Classification und Integration von gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen xy, die eine Gruppe von Transformationen gestatten.

Von

Sophus Lie in Leipzig.

(Die nachstehende Arbeit erschien zum ersten Male im Frühling 1883 im norwegischen Archiv.)

In einer kurzen Note zur Gesellschaft der Wissenschaften in Göttingen (3. December 1874) gab ich u. A. eine Aufzählung aller continuirlichen Gruppen von Transformationen zwischen zwei Variabeln x und y. Ich lenkte ausdrücklich und stark die Aufmerksamkeit darauf, dass sich hierauf eine Classification und eine rationelle Integrationstheorie aller Differentialgleichungen

$$f(xyy' \cdots y^{(m)}) = 0,$$

die eine continuirliche Transformationsgruppe gestatten, begründen lässt. Später habe ich nun das hiermit scizzirte grosse Programm mehr im Detail ausgeführt. So gab ich in den Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania (1874*)) eine rationelle Methode zur Integration von linearen partiellen Differentialgleichungen mit einer Reihe bekannter infinitesimaler Transformationen; hiermit hatte ich dann gleichzeitig eine vollständige Integrationstheorie von gewöhnlichen Differentialgleichungen

$$f(xyy' \cdots y^{(m)}) = 0$$

mit *bekannten* infinitesimalen Transformationen erhalten. Ich gab ferner in mehreren Abhandlungen**) in diesem Archiv (1876, 78) eine Darstellung von denjenigen Methoden, vermöge deren ich in den

---

*) Die betreffende Arbeit ist im Wesentlichen reproducirt in den Math. Ann. Bd. XI.

**) Diese Abhandlungen sind theilweise (aber nicht vollständig) in den Math. Ann. Bd. XVI in neuer Bearbeitung reproducirt worden.

Jahren 1873—1874 alle continuirlichen Gruppen von Transformationen einer zweifach ausgedehnten Mannigfaltigkeit bestimmt hatte.

Hiermit war indess keineswegs mein 1874 scizzirtes Programm, selbst auf gewöhnliche Differentialgleichungen zwischen x und y beschränkt, zur Ausführung gebracht. Nicht allein hatte ich die angekündigte Classification noch nicht durchgeführt, sondern es stand auch noch zurück nachzuweisen, einerseits, wie man entscheidet, ob eine vorgelegte Differentialgleichung eine continuirliche Gruppe gestattet, anderseits wie man diejenigen Differentialgleichungen in rationeller Weise integrirt*), die zur Bestimmung der betreffenden Gruppe dienen. Der Hauptzweck dieser Abhandlung ist, diese beiden wichtigen Capitel meiner Theorie eingehend zu entwickeln. Gleichzeitig halte ich es für zweckmässig, einige Theile meiner Theorie, die ich allerdings früher schon im Wesentlichen gegeben habe, auf's Neue und mehr ausführlich zu behandeln.

Im ersten Abschnitte führe ich die von mir 1874 angekündigte Classification von gewöhnlichen Differentialgleichungen, die eine continuirliche Gruppe von Transformationen zwischen x und y gestatten, vollständig durch. Ich betrachte successiv alle derartigen Gruppen, reducirt auf canonische Formen, und bestimme die zugehörigen invarianten Differentialgleichungen**). Darnach zeige ich, dass eine beliebige vorgelegte Gruppe im Allgemeinen ohne Integration von Differentialgleichungen und jedenfalls durch Integration einer Differentialgleichung 1. O. auf ihre canonische Form gebracht werden kann. Hierdurch gelingt es, alle bei einer beliebig vorgelegten Gruppe invariante Differentialgleichungen anzugeben***).

---

*) Siehe die Abhandlungen der Gesellschaft der Wissenschaften zu Christiania 1881. Siehe auch meine Begründung einer Invariantentheorie der Berührungstransformationen. Math. Ann. Bd. VIII, 1874.

**) Die Gesichtspunkte der citirten Note führen indess noch weiter. Man kann u. A. jede Gruppe von *Berührungs*transformationen zwischen xyy' auf gewisse von mir bestimmte canonische Formen bringen, und darnach die zu jeder canonischen Form entsprechenden invarianten Gleichungen angeben u. s. w.

***) Als ich 1874 in meiner mehrmals besprochenen Note hervorhob, dass auf meine Bestimmung aller Gruppen von Transformationen der Ebene eine Classification aller Gleichungen $f(xyy' \dots y^{(m)}) = 0$ mit einer Gruppe gegründet werden kann, hatte ich diese Classification noch nicht im Detail ausgeführt. Ich hatte die Möglichkeit einer Classification, d. h. die Möglichkeit der Aufstellung der Typen aller Differentialgleichungen $f = 0$, die eine Gruppe gestatten, erkannt. Die hierzu erforderlichen Rechnungen hatte ich aber nicht im Detail ausgeführt, und noch weniger publicirt. Indem ich dies ausdrücklich hervorhebe, bemerke ich, dass der berühmte französische Geometer Halphen in seinen ausgezeichneten Untersuchungen über Differentialinvarianten (Liouvilles Journal Bd. 2 (Serie 3) 1876, Sur les invariants diff., Thèse, Paris 1878 u. s. w.) im Grunde einen wichtigen, wenn auch sehr speciellen Theil meines Programms ausgeführt

Im zweiten Abschnitte dieser Arbeit wende ich meine allgemeine längst publicirte Integrationstheorie von linearen partiellen Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen auf gewöhnliche Differentialgleichungen $f(xyy' \cdots y^{(m)}) = 0$ mit einer *bekannten* Gruppe an. Derartige Gleichungen können in zwei etwas verschiedenen Weisen behandelt werden. Entweder kann man meine allgemeine Theorie direct anwenden und muss dann successiv eine Reihe vollständiger Systeme aufstellen. Oder auch man fängt damit an, die vorgelegte Gruppe auf ihre canonische Form zu bringen; dadurch erhält $f = 0$ ebenfalls eine canonische Form; hierbei hat man nur gewöhnliche Differentialgleichungen zwischen zwei Variabeln zu behandeln. Die Entwickelungen dieses Abschnittes sind grösstentheils nur als Beispiele und Illustrationen zu meiner alten allgemeinen Theorie zu betrachten.

