Ueber die Anzahl der Riemann'schen Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

In meiner Abhandlung „Ueber Riemann'sche Flächen mit gegebenen Verzweigungspunkten"*) habe ich die Frage nach der Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen einfachen Verzweigungspunkten zurückgeführt auf die Frage, wie viele Systeme von w Transpositionen $(t_1, t_2, \cdots t_w)$ bei n Elementen vorhanden sind, welche durch ihre Zusammensetzung die identische Substitution ergeben, also die Bedingung

$$t_1 t_2 \cdots t_w = 1 \tag{1}$$

befriedigen. Ich verallgemeinerte diese Frage dadurch, dass ich an die Stelle der Gleichung (1) die folgende:

$$t_1 t_2 \cdots t_w = S \tag{2}$$

setzte, wo S eine beliebig gegebene Substitution der n Elemente bedeutet, und ich zeigte, dass die Anzahl $f_S(w)$ der Systeme $(t_1, t_2, \cdots t_w)$ von w Transpositionen, welche der Gleichung (2) genügen, die Form

$$f_S(w) = c_1 f_1^w + c_2 f_2^w + \cdots + c_k f_k^w \tag{3}$$

besitzt. Hier bezeichnen $f_1, f_2, \cdots f_k$ ausschliesslich von n abhängende ganze Zahlen, während $c_1, c_2, \cdots c_k$ rationale Zahlen sind, die von n und der gegebenen Substitution S abhängen.

Die Bildungsweise der Zahlen $f_1, f_2, \cdots f_k$ konnte ich explicite angeben, dagegen nicht die der Zahlen $c_1, c_2, \cdots c_k$.

Als ich im letzten Sommer mit Herrn Dr. E. Lasker, dem bekannten Weltschachmeister und Mathematiker, dieses Resultat besprach, wurde ich durch eine geistvolle Bemerkung des Herrn Lasker zu einer Ueberlegung geführt, welche unmittelbar zeigt, dass die Anzahl $f_S(w)$ der Entwickelungscoefficient einer gewissen rationalen Function ist, die mit der Gruppendeter-

*) Diese Annalen Bd. 39, S. 1 (1891). Im Folgenden mit R. citirt.

minante der symmetrischen Gruppe in engem Zusammenhange steht. Dank der neueren Untersuchungen des Herrn Frobenius über die Gruppendeterminante*) gelingt es nun nicht nur, die in meiner Arbeit enthaltene Bestimmung (3) der Anzahl $f_S(w)$ aufs Neue zu beweisen, sondern dieselbe auch durch die explicite Darstellung der Coefficienten $c_1, c_2, \cdots c_k$ zu ergänzen. Hierdurch wird es dann weiter möglich, die Frage nach der Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen einfachen Verzweigungspunkten in völlig befriedigender Weise zu erledigen. Im Folgenden erlaube ich mir, dieses des Näheren auszuführen. Dabei werde ich zunächst in § 1 die oben erwähnte Ueberlegung wiedergeben; ich hätte freilich das Resultat derselben auch unmittelbar aus F. I entnehmen können. (Vgl. Formel (8) in § 6 dieser Abhandlung. Die Zahl $f_S(w)$ ist ein specieller Fall der von Herrn Frobenius mit $h_{\alpha\beta\ldots\varkappa}$ bezeichneten Zahlen.) Wenn ich hiervon absah, so leitete mich dabei der Umstand, dass meine Deduction sich leicht verallgemeinern lässt und dadurch zu einer bemerkenswerthen Eigenschaft der Gruppendeterminante einer beliebigen endlichen Gruppe führt.

§ 1.

Es bezeichne S eine beliebig gegebene Substitution bei n Elementen, und es seien

(1) $$\tau_1, \tau_2, \cdots \tau_r \quad \left(r = \frac{n(n-1)}{2}\right)$$

die mit denselben Elementen gebildeten Transpositionen. Wir betrachten nun die sämmtlichen Systeme von w Transpositionen

(2) $$t_1, t_2, \cdots t_w,$$

welche dadurch entstehen, dass man $t_1, t_2, \cdots t_w$ unabhängig von einander die r Transpositionen $\tau_1, \tau_2, \cdots \tau_r$ durchlaufen lässt. Unter diesen r^w Systemen mögen $f_S(w)$ vorhanden sein, welche der Bedingung

(3) $$t_1 t_2 \cdots t_w = S$$

genügen. Das somit für jeden positiven ganzzahligen Werth von w definirte Zeichen $f_S(w)$ werde ferner für $w = 0$ durch die Festsetzung erklärt, dass

(4) $$f_S(0) = 1 \text{ oder } 0$$

sein soll, je nachdem S die identische Substitution ist oder nicht.

*) „Ueber Gruppencharaktere", Sitzungsberichte der kgl. preussischen Akademie der Wissenschaften zu Berlin, Jahrgang 1896, S. 985. „Ueber die Primfactoren der Gruppendeterminante". Ebenda, S. 1343. „Ueber die Charaktere der symmetrischen Gruppe". Ebenda Jahrgang 1900, S. 516. Diese Abhandlungen werde ich mit F. I., F. II. und F. III. bezüglich citiren.

