| \int_{R_4} \Delta v \, d\tau \right|$$

et u est plus grand *en valeur absolue* dans la région R_2 que dans la région R_4.

La seconde intégrale étendue au domaine D tout entier est donc positive.

La troisième intégrale est positive, puisque v et φ sont positifs.

Passons au second membre.

Dans les régions R_1, R_2, R_3, R_4 on a :

$$u < 0, \qquad v > 0, \qquad \frac{dv}{dn} = 0,$$

et l'intégrale est négative.

Dans la région R_5, on a $v = 0$ et l'intégrale est nulle.

Le premier membre devrait donc être positif et le second membre négatif.

Il est donc absurde de supposer que la fonction u ait un minimum négatif.

Il résulte de là que toutes les conclusions du présent § subsistent encore quand on remplace la condition (3) par la condition modifiée.

§ VII.

Généralisation de la fonction de Green.

Soient h et ξ deux constantes.

J'appellerai *fonction de Green généralisée* une fonction G qui satisfera aux conditions suivantes :

1° Elle sera finie et continue ainsi que ses dérivées à l'intérieur du domaine D, sauf dans le voisinage d'un certain point fixe P qui aura pour coordonnées x', y' et z'.

2° Dans le voisinage du point P, la différence

$$G - \frac{1}{4\pi r}$$

sera finie et continue ainsi que ses dérivées. La quantité

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}$$

est la distance du point x, y, z au point P.

3° A l'intérieur de D, on aura :

$$\Delta G + \xi G = 0.$$

4° A la frontière de D, on aura :

$$\frac{dG}{dn} + hG = 0.$$

En général la constante h sera supposée positive; si l'on suppose $h = \infty$, la $4^{\text{ème}}$ condition se réduit à

$$G = 0.$$

Si on suppose de plus $\xi = 0$, on retombe sur la fonction de Green ordinaire.

Il importe de remarquer qu'on ne peut pas avoir à la fois $\xi = h = 0$; si en effet on suppose

$$\Delta G = 0,$$

et que $G - \frac{1}{4\pi r}$ soit fini, l'intégrale:

$$\int \frac{dG}{dn} d\omega$$

étendue à la frontière de D devra être égale à 1, de sorte que $\frac{dG}{dn}$ ne peut pas être nulle.

Je désignerai la fonction G ainsi définie avec des constantes ξ et h quelconques sous le nom de fonction de Green *généralisée*. La fonction de Green *ordinaire* sera celle dont j'ai parlé au § I. Mais je supprimerai ces qualifications de généralisée et d'ordinaire quand je pourrai le faire sans obscurité. C'est ainsi que dans tout ce §, quand je parlerai de la fonction de Green, il faudra entendre la fonction généralisée.

La propriété fondamentale de la fonction de Green est la suivante.

Soit u une fonction continue dans tout le domaine D et satisfaisant à l'intérieur de ce domaine à la condition

$$\Delta u + \xi u = f,$$

et sur la frontière à la condition

$$\frac{du}{dn} + hu = \varphi,$$

f et φ étant des fonctions données de x, y et z.

Soit u' la valeur de u au point x', y', z'; on aura :

$$u' = \int G \varphi \, d\omega - \int G f \, d\tau;$$

G est la fonction de Green; la première intégrale est étendue à tous les éléments $d\omega$ de la frontière, et la seconde à tous les éléments de volume $d\tau$ du domaine.

Cherchons des limites entre lesquelles la fonction G doit être comprise.

Supposons d'abord que ξ soit négatif et réel, et soit

$$\xi = -\alpha^2,$$

α étant réel et positif; je supposerai h positif.

Je dis d'abord que la fonction G est essentiellement positive. En effet, elle devient positive et très grande pour $r = 0$, c'est-à-dire au point x', y', z'. Elle a donc en ce point un maximum qui est infini; mais en dehors de ce point elle ne peut avoir ni maximum positif ni minimum négatif, à cause de l'équation

$$\Delta G = \alpha^2 G$$

et d'un théorème démontré dans le § précédent. Elle ne peut avoir non plus sur la frontière de D ni maximum positif ni minimum négatif, à cause de l'équation

$$\frac{dG}{dn} + hG = 0$$

(qui se réduit à $G = 0$ pous $h = \infty$). Elle ne peut donc devenir négative, sans quoi elle aurait un minimum négatif.

La fonction

$$\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}$$

satisfait à l'intérieur de D à la même équation que G, c'est-à-dire que l'on a :

$$\Delta \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} = \alpha^2 \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}.$$

De plus, la différence

$$\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} - \frac{1}{4\pi r}$$

ne devient pas infinie pour $r = 0$.

Si donc je pose :

$$G = \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} - u,$$

la fonction u restera finie et continue pour $r = 0$ et elle satisfera à l'équation :

$$\Delta u = \alpha^2 u.$$

Il en résulte que u ne peut avoir à l'intérieur de D ni maximum positif, ni minimum négatif.

Voyons ce qui se passe à la frontière de D.

On a alors :

$$\frac{du}{dn} + hu = \frac{d}{dn}\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} + h\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}.$$

Soient hA et hB le maximum et le minimum du second membre

$$\frac{d}{dn}\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} + h\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}.$$

Ce maximum et ce minimum ne peuvent être infinis et peuvent être facilement calculés, car, quand le point x, y, z est sur la frontière de D, la distance r est comprise entre r_0 et r_1, si l'on appelle, comme au § I, r_0 et r_1, la plus petite et la plus grande distance du point x', y', z' à la surface qui limite D.

Si h est infini, on a tout simplement :

$$A = \frac{e^{-\alpha r_0}}{4\pi r_0}, \qquad B = \frac{e^{-\alpha r_1}}{4\pi r_1}.$$

A et B sont alors positifs.

De même, si le domaine D est convexe, on a :

$$\frac{d}{dn}\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} = \cos\psi \frac{d}{dn}\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} = \frac{-\cos\psi}{4r} e^{-\alpha r}\left(\frac{1}{r^2} + \alpha r\right) < 0.$$

Je désigne par $\cos\psi$ le cosinus de l'angle que fait la normale à la frontière de D avec le rayon vecteur; ce cosinus est positif si D est convexe.

On a donc :

$$A < \frac{e^{-\alpha r_0}}{4\pi r_0}.$$

Si u a sur la frontière un maximum positif, $\frac{du}{dn}$ sera positif, et on aura :

$$u < A.$$

Si u a sur la frontière un minimum négatif, $\frac{du}{dn}$ sera négatif, et on aura :

$$u > B.$$

On devra donc avoir à l'intérieur de D :

$$\begin{array}{lll} u < A, & \text{si} & A > 0 \\ u < 0, & \text{si} & A < 0 \\ u > B, & \text{si} & B < 0 \\ u > 0, & \text{si} & B > 0. \end{array}$$

Ces inégalités nous donnent une limite supérieure et une limite inférieure de G.

Ces résultats peuvent s'étendre au cas où ξ est imaginaire, pourvu que sa partie réelle soit négative.

Posons encore:

$$\xi = -\alpha^2, \qquad \alpha = \beta + i\gamma;$$

nous supposerons β positif. Soit encore :

$$G = \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} + u.$$

La fonction u satisfera à l'équation :

$$\Delta u + \xi u = 0.$$

Donc le module $|u|$ ne pourra, d'après le § précédent, atteindre son maximum à l'intérieur de D.

A la frontière de D on a encore:

$$\frac{du}{dn} + hu = \Phi,$$

en posant

$$\Phi = \frac{d}{dn}\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} + h\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}.$$

Supposons que $|u|$ atteigne son maximum m en un point Q de la frontière. On aura en ce point :

$$u = m e^{i\omega}.$$

Posons :

$$v = u e^{-i\omega},$$

d'où :

$$|v| = |u|;$$

de sorte que l'on aura au point Q:

$$v = m.$$

Soient :

$$v = v' + i\,v'',$$

$$\Phi\, e^{-i\omega} = \Phi' + i\,\Phi'';$$

on aura :

$$\frac{dv'}{dn} + hv' = \Phi'.$$

Au point P, v' est égal à m et atteint par conséquent son maximum; donc $\frac{dv'}{dn}$ est positif et

$$hm < \Phi'.$$

Si donc hA est le maximum du module de Φ, on aura :

$$\Phi' < hA;$$

d'où :

$$|u| < m < A.$$

On aura donc encore à l'intérieur de D:

$$|u| < A;$$

d'où :

$$G < \left|\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}\right| + A.$$

La valeur de A est facile à calculer; elle ne peut être infinie.

§ VIII.

Application de la méthode de Neumann.

La méthode de Neumann ne s'applique qu'à un domaine D *convexe.*

Rappelons succintement en quoi elle consiste.