Im dritten Abschnitte denke ich mir eine ganz beliebige Gleichung $f(xyy' \cdots) = 0$ vorgelegt und stelle die Frage, ob dieselbe infinitesimale Transformationen gestattet. Ist dies der Fall, so werden diese Transformationen bestimmt durch gewisse lineare partielle Differentialgleichungen erster und höherer Ordnung, deren Integration in den meisten Fällen durch successive Quadraturen oder durch Integration einer Riccatischen Gleichung 1. O. geleistet werden kann. Es giebt nur zwei Fälle, in denen die Bestimmung der infinitesimalen Transformationen von $f = 0$ nicht in dieser einfachen Weise geleistet werden kann. Wenn $f = 0$ eine Gruppe gestattet, als deren canonische Form die allgemeine projective Gruppe der Ebene gewählt werden kann, so verlangt die Bestimmung dieser Gruppe im Allgemeinen die Integration einer linearen Gleichung dritter Ordnung. Gestattet andererseits $f = 0$ eine Gruppe, als deren canonische Form die Gruppe einer linearen Gleichung*) gewählt werden kann, so verlangt die Bestimmung unserer Gruppe die Integration einer gewöhnlichen linearen Differentialgleichung.

---

hat (siehe § 1, Nummer 3 dieser Arbeit) allerdings mit schönen Anwendungen, die mir theilweise ferner lagen. Halphen macht aufmerksam auf die Beziehungen zwischen seinen Untersuchungen und Klein's und meinen gemeinsamen früheren Untersuchungen über solche Curven, die eine infinitesimale lineare Transformation gestatten. Dagegen kannte er nicht meine anderen viel weiter reichenden Arbeiten, insbesondere nicht meine Note in den Göttinger Nachr., wie auch nicht meine 1874 publicirte Theorie der Integration von linearen partiellen Differentialgleichungen, die eine bekannte Gruppe von Transformationen gestatten.

*) Besonders merkwürdig ist der Fall, dass die lineare Gleichung des Textes in eine mit constanten Coefficienten sich umwandeln lässt. In diesem Falle geschieht wiederum die Bestimmung der gesuchten inf. Transformationen durch Quadratur; kann jedoch die besprochene lineare Gleichung mit constanten Coefficienten die Form $y^{(r)} = 0$ erhalten, so ist die Integration einer Riccatischen Gleichung 1. O. erforderlich.

In weiteren Abschnitten gedenke ich einige verwandte Theorien, die ich schon seit einiger Zeit im Detail ausgeführt habe, zu entwickeln. Insbesondere werde ich meine Theorien auf solche Gleichungen $f(xy \cdots y^{(m)}) = 0$ anwenden, in denen die Grösse $y^{(m-1)}$ nicht vorkommt. Anderseits werde ich alle Gruppen von Berührungstransformationen der Ebene in canonischer Form betrachten, und ihre invarianten Differentialgleichungen aufstellen; hieran schliesst sich eine rationelle Integrationstheorie solcher Gleichungen $f = 0$, die eine beliebige Gruppe von *Berührungs*transformationen gestatten.

Abschnitt I.

Classification aller gewöhnlichen Differentialgleichungen zwischen xy, die eine Gruppe von Transformationen zwischen diesen Variabeln gestatten.

Bestimmen die Gleichungen

$$x_1 = f(xy\,a_1 a_2 \cdots a_r)$$
$$y_1 = \varphi(xy\,a_1 a_2 \cdots a_r)$$

zwischen den alten Variabeln xy, den neuen Variabeln $x_1 y_1$ und den Parametern $a_1 a_2 \cdots a_r$ eine (continuirliche) Gruppe von Transformationen, so liefert eine Relation der Form

$$\Omega(f \varphi b_1 \cdots b_\varrho) = 0$$

mit $r + \varrho$ Parametern $a_1 \cdots a_r\ b_1 \cdots b_\varrho$ eine Schaar und zwar die allgemeinste Schaar von Curven, deren Inbegriff die vorgelegte Gruppe gestattet. Dies folgt unmittelbar aus dem Begriffe Transformationsgruppe. Zu bemerken ist allerdings dabei, dass die $r + \varrho$ Parameter a_i, b_k nicht sämmtlich wesentlich zu sein brauchen*).

Wählt man die Function Ω in bestimmter Weise, so kann man durch wiederholte Differentiation hinsichtlich x so viele Gleichungen zwischen xy, den Differentialquotienten

$$y^{(i)} = \frac{d^i y}{dx^i}$$

---

*) Die $r + \varrho$ Parameter sind wesentlich, wenn eine beliebige Curve der Schaar

$$\Omega(xy b_1 \cdots b_\varrho) = 0$$

mit ϱ wesentlichen Parametern durch keine infinitesimale Transformation der Gruppe in sich transformirt wird und auch nicht in eine benachbarte Curve dieser Schaar übergeführt wird; giebt es dagegen σ unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe, welche eine beliebige Curve der Schaar wiederum in eine Curve der Schaar überführt, so sind unter den $r + \varrho$ Parametern $a_1 \cdots a_\varrho\ b_1 \cdots b_\varrho$ nur $r + \varrho - \sigma$ wesentlich.

und den Parametern $a_i b_k$ bilden, dass es möglich wird, diese Parameter wegzuschaffen. Hierdurch findet man in jedem einzelnen Falle eine Differentialgleichung, die unsere Gruppe gestattet. Und offenbar kann jede derartige Differentialgleichung in dieser Weise gebildet werden. Diese Methode ist indess nicht zweckmässig, indem sie uns keine Uebersicht über die Gestalt und die Eigenschaften der betreffenden Differentialgleichungen liefert. Zweckmässiger ist es, wie ich seit 1874 bei allen meinen Untersuchungen über Transformationsgruppen zu thun pflege, die *infinitesimalen* Transformationen der Gruppe einzuführen, und vermöge derselben die Bestimmung der betreffenden Differentialgleichungen durchzuführen.

Unsere Gruppe mit den r Parametern a_k enthält nach mir r unabhängige infinitesimale Transformationen*), etwa

$$B_i f = \xi_i(xy)\frac{df}{dx} + \eta_i(xy)\frac{df}{dy}.$$
$$(i = 1, 2 \cdots r)$$

Bei einer solchen inf. Transformation erhält x das Increment $\delta x = \xi_i \delta t$, y das Increment $\delta y = \eta_i \delta t$; gleichzeitig erhält y' ein Increment $\delta y'$, y'' ein Increment $\delta y''$ und überhaupt $y^{(i)}$ ein Increment $\delta y^{(i)}$. Wir werden diese Incremente berechnen. Es ist

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{\delta}{\delta t}\frac{dy}{dx} = \frac{dx\frac{\delta}{\delta t}dy - dy\cdot\frac{\delta}{\delta t}dx}{dx^2}$$

oder

$$\frac{\delta y'}{\delta t} = \frac{dx\cdot d\frac{\delta y}{\delta t} - dy\cdot d\frac{\delta x}{\delta t}}{dx^2} = \frac{d\eta - y' d\xi}{dx}$$
$$= \frac{\partial\eta}{\partial x} + y'\left(\frac{\partial\eta}{\partial y} - \frac{\partial\xi}{\partial x}\right) - y'^2\frac{\partial\xi}{\partial y} = \eta^{(1)}.$$