Summirt man über alle $n!$ Substitutionen S, so ist offenbar

$$\sum f_S(w) = r^w \qquad (w = 0, 1, 2, \cdots),$$

und hieraus folgt, dass für jede einzelne Substitution S die Zahl $f_S(w) \leqq r^w$ ist. Daher convergirt die Potenzreihe

$$(5) \qquad \varphi_S(u) = f_S(0) + f_S(1)\,u + f_S(2)u^2 + \cdots + f_S(w)u^w + \cdots$$

für genügend kleine Werthe des absoluten Betrages $|u|$ der Variabeln u.

Die $h = n!$ Substitutionen, die aus den n Elementen gebildet werden können, mögen jetzt in irgend einer Reihenfolge mit

$$(6) \qquad S_1 = 1,\ S_2,\ S_3, \cdots S_h$$

bezeichnet werden. Es bestehen dann zwischen den h Potenzreihen

$$(7) \qquad \varphi_{S_1}(u),\ \varphi_{S_2}(u), \cdots \varphi_{S_h}(u)$$

h Relationen, die man auf folgende Weise erhält. Da die Gleichung (3) auch in der Form

$$t_2 \cdots t_w = t_1 S$$

geschrieben werden kann, so sieht man, dass unter den Lösungen der Gleichung (3) $f_{t_1 S}(w-1)$ vorhanden sind, für welche t_1 eine bestimmte der Transpositionen (1) ist. Folglich hat man:

$$(8)\ f_S(w) = f_{\tau_1 S}(w-1) + f_{\tau_2 S}(w-1) + \cdots + f_{\tau_r S}(w-1), \quad (w = 1, 2, 3, \cdots).$$

Diese Gleichung multiplicire ich mit u^w und summire sodann über $w = 1, 2, 3, \cdots$. Hierdurch kommt

$$\varphi_S(u) - f_S(0) = u\varphi_{\tau_1 S}(u) + u\varphi_{\tau_2 S}(u) + \cdots + u\varphi_{\tau_r S}(u),$$

oder

$$(9) \qquad \varphi_S(u) - u\varphi_{\tau_1 S}(u) - u\varphi_{\tau_2 S}(u) - \cdots - u\varphi_{\tau_r S}(u) = \varepsilon_S,$$

wobei $\varepsilon_S = f_S(0)$, also gleich 1 oder 0 ist, je nachdem S die identische Substitution ist oder nicht.

Die Gleichung (9) repräsentirt, da man für S jede der h Substitutionen (6) nehmen kann, im Ganzen h lineare Gleichungen für die h Potenzreihen (7). Die Determinante dieser Gleichungen reducirt sich für $u = 0$ auf 1 und ist also nicht identisch Null. Daher lassen sich die Potenzreihen $\varphi_S(u)$ oder vielmehr die durch sie definirten analytischen Functionen, aus den Gleichungen (9) berechnen; offenbar ergeben sich dieselben als rationale Functionen von u. Um die Auflösung der Gleichungen (9) auszuführen, setze man dieselben zunächst in die Form:

$$(9') \qquad c_{S_1 S^{-1}}\varphi_{S_1}(u) + c_{S_2 S^{-1}}\varphi_{S_2}(u) + \cdots + c_{S_h S^{-1}}\varphi_{S_h}(u) = \varepsilon_S,$$

wobei dann der Coefficient $c_{S_i S^{-1}}$ gleich Null ist, ausser wenn die seinen

Index bildende Substitution $S_i S^{-1}$ die Identität oder eine Transposition ist, in welchen Fällen man $c_{S_i S^{-1}} = 1$ resp. $= -u$ hat.

Aus (9′) ersieht man, dass

$$(10) \qquad \varphi_{S_1}(u) = \frac{\Theta_1}{\Theta},\ \varphi_{S_2}(u) = \frac{\Theta_2}{\Theta}, \cdots \varphi_{S_h}(u) = \frac{\Theta_h}{\Theta}$$

wird, wenn Θ die Determinante

$$(11) \qquad \Theta = \begin{vmatrix} c_{S_1 S_1^{-1}}, & c_{S_2 S_1^{-1}}, & \cdots & c_{S_h S_1^{-1}} \\ c_{S_1 S_2^{-1}}, & c_{S_2 S_2^{-1}}, & \cdots & c_{S_h S_2^{-1}} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ c_{S_1 S_h^{-1}}, & c_{S_2 S_h^{-1}}, & \cdots & c_{S_h S_h^{-1}} \end{vmatrix}$$

und $\Theta_1, \Theta_2, \cdots \Theta_h$ ihre nach den Elementen der ersten Horizontalreihe genommenen Unterdeterminanten bedeuten. Was die Elemente $c_{S_1}, c_{S_2}, \cdots c_{S_h}$ der Determinante Θ angeht, so ist, wie schon erwähnt,

$$(12) \qquad c_S = 1 \quad \text{oder} \quad -u \quad \text{oder} \quad 0,$$

je nachdem $S = S_1$, d. i. die identische Substitution oder $S = \tau_i$, d. i. eine Transposition oder endlich S weder die identische Substitution noch eine Transposition ist.