Soit $d\omega$ un élément de la surface frontière ayant pour coordonnées x', y', z'. Soit V une fonction de x', y', z' que j'appellerai « densité de la double couche ». Soit $d\sigma$ l'angle solide sous lequel on voit l'élément $d\omega$ du point x, y, z; cet angle solide sera regardé comme positif si l'élément $d\omega$ est vu par le côté interne, et comme négatif dans le cas contraire.

L'integrale :

$$2\pi W = \int V d\sigma$$

s'appellera le « potentiel de la double couche ». Ce potentiel jouit de la propriété suivante : c'est une fonction continue de x, y, z à l'intérieur de D et à l'extérieur de ce domaine; mais elle présente une discontinuité sur la frontière même.

Soit M_0 un point de la frontière; M_1 et M_2 deux points infiniment voisins de M_0, mais situés, le premier à l'intérieur de D, le second à l'extérieur. Soient W_0, W_1 et W_2 les valeurs de W aux point M_0, M_1 et M_2; ces trois valeurs ne seront pas infiniment voisines l'une de l'autre, mais on aura :

$$W_1 - W_0 = W_0 - W_2 = V_0,$$

V_0 étant la valeur de V au point M_0.

Cela posé, j'adopterai les notations suivantes :

Soit V une fonction quelconque; j'écrirai

$$V', V^0, V^i, V^e$$

pour les valeurs de cette fonction aux points (x', y', z'), M_0, M_1 et M_2.

Soit alors V_0 une fonction tout à fait quelconque. Je poserai :

$$V_1 = \int \frac{V'_0 \, d\beta}{2\pi};$$

ce qui donne :

$$V_1^i - V_1^0 = V_1^0 - V_1^e = V_0^0.$$

Je poserai ensuite :

$$V_2 = \int \frac{V'_1 \, d\beta}{2\pi},$$

d'où :

$$V_2^i - V_2^0 = V_2^0 - V_2^e = V_1^0;$$

et ainsi de suite. J'aurai en général :

$$V_n = \int \frac{V'_{n-1} \, d\beta}{2\pi},$$

d'où :

$$V_n^i - V_n^0 = V_n^0 - V_n^e = V_{n-1}^0.$$

Cela posé, j'appelle G_n et H_n la plus grande et la plus petite valeur de V_n^0. Neumann a montré, non seulement que :

$$G_{n+1} < G_n, \qquad H_{n+1} > H_n,$$

mais, de plus, que :

$$G_{n+1} - H_{n+1} < \lambda(G_n - H_n),$$

λ étant une constante inférieure à 1 qui ne dépend que du domaine D, et que j'appellerai pour abréger *constante de Neumann*.

Il résulte de là que, quand n croît indéfiniment, V_n^0 tend vers une limite constante et déterminée C. Je supposerai que la fonction V_0 ait été choisie de telle sorte que cette constante soit nulle.

La série

$$V'_0 + V'_1 + V'_2 + \ldots$$

est alors uniformément convergente; soit :

$$\Phi = \int \frac{d\theta}{2\pi}(V'_0 + V'_1 + V'_2 + \ldots),$$

d'où :

$$\Phi^e = V^e_1 + V^e_2 + V^e_3 + \ldots,$$

$$\Phi^e = (V^0_1 - V^0_0) + (V^0_2 - V^0_1) + \ldots = - V^0_0.$$

La fonction Φ satisfait donc à l'équation $\Delta\Phi = 0$ à l'extérieur de D et elle se réduit sur la frontière de D à une fonction donnée $- V_0$.

A l'intérieur de D, la fonction Φ satisfait à la même équation; mais elle n'est pas continue sur la frontière de D; de sorte qu'on n'a pas :

$$\Phi^i = \Phi^e;$$

on a au contraire :

$$\Phi^i = V^0_0 + 2V^0_1 + 2V^0_2 + \ldots.$$

En revanche, et c'est là un point fort important pour l'application que j'ai en vue, on aura :

$$\frac{d\Phi^i}{dn} = \frac{d\Phi^e}{dn}.$$

Cela posé, proposons-nous de trouver une fonction W qui, à l'intérieur de D, satisfasse à l'équation $\Delta W = 0$, et telle que l'on ait à la frontière de D :

$$\frac{dW}{dn} = u,$$

u étant une fonction donnée. On sait que le problème n'est possible que si

$$\int u' d\omega = 0.$$

Voici comment Neumann le résout:

Formons le potentiel:

$$P = \int \frac{u' d\omega}{4\pi r},$$

r étant la distance des points x, y, z et x', y', z'.

On aura:

$$P^i = P^e = P^0$$

et

$$\frac{dP^i}{dn} = \frac{dP^e}{dn} + u.$$

Formons maintenant la suite des fonctions:

$$V_1, \ V_2, \ \ldots \ V_n, \ \ldots; \ \Phi$$

en prenant:

$$V_0^0 = P_0.$$

La constante C est nulle si la condition

$$\int u' d\omega = 0$$

est remplie, et on trouve:

$$W^e = P^e + \Phi^e = P^0 - V_0^0 = 0.$$

Donc W est nul identiquement à l'extérieur de D, et on a:

$$\frac{dW^e}{dn} = 0.$$

Or,

$$\frac{dW^i}{dn} = \frac{dW^e}{dn} + u = u.$$

La fonction W satisfait donc bien aux conditions du problème.

La solution n'est pas unique, puisqu'on peut ajouter une constante quelconque à W, sans que cette fonction cesse de satisfaire aux conditions du problème; mais, parmi toutes les solutions possibles, nous distinguerons, sous le nom de solution de Neumann, la fonction W que nous venons de définir.

Soit alors μ la plus grande valeur absolue que puisse atteindre u; je me propose de déterminer la plus grande valeur absolue que puisse atteindre W.

On peut trouver d'abord une limite de la valeur absolue de P. En effet, l'intégrale

$$\int \frac{d\omega}{r}$$

ne peut devenir infinie, quelle que soit la position du point x, y, z. Si L est sa limite supérieure, nous aurons :

$$|P| < L\mu;$$

et par conséquent :

$$|V_0^0| < L\mu, \qquad G_0 - H_0 < 2L\mu.$$

On en déduit :

$$|V_1^0| < G_1 - H_1 < 2L\lambda\mu,$$

$$|V_n^0| < 2L\lambda^n\mu;$$

et comme λ est plus petit que (1) :

$$|\Phi^i| < \frac{1+\lambda}{1-\lambda} 2L\mu.$$

Φ restera donc à l'intérieur de D plus petit que cette quantité, de sorte qu'il nous reste finalement :

$$|W| < \frac{L(3 + \lambda)}{1 - \lambda} \mu.$$

Il existe donc une constante H telle que :

$$|W| < H\mu.$$

Cette constante H ne dépendra que du domaine D.

Si W et W_1 sont deux valeurs de la fonction W en deux points situés à l'intérieur de D, on aura :

$$|W - W_1| < 2H\mu.$$

Si donc U est une fonction satisfaisant aux conditions :

$$\Delta U = 0, \qquad \frac{dU}{dn} = u,$$

et s'annulant, soit en un point de D, soit sur sa frontière, on devra avoir :

$$U = W + K,$$

K étant une constante; cette constante devra donc être égale à

$$-W_1,$$

W_1 étant la valeur de W au point où la fonction U s'annule. On aura donc :

$$|U| = |W - W_1| < 2H\mu.$$

Si l'on a l'une des deux conditions :

$$\int U d\tau = 0, \quad \int U d\omega = 0$$

il faut bien que U change de signe et par conséquent qu'il s'annule, soit à l'intérieur de D, soit sur sa frontière. On aura donc :

$$|U| < 2H\mu.$$

Il peut y avoir avantage à introduire certaines fonctions analogues à celle de Green.

Soit x', y', z' un point intérieur à D; r la distance du point x, y, z au point x', y', z'.

Soit maintenant G' une fonction satisfaisant aux conditions suivantes :

1° A l'intérieur de D, $\Delta G'$ est nul.

2° A la frontière, $\frac{dG'}{dn}$ est nul.

3° La différence

$$G' - \frac{d}{dx}\frac{1}{4\pi r}$$

est finie.

Soit de même G'' une fonction telle que :

1° A l'intérieur de D, $\Delta G''$ soit nul.

2° Sur la frontière, $\frac{dG''}{dn}$ soit nul.

3° La différence

$$G'' - \frac{d^2}{dx^2}\frac{1}{4\pi r}$$

soit finie.

L'existence de ces fonctions résulte de ce qui précède. Les fonctions G' et G'' existeront et leurs valeurs sur la frontière de D resteront limitées, pourvu que le point x', y', z' reste dans un domaine intérieur à D et ne puisse par conséquent se rapprocher de la frontière de D.