Dementsprechend ist

$$\frac{\delta y''}{\delta t} = \frac{d\eta^{(1)} - y'' d\xi}{dx} = \eta^{(2)}$$

und überhaupt

$$\frac{\delta y^{(m)}}{\delta t} = \frac{d\eta^{(m-1)} - y^{(m)} d\xi}{dx} = \eta^{(m)}.$$

---

*) Die infinitesimale Transformation, bei der x und y die Incremente

$$\delta x = \xi(xy)\,\delta t,\quad \delta y = \eta(xy)\,\delta t$$

erhalten, bezeichne ich immer mit dem Symbol

$$\xi\frac{\partial f}{\partial x} + \eta\frac{\partial f}{\partial y}.$$

Setze ich nun

$$B_i^{(m)} f = \xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_i^{(1)} \frac{\partial f}{\partial y'} + \cdots + \eta_i^{(m)} \frac{\partial f}{\partial y^{(m)}},$$
$$(i = 1, 2 \cdots r)$$

so sind $B_1^{(m)} f$, $B_2^{(m)} f$, $\cdots B_r^{(m)} f$ die r infinitesimalen Transformationen unserer Gruppe, aufgefasst als transformirend nicht allein xy, sondern zugleich die Differentialquotienten $y' \cdots y^{(m)}$. Und also (Götting. Nachr. 1874, p. 537; Math. Ann. XVI, p. 462—463) bestehen $\frac{r(r-1)}{1 \cdot 2}$ Relationen von der Form

$$B_i^{(m)}\left(B_k^{(m)}(f)\right) - B_k^{(m)}\left(B_i^{(m)}(f)\right) = \sum c_{iks} B_s^{(m)} f,$$

in denen die c_{iks} Constanten sind, die überdies von der Zahl m unabhängig sind.

Soll nun eine Differentialgleichung

$$f(xyy' \cdots y^{(m)}) = 0$$

unsere Gruppe gestatten, so ist hierzu erforderlich und auch hinreichend, dass sie die r inf. Transformationen $B_i^{(m)} f$ gestattet; denn dann gestattet $f = 0$ jede infinitesimale Transformation $\Sigma c_k B_k^{(m)} f$ der Gruppe und also zugleich jede endliche Transformation derselben, die ja durch Wiederholung einer inf. Transformation erzeugt werden kann. Und dies kommt darauf hinaus, dass die r Gleichungen

$$(1) \qquad \xi_i \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y} + \eta_i^{(1)} \frac{\partial f}{\partial y'} + \cdots + \eta_i^{(m)} \frac{\partial f}{\partial y^{(m)}} = 0$$

vermöge $f = 0$ identisch bestehen sollen.

Die weitere Discussion stellt sich verschieden jenachdem r gleich, kleiner oder grösser als $m + 2$ ist.

Nehmen wir zunächst an, dass $m + 2 = r$ ist. Dann ist zum Bestehen der r Gleichungen (1) erforderlich, dass die Determinante

$$\Delta = |\xi_i \eta_i \eta_i^{(1)} \cdots \eta_i^{(r-2)}|$$

verschwindet. Dabei können wir vorläufig von dem Falle, dass Δ identisch verschwindet, absehen, indem dies, wie wir später zeigen, nur ganz ausnahmsweise eintritt. Daher muss die Gleichung $\Delta = 0$ vermöge $f = 0$ bestehen. Es ist anderseits nicht schwierig zu beweisen, dass die Differentialgleichung $\Delta = 0$ immer unsere Transformationsgruppe gestattet. Für eine synthetische Auffassung ist dies unmittelbar evident. Ein Werthsystem $xyy' \cdots y^{(r-2)}$ genügt nämlich der Gleichung $\Delta = 0$ dann und nur dann, wenn dasselbe nicht vermöge der Gruppe in jedes benachbarte Werthsystem übergeführt werden kann. Wünscht man einen analytischen Beweis, so bemerke ich, dass ich für den Fall $m = 1$ schon einen solchen Beweis geliefert habe (siehe Math. Ann. Bd. XVI p. 475), dass ferner der Beweis für einen allgemeinen Werth von m in ganz entsprechender Weise geführt wird. Hierauf näher einzugehen halte ich hier nicht für nothwendig. Ich bemerke nur, dass man im Folgenden bei jeder Anwendung des betreffenden Satzes seine Richtigkeit leicht direct verificirt.

Wir wollen sodann annehmen, dass $m + 2 < r$ ist. Dann ist zum Bestehen der Gleichungen (1) erforderlich, dass alle in der Matrix

$$|\xi_i\, \eta_i\, \eta_i^{(1)} \cdots \eta_i^{(m)}|$$

enthaltenen $(m+2)$-reihigen Determinanten gleichzeitig verschwinden; und da dieselben nicht identisch gleich Null sein können, indem Δ nach unserer Voraussetzung nicht identisch verschwinden soll, so müssen die soeben besprochenen Determinanten, die offenbar ganze Functionen der Grössen $y^{(k)}$ sind, einen gemeinsamen Factor (Δ) enthalten; dabei ist klar, dass diese Grösse (Δ) ebenfalls ein Factor von Δ sein muss. Dies giebt uns nun zunächst den Satz:

Satz. *Sucht man alle bei der vorgelegten Gruppe $B_1 f \cdots B_r f$ invarianten Differentialgleichungen*

$$f(xyy' \cdots y^{(m)}) = 0,$$

deren Ordnungszahl m nicht grösser als $r - 2$ ist, so muss man die Determinante

$$\Delta = |\xi_i\, \eta_i\, \eta_i^{(1)} \cdots \eta_i^{(r-2)}|$$

bilden. Verschwindet dieselbe nicht identisch, so liefern ihre Factoren gleich Null gesetzt die gesuchten Differentialgleichungen.

Als Corollar fliesst hieraus der Satz:

Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $f = 0$ $m + 2$ oder noch mehr infinitesimale Punkttransformationen, so kann man ohne Beschränkung annehmen, dass f eine ganze Function der Grössen $y^{(i)}$ ist.

Dieser Satz ist im Vorangehenden nur unter der Voraussetzung erwiesen, dass die Determinante Δ nicht identisch verschwindet. Derselbe ist indess allgemein gültig, wie wir später nachweisen werden.