§ 2.

Die Ergebnisse der oben citirten Abhandlungen des Herrn Frobenius gestatten es nun, die Darstellungen (10) der Functionen $\varphi_S(u)$ weiter zu entwickeln. Dabei bediene ich mich der von Herrn Frobenius eingeführten Bezeichnungen. Für die hier stattfindenden Werthe der Elemente c_S der Determinante Θ besteht die Beziehung

$$(1) \qquad c_{T^{-1}ST} = c_S,$$

d. h. für zwei ähnliche Substitutionen sind die entsprechenden Elemente c einander gleich. Die $h = n!$ Substitutionen $S_1, S_2, \cdots S_h$ theile man in Classen untereinander ähnlicher ein und bezeichne die Classen mit den Nummern (1), (2), (3), $\cdots$ (k); dabei möge die Classe (1) aus der einen identischen Substitution S_1 bestehen und die Classe (2) die sämmtlichen Transpositionen umfassen. Zunächst unterwerfe man die Grössen $c_{S_1}, c_{S_2}, \cdots c_{S_h}$ keiner anderen Bedingung als der Beziehung (1); dann reduciren sich dieselben auf k unabhängige Grössen, welche einzeln den k Classen zugeordnet sind und diesen entsprechend mit $c_1, c_2, \cdots c_k$ bezeichnet werden können. In der Determinante Θ kommt dann jede Grösse c_ϱ in jeder Horizontalreihe h_ϱ-Mal vor, wenn h_ϱ die Anzahl der Substitutionen in der

Classe (ϱ) bedeutet. Da überall, wo das Element c_ϱ in der Determinante Θ auftritt, ihm dieselbe Unterdeterminante entspricht, so ist

$$\frac{\partial \Theta}{\partial c_\varrho} = h h_\varrho \cdot \Theta_i,$$

wenn die Substitution S_i in die Classe (ϱ) gehört. Also hat man

$$(2) \qquad \frac{\Theta_i}{\Theta} = \frac{1}{h h_\varrho} \frac{\partial \lg \Theta}{\partial c_\varrho}.$$

Nun ist aber (F. II. § 6 Gleichung (9))

$$(3) \qquad \Theta = \prod \Big[\frac{1}{f} \sum_S \chi(S) c_S\Big]^{f^2} = \prod \Big[\frac{1}{f} \sum_\varrho h_\varrho \chi_\varrho c_\varrho\Big]^{f^2},$$

wobei das Product über die k verschiedenen Charaktere $(\chi(S_1), \chi(S_2), \cdots \chi(S_k))$ auszudehnen ist. Somit geht die Gleichung (2) über in

$$(4) \qquad \frac{\Theta_i}{\Theta} = \frac{1}{h} \sum \frac{f^2 \chi_\varrho}{\sum\limits_\varrho h_\varrho \chi_\varrho c_\varrho} = \frac{1}{h} \sum \frac{f^2 \chi(S_i)}{\sum\limits_S \chi(S) c_S}.$$

Berücksichtigt man schliesslich, dass in den Formeln (10) des § 1 die c_S die unter (12) § 1 angegebenen Werthe besitzen, so erkennt man, dass

$$(5) \qquad \varphi_S(u) = \frac{1}{h} \sum \frac{f^2 \chi(S)}{f - h_2 \chi_2 u}, \quad \Big(h_2 = r = \frac{n(n-1)}{2}\Big)$$

der definitive Ausdruck für die Function $\varphi_S(u)$ ist.

Durch Entwickelung nach aufsteigenden Potenzen von u ergiebt sich für die Anzahl $f_S(w)$ die Formel:

$$(6) \qquad f_S(w) = \frac{1}{h} \sum f \chi(S) \Big(\frac{h_2 \chi_2}{f}\Big)^w.$$

Insbesondere kommt für die identische Substitution S_1, da $\chi(S_1) = f$ ist,

$$(7) \qquad \varphi_{S_1}(u) = \frac{1}{h} \sum \frac{f^3}{f - h_2 \chi_2 u},$$

und also

$$(8) \qquad f_{S_1}(w) = \frac{1}{h} \sum f^2 \Big(\frac{h_2 \chi_2}{f}\Big)^w$$

als Anzahl der Darstellungen der identischen Substitution durch ein Product von w Transpositionen.

§ 3.

Herrn Frobenius ist es (in F. III) gelungen, für die sämmtlichen Charaktere der symmetrischen Gruppe bei n Elementen explicite Formeln aufzustellen. Von seinen Resultaten kommen für die hier zu behandelnde Frage nach der Anzahl Riemann'scher Flächen die folgenden in Betracht.