Si alors W est une fonction qui satisfait à l'équation :

$$\Delta W = 0,$$

et telle que $\frac{dW}{dn}$ prenne des valeurs données sur la frontière de D; si W' est la valeur de W au point x', y', z', on aura :

$$\frac{dW'}{dx'} = -\int G' \frac{dW}{dn} d\omega,$$

$$\frac{d^2 W'}{dx'^2} = \int G'' \frac{dW}{dn} d\omega.$$

Les intégrales du second membre sont étendues aux éléments $d\omega$ de la frontière de D.

§ IX.

Températures stationnaires.

Proposons-nous de résoudre le problème suivant :

Trouver une fonction v telle que l'on ait à l'intérieur de D :

$$\Delta v + f = 0$$

et à la frontière :

$$\frac{dv}{dn} + hv = 0.$$

La fonction f est supposée donnée, et je supposerai d'abord :

$$\int f d\tau = 0.$$

C'est le problème qui consiste à chercher la température finale d'un corps solide qui perd de la chaleur par rayonnement par sa surface, mais à l'intérieur duquel certaines causes constantes produisent incessamment de la chaleur.

Le pouvoir émissif est proportionnel à h, et la chaleur produite en chaque point, dans l'unité de temps, est proportionnelle à f.

Cherchons à développer v suivant les puissances croissantes de h, et soit :

$$v = v_0 + hv_1 + h^2 v_2 + \dots .$$

On aura successivement :

à l'intérieur de D	à la frontière
$\Delta v_0 + f = 0$	$\dfrac{dv_0}{dn} = 0$
$\Delta v_1 = 0$	$\dfrac{dv_1}{dn} + v_0 = 0$
$\Delta v_2 = 0$	$\dfrac{dv_2}{dn} + v_1 = 0$
. . . .	. . . .

Nous allons voir que, *si le domaine D est convexe,* la méthode de Neumann permet de calculer successivement v_0, v_1, v_2, etc.

En effet, nous pouvons d'abord trouver une fonction u satisfaisant à l'équation :

$$\Delta u + f = 0.$$

Il suffit, par exemple, de prendre u égal au potentiel d'une matière attirante fictive, dont la densité serait égale à $\dfrac{f}{4\pi}$. On a alors :

$$\int \frac{du}{dn} d\omega = 0,$$

si l'on a, comme je l'ai supposé,

$$\int f d\tau = 0.$$

Nous déterminerons ensuite la fonction $v_0 - u$ par les conditions :

$$\Delta(v_0 - u) = 0, \qquad \frac{d(v_0 - u)}{dn} = -\frac{du}{dn}.$$

La condition

$$\int \frac{du}{dn} d\omega = 0$$

étant remplie, la méthode de Neumann nous fera connaître $v_0 - u$ et par conséquent v_0.

Nous pouvons d'ailleurs ajouter à la solution de Neumann une constante arbitraire; nous choisirons cette constante de telle façon que :

$$\int v_0 d\omega = 0.$$

Nous pourrons alors déterminer v_1 par la méthode de Neumann à l'aide des conditions :

$$\Delta v_1 = 0, \qquad \frac{dv_1}{dn} + v_0 = 0.$$

Nous ajouterons à la solution de Neumann une constante arbitraire, choisie de telle sorte que :

$$\int v_1 d\omega = 0\,;$$

et ainsi de suite.

Je dis maintenant que la série :

$$v = v_0 + hv_1 + h^2 v_2 + \dots \tag{1}$$

est uniformément convergente si h est assez petit.

Soit en effet μ le maximum de $|v_0|$; nous aurons, d'après le théorème du § précédent :

$$|v_1| < 2H\mu, \quad |v_2| < 4H^2\mu, \quad \dots \quad |v_n| < (2H)^n\mu, \quad \dots .$$

La série converge donc uniformément, pourvu que :

$$h < \frac{1}{2H}.$$

Il résulte de là que la somme de la série, c'est-à-dire la fonction v, est continue dans tout le domaine D et sur sa frontière.

Étudions maintenant les dérivées

$$\frac{dv}{dx}, \quad \frac{d^2v}{dx^2}, \quad \dots$$

et pour cela reprenons les fonctions G', G'', introduites à la fin du § précédent. Nous trouverons, en appelant v'_i la valeur de v_0 au point x', y', z' :

$$\frac{dv'_i}{dx'} = \int G' v_{i-1}\, d\omega, \qquad \frac{d^2 v'_i}{dx'^2} = -\int G'' v_{i-1}\, d\omega.$$

Comme les fonctions G' et G'' sont limitées, on voit que les séries :

$$(2) \qquad \left\{ \begin{array}{l} \dfrac{dv_0}{dx} + h\dfrac{dv_1}{dx} + h^2\dfrac{dv_2}{dx} + \dots \\[2ex] \dfrac{d^2v_0}{dx^2} + h\dfrac{d^2v_1}{dx^2} + h^2\dfrac{d^2v_2}{dx^2} + \dots \end{array} \right.$$

sont uniformément convergentes. Il en serait de même d'ailleurs des séries qui procéderaient suivant d'autres dérivées des fonctions v_i.

Il résulte de là que les deux séries (2) représentent les dérivées

$$\frac{dv}{dx} \quad \text{et} \quad \frac{d^2v}{dx^2},$$

et on en conclut aisément l'équation :

$$\Delta v + f = 0.$$

Mais il y a entre les séries (1) et (2) une différence essentielle : La série (1) est uniformément convergente dans le domaine D; les séries (2) sont uniformément convergentes, non pas dans le domaine

D, mais dans tout domaine intérieur à D. (Ou plûtot je n'ai pas démontré qu'elles le soient dans le domaine D).

Il résulte de là que les dérivées de v sont continues à l'intérieur de D, mais que nous ne pouvons pas affirmer qu'elles le soient encore sur la frontière.

Nous ne sommes donc pas certains que l'expression $\frac{dv}{dn}$ ait un sens et encore moins que la condition à la limite :

$$\frac{dv}{dn} + hv = 0 \tag{3}$$

soit remplie.

En revanche nous pouvons affirmer que u étant une fonction quelconque continue ainsi que ses dérivées du 1^er^ ordre, on aura :

$$\int u f d\tau + \int v \Delta u d\tau = \int v\left(hu + \frac{du}{dn}\right) d\omega. \tag{4}$$

C'est ce que j'ai appelé à la fin du § VI la *condition modifiée.* Elle est évidemment équivalente à la condition (3) au point de vue physique.

Si donc on remplace dans les données du problème la condition (3) par la condition modifiée, ce problème peut être regardé comme résolu, pourvu que

$$h < \frac{1}{2H}.$$

Supposons maintenant

$$h > \frac{1}{2H}.$$

Soit h_0 un nombre positif, plus petit que $\frac{1}{2H}$, et soit:

$$h = h_0 + \eta.$$

Cherchons à développer v suivant les puissances de η et soit:

$$v = v_0 + \eta v_1 + \eta^2 v_2 + \ldots. \tag{5}$$

On devra avoir:

$$\Delta v_0 + f = 0, \qquad \Delta v_1 = \Delta v_2 = \ldots = 0 \tag{6}$$

et

$$\frac{dv_0}{dn} + h_0 v_0 = 0,\ \frac{dv_1}{dn} + h_0 v_1 + v_0 = 0,\ \frac{dv_2}{dn} + h_0 v_2 + v_1 = 0, \ldots. \tag{7}$$

Les conditions (7) pourront être remplacées par les conditions modifiées correspondantes.

Comme h_0 est plus petit que $\frac{1}{2H}$, les équations (6) et (7) détermineront les fonctions v_0, v_1, ...

Supposons que

$$|v_0| < g;$$

on aura, d'après un théorème démontré au § VI:

$$|v_1| < \frac{g}{h_0}, \quad |v_2| < \frac{g}{h_0^2}, \ldots \quad |v_n| < \frac{g}{h_0^n}, \ldots.$$

Ces inégalités seront encore vraies quand on substituera aux conditions (7) les conditions modifiées correspondantes, puisque nous avons vu que cette substitution n'empêche pas les théorèmes du § VI de s'appliquer.

La série (5) converge donc uniformément, pourvu que

$$\eta < h_0.$$

On en déduirait comme plus haut que le problème peut être regardé comme résolu, pourvu que

$$\eta < h_0,$$

ou que

$$h < 2h_0$$

ou que

$$h < \frac{1}{H}.$$

Si h est plus grand que $\frac{1}{H}$, on prendra h_0 plus petit que $\frac{1}{H}$, mais aussi voisin qu'on voudra de $\frac{1}{H}$; on posera :

$$h = h_0 + \eta,$$

on développera v suivant les puissances de η et on déterminera les coefficients par les équations (6) et (7).