Es erübrigt noch alle bei der Gruppe invarianten Differentialgleichungen $f(xyy' \cdots y^{(m)}) = 0$, deren Ordnungszahl m grösser als $r - 2$ ist, zu finden. Dabei schliessen wir wie früher vorläufig den Ausnahmefall $\Delta = 0$ aus. Unter dieser Voraussetzung bilden die r Gleichungen (1) nach meinem früher citirten Satze ein vollständiges System mit $m + 2 - r$ gemeinsamen Lösungen. Sei zunächst $m + 2 = r + 1$, dann giebt es eine Lösung φ_1, die durch Integration gefunden wird*). Dabei hängt φ_1 nur von $xyy' \cdots y^{(r-1)}$ ab. Sei

*) Diese Integration kann immer geleistet werden, wenn die *endlichen* Transformationen der Gruppe bekannt sind.

darnach $m+2=r+2$, dann giebt es zwei Lösungen, *unter denen* φ_1 *die eine ist;* die zweite Lösung φ_2 hängt von $xyy'\cdots y^{(r)}$ ab. Ist $m+2=r+3$, so giebt es drei Lösungen φ_1, φ_2 und φ_3, welch' letztere von $xyy'\cdots y^{(r+1)}$ abhängt. Für einen beliebigen Werth von m giebt es $m-r+2$ Lösungen $\varphi_1\varphi_2\cdots\varphi_{m-r+2}$. Es ist nun leicht zu sehen, dass *jedenfalls* nur die beiden ersten φ_k, nämlich φ_1 und φ_2, durch Integration bestimmt zu werden brauchen. Kennt man φ_1 und φ_2, so findet man die übrigen φ_k folgendermassen durch Differentiation.

Es ist die Gleichung

$$\varphi_2-a\varphi_1+b=0$$

mit den beiden arbiträren Constanten a und b eine invariante Differentialgleichung r^{ter} Ordnung. Differentiirt man nun hinsichtlich x, so ist die hervorgehende Gleichung

$$\frac{d\varphi_2}{dx}-a\frac{d\varphi_1}{dx}=0$$

oder die äquivalente

$$\frac{\frac{d\varphi_2}{dx}}{\frac{d\varphi_1}{dx}}=a=\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}$$

eine invariante Gleichung $(r+1)^{\text{ter}}$ Ordnung mit einer arbiträren Constante.

Also kann die Grösse

$$\frac{d\varphi_2}{dx}:\frac{d\varphi_1}{dx}$$

als Grösse φ_3 gewählt werden. Dementsprechend kann

$$\frac{d\varphi_3}{dx}:\frac{d\varphi_1}{dx}$$

als Grösse φ_4 gewählt werden u. s. w. Dieses Bildungsgesetz zeigt, dass φ_3 hinsichtlich $y^{(r+1)}$, dass φ_4 hinsichtlich $y^{(r+2)}$ linear ist u. s. w.

Satz. *Jede bei der Gruppe $B_1f\cdots B_rf$ invariante Differentialgleichung, deren Ordnung grösser als $r-2$ ist, besitzt die Form*

$$\Omega(\varphi_1\varphi_2\varphi_3\cdots)=0.$$

Zuletzt nur noch einige weitere Bemerkungen über invariante Differentialgleichungen

$$f(xy\cdots y^{(\varrho)})=0,$$

deren Ordnung ϱ nicht $r-1$ übersteigt. Nehmen wir wieder an, dass Δ nicht identisch verschwindet, und sei Δ_i ein Factor von Δ, der von den Grössen $x y y' \ldots y^{r-2-i}$ abhängt. Dann enthält das Integral von $\Delta_i = 0$, $r - i - 2$ arbiträre Constanten:

$$\varphi(x y a_1 \ldots a_{r-i-2}) = 0,$$

d. h. die Gleichung $\Delta_i = 0$ hat ∞^{r-i-2} Integralcurven. Bei den Transformationen der Gruppe werden diese Integralcurven unter sich vertauscht, und zwar wird jede einzelne Integralcurve durch $i + 2$ unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe in sich selbst transformirt.

Ist insbesondere Δ_0 ein Factor von Δ, der die Grösse $y^{(r-2)}$ enthält*), so ist $\Delta_0 = 0$ eine invariante Differentialgleichung, von deren Integralcurven jede *zwei* unabhängige infinitesimale Transformationen der Gruppe gestattet. Besitzt Δ keinen Factor Δ_0, der $y^{(r-2)}$ wirklich enthält, so heisst dies, dass es keine Curve giebt, die zwei und nur zwei infinitesimale Transformationen unserer Gruppe gestattet.

Betrachten wir endlich die invariante Differentialgleichung $(r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung

$$\varphi_1 = a_0,$$

deren arbiträre Constante a_0 einen bestimmten Werth erhalten hat. Diese Differentialgleichung hat ∞^{r-1} Integralcurven, die durch die r unabhängigen infinitesimalen Transformationen der Gruppe unter sich vertauscht werden. Also schliessen wir, dass jede Integralcurve durch eine und nur eine infinitesimale Transformation der Gruppe in sich transformirt wird.

In den drei ersten Paragraphen dieses Abschnittes betrachten wir successiv alle Gruppen von Punkttransformationen der Ebene, indem wir sie auf die von mir bestimmten canonischen Formen gebracht voraussetzen. Für jede solche canonische Gruppe bestimmen wir die zugehörigen invarianten Differentialgleichungen. In dem letzten Paragraphen zeigen wir, wie eine beliebige vorgelegte Gruppe auf ihre canonische Form gebracht wird.

§ 1.

Gruppen, die keine Differentialgleichung 1. O. invariant lassen.

In meiner Aufzählung aller Gruppen von Punkttransformationen einer Ebene (Göttinger Nachr. 1874, Math. Ann. Bd. XVI) theilte ich alle derartigen Gruppen in gewisse Hauptclassen, jenachdem die betreffende Gruppe keine, eine, oder mehrere Differentialgleichungen *erster* Ordnung invariant lässt.

In diesem Paragraphen betrachte ich jede Gruppe, die keine Differentialgleichung erster Ordnung invariant lässt, und bestimme

*) Die Form der Determinante Δ zeigt, dass Δ_0 hinsichtlich $y^{(r-2)}$ linear ist.

alle zugehörigen invarianten Differentialgleichungen höherer Ordnung, unter denen sich immer eine von zweiter Ordnung findet (welche durch passende Coordinatenwahl die lineare Form $y''=0$ erhalten kann).

Die betreffende Gruppe enthält entweder acht oder sechs oder fünf Parameter. Sie ist ähnlich mit der allgemeinen projectiven Gruppe der Ebene oder mit einer Untergruppe derselben, die sechs oder fünf Parameter enthält. Wir denken uns im Folgenden unsere Gruppen auf die soeben genannten canonischen Formen gebracht.