Die einzelnen Charaktere der Vertauschungsgruppe bei n Elementen entsprechen denjenigen ganzzahligen Lösungen der Gleichung

$$\varkappa_1 + \varkappa_2 + \cdots + \varkappa_n = \frac{1}{2} n(n+1), \tag{1}$$

welche den Bedingungen

$$0 \leqq \varkappa_1 < \varkappa_2 < \cdots < \varkappa_n \tag{2}$$

genügen. Diese Lösungen $(\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n)$ mögen in irgend einer Reihenfolge mit den Nummern (1), (2), $\cdots$ (k) versehen werden. Das einzelne Lösungssystem $(\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n)$ kann dann auch kurz durch seine Nummer ($\varkappa$) bezeichnet werden. Ist

$$(\varkappa) = (\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n) \tag{3}$$

ein bestimmtes Lösungssystem, so ordne man demselben auf folgende Weise ein System von Zahlen $a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ zu. Es seien

$$\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_{n-r} \tag{4}$$

diejenigen der Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n$, welche $< n$ sind, so dass die übrigen Zahlen

$$\varkappa_{n-r+1}, \cdots \varkappa_n \tag{5}$$

$\geqq n$ sind. Nun setze man

$$b_1 = \varkappa_{n-r+1} - n,\ b_2 = \varkappa_{n-r+2} - n, \cdots b_r = \varkappa_n - n, \tag{6}$$

und bezeichne mit

$$a_1, a_2, \cdots a_r \tag{7}$$

diejenigen nach wachsender Grösse geordneten Zahlen, welche die folgenden zwischen 0 und $n-1$ liegenden Zahlen

$$n-1-\varkappa_1,\ n-1-\varkappa_2, \cdots n-1-\varkappa_{n-r}$$

zu der Zahlenreihe $0, 1, 2, \cdots n-1$ ergänzen. Werden nun die Charaktere, welche dem Lösungssystem (3) entsprechen, durch den oberen Index $\varkappa$ charakterisirt, so ist nach Herrn Frobenius für die identische Substitution

$$\begin{aligned} \chi^{(\varkappa)}(S_1) = f^{(\varkappa)} &= n!\, \frac{\Delta(\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n)}{\varkappa_1!\, \varkappa_2! \cdots \varkappa_n!} \\ &= n!\, \frac{\Delta(a_1, \cdots a_r) \cdot \Delta(b_1, \cdots b_r)}{a_1! \cdots a_r!\, b_1! \cdots b_r! \prod\limits_{\alpha=1}^{r} \prod\limits_{\beta=1}^{r} (a_\alpha + b_\beta + 1)}, \end{aligned} \tag{8}$$

wobei allgemein für irgend welche Grössen $x_1, x_2, \cdots x_m$

$$\Delta(x_1, x_2, \cdots x_m) = \prod_{i,k} (x_i - x_k) \quad (i > k,\ i, k = 1, 2, \cdots m)$$

ist. Für die Transpositionen findet Herr Frobenius

$$\frac{h_2 \chi_2^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} = \frac{1}{2}\left(\sum_{\beta=1}^{r} b_\beta(b_\beta + 1) - \sum_{\alpha=1}^{r} a_\alpha(a_\alpha + 1)\right). \tag{9}$$

Die rechte Seite lässt sich hier auch einfach durch die Zahlen $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n$ ausdrücken. Nach dem Zusammenhang, in welchem diese Zahlen mit den Zahlen a_α und b_β stehen, ist nämlich

$$\sum b_\beta(b_\beta + 1) = \sum (\varkappa_\lambda - n)(\varkappa_\lambda - n + 1), \quad (\lambda = n - r + 1, \cdots n)$$

und

$$\sum a_\alpha(a_\alpha + 1) + \sum_{\mu=1}^{n-r} (n - 1 - \varkappa_\mu)(n - \varkappa_\mu) = \sum_{k=0}^{n-1} k(k+1) = \frac{1}{3} n(n^2 - 1).$$

Und hieraus ergiebt sich nach kurzer Rechnung

$$\frac{h_2 \chi_2^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}} = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} \varkappa_i(\varkappa_i - 1) - \frac{1}{6} n(n-1)(n+4). \tag{9'}$$

Nach Gleichung (8) des vorigen Paragraphen wird also

$$\begin{aligned} f_{S_1}(w) &= \frac{1}{n!}\sum f^{(\varkappa)2}\left(\frac{h_2 \chi_2^{(\varkappa)}}{f^{(\varkappa)}}\right)^w \\ &= n! \sum \frac{\Delta^2(\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n)}{\varkappa_1!^2 \varkappa_2!^2 \cdots \varkappa_n!^2}\left[\frac{\varkappa_1(\varkappa_1 - 1)}{2} + \frac{\varkappa_2(\varkappa_2 - 1)}{2} + \cdots \right. \\ &\qquad \left. + \frac{\varkappa_n(\varkappa_n - 1)}{2} - \frac{1}{6} n(n-1)(n+4)\right]^w \end{aligned} \tag{10}$$