Cette détermination sera possible, puisque h_0 est plus petit que $\frac{1}{H}$ et la série convergera, pourvu que

$$\eta < h_0.$$

Le problème sera donc résolu, pourvu que

$$h < \frac{2}{H};$$

et ainsi de suite.

On voit qu'en continuant de la sorte on résoudra le problème quelle que soit la valeur positive de h.

Ce procédé n'est autre chose que celui de la continuation analytique.

Considérant v comme fonction de h, nous avons fait voir que cette fonction est holomorphe dans un cercle ayant pour centre l'origine et pour rayon $\frac{1}{2H}$. Prenant, sur l'axe des quantités réelles positives, un point h_0 situé à l'intérieur de ce cercle, nous avons vu que la fonction v est encore holomorphe à l'intérieur d'un cercle ayant ce point pour centre et passant par l'origine, et ainsi de suite.

Nous avons supposé au début que

$$\int f\, d\tau = 0.$$

Cette restriction n'a rien d'essentiel.

Soit en effet à trouver une fonction v satisfaisant aux conditions :

$$\frac{dv}{dn} + hv = 0, \qquad \Delta v + f = 0,$$

la fonction f étant quelconque; soit :

$$\int f\, d\tau = A, \qquad A \neq 0.$$

Soit ensuite v' une fonction telle que

$$\frac{dv'}{dn} + hv' = 0$$

et d'ailleurs quelconque; je suppose seulement que

$$\int \Delta v'\, d\tau = bA$$

ne soit pas nul. On aura alors :

$$\int (\Delta v' - bf)\, d\tau = 0.$$

On pourra donc trouver une fonction v'' telle que

$$\frac{dv''}{dn} + hv'' = 0, \qquad \Delta v'' + \left(f - \frac{1}{b}\Delta v'\right) = 0;$$

et alors, en posant :

$$v = v'' - \frac{v'}{b},$$

on aura :

$$\frac{dv}{dn} + hv = 0, \qquad \Delta v + f = 0,$$

et le problème sera résolu.

§ X.

Refroidissement des corps.

Soit maintenant à trouver une fonction v satisfaisant à la double condition :

$$(1) \qquad \Delta v + \xi v + f = 0,$$

$$(2) \qquad \frac{dv}{dn} + hv = 0.$$

Proposons-nous de développer v suivant les puissances de ξ, et soit :

$$(3) \qquad v = v_0 + v_1 \xi + v_2 \xi^2 + \dots.$$

Les fonctions v_m devront être déterminées par les conditions :

$$(4) \qquad \Delta v_0 + f = 0, \quad \Delta v_1 + v_0 = 0, \quad \Delta v_2 + v_1 = 0, \dots$$

jointes aux conditions aux limites :

$$(5) \qquad \frac{dv_0}{dn} + hv_0 = 0, \quad \frac{dv_1}{dn} + hv_1 = 0, \dots.$$

La détermination d'une fonction v_m par des conditions de la forme :

$$\Delta v_m + v_{m-1} = 0, \qquad \frac{dv_m}{dn} + hv_m = 0,$$

où v_{m-1} est déjà connue, est précisément le problème qui a été traité dans le § précédent.

Il s'agit maintenant de reconnaître si la serie (3) est convergente, et pour cela je vais employer la méthode de Schwarz et former les intégrales suivantes :

$$W_{m.n} = \int v \quad v_n d\tau,$$

$$V_{m.n} = h \int v_m v_n d\omega + \int \left(\frac{dv_m}{dx} \frac{dv_n}{dx} + \frac{dv_m}{dy} \frac{dv_n}{dy} + \frac{dv_m}{dz} \frac{dv_n}{dz} \right) d\tau.$$

Ces intégrales jouissent des propriétés caractéristiques des intégrales de Schwarz, c'est-à-dire que l'on a :

$$W_{m.n} = W_{m+1.n} = W_{m+1.n-1} = W_{m+n.0} = W_{m+n},$$

$$W_m > 0,$$

$$\frac{W_1}{W_0} < \frac{W_2}{W_1} < \dots.$$

Toutes ces propriétés seraient presque immédiatement évidentes si l'on avait demontré que les fonctions v_m satisfont effectivement aux conditions (5). Malheureusement il n'en est pas ainsi; tout ce que nous savons, c'est que ces fonctions satisfont à la « condition modifiée » correspondante. Il y a là une difficulté dont je n'ai pas réussi à triompher complètement. Il n'est même pas établi rigoureusement que l'intégrale $V_{m.n}$ a un sens.

Quoi qu'il en soit, je me contenterai de l'aperçu suivant :

La fonction v_m satisfait à la condition modifiée; je dis qu'on peut en déduire la conséquence suivante :

Soit S une surface intérieure à D, mais très voisine de la frontière de D.

Soit u une fonction quelconque, finie et continue ainsi que ses dérivées du 1[er] ordre, tant à l'intérieur de D que sur sa frontière.

L'intégrale

$$\int u \frac{d v_m}{d n} d\omega \tag{6}$$

étendue à S a un sens; je dis qu'elle tend vers

$$-\int u v_m d\omega \tag{7}$$

étendue à la frontière de D quand S se rapproche indéfiniment de cette frontière.

En effet, l'intégrale (6) est égale à l'intégrale

$$\int v_m \frac{d u}{d n} d\omega + \int (u \Delta v_m - v_m \Delta u) d\tau \tag{8}$$

étendue aux éléments $d\omega$ de la surface S et aux éléments $d\tau$ du volume limité par cette surface. D'autre part, en vertu de la condition modifiée, l'intégrale (7) est égale à cette même intégrale (8) étendue à la frontière de D et au domaine D tout entier.

Si nous faisons $u = v_n$, nous aurons :

$$\lim \int_S v_n \frac{d v_m}{d n} d\omega = -h \int v_n v_m d\omega. \tag{9}$$

Il est vrai qu'on n'a pas le droit de faire $u = v_n$, puisque nous ne savons pas si les dérivées de v_n sont continues sur la frontière de D. Mais on peut observer que v_n peut être développé en une série uniformément convergente, dont tous les termes auraient leurs dérivées du 1[er] ordre continues.

L'équation (9) est donc vraisemblablement satisfaite, bien que l'on puisse encore chicaner sur ce point.

De l'équation (9) on déduira sans peine les propriétés des intégrales W et V enoncées plus haut.

Il en résulte que, si $|\xi|$ est assez petit, la série

$$\sqrt{W_0} + \xi \sqrt{W_1} + \xi^2 \sqrt{W_2} + \dots \tag{10}$$

convergera.

D'autre part, si g désigne le maximum de $|f|$, g_0 celui de $|v_0|$, ... g_n celui de $|v_n|$; si l'on pose, comme au § VI,

$$\lambda = \frac{l^2}{6} + \frac{l}{3h};$$

on aura :

$$g_n < \lambda^{n+1} g.$$

D'où il suit que la série (3) converge uniformément dans tout le domaine D, pourvu que

$$|\xi| < \frac{1}{\lambda}.$$

Mais cela ne nous suffit pas; il nous faudrait établir que la série (3) convergera toutes les fois que la série (10) converge elle même.

L'inégalité de Schwarz:

$$U_n^2 < W_{2n-2} \int G^2 d\tau$$

subsiste en désignant par G la fonction de Green généralisée que l'on formerait en donnant aux constantes ξ et h les valeurs zéro et h.

Tant que le point x', y', z' ne se rapproche pas indéfiniment de la frontière de D, l'intégrale $\int G^2 d\tau$ reste limitée, ce qui nous permet d'affirmer ce qui suit.

Toutes les fois que la série (10) converge, il en est de même de la série (3); et la convergence est uniforme, si non dans tout le domaine D, au moins dans tout domaine intérieur à D.

Il est probable que l'intégrale $\int G^2 d\tau$ ne devient pas infinie quand le point x', y', z' se rapproche de la frontière; car il est aisé de constater que cela est vrai pour la sphère. S'il en est ainsi, la convergence de la série (3) est uniforme dans tout le domaine D.

Cela posé, soit V une fonction quelconque, telle que

$$\int V d\tau = 0.$$

On aura évidemment :

$$\frac{h\int V^2 d\omega + \int \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau}{\int V^2 d\tau} > \frac{\int \sum \left(\frac{dV}{dx}\right)^2 d\tau}{\int V d\tau^2} > \frac{16}{9 l^2}.$$

On en conclurait, comme dans le cas de $h = \infty$, que, si l'on a :

$$f = \alpha_1 f_1 + \alpha_2 f_2 + \ldots + \alpha_p f_p,$$

on pourra disposer des coefficients arbitraires α de telle façon que le rayon de convergence de la série (3) soit plus grand que L_p; L_p étant un nombre qui croît indéfiniment avec p.