1. Jede fünfgliedrige Gruppe, die keine Differentialgleichung erster Ordnung invariant lässt, kann auf die canonische Form*)

$$p,\ q,\ xq,\ xp-yq,\ yp$$

gebracht werden. Die Determinante Δ erhält für diese canonische Form den nicht identisch verschwindenden Werth:

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 \\ y & -y & -2y' & -3y'' & -4y''' \\ y & 0 & -y'^2 & -3y'y'' & -4y'y'''-3y''^2 \end{vmatrix}=9y''^3.$$

Daher ist $y''=0$ die einzige invariante Differentialgleichung, deren Ordnung kleiner als vier ist.

Zur Bestimmung der Grössen φ_1 und φ_2 bilden wir die folgenden linearen partiellen Gleichungen, in denen wir, wie immer im Folgenden, y_k statt $y^{(k)}$ schreiben:

$$B_1f=\frac{\partial f}{\partial x}=0$$

$$B_2f=\frac{\partial f}{\partial y}=0$$

$$B_3f=x\frac{\partial f}{\partial y}+\frac{\partial f}{\partial y_1}=0$$

$$B_4f=x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}-2y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}-3y_2\frac{\partial f}{\partial y_2}\cdots-6y_5\frac{\partial f}{\partial y_5}=0$$

$$B_5f=y\frac{\partial f}{\partial x}-y_1^2\frac{\partial f}{\partial y_1}-3y_1y_2\frac{\partial f}{\partial y_2}-(4y_1y_3+3y_2^2)\frac{\partial f}{\partial y_3}$$
$$-(5y_1y_4+10y_2y_3)\frac{\partial f}{\partial y_4}-(6y_1y_5+15y_2y_4+10y_3^2)\frac{\partial f}{\partial y_5}=0$$

*) Statt $\frac{\partial f}{\partial z}$ und $\frac{\partial f}{\partial y}$ pflege ich zu schreiben p und q. So z. B. schreibe ich $xp-yq$ statt $x\frac{\partial f}{\partial x}-y\frac{\partial f}{\partial y}$, um die infinitesimale Transformation

$$\delta x=x\delta t,\quad \delta y=-y\delta t$$

zu bezeichnen.

und suchen ihre beiden gemeinsamen Lösungen. Die drei ersten Gleichungen zeigen, dass φ_1 und φ_2 nicht von x, y oder y_1 abhängen. Die beiden letzten Gleichungen erhalten durch Reduction die einfachere Form

$$B_4 f = 3y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + 4y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 5y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} + 6y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5} = 0$$

$$B_5 f = 3y_2^2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 10 y_2 y_3 \frac{\partial f}{\partial y_4} + (15 y_2 y_4 + 10 y_3^2) \frac{\partial f}{\partial y_5} = 0.$$

Wir integriren $B_5 f = 0$ in der gewöhnlichen Weise, führen sodann ihre Lösungen

$$y_2,\ \varrho_3 = 3y_2 y_4 - 5y_3^2,\ \ \varrho_3 = 3y_2^2 y_5 - 5\varrho_2 y_3 - \frac{35}{3} y_3^3 \text{*)}$$

als neue unabhängige Variabeln in

$$B_4 f = B_4 y_2 \cdot \frac{\partial f}{\partial y_2} + B_4 \varrho_2 \frac{\partial f}{\partial \varrho_2} + B_4 \varrho_3 \frac{\partial f}{\partial \varrho_3} = 0$$

ein und erhalten hierdurch die Gleichung

$$3y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + 8\varrho_2 \frac{\partial f}{\partial \varrho_2} + 12\varrho_3 \frac{\partial f}{\partial \varrho_3} = 0,$$

deren Lösungen

$$\varphi_1 = \frac{\varrho_2}{y_2^{\frac{8}{3}}},\quad \varphi_2 = \frac{\varrho_3}{y_2^4}$$

eben die gesuchten Grössen φ_1**) und φ_2 sind. Es bleibt nur übrig, die früher gefundenen Werthe der Grössen ϱ_2 und ϱ_3 einzusetzen. Man bemerkt, dass φ_1 linear hinsichtlich y_4 und anderseits φ_2 linear hinsichtlich y_5 ist.

Da φ_1 hinsichtlich y_2 irrational ist, so kann es zuweilen zweckmässiger sein die Grösse φ_1^3 als φ_1 zu wählen. Eine ähnliche Bemerkung lässt sich mehrmals später machen.

2. Jede sechsgliedrige Gruppe, die keine Differentialgleichung erster Ordnung invariant lässt, kann die canonische Form

$$p,\ q,\ xq,\ yq,\ xp,\ yp$$

erhalten. Die Determinante Δ wird für diese canonische Form gleich

---

*) Die Grösse ϱ_3 erhält durch die Substitution $\varrho_2 = 3y_2 y_4 - 5y_3^2$ den Werth

$$\varrho_3 = 3y_2^2 y_5 - 15 y_2 y_3 y_4 + \frac{40}{3} y_3^3.$$

Es ergiebt sich später, dass die Gleichung $\varrho_3 = 0$ eine bemerkenswerthe geometrische Bedeutung besitzt.

**) Man verificirt leicht, dass jede Integralcurve einer Gleichung $\varphi_1 = \text{Const.}$ wirklich eine infinitesimale lineare Transformation unserer Gruppe gestattet. Ich erinnere daran, dass *Klein* und ich in einer gemeinsamen Arbeit die Theorie dieser Curven eingehend entwickelt haben.

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & x & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x & 0 & -y_1 & -2y_2 & -3y_3 & -4y_4 \\ y & 0 & -y_1^2 & -3y_1y_2 & -4y_1y_3-3y_2^2 & -5y_1y_4-10y_2y_3 \end{vmatrix} = 2y_2^2(5y_3^2 - 3y_2y_4).$$

Es giebt daher zwei invariante Differentialgleichungen, deren Ordnungszahl kleiner als fünf ist, nämlich

$$y_2 = 0, \text{ und } 5y_3^2 - 3y_2y_4 = 0^{*)}.$$

Zur Bestimmung der Grössen φ_1 und φ_2 müssen wir nach unseren gewöhnlichen Regeln sechs lineare partielle Differentialgleichungen zwischen $xyy_1y_2\dots y_6$ bilden. Drei unter diesen Gleichungen

$$B_1f = \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad B_2f = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad B_3f = x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

sagen nur aus, dass φ_1 und φ_2 von x, y und y_1 unabhängig sind; die drei übrigen Gleichungen erhalten durch eine einfache Reduction die Form

$$B_4f = y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} + \dots + y_6\frac{\partial f}{\partial y_6} = 0$$

$$B_5f = y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} + 2y_4\frac{\partial f}{\partial y_4} + \dots + 4y_6\frac{\partial f}{\partial y_6} = 0$$

$$B_6f = 3y_2^2\frac{\partial f}{\partial y_3} + 10y_2y_3\frac{\partial f}{\partial y_4} + (15y_2y_4 + 10y_3^2)\frac{\partial f}{\partial y_5} + (21y_2y_5 + 35y_3y_4)\frac{\partial f}{\partial y_6} = 0.$$