Hier ist die Summation über alle den Bedingungen (2) genügenden Lösungen $(\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n)$ der Gleichung (1) zu erstrecken. Da das allgemeine Glied der Summe (10) symmetrisch bezüglich $\varkappa_1, \varkappa_2, \cdots \varkappa_n$ ist und verschwindet, wenn zwei dieser Zahlen aneinander gleich sind, so erkennt man, dass

die Anzahl $f_{S_1}(w)$ der Systeme von w Transpositionen $t_1, t_2, \cdots t_w$, welche der Bedingung

$$t_1 t_2 \cdots t_w = 1$$

genügen, durch die Gleichung

$$(11)\quad f_{S_1}(w) = \sum \frac{\Delta^2(x_1, x_2, \cdots x_n)}{x_1!^2 x_2!^2 \cdots x_n!^2}\left[\frac{x_1(x_1-1)}{2} + \frac{x_2(x_2-1)}{2} + \cdots + \frac{x_n(x_n-1)}{2} - \frac{1}{6}n(n-1)(n+4)\right]^w$$

gegeben ist, in welcher die Summation über alle Lösungen der Gleichung

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = \frac{1}{2}n(n+1)$$

in nicht-negativen ganzen Zahlen $x_1, x_2, \cdots x_n$ *zu erstrecken ist.*

In der Folge schreibe ich die Gleichung (10) indem ich mit (x) die Nummer des Lösungssystem $(x_1, x_2, \cdots x_n)$ bezeichne, in der Form

$$(12)\qquad \frac{1}{n!}f(w\,|\,n) = A_1 B_1^w + A_2 B_2^w + \cdots + A_k B_k^w,$$

wo dann also

$$(13)\quad A_x = \left(\frac{\Delta(x_1, x_2, \cdots x_n)}{x_1!\,x_2!\cdots x_n!}\right)^2,\quad B_x = \sum_{i=1}^{n}\frac{x_i(x_i-1)}{2} - \frac{1}{6}n(n-1)(n+4)$$

zu setzen und $f(w\,|\,n)$ für $f_{S_1}(w)$ geschrieben ist, um die Abhängigkeit dieser Grösse von n anzudeuten.

Dass die Zahlen $B_1, B_2, \cdots B_k$ übereinstimmen mit den von mir (R. Seite 12) eingeführten Zahlen $f_1, f_2, \cdots f_k$ erkennt man auf folgende Weise. Setzt man

$$v_n = x_1, v_{n-1} = x_2 - 1,\ v_{n-2} = x_3 - 2, \cdots v_1 = x_n - (n-1),$$

so wird nach (1) und (2)

$$v_1 + v_2 + \cdots + v_n = n,\ v_1 \geqq v_2 \geqq v_3 \geqq \cdots \geqq v_n \geqq 0,$$

und der Ausdruck für B_x lässt sich in der Form

$$B_x = \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}(v_i + n - i)(v_i + n - i - 1) - \frac{1}{6}n(n-1)(n+4)$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n} v_i(v_i - 1) - \sum_{i=1}^{n} i\,v_i + n$$

schreiben. Dieses ist aber gerade der Ausdruck, durch welchen ich in meiner Arbeit R. die Zahlen f_x definirt habe.*)

Aus der Gleichung (12) ziehe ich noch eine Folgerung, welche für die weiteren Betrachtungen wichtig ist. Bildet man nämlich die Potenzreihe

---

*) Der innere Zusammenhang der bezüglichen Ueberlegungen in meiner Arbeit R. mit F. III zeigt sich darin, dass Herr Frobenius dieselben Untergruppen der symmetrischen Gruppe bei der Bestimmung der Charaktere der letzteren zu Hülfe zieht, welche bei mir a. a. O. vorkommen.

$$(14)\quad F_n(u) = \frac{1}{n!}\left\{f(0|n) + f(1|n)\frac{u}{1!} + f(2|n)\frac{u^2}{2!} + \cdots + f(w|n)\frac{u^w}{w!} + \cdots\right\},$$

so zeigt die Gleichung (12) unmittelbar, dass die hierdurch definirte Function

$$(15)\qquad F_n(u) = A_1 e^{B_1 u} + A_2 e^{B_2 u} + \cdots + A_k e^{B_k u}$$

ist. Umgekehrt folgt natürlich aus den Gleichungen (14) und (15) wieder die Gleichung (12).

Für die niedrigsten Werthe von n findet man:

$$(16)\quad \begin{cases} F_2(u) = \frac{1}{(2!)^2}(e^u + e^{-u}), \\ F_3(u) = \frac{1}{(3!)^2}(e^{3u} + e^{-3u} + 4), \\ F_4(u) = \frac{1}{(4!)^2}(e^{6u} + e^{-6u} + 9(e^{2u} + e^{-2u}) + 4), \\ F_5(u) = \frac{1}{(5!)^2}(e^{10u} + e^{-10u} + 16(e^{5u} + e^{-5u}) + 25(e^{2u} + e^{-2u}) + 36), \\ F_6(u) = \frac{1}{(6!)^2}(e^{15u} + e^{-15u} + 25(e^{9u} + e^{-9u}) + 81(e^{5u} + e^{-5u}) \\ \qquad\qquad + 125(e^{3u} + e^{-3u}) + 256). \end{cases}$$

Der Factor 125 in der letzten Function setzt sich aus den Quadraten 100 und 25 zusammen.