Les autres résultats de la première partie de ce travail s'en déduiraient immédiatement; on verrait que la fonction v est méromorphe dans tout le plan, qu'elle n'a que des pôles simples et que ses résidus satisfont à des conditions de la forme :

$$\Delta u + k u = 0, \qquad \frac{du}{dn} + h u = 0;$$

ce qui démontre l'existence des fonctions harmoniques.

On voit que je n'ai pu parvenir dans le cas général à des résultats aussi satisfaisants que dans le cas $h = \infty$; on voit combien de lacunes subsistent encore. Je ne m'efforcerai pas davantage de les combler; la première chose à faire, en effet, serait de faire une étude plus approfondie de la méthode de Neumann, encore imparfaite sous bien des rapports.

Cela m'entraînerait trop loin.

Neumann a dit, en effet, dans son ouvrage sur le potentiel (page 153) : « Für die vierte Eigenschaft bin ich einen Beweis von « hinlänglicher Strenge mitzutheilen, vorläufig nicht im Stande ».

J'ai cru cependant que ces résultats, si incomplets qu'ils soient, n'étaient pas absolument dénués d'intérêt, et je me suis décidé à les publier. Je serais heureux si cette publication pouvait provoquer de nouvelles recherches sur ce sujet.

§ XI.

Méthode de Cauchy.

Dans les deux premières parties de ce travail, j'ai démontré l'existence des fonctions harmoniques; mais, si dans la première partie (§§ I-V), où je me suis occupé du cas de $h = \infty$, je suis arrivé à une démonstration parfaitement satisfaisante, il n'en a pas été de même dans la seconde partie (§§ VI-X), où je me suis occupé du cas de h quelconque.

Aussi, pour ce qui me reste à dire, je me bornerai au cas de $h = \infty$, bien que les résultats soient probablement vrais dans tous les cas.

Une fonction harmonique U_i est alors définie par les conditions suivantes :

$$\Delta U_i + k_i U_i = 0 \qquad \text{à l'intérieur de } D,$$

$$U_i = 0 \qquad \text{à la frontière,}$$

$$\int U_i^2 d\tau = 1.$$

On peut se proposer de développer une fonction arbitraire f en une série procédant suivant les fonctions harmoniques, de telle sorte que l'on ait :

$$f = \sum A_i U_i.$$

Si le développement est possible, il est aisé de démontrer qu'on aura :

$$A_i = \int U_i f \, d\tau.$$

De nombreuses analogies nous donnent lieu de penser que le développement est toujours possible, mais une démonstration complète et rigoureuse n'a pu encore être donnée; je voudrais terminer ce mémoire par quelques résultats relatifs à cette question.

L'idée qui se présente le plus naturellement à l'esprit, c'est d'employer une méthode dont Cauchy a fait souvent usage, en l'appropriant bien entendu au problème particulier que l'on a en vue.

Reprenons la fonction méromorphe dont il a été question dans les §§ I-V :

$$v = [f, \xi] = v_0 + v_1 \xi + v_2 \xi^2 + \dots .$$

Nous avons vu que cette fonction admet une infinité de pôles simples

$$\xi = k_i$$

et que le résidu correspondant est

$$- A_i U_i.$$

Supposons maintenant que $|\xi|$ croisse indéfiniment. L'argument de ξ étant constant et *différent de zéro,* tout nous porte à croire que la valeur asymptotique de v sera égale à $\frac{f}{\xi}$; je veux dire par là que le rapport

$$-\frac{v\xi}{f}$$

tendra vers l'unité.

Je le démontrerai plus loin pour tous les arguments compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$; mais cela est probablement vrai pour tous les arguments, sauf pour l'argument zéro.

Il est clair d'ailleurs que ce rapport ne peut pas tendre vers 1 quand l'argument de ξ demeure constant et égal à zéro; car la fonction v devient alors infinie une infinité de fois.

Construisons maintenant une infinité de cercles C_1, $C_2, \ldots C_i, \ldots$. Ces cercles auront pour centre l'origine et leurs rayons iront en croissant indéfiniment avec l'indice i; il ne devront passer par aucun des pôles de la fonction v; nous pourrons, par exemple, prendre pour rayon du cercle C_i:

$$\frac{k_i + k_{i+1}}{2}.$$

Tout nous porte à croire que, si les rayons de ces cercles sont convenablement choisis, on pourra assigner une limite supérieure au module de toutes les valeurs que peut prendre le produit $v\xi$ aux différents points de ces différents cercles; de telle façon qu'on aura sur un quelconque des cercles C_i:

$$|v\xi| < M,$$

M étant une constante ne dépendant pas de l'indice i.

Ce point serait sans doute le plus délicat à établir.

Supposons donc que l'on ait démontré les deux propositions que je viens d'énoncer comme probables; voici ce qui arrivera:

Soit J_i l'intégrale:

$$J_i = \frac{1}{2i\pi}\int v\,d\xi$$

prise le long du cercle C_i. On aura:

$$\lim J_i = -f,$$

quand l'indice i, et par conséquent le rayon du cercle C_i, croîtront indéfiniment.

D'autre part, en vertu du théorème de Cauchy:

$$-J_i = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \ldots + A_i U_i,$$

car les pôles de v intérieurs à C_i sont les pôles k_1, k_2, $\ldots$ k_i.

On en conclut que la fonction f est égale à la somme de la série

$$A_1 U_1 + A_2 U_2 + \dots \text{ ad inf.}$$

La démonstration de la possibilité du développement est ainsi ramenée à celle des deux propositions suivantes :

1° La valeur asymptotique de v est égale à $-\frac{f}{\xi}$ quand le module de ξ croît indéfiniment, son argument demeurant constant et différent de zéro.

2° On peut choisir les rayons des cercles C_i de telle façon que l'on ait toujours :

$$|v\xi| < M.$$

Je n'ai pu arriver à établir ces deux propositions; j'ai donc dû modifier beaucoup la méthode de Cauchy, mais je n'ai pu parvenir à démontrer la possibilité du développement que dans certains cas particuliers. C'est sans doute à la méthode de Cauchy qu'il faudra revenir quand on voudra étendre ce résultat au cas général.

§ XII.

Valeur asymptotique de v.

Je suppose donc que ξ conserve un argument constant compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$ et que son module croisse indéfiniment et je me propose de rechercher comment se comporte la fonction

$$v = [f, \xi].$$

La constante ξ, ayant son argument compris entre $\frac{\pi}{2}$ et $\frac{3\pi}{2}$, aura sa partie réelle négative. Posons :

$$\xi = -\alpha^2, \qquad \alpha = \beta + i\gamma;$$

et choisissons le signe de α de façon que sa partie réelle β soit positive.

Soit G la fonction de Green généralisée en donnant aux constantes ξ et h les valeurs ξ et ∞. L'existence de cette fonction résulte des considérations développées dans les §§ I-V.

Soit v' la valeur de v au point x', y', z'; r la distance du point x, y, z au point x', y', z'; soit A le maximum du module de

$$\frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r}$$

quand le point x, y, z est sur la frontière de D. D'après ce que nous avons vu au § VII, on aura :

$$v' = -\int G f d\tau$$

$$\left| G - \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} \right| < A.$$

Or, r étant réel, on a :

$$\left| \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} \right| = \frac{e^{-\beta r}}{4\pi r};$$

et, comme β est positif, ce module décroît quand r augmente.

On aura donc :

$$A = \frac{e^{-\beta r_0}}{4\pi r_0},$$

r_0 étant la plus courte distance du point x', y', z' à la frontière de D.

On aura donc :

$$G = \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} + \theta \frac{e^{-\beta r_0}}{4\pi r_0},$$

θ étant une quantité dont le module est plus petit que 1. On aura donc :

$$v' = \int f \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} d\tau + \frac{e^{-\beta r_0}}{4\pi r_0} \int \theta f d\tau.$$

La seconde intégrale a son module plus petit que gT, g étant la plus grande valeur de $|f|$ et T le volume de D. J'aurai donc :

$$v' = \int f \frac{e^{-\alpha r}}{4\pi r} d\tau + \frac{e^{-\beta r_0}}{4\pi r_0} \theta' g T, \tag{1}$$

le module de θ' étant inférieur à 1.