Die Lösungen von $B_6f = 0$, nämlich

$$3y_2y_4 - 5y_3^2 = \sigma_2$$

$$3y_2^2y_5 - 5\sigma_2y_3 - \frac{35}{3}y_3^3 = \sigma_3 = 3y_2^2y_5 - 15y_2y_3y_4 + \frac{40}{3}y_3^3$$

$$3y_2^3y_6 - 7\sigma_3y_3 - \frac{70}{3}\sigma_2y_3^2 - 35y_3^4 = \sigma_4 = 3y_2^3y_6 - 21y_2^2y_3y_5 + 35y_2y_3^2y_4 - \frac{35}{3}y_3^4$$

führen wir als neue Variabeln in die Gleichung $B_5f = 0$ ein und bringen sie hierdurch auf die Form

*) In der gewählten canonischen Form besteht unsere Gruppe aus allen projectiven Transformationen, bei denen die unendlich entfernte Gerade ihre Lage behält. Die Integralcurven der Gleichung $5y_3^2 = 3y_2y_4$ sind alle Parabeln, d. h. Kegelschnitte, welche jene Gerade berühren. Jede solche Curve gestattet wirklich zwei unabhängige inf. Transformationen unserer Gruppe.

$$2\sigma_2 \frac{\partial f}{\partial \sigma_2} + 3\sigma_3 \frac{\partial f}{\partial \sigma_3} - 4\sigma_4 \frac{\partial f}{\partial \sigma_4} = 0.$$

Die entsprechenden Lösungen, nämlich

$$\frac{\sigma_3}{\sigma_2^{\frac{3}{2}}}, \quad \frac{\sigma_4}{\sigma_2^{2}},$$

befriedigen als Grössen nullter Ordnung hinsichtlich $y_2 y_3 \ldots y_6$ ebenfalls $B_4 f = 0$ und können daher als die gesuchten Invarianten φ_1 und φ_2

$$\varphi_1 = \frac{\sigma_3}{\sigma_2^{\frac{3}{2}}} \text{*)}, \quad \varphi_2 = \frac{\sigma_4}{\sigma_2^{2}}$$

gewählt werden. Auch jetzt sind φ_1 und φ_2 ganze Functionen von $y_5 y_6$ und dabei ist φ_1 linear hinsichtlich y_5, φ_2 linear hinsichtlich y_6.

3. Wenn eine achtgliedrige Gruppe keine Differentialgleichung 1. O. invariant lässt, so kann sie auf die canonische Form

$$p,\ q,\ xq,\ yq,\ xp,\ yp,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q$$

gebracht werden. Die Determinante Δ erhält durch Ausführung und einfache Reduction die Form

$$\Delta = \begin{vmatrix} y_2 & y_3 & y_4 & y_5 & y_6 \\ 0 & y_3 & 2y_4 & 3y_5 & 4y_6 \\ 0 & 3y_2^2 & 10y_2y_3 & 15y_2y_4 + 10y_3^2 & 21y_2y_5 + 35y_3y_4 \\ 0 & 3y_2 & 8y_3 & 15y_4 & 24y_5 \\ 0 & 0 & 6y_2^2 & 30y_2y_3 & 60y_2y_4 + 40y_3^2 \end{vmatrix}.$$

Zur Berechnung derselben subtrahirt man von den Gliedern der dritten Reihe zuerst diejenigen der vierten Reihe, multiplicirt mit y_2, und darnach diejenigen der fünften Reihe, multiplicirt mit $\frac{y_3}{3y_2}$; dann verschwinden alle Glieder der dritten Reihe ausgenommen das letzte, und es wird

$$\Delta = \left(15y_2y_3y_4 - 3y_2^2y_5 - \frac{40}{3}y_3^3\right) \begin{vmatrix} y_3 & 2y_4 & 3y_5 \\ 3y_2 & 8y_3 & 15y_4 \\ 0 & 6y_2^2 & 30y_2y_3 \end{vmatrix}$$

oder

$$\Delta = -2y_2(9y_2^2y_5 - 45y_2y_3y_4 + 40y_3^3)^2,$$

sodass Δ nicht identisch gleich Null ist. Es giebt *zwei* invariante

*) Auch jetzt gestattet jede Integralcurve einer Gleichung $\varphi_1 =$ Const. eine infinitesimale Transformation und gehört somit der von Klein und mir untersuchten Categorie an.

Differentialgleichungen, deren Ordnung kleiner als 7 ist*), nämlich $y_2 = 0$ und

(2) $$9y_2^2 y_5 - 45 y_2 y_3 y_4 + 40 y_3^2 = 0.$$

Um jetzt die Grössen Φ_1 und Φ_2 zu berechnen, müssen wir nach unseren gewöhnlichen Regeln acht lineare partielle Differentialgleichungen in den Variabeln $x\, y\, y_1 \dots y_8$ (den acht infinitesimalen Transformationen p, q, xq, yq, xp, $x^2p + xyp$, yp, $xyp + y^2q$ entsprechend) bilden. Die drei ersten unter diesen Gleichungen

$$B_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad B_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad B_3 f = x\frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

sagen nur aus, dass Φ_1 und Φ_2 von $x\, y$ und y_1 unabhängig sind. Diejenige Gleichung, die der inf. Transformation $xyp + y^2q$ entspricht, brauchen wir nicht zu bilden; sie ist nämlich wegen der Relation

$$(yp,\ x^2p + xyq) = xyp + y^2q$$

eine Consequenz der übrigen. Die Grössen $\Phi_1\ \Phi_2$ sind daher bestimmt als Functionen von $y_2\, y_3 \dots y_8$ durch die Gleichungen

$$B_4 f = y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + \cdots + y_8 \frac{\partial f}{\partial y_8} = 0$$

$$B_5 f = y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 2y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} + \cdots + 6y_8 \frac{\partial f}{\partial y_8} = 0$$

$$B_6 f = 3y_2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 8y_3 \frac{\partial f}{\partial y_4} + 15 y_4 \frac{\partial f}{\partial y_5} + 24 y_5 \frac{\partial f}{\partial y_6} + 35 y_6 \frac{\partial f}{\partial y_7} + 48 y_7 \frac{\partial f}{\partial y_8} = 0$$

$$B_7 f = 3y_2^2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 10 y_2 y_3 \frac{\partial f}{\partial y_4} + (15 y_2 y_4 + 10 y_3^2) \frac{\partial f}{\partial y_5} + (21 y_2 y_5 + 35 y_3 y_4) \frac{\partial f}{\partial y_6} + (28 y_2 y_6 + 56 y_3 y_5 + 35 y_4^2) \frac{\partial f}{\partial y_7} + (36 y_2 y_7 + 84 y_3 y_6 + 126\, y_4 y_5) \frac{\partial f}{\partial y_8} = 0.$$