Das an sich sinnlose Zeichen $F_1(u)$ möge durch die Festsetzung

$$(17)\qquad F_1(u) = 1$$

definirt werden. Bei der Berechnung numerischer Beispiele wendet man am besten die Darstellung der Zahlen $A_\varkappa$ und $B_\varkappa$ durch die Zahlen $a_1, a_2, \cdots, b_1, b_2, \cdots$ an. (Vgl. (8) und (9).)

§ 4.

Von irgend welchen Transpositionen will ich sagen, dass sie die Elemente a, b mit einander verbinden oder in Verbindung setzen, wenn unter ihnen entweder die Transposition (ab) vorkommt oder wenn die Elemente $a_1, a_2, \cdots a_m$ so gewählt werden können, dass die Transpositionen $(aa_1), (a_1a_2), (a_2a_3), \cdots (a_mb)$ sich unter jenen Transpositionen finden. Jedes System von Transpositionen wird entweder sämmtliche auftretenden Elemente mit einander verbinden oder es werden diese Elemente in Gruppen zerfallen so, dass die Elemente einer Gruppe mit einander, aber mit keinem Elemente einer anderen Gruppe durch die Transpositionen verbunden werden. Es seien nun unter den $f(w|n)$ Lösungen der Gleichung

$$(1)\qquad t_1 t_2 \cdots t_w = 1$$

$\varphi(w|n)$ vorhanden, welche sämmtliche n Elemente mit einander in Verbindung setzen. Dann ist

$$R(w|n) = \frac{1}{n!}\varphi(w|n), \quad (n = 3, 4, 5, \cdots) \tag{2}$$

die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen Verzweigungspunkten*). Für $n = 2$ stellt $R(w|2) = \frac{1}{2}\varphi(w|2)$ nur $\frac{1}{2}$ von der Anzahl der dann existirenden Riemann'schen Flächen vor. Denn diese Anzahl ist offenbar $= 0$ oder 1, je nachdem w ungerade oder gerade ist, und entsprechend ist $\varphi(w|2) = 0$ oder 1.

Die Anzahl $\varphi(w|n)$ und damit auch $R(w|n)$ lässt sich nun durch die Anzahl $f(w|n)$ ausdrücken, wie ich in R. Seite 14 angegeben habe. Da ich an jener Stelle der Kürze halber einige Zwischenrechnungen fortgelassen habe, so will ich hier die betreffenden Ueberlegungen etwas ausführlicher darstellen.

Betrachtet man irgend eine Lösung $(t_1, t_2, \cdots t_w)$ der Gleichung (1), so werden bezüglich derselben die n Elemente, mit welchen die Transpositionen gebildet sind, in Gruppen

$$G = a_1, \cdots a_{n_0}, \; G_1 = b_1, \cdots b_{n_1}, \; G_2 = c_1, \cdots c_{n_2}, \cdots G_r = l_1, \cdots l_{n_r} \tag{3}$$

zerfallen, der Art, dass die Elemente der Gruppe G gar nicht bei den Transpositionen $t_1, t_2, \cdots t_w$ vorkommen und die Elemente jeder der anderen Gruppen nur je unter sich durch die Transpositionen mit einander verbunden werden.

Die Gruppe G kann ganz fortfallen, in welchem Falle dann $n_0 = 0$ ist; die Anzahl r der übrigen Gruppen ist mindestens 1, jede der Zahlen $n_1, n_2, \cdots n_r$ mindestens 2 und natürlich

$$n_0 + n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n. \tag{4}$$

Diejenigen der Transpositionen $(t_1, t_2, \cdots t_w)$, welche die Elemente von G_1 verbinden, seien in derselben Reihenfolge, in welcher sie in der Reihe $t_1, t_2, \cdots t_w$ auftreten, mit $t'_1, t'_2, \cdots t'_{w_1}$ bezeichnet, die entsprechende Bedeutung komme $t''_1, t''_2, \cdots t''_{w_2}$ bezüglich der Gruppe G_2 zu u. s. w. Dann ist offenbar

$$t'_1 t'_2 \cdots t'_{w_1} = 1, \; t''_1 t''_2 \cdots t''_{w_2} = 1, \cdots t^{(r)}_1 t^{(r)}_2 \cdots t^{(r)}_{w_r} = 1 \tag{5}$$

und

$$w_1 + w_2 + \cdots + w_r = w \quad (w_1 > 1, \; w_2 > 1, \cdots w_r > 1). \tag{6}$$

Nun zähle man zunächst ab, wie viele Lösungen $(t_1, t_2, \cdots t_w)$ der Gleichung (1) existiren, für welche diese bestimmte Gruppenzerlegung (3) und

*) S. R. § 4.