Considérons une sphère de rayon r ayant son centre en x', y', z'; soit $r^2 d\sigma$ un élément de la surface de cette sphère ayant pour coordonnées x, y, z : de sorte que $d\sigma$ soit l'angle solide sous lequel cet élément est vu du point x', y', z'; nous pourrons écrire :

$$v' = \int \frac{f.r}{4\pi} e^{-\alpha r} dr d\sigma + e^{-\beta r_0} \theta' M,$$

en posant pour abréger :

$$M = \frac{gT}{4\pi r_0}.$$

L'intégration devra être étendue à tous les éléments de volume $r^2 dr d\sigma$ qui sont à l'intérieur de D; si l'on préfère, on peut l'étendre à l'espace tout entier, mais en convenant, puisque la fonction f est arbitraire et n'a encore été définie qu'à l'intérieur de D, en convenant, dis-je, de faire $f = 0$ à l'extérieur de D.

Si alors nous posons :

$$\varphi(r) = \int \frac{f r d\sigma}{4\pi},$$

l'intégrale étant étendue à tous les éléments de la sphère de rayon r, nous aurons :

$$v' = \int_0^\infty \varphi(r) e^{-\alpha r} dr + e^{-\beta r_0} \theta' M.$$

Il importe de remarquer que $\varphi(r)$ (de même que M) ne dépend nullement de la constante ξ.

Supposons que la fonction f soit analytique dans le voisinage du point x', y', z'; il arrivera que φ sera aussi une fonction analytique quand r sera voisin de zéro. Nous aurons alors, pour r inférieur à une certaine limite r_1 :

$$\varphi(r) = A_1 r + A_2 r^2 + \ldots$$

et il est manifeste que A_1 n'est autre chose que f', valeur de f au point x', y', z'.

Nous pourrons alors trouver une quantité positive B, telle que

$$|\varphi(r) - A_1(r)| < Br^2.$$

Il vient alors :

$$v' = \int_0^\infty A_1 r e^{-\alpha r} dr + \int_0^\infty B\theta'' r^2 e^{-\alpha r} dr + e^{-\beta r_0}\theta' M,$$

le module de θ'' étant plus petit que 1; ou bien :

$$v' = \frac{A_1}{\alpha^2} + \frac{2\theta_1 B}{\alpha^3} + e^{-\alpha r_0}\theta_2 M,$$

θ_1 et θ_2 ayant leurs modules plus petits que 1; et en effet $e^{-\beta r_0}$ a même module que $e^{-\alpha r_0}$.

Il résulte de là que, pour $|\xi| = \infty$,

$$\lim v'\xi = \lim - v'\alpha^2 = - A_1 = -f';$$

d'où :

$$\lim v\xi = -f. \qquad \text{C. Q. F. D.}$$

J'ai supposé plus haut que la fonction f était analytique dans le voisinage de x', y', z'; mais cette restriction n'a rien d'essentiel; il suffit que $\varphi(r)$ satisfasse aux conditions de Dirichlet.

Le même résultat peut s'étendre au cas où le domaine D n'a que deux dimensions.

Soit en effet dans ce cas r la distance du point x, y au point x', y'; et soit :

$$J(r) = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{e^{-\alpha\sqrt{r^2+z^2}}}{4\pi\sqrt{r^2+z^2}}\, dz.$$

La fonction J ainsi définie est étroitement apparentée aux fonctions de Bessel; elle satisfait à l'équation $\Delta J + \xi J = 0$, et sa différence avec $\frac{-\log r}{2\pi}$ demeure finie. Appelons alors G la fonction de Green généralisée, c'est-à-dire une fonction qui : à l'intérieur de D satisfait à l'équation :

$$\Delta G + \xi G = 0,$$

s'annule à la frontière, et est telle que la différence :

$$G + \frac{\log r}{2\pi}$$

reste finie. Alors le maximum de

$$|G - J|$$

sera égal à $|J(r_0)|$.

On en conclut :

$$v' = \int G f\, d\tau = \int J(r) f\, d\tau + \int \theta g J(r_0)\, d\tau \qquad (|\theta| < 1)$$

ou :

$$v' = \int\int \frac{e^{-\alpha\rho}}{4\pi\rho} f\, d\tau\, dz + \theta' g T \int \frac{e^{-\alpha\rho_0}\, dz}{4\pi\rho_0} \qquad (|\theta'| < 1)$$

— en posant pour abréger :

$$\rho = \sqrt{r^2 + z^2}, \qquad \rho_0 = \sqrt{r_0^2 + z^2}$$

— ou enfin :

$$v' = \int\int \frac{e^{-\alpha\rho}}{4\pi\rho} f\, d\tau\, dz + \theta' M e^{-\alpha r_0},$$

M étant une constante indépendante de ξ. Cette équation étant tout à fait de même forme que l'équation (1) on en tirera la même conclusion, c'est-à-dire que :

$$\lim v\xi = -f.$$

Cela suppose toujours que la partie réelle de ξ est négative et tend vers $-\infty$.

§ XIII.

Application du théorème de Mittag-Leffler.

Cherchons une limite supérieure de $|U_i|$ et de A_i. Nous avons :

$$\Delta U_i + k_i U_i = 0,$$

et par conséquent, en désignant par U_i' la valeur de U_i au point x', y', z' et par G la fonction de Green ordinaire, nous pourrons écrire :

$$U_i' = k_i \int G\, U_i\, d\tau;$$

ou en vertu de l'inégalité de Schwarz:

$$\left[\int G\, U_i\, d\tau\right]^2 < \int U_i^2\, d\tau \int G^2\, d\tau.$$

Or,

$$\int U_i^2\, d\tau = 1.$$

Il vient donc :

$$|U_i| < k_i \sqrt{\int G^2 d\tau}.$$

Or cette quantité

$$\sqrt{\int G^2 d\tau}$$

est elle-même, comme nous l'avons vu dans les §§ I et II, plus petite qu'un certain nombre Q qui ne dépend que de la plus grande dimension l du domaine D. On a ainsi :

$$|U_i| < k_i Q.$$

D'autre part nous avons :

$$A_i = \int f U_i d\tau;$$

d'où, en vertu de l'inégalité de Schwarz :

$$A_i^2 < \int f^2 d\tau \int U_i^2 d\tau.$$

Si nous posons :

$$\int f^2 d\tau = M^2,$$

cette inégalité peut s'écrire :

$$|A_i| < M.$$

D'autre part :

$$\int v_n U_i d\tau = k_i^{-n} \int f U_i d\tau,$$

d'où :

$$\left|\int v_n U_i d\tau\right| < k_i^{-n} M.$$

Si donc il existe une fonction, f^*, telle que :

$$v^* = [f^*, \xi] = v^*_0 + v^*_1 \xi + v^*_2 \xi^2 + \ldots$$

et que

$$v^*_n = f,$$

on pourra trouver une constante M^*, telle que :

$$|A_i| < k_i^{-n} M^*.$$

C'est ce que nous exprimerons en disant que A_i est au plus de l'ordre de grandeur de k_i^{-n}.

Or la fonction f^* existera, pourvu que deux conditions soient remplies :

1° La première c'est que f ait des dérivées d'ordre $2n + 2$.

2° La seconde c'est que f s'annule à la frontière ainsi que Δf, $\Delta^2 f = \Delta\Delta f$, $\Delta^3 f = \Delta\Delta^2 f$, ... jusqu'à $\Delta^n f$.

Il suffit en effet de prendre :

$$v^*_{n-1} = -\Delta f,\ v^*_{n-2} = -\Delta v^*_{n-1} = \Delta^2 f, \ldots v^*_0 = (-1)^n \Delta^n f;\ f^* = -\Delta v^*_0.$$

Si ces deux conditions sont remplies, A_i est au plus de l'ordre de k_i^{-n} et $A_i U_i$ de l'ordre de k_i^{1-n}.

Or k_i est au moins de l'ordre de grandeur de $i^{\frac{2}{3}}$ si D a trois dimensions et au moins de l'ordre de i si D a deux dimensions.

Je conclus que $A_i U_i$ est au plus de l'ordre de i^μ ; μ étant un nombre donné par le tableau suivant :

Dans la première colonne du tableau j'écris les conditions qui sont remplies à la frontière par la fonction f que je suppose d'ailleurs analytique.

Dans la seconde colonne je porte la valeur de μ, en supposant que D ait trois dimensions, et dans la troisième colonne j'écris la valeur de μ en supposant que D n'ait que deux dimensions :

$$\left|\begin{array}{c|c|c} \text{aucune condition} & \frac{2}{3} & 1 \\ f=0 & 0 & 0 \\ f=\Delta f=0 & -\frac{2}{3} & -1 \\ f=\Delta f=\Delta\Delta f=0 & -\frac{4}{3} & -2 \end{array}\right|.$$

Il résulte de là que la série

$$\sum A_i U_i$$

est absolument convergente si à la frontière f, Δf et $\Delta^2 f$ s'annulent.