Zur Bestimmung der gemeinsamen Lösungen Φ_1 und Φ_2 derselben bilden wir zuerst die Lösungen von $B_6 = f$, nämlich

$$y_2 = y_2$$

$$\varrho_2 = 3y_2 y_4 - 4y_3^2$$

$$\varrho_3 = 3y_2^2 y_5 - 5y_3 \varrho_2 - \frac{20}{3} y_3^3 = \frac{1}{3}(9y_2^2 y_5 - 45 y_2 y_3 y_4 + 40 y_3^3)$$

*) Das Resultat des Textes war a priori evident. Denn es giebt ja nur zwei Curven, die gerade Linie und der Kegelschnitt, die mehr als eine infinitesimale und lineare Transformation in sich gestatten. Halphen hat zuerst die obenstehende Differentialgleichung (2) der Kegelschnitte wirklich aufgestellt. Ebenso hat Halphen zuerst die später aufgestellen Grössen Φ_1 und Φ_2 berechnet. [Ich erfahre nachträglich, dass schon Monge die Differentialgleichung der Kegelschnitte berechnet hat. Januar 1888].

$$\varrho_4 = 3y_2^3y_6 - 8y_3\varrho_3 - 20y_3^2\varrho_2 - \frac{40}{3}y_3^4 = 3y_2^3y_6 - 24y_2^2y_3y_5 + 60y_2y_3^2y_4 - 40y_3^4$$

$$\varrho_5 = 9y_2^4y_7 - 35y_3\varrho_4 - 140y_3^2\varrho_3 - \frac{700}{3}y_3^3\varrho_2 - \frac{280}{3}y^5$$

$$= 9y_2^4y_7 - 105y_2^3y_3y_6 + 420y_2^2y_3^2y_5 - 700y_2y_3^3y_4 + \frac{1120}{3}y_3^5$$

$$\varrho_6 = 27y_2^5y_8 - 48y_3\varrho_5 - 24\cdot 35y_3^2\varrho_4 - 16\cdot 140y_3^3\varrho_3 - 2800y_3^4\varrho_2 - \frac{8\cdot 280}{3}y_3^6$$

und führen sie darnach zusammen mit y_3 als neue Variabeln in $B_4f=0$, $B_5f=0$, $B_6f=0$ und $B_7f=0$ ein. Nun ist, wie man leicht sieht

$$B_4y_2 = y_2,\ B_4y_3 = y_3,\ B_4\varrho_k = k\varrho_k;$$
$$B_5y_2 = 0,\ B_5y_3 = y_3,\ B_5\varrho_i = i\varrho_i$$

also erhält $B_4f=0$ in den neuen Variabeln die Form

$$y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} + 2\varrho_2\frac{\partial f}{\partial \varrho_2} + 3\varrho_3\frac{\partial f}{\partial \varrho_3} + \cdots + 6\varrho_6\frac{\partial f}{\partial \varrho_6} = 0$$

und $B_5f=0$ die Form

$$y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} + 2\varrho_2\frac{\partial f}{\partial \varrho_2} + \cdots + 6\varrho_6\frac{\partial f}{\partial \varrho_6} = 0,$$

sodass $B_4f=0$ sich auf

$$\frac{\partial f}{\partial y_2} = 0$$

reducirt. Ferner ist klar, dass $B_6f=0$ die Form

$$\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0$$

annimmt. Zur Einführung der ϱ_k als Variabeln in $B_7f=0$ bilden wir die Ausdrücke

$$\begin{aligned}
B_7\varrho_2 &= 6y_2^2y_3\\
B_7\varrho_3 &= 0\\
B_7\varrho_4 &= -3y_2^2\varrho_3 + 20y_2^2y_3\varrho_2\\
B_7\varrho_5 &= y_2^2(-21\varrho_4 + 35\varrho_2^2) + y_2^2y_3\cdot 105\varrho_3\\
B_7\varrho_6 &= y_2^2(-36\varrho_5 + 3\cdot 126\varrho_2\varrho_3) + y_2^2y_3(504\varrho_4 + 210\varrho_2^2);
\end{aligned}$$

also erhält $B_7f=0$ durch Division mit y_2^2 die Form

$$y_3\left\{6\frac{\partial f}{\partial \varrho_2} + 20\varrho_2\frac{\partial f}{\partial \varrho_4} + 105\varrho_3\frac{\partial f}{\partial \varrho_5} + (504\varrho_4 + 210\varrho_2^2)\frac{\partial f}{\partial \varrho_6}\right\}$$
$$+\left\{-3\varrho_3\frac{\partial f}{\partial \varrho_4} + (-21\varrho_4 + 35\varrho_2^2)\frac{\partial f}{\partial \varrho_5} + (-36\varrho_5 + 3\cdot 126\varrho_2\varrho_3)\frac{\partial f}{\partial \varrho_6}\right\} = 0,$$

welch letztere Gleichung sich wegen $\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0$ in zwei spaltet. Die gesuchten Grössen Φ_1 und Φ_2 sind daher bestimmt als Functionen von $\varrho_2\,\varrho_3\ldots\varrho_6$ durch die drei Gleichungen

$$\begin{cases} 2\varrho_2\dfrac{\partial f}{\partial \varrho_2}+3\varrho_3\dfrac{\partial f}{\partial \varrho_3}+\cdots+6\varrho_6\dfrac{\partial f}{\partial \varrho_6}=0 \\ Cf=6\dfrac{\partial f}{\partial \varrho_2}+20\varrho_2\dfrac{\partial f}{\partial \varrho_4}+105\varrho_3\dfrac{\partial f}{\partial \varrho_5}+(504\varrho_4+210\varrho_2^2)\dfrac{\partial f}{\partial \varrho_6}=0 \\ Df=-3\varrho_3\dfrac{\partial f}{\partial \varrho_4}+(-21\varrho_4+35\varrho_2^2)\dfrac{\partial f}{\partial \varrho_5}+(-36\varrho_5+3\cdot 126\varrho_2\varrho_3)\dfrac{\partial f}{\partial \varrho_6}=0 \end{cases}$$