die den Gruppen $G_1, G_2, \cdots G_r$ zukommenden Zahlen $w_1, w_2, \cdots w_r$ vorgeschrieben sind. Da die Gleichungen (5) bezüglich $\varphi(w_1|n_1)$, $\varphi(w_2|n_2), \cdots$ $\cdots \varphi(w_r|n_r)$ Lösungen besitzen und unter den $w!$ möglichen Anordnungen von w Elementen $t_1', t_2', \cdots t_{w_1}', t_1'', t_2'', \cdots t_{w_2}'', \cdots t_1^{(r)}, t_2^{(r)}, \cdots t_{w_r}^{(r)}$ sich $\frac{w!}{w_1!\, w_2! \cdots w_r!}$ befinden, bei welchen die Elemente $t_1', t_2', \cdots t_{w_1}'$ in vorgeschriebener Reihenfolge, ebenso die Elemente $t_1'', t_2'', \cdots t_{w_2}''$ in vorgeschriebener Reihenfolge u. s. w. auftreten, so wird

$$\frac{w!}{w_1!\, w_2! \cdots w_r!}\, \varphi(w_1|n_1)\, \varphi(w_2|n_2) \cdots \varphi(w_r|n_r)$$

die hier in Betracht gezogene Anzahl sein. Daher ist

$$\text{(7)}\quad \Phi(n_1, n_2, \cdots n_r) = \sum_{w_1, w_2, \cdots w_r} \frac{w!}{w_1!\, w_2! \cdots w_r!}\, \varphi(w_1|n_1)\, \varphi(w_2|n_2) \cdots \varphi(w_r|n_r),$$

die Summe erstreckt über die Werthsysteme $w_1, w_2, \cdots w_r$, welche (6) genügen, die Anzahl der Lösungen $(t_1, t_2, \cdots t_w)$ der Gleichung (1), für welche die Gruppenzerlegung (3) vorgeschrieben ist.

Bei Festhaltung der Zahlen $n_0, n_1, n_2, \cdots n_r$ lassen sich die n Elemente auf $\frac{n!}{n_0!\, n_1!\, n_2! \cdots n_r!}$ Weisen in $r+1$ Gruppen $G, G_1, G_2, \cdots G_r$ zerlegen. Bildet man folglich die Summe

$$\text{(8)}\qquad \Psi(r) = \sum_{n_0, n_1 \cdots n_r} \frac{n!}{n_0!\, n_1! \cdots n_r!}\, \Phi(n_1, n_2, \cdots n_r),$$

$$(n_0 + n_1 + \cdots + n_r = n,\ n_0 \geqq 0, n_1 > 1, n_2 > 1, \cdots n_r > 1),$$

so hat man alle Lösungen der Gleichung (1) gezählt, für welche die n Elemente in r Systeme je unter einander verbundener zerfallen. Dabei hat man aber jede dieser Lösungen $r!$ Mal gezählt, weil freilich jeder Lösung $t_1, t_2, \cdots t_w$, eine bestimmte Gruppenzerlegung (3) entspricht, aber die Reihenfolge, in welcher man die Gruppen $G_1, G_2, \cdots G_r$ aufschreibt, dabei noch ganz willkürlich gewählt werden kann.

Hiernach wird nun die Gesammtzahl $f(w|n)$ der Lösungen $(t_1, t_2, \cdots t_w)$ der Gleichung (1) durch

$$\Psi(1) + \frac{1}{2!}\Psi(2) + \frac{1}{3!}\Psi(3) + \cdots$$

vorgestellt, oder es ist

$$\text{(9)}\ f(w|n) = \sum_{r=1,2,3,\cdots} \frac{1}{r!} \sum \frac{n!}{n_0!\, n_1! \cdots n_r!}\, \frac{w!}{w_1!\, w_2! \cdots w_r!}\, \varphi(w_1|n_1)\, \varphi(w_2|n_2) \cdots \varphi(w_r|n_r),$$

wobei in der inneren Summe $n_0, n_1, \cdots n_r, w_1, w_2, \cdots w_r$ alle ganzzahligen Werthsysteme annehmen müssen, welche den Gleichungen (4) und (6) und überdies den Bedingungen $n_0 \geqq 0, n_1 > 1, \cdots n_r > 1,\ w_1 > 1, w_2 > 1, \cdots w_r > 1$ genügen.

Um nun aus der Gleichung (9) $\varphi(w|n)$ zu bestimmen, dividire ich die Gleichung durch $n!w!$ und multiplicire mit

$$u^w x^n = u^{w_1 + w_2 + \cdots + w_r} x^{n_0 + n_1 + n_2 + \cdots + n_r},$$

unter u und x Variable verstanden. Sodann summire ich über $w = 2, 3, \cdots$, $n = 2, 3, \cdots$. Auf diese Weise kommt zunächst, wenn

$$(10) \qquad \begin{cases} \sum\limits_{w,n} f(w|n) \dfrac{u^w}{w!} \dfrac{x^n}{n!} = \bar{F}(u, x), & (w, n = 2, 3, \cdots), \\ \sum\limits_{w,n} \varphi(w|n) \dfrac{u^w}{w!} \dfrac{x^n}{n!} = \bar{\Phi}(u, x), & (w, n = 2, 3, \cdots) \end{cases}$$

gesetzt wird,

$$(11) \qquad \bar{F}(u, x) = \sum_{r=1,2,3,\cdots} \frac{1}{r!} \sum_{n_0=0}^{\infty} \frac{x^{n_0}}{n_0!} [\bar{\Phi}(u, x)]^r = e^x\left(e^{\bar{\Phi}(u,x)} - 1\right).$$