La série

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i}$$

est absolument convergente si f et Δf s'annulent.

La série

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i^2}$$

est absolument convergente si f s'annule à la frontière.

Enfin la série

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i^3}$$

couverge dans tous les cas.

Il importe d'observer que ces conditions de convergence sont suffisantes, mais qu'elles sont loin d'être nécessaires. En réalité A_i

et U_i décroissent sans aucun doute beaucoup plus rapidement que ne l'indiquerait le tableau précédent; mais je n'ai pu le démontrer.

Appliquons alors à la fonction v le théorème de Mittag-Leffler. Nous voyons d'abord que la série :

$$\sum \frac{A_i U_i \xi^2}{k_i^2(\xi - k_i)}$$

converge dans tous les cas; que la série :

$$\sum \frac{A_i U_i \xi}{k_i(\xi - k_i)}$$

converge si f s'annule à la frontière; et enfin que la série :

$$\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}$$

converge si f et Δf s'annulent.

Nous pouvons donc poser :

1° dans tous les cas :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi^2}{k_i^2(\xi - k_i)} + E(\xi);$$

2° si f s'annule à la frontière :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi}{k_i(\xi - k_i)} + E(\xi);$$

3° si f et Δf s'annulent :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i} + E(\xi);$$

la notation $E(\xi)$ désignant une fonction entière de ξ.

Plaçons-nous donc dans le troisième cas; supposons que f et Δf sont nuls à la frontière et cherchons à déterminer la fonction entière $E(\xi)$.

Soit :

$$E(\xi) = e_0 + e_1 \xi + e_2 \xi^2 + \dots .$$

Soit encore :

$$f^{(k)} = f - A_1 U_1 - A_2 U_2 - \dots - A_k U_k$$

$$v^{(k)} = [f^{(k)}, \xi] = v + \sum_{i=1}^{i=k} \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}$$

et

$$v^{(k)} = v_0^{(k)} + v_1^{(k)} \xi + v_2^{(k)} \xi^2 + \dots .$$

Posons de plus :

$$W_{m.n}^{(k)} = \int v_m^{(k)} v_n^{(k)} d\tau, \qquad E_{m.n} = \int e_m e_n d\tau.$$

On aura :

$$e_m = \lim v_m^{(k)} \qquad (k = \infty)$$

et par conséquent :

$$E_{m.n} = \lim W_{m.n}^{(k)}. \qquad (k = \infty)$$

D'autre part les théorèmes de Schwarz sont vrais de $W_{m.n}^{(k)}$, c'est-à-dire que :

$$W_{m.n}^{(k)} = W_{m+1.n-1}^{(k)},$$

ce qui permet de poser :

$$W_{m,n}^{(k)} = W_{m+n}^{(k)}.$$

On aura donc aussi

$$E_{m.n} = E_{m+1.n-1},$$

ce qui permettra de poser:

$$E_{m.n} = E_{m+n}.$$

On aura d'ailleurs:

$$W_n^{(k)} > 0$$

$$\frac{W_1^{(k)}}{W_0^{(k)}} < \frac{W_2^{(k)}}{W_1^{(k)}} < \frac{W_3^{(k)}}{W_2^{(k)}} < \dots.$$

On aura donc de même:

$$E_n > 0$$

$$\frac{E_1}{E_0} < \frac{E_2}{E_1} < \frac{E_3}{E_2} < \dots.$$

D'autre part, la fonction $E(\xi)$ étant entière, la série

$$e_0 + e_1\xi + e_2\xi^2 + \dots$$

convergera quel que soit ξ, mais comme e_m dépend de x, y, z on peut se demander si la convergence est uniforme.

Soit L_p le nombre défini au § III; on aura, d'après le § IV:

$$v = \frac{P}{D};$$

D étant un polynôme de degré $p - 1$ en ξ, dont les coefficients sont constants et qui admet comme racines tous les nombres k_i plus petits que L_p.

Quant à P c'est une série ordonnée suivant les puissances de

ξ dont les coefficients dépendent de x, y et z et qui converge uniformément pourvu que $|\xi| < L_p$.

Considérons maintenant la somme

$$-\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}$$

et partageons-la en deux :

$$\eta^{(K)} = -\sum_{i=1}^{i=K} \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}$$

et

$$\zeta^{(K)} = -\sum_{i=K+1}^{i=\infty} \frac{A_i U_i}{\xi - k_i},$$

le nombre K étant choisi de telle sorte que les K premiers nombres k_i soient précisément ceux qui sont plus petits que L_p.

Alors $\eta^{(K)} D$ est un polynôme entier.

Quant à $\zeta^{(K)}$, c'est une fonction de ξ qui peut être développée suivant les puissances de ξ; la série ainsi obtenue converge uniformément pourvu que $|\xi| < L_p$.

En effet, le coefficient de ξ^q est égal à

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i^q},$$

qui est plus petit en valeur absolue que

$$\sum \left| \frac{A_i U_i}{k_i} \right| L_p^{1-q},$$

puisque

$$k_i > L_p \qquad \text{pour } i > K.$$

Or,

$$E(\xi) D = P + \eta^{(K)} D + \zeta^{(K)} D$$

sera développable en une série ordonnée suivant les puissances de ξ et dont la convergence sera uniforme pourvu que $|\xi| < L_p$.

Or cette série est divisible par D puisque $E(\xi)$ est une fonction entière. Donc, la série $E(\xi)$ converge aussi uniformément pour $|\xi| < L_p$; c'est-à-dire que la convergence est toujours uniforme puisque L_p peut être pris aussi grand que l'on veut.

Donc la série

$$\int e_0 e_0 \, d\tau + \xi \int e_0 e_1 \, d\tau + \xi^2 \int e_0 e_2 \, d\tau + \ldots$$

ou

$$E_0 + \xi E_1 + \xi^2 E_2 + \ldots$$

convergera toujours, quelque grand que soit ξ.

Donc

$$\frac{E_{n+1}}{E_n}$$

doit tendre vers zéro quand n croît indéfiniment. Mais ce rapport va toujours en croissant, d'après les inégalités démontrées plus haut; il faut donc que l'on ait :

$$e_1 = e_2 = \ldots = 0, \qquad E(\xi) = e_0.$$

Il en résulte

$$v_1 = \sum \frac{A_i U_i}{k_i^2}, \qquad v_0 = \sum \frac{A_i U_i}{k_i} + e_0.$$

La série :

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i},$$

étant uniformément convergente d'après les hypothèses faites, on aura :

$$\int (v_0 - e_0) G \, d\tau = \sum \int \frac{A_i U_i}{k_i} G \, d\tau,$$

G étant la fonction de Green ordinaire; et par conséquent, puisque

$$\Delta \frac{A_i U_i}{k_i^2} = - \frac{A_i U_i}{k_i},$$

on aura aussi :

$$\Delta v_1 = \Delta \sum \frac{A_i U_i}{k_i^2} = e_0 - v_0.$$

Mais on sait que

$$\Delta v_1 + v_0 = 0.$$

On a donc:

$$e_0 = E(\xi) = 0,$$

et enfin :

$$v = - \sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}.$$

Supposons maintenant que Δf ne s'annule plus, mais que f s'annule à la frontière; on aura :

$$v = - \sum \frac{A_i U_i \xi}{k_i(\xi - k_i)} + E(\xi),$$

$$E(\xi) = e_0 + e_1 \xi + e_2 \xi^2 + \ldots.$$

La comparaison des développements des deux membres nous apprend tout-de-suite que :

$$e_0 = v_0.$$

Cela posé, considérons la fonction :

$$[v_0, \xi] = v_1 + v_2 \xi + v_3 \xi^2 + \ldots.$$

On pourra lui appliquer le théorème précédent, puisque v_0 et $\Delta v_0 = -f$ s'annulent à la frontière. On aura donc :

$$[v_0, \xi] = - \sum \frac{A_i U_i}{k_i(\xi - k_i)}.$$

On a donc:

$$v = \xi[v_0, \xi] + E(\xi).$$

La comparaison des développements des deux membres suivant les puissances de ξ donne tout-de-suite:

$$E(\xi) = v_0.$$

Supposons enfin que f ne s'annule pas à la frontière; on aura:

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi^2}{k_i^2(\xi - k_i)} + E(\xi).$$

Considérons la fonction:

$$[v_1, \xi] = v_2 + v_3\xi + v_4\xi^2 + \ldots.$$

On voit que v_1 et $\Delta v_1 = -v_0$ s'annulent à la frontière. On aura donc:

$$[v_1, \xi] = -\sum \frac{A_i U_i}{k_i^2(\xi - k_i)},$$

d'où:

$$v = \xi^2[v_1, \xi] + E(\xi).$$

La comparaison des développements des deux membres montre que

$$E(\xi) = v_0 + v_1\xi.$$

Pour nous résumer, on aura, dans tous les cas:

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi^2}{k_i^2(\xi - k_i)} + v_0 + v_1\xi.$$

On aura, si f s'annule à la frontière:

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi}{k_i(\xi - k_i)} + v_0,$$

et si f et Δf s'annulent à la frontière :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}.$$

§ XIV.

Possibilité du développement.

Supposons que la série:

$$\sum A_i U_i$$

soit absolument convergente ou semi-convergente, et que la série:

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i}$$

converge absolument; on aura alors, d'après ce qui précède :

$$(1) \qquad v = -\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}.$$

Je dis que la somme de la série :

$$\sum A_i U_i$$

sera égale à f.

En effet reprenons l'égalité (1), multiplions-la par ξ et faisons tendre ξ vers $-\infty$. D'après ce que nous avons vu au § XII, le premier membre tendra vers $-f$.

Pour voir ce qui arrive du second membre, je vais appliquer le théorème d'Abel. Je rappelle d'abord l'énoncé de ce théorème. Soit

$$S = u_1 + u_2 + \dots + u_n + \dots$$

une série absolument convergente ou semi-convergente.

Soit :

$$S_n = u_1 + u_2 + \dots + u_n.$$

Soit ρ_n la plus grande de toutes les quantités

$$|S_{n+1} - S_n|, \ |S_{n+2} - S_n|, \ |S_{n+3} - S_n|, \text{ etc. } \textit{ad inf.}$$

Le nombre ρ_n tendra vers zéro quand n croîtra indéfiniment, puisque la série S converge. Soit maintenant :

$$\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n, \dots$$

une suite de nombres positifs, constamment et indéfiniment décroissants.

Le théorème d'Abel nous apprend que la série :

$$u_1 \alpha_1 + u_2 \alpha_2 + \dots + u_n \alpha_n + \dots$$

est convergente et que le reste de cette série,

$$u_{n+1} \alpha_{n+1} + u_{n+2} \alpha_{n+2} + \dots$$

est plus petit en valeur absolue que $\rho_n \alpha_n$.

Si ξ est négatif, les nombres

$$\frac{-\xi}{k_i - \xi}$$

seront positifs, constamment et indéfiniment décroissants; de plus ils seront plus petits que 1.

Si donc nous posons :

$$S_n = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \dots + A_n U_n$$

et que ρ_n soit, comme plus haut, la plus grande des quantités

$$|S_{n+p} - S_n|,$$

le reste de la série

$$\sum \frac{-A_i U_i \xi}{k_i - \xi}$$

sera plus petit en valeur absolue que

$$\frac{-\rho_n \xi}{k_n - \xi}$$

et par conséquent que ρ_n.

Nous aurons donc :

$$(2) \qquad v\xi = -\frac{A_1 U_1 \xi}{\xi - k_1} - \frac{A_2 U_2 \xi}{\xi - k_2} - \dots - \frac{A_n U_n \xi}{\xi - k_n} + \theta \rho_n,$$

θ étant plus petit que 1 en valeur absolue.

Je dis qu'on peut prendre n assez grand pour que

$$S_n = A_1 U_1 + A_2 U_2 + \dots + A_n U_n$$

diffère aussi peu que l'on veut de f, et, par exemple, pour que

$$|f - S_n|$$

soit plus petit que ε.

En effet, nous choisirons d'abord n assez grand pour que :

$$\rho_n < \frac{\varepsilon}{3}.$$

Le nombre n une fois choisi, nous choisirons $-\xi$ assez grand : 1° pour que la différence

$$|v\xi + f| < \frac{\varepsilon}{3}$$

ce qui est possible, puisque

$$\lim v\xi = -f, \qquad \text{pour } \xi = -\infty;$$

2° pour que la différence

$$\left|\frac{A_1U_1\xi}{\xi-k_1}+\frac{A_2U_2\xi}{\xi-k_2}+\ldots+\frac{A_nU_n\xi}{\xi-k_n}-A_1U_1-A_2U_2-\ldots-A_nU_n\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

c'est-à-dire pour que

$$\left|\sum_{i=1}^{i=n}\frac{A_i\,U_i\,k_i}{\xi-k_i}\right|<\frac{\varepsilon}{3},$$

ce qui est évidemment possible puisque le premier membre de cette inégalité tend vers zéro quand le module de ξ croît indéfiniment.

Il vient donc, en vertu de (2) :

$$|f-S_n|<|v\xi+f|+\left|\sum\frac{A_i\,U_i\,\xi}{\xi-k_i}+\sum A_i\,U_i\right|+\theta\rho_n<\varepsilon.$$

C. Q. F. D.

Supposons maintenant que la série

$$\sum A_i\,U_i$$

soit convergente; la serie :

$$\sum\frac{A_i\,U_i}{k_i}$$

sera aussi convergente, en vertu du théorème d'Abel; mais nous ne savons pas si la convergence sera absolue. Au contraire, la série :

$$\sum\left|\frac{A_i\,U_i}{k_i^2}\right|$$

convergera certainement, car $A_i\,U_i$ tend vers zéro et k_i est au moins de l'ordre $i^{\frac{2}{3}}$; et par conséquent nous pouvons trouver un nombre positif M, tel que

$$\left|\frac{A_i\,U_i}{k_i^2}\right|<\frac{M}{i^{\frac{4}{3}}}.$$

Nous en concluons :

1° que l'on a, par le théorème de Mittag-Leffler :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi}{k_i(\xi - k_i)} + v_0;$$

2° qu'en appliquant le théorème précédent à $[v_0, \xi]$ on a :

$$v_0 = \sum \frac{A_i U_i}{k_i}.$$

Il vient donc :

$$(1^{\text{bis}}) \quad v = -\sum \left(\frac{A_i U_i \xi}{k_i(\xi - k_i)} - \frac{A_i U_i}{k_i} \right) = -\sum \frac{A_i U_i}{\xi - k_i}.$$

L'équation (1^{bis}), étant la même que l'équation (1), conduira au même résultat, c'est-à-dire que

$$f = \sum A_i U_i.$$

Ainsi :

1° *La série*

$$\sum A_i U_i$$

représentera la fonction f toutes les fois qu'elle sera convergente.

Or la série converge si la fonction f est analytique (il suffit même que les dérivées des six premiers ordres soient finies) et si de plus f s'annule à la frontière ainsi que Δf et $\Delta\Delta f$; par conséquent :

2° *La fonction f est développable en série procédant suivant les fonctions harmoniques, si elle est analytique et si elle s'annule à la frontière, ainsi que Δf et $\Delta\Delta f$.*

Je ne veux pas dire que le développement n'est possible que dans ce cas, je crois au contraire qu'il est possible dans tous les cas, mais je n'ai pu le démontrer.

Ce résultat d'ailleurs suffit pour les applications physiques; car si l'on veut développer une fonction empirique f, on pourra toujours trouver une fonction f' qui différera de f d'aussi peu qu'on voudra dans tout domaine intérieur à D et qui satisfera à la condition d'être analytique et de s'annuler à la frontière ainsi que $\Delta f'$ et $\Delta\Delta f'$.

J'aurais pu dire aussi :

Supposons que la série

$$\sum A_i U_i$$

soit uniformément convergente, sans que nous sachions si elle l'est absolument.

Soit G la fonction de Green ordinaire, et U_i' la valeur de U_i au point x', y', z'. La série :

$$\sum \int A_i U_i G\, d\tau = \sum \frac{A_i U_i}{k_i}$$

sera aussi uniformément convergente; on a donc :

$$\sum A_i U_i = -\Delta \sum \frac{A_i U_i}{k_i};$$

et de même :

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i} = -\Delta \sum \frac{A_i U_i}{k_i^2},$$

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i^2} = -\Delta \sum \frac{A_i U_i}{k_i^3}.$$

Or on a vu plus haut que :

$$v = -\sum \frac{A_i U_i \xi^2}{k_i^2(\xi - k_i)} + v_0 + v_1 \xi.$$

On a donc :

$$v_2 = \sum \frac{A_i U_i}{k_i^3};$$

d'où :

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i^2} = -\Delta v_2 = v_1,$$

$$\sum \frac{A_i U_i}{k_i} = -\Delta v_1 = v_0,$$

$$\sum A_i U_i = -\Delta v_0 = f.$$

C. Q. F. D.

J'ai préféré suivre une marche un peu plus détournée, ce qui m'a dispensé de supposer que la convergence est uniforme.

Paris, mars 1894.

H. POINCARÉ.