Nun sei, wie im vorigen Paragraphen

$$(12) \qquad F_n(u) = \frac{1}{n!} \sum_{w=0}^{\infty} f(w|n) \frac{u^w}{w!}, \quad F_1(u) = 1$$

und entsprechend

$$(13) \qquad \Phi_n(u) = \frac{1}{n!} \sum_{w=2}^{\infty} \varphi(w|n) \frac{u^w}{w!}, \quad \Phi_1(u) = 1.$$

Ferner werde

$$(14) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} F_n(u) x^n = F(u, x),$$

$$(15) \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \Phi_n(u) x^n = \Phi(u, x)$$

gesetzt. Dann ist

$$F(u, x) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{w=0}^{\infty} f(w|n) \frac{u^w}{w!} \frac{x^n}{n!} = \bar{F}(u, x) + e^x - 1,$$

$$\Phi(u, x) = x + \sum_{n=2}^{\infty} \sum_{w=2}^{\infty} \varphi(w|n) \frac{u^w}{w!} \frac{x^n}{n!} = \bar{\Phi}(u, x) + x,$$

und folglich, nach (11),

$$(16) \qquad 1 + F(u, x) = e^{\Phi(u,x)}.$$

Hieraus ergiebt sich

$$\Phi(u,x) = \lg(1+F(u,x)) = F(u,x) - \frac{1}{2}[F(u,x)]^2 + \frac{1}{3}[F(u,x)]^3 - + \cdots,$$

oder, indem man die Coefficienten von x^n links und rechts vergleicht:

$$\Phi_n(u) = \sum_{r=1,2,\cdots} \frac{(-1)^{r-1}}{r} \sum_{n_1,n_2,\cdots n_r} F_{n_1}(u) F_{n_2}(u) \cdots F_{n_r}(u), \tag{17}$$

wobei die innere Summation über alle Lösungen der Gleichung

$$n_1 + n_2 + \cdots + n_r = n,$$

in positiven ganzen Zahlen $n_1, n_2, \cdots n_r$ auszudehnen ist. Z. B. wird

$$\Phi_2(u) = F_2(u) - \frac{1}{2}[F_1(u)]^2,$$

$$\Phi_3(u) = F_3(u) - F_1(u) F_2(u) + \frac{1}{3}[F_1(u)]^3,$$

u. s. w.

Durch die Gleichung (17) *ist nun die Bestimmung der Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen einfachen Verzweigungspunkten vollendet.* Diese Anzahl $R(w|n)$ ist nämlich der Coefficient von $\frac{u^w}{w!}$ in der Entwickelung von $\Phi_n(u)$ nach Potenzen von u, und die letztere Function ist nach Gleichung (17) in Verbindung mit Gleichung (15) des vorigen Paragraphen als eine endliche Summe von Gliedern der Form Ce^{bu}, wo C rational und b ganzzahlig ist, darstellbar. Hat man $\Phi_n(u)$ in der Gestalt

$$\Phi_n(u) = \sum Ce^{bu} \tag{18}$$

dargestellt, so ist dann also

$$R(w|n) = \sum Cb^w \tag{19}$$

der Ausdruck für die in Rede stehende Anzahl Riemann'scher Flächen.

Ich stelle zum Schluss die Ausdrücke (18) der Function $\Phi_n(u)$ für die niedrigsten Werthe von n zusammen. Auf Grund der Gleichung (17) und der Formeln (16) des vorigen Paragraphen ergiebt sich:

$$\Phi_2(u) = \frac{1}{(2!)^2}[e^u + e^{-u} - 2],$$

$$\Phi_3(u) = \frac{1}{(3!)^2}[e^{3u} + e^{-3u} - 9(e^u + e^{-u}) + 16],$$

$$\Phi_4(u) = \frac{1}{(4!)^2}[e^{6u} + e^{-6u} - 16(e^{3u} + e^{-3u}) - 9(e^{2u} + e^{-2u}) + 144(e^u + e^{-u}) - 240],$$

$$\Phi_5(u) = \frac{1}{(5!)^2}[(10u) - 25(6u) + 16(5u) - 100(4u) + 400(3u) \\ + 600(2u) - 4000(u) + 6216].$$

$$\Phi_6(u) = \frac{1}{(6!)^2}((15u) - 36(10u) + 25(9u) - 225(7u) + 700(6u) \\ - 720(5u) + 7200(4u) - 15200(3u) - 34200(2u) \\ - 163575(u) - 242240].$$

Dabei habe ich in den beiden letzten Gleichungen allgemein (ku) an Stelle von $e^{ku} + e^{-ku}$ geschrieben.

Aus den vorstehenden Gleichungen ergeben sich für $n = 3, 4, 5, 6$ dieselben Werthe für die Anzahl der n-blättrigen Riemann'schen Flächen mit w gegebenen Verzweigungspunkten, wie ich sie in meiner Arbeit R. Seite 17 angegeben habe.

Zürich, 8. November 1900.