[unter denen die erste aussagt, dass Φ_1 und Φ_2 Functionen von den Verhältnissen der Grössen $\varrho_2^{\frac{1}{2}}\,\varrho_2^{\frac{1}{3}}\cdots\varrho_6^{\frac{1}{6}}$ sind]. Wir bestimmen die Lösungen von $Cf=0$, nämlich

$$\varrho_3,\; u_4=\varrho_4-\frac{5}{3}\varrho_2^2$$
$$u_5=\varrho_5-\frac{35}{3}\varrho_2\varrho_3$$
$$u_6=\varrho_6-\frac{175}{3}\varrho_2^3-84\varrho_2 u_4$$

und führen sie als Variable in $Df=0$ ein. Nun ist

$$D\varrho_3=0,\; Du_4=-3\varrho_3,\; Du_5=-21u_4,\; Du_6=-36u_5$$

und also erhält $Df=0$ durch Division mit -3 die Form

$$\varrho_3\frac{\partial f}{\partial u_4}+7u_4\frac{\partial f}{\partial u_5}+12u_5\frac{\partial f}{\partial u_6}=0.$$

Die entsprechenden Lösungen sind

$$\varrho_3,\; \sigma=2\varrho_3u_5-7u_4^2=2\varrho_3\varrho_5-35\varrho_2\varrho_3^2-7\left(\varrho_4-\frac{5}{3}\varrho_2^2\right)^2$$

$$\sigma_1=\varrho_3u_6-\frac{6\sigma}{\varrho_3}u_2-\frac{14}{\varrho_3}u_4^3$$
$$=\varrho_3\left(\varrho_6-84\varrho_3\varrho_4+\frac{245}{3}\varrho_2^3\right)-12\left(\varrho_5-\frac{35}{2}\varrho_2\varrho_3\right)\left(\varrho_4-\frac{5}{3}\varrho_2^2\right)+\frac{28}{\varrho_3}\left(\varrho_4-\frac{5}{3}\varrho_2^2\right)^3.$$

Und da die gesuchten Grössen Φ_1 und Φ_2 Functionen von den Verhältnissen der Grössen $\varrho_2^{\frac{1}{2}}\varrho_3^{\frac{1}{3}}\cdots\varrho_6^{\frac{1}{6}}$ sind, so können wir setzen:

$$\Phi_1=\frac{\sigma}{\varrho_3^{\frac{8}{3}}},\qquad \Phi_2=\frac{\sigma_1}{\varrho_3^3}.$$

Hiermit ist diese Untersuchung zum Abschluss gebracht*).

---

*) Im Laufe dieser Abhandlung benutze ich häufig den folgenden bekannten Satz: „Bilden $A_1f=0\ldots A_rf=0$ ein vollständiges System in $x_1\ldots x_n$, so kann die Integration desselben folgendermassen geschehen. Man sucht die Lösungen $\varphi_1\ldots\varphi_{n-1}$ von $A_1f=0$; bildet sodann

$$A_2f=0=A_2\varphi_1\frac{\partial f}{\partial\varphi_1}+\cdots+A_2\varphi_{n-1}\frac{\partial f}{\partial\varphi_{n-1}}.$$

Sind die Verhälsnisse der $A_2\varphi_k$ nicht Functionen von $\varphi_1\ldots\varphi_{n-1}$ allein, so zerlegt die Gleichung $A_2f=0$ sich in mehrere. Wir integriren eine *beliebige* unter ihnen

§ 2.

Gruppen, die zwei und nur zwei Differentialgleichungen erster Ordnung invariant lassen.

Im vorangehenden Paragraphen behandelten wir alle Gruppen, die keine Differentialgleichung erster Ordnung invariant lassen, und bestimmten ihre zugehörigen invarianten Differentialgleichungen höherer Ordnung. Jetzt erledigen wir dasselbe Problem für alle Gruppen mit zwei und nur zwei invarianten Differentialgleichungen 1. O. Dabei können wir nach meinen früheren Untersuchungen (Gött. Nachr. 1874, Math. Ann. Bd. XVI) annehmen, dass diese beiden Gleichungen 1. O. eben sind

$$y_1 = \frac{dy}{dx} = 0, \quad \text{und} \quad \frac{dx}{dy} = \frac{1}{y_1} = 0,$$

und dass dementsprechend die betreffende Gruppe eine der folgenden canonischen Formen besitzt:

q	q	q	q	p	$p+q$	q	q	q
yq	yq	yq	yq	q	$xp+yq$	yq	yq	yq
	y^2q	p	y^2q	$xp+cyq$	x^2p+y^2q	p	y^2q	y^2q
	p					xp	p	p
							xp	xp
								x^2p

Wir werden der Reihe nach diese 9 Gruppen betrachten und ihre zugehörigen invarianten Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung bestimmen.

4. Zuerst betrachten wir die zweigliedrige Gruppe q, yq. Die zugehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 0 & y \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch; dies beruht darauf, dass *jede* Curve (d. h. Gerade) der Schaar $x = \text{Const.}$ bei der Gruppe invariant bleibt. Zur Bestimmung der invarianten Differentialgleichungen m^{ter} Ordnung

$$f(xyy_1 \ldots y_m) = 0$$

---

und führen die entsprechenden Lösungen $\psi_1 \ldots \psi_{n-2}$ etwa in $A_3 f = 0$ ein. Die hervorgehende Gleichung $A_3 \psi_1 \frac{\partial f}{\partial \psi_1} + \cdots = 0$ behandeln wir dann in analoger Weise u. s. w.

bilden wir die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}+y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+\cdots+y_m\frac{\partial f}{\partial y_m}=0.$$

Ist $m>1$, so ergiebt sich, dass f eine arbiträre Function der Grössen

$$x, \quad \frac{y_2}{y_1} \; \frac{y_3}{y_1} \cdots \frac{y_m}{y_1}$$

ist. Wenn dagegen $m=1$ ist, so können die beiden Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}+y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}=0$$

nur dann gleichzeitig bestehen, wenn $y_1=0$ ist; es ist nämlich an sich unmöglich, dass f nur x enthält. Zu den hiermit gefundenen invarianten Differentialgleichungen muss die Gleichung

$$\frac{1}{y_1}=0$$

gefügt werden. Dieselbe entgeht uns bei unserer Coordinatenwahl. Dieselbe Bemerkung ist bei allen Gruppen dieses Paragraphen zu machen.

5. Die zu der Gruppe p, q, yq gehörige Determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & y_1 \end{vmatrix}$$

verschwindet nicht identisch. Sie liefert die invariante Differentialgleichung erster Ordnung $y_1=0$, wozu wie soeben die Gleichung $\frac{1}{y_1}=0$ zu fügen ist.

Die invarianten Differentialgleichungen $f=0$, deren Ordnung grösser als 1 ist, werden bestimmt durch die Relationen

$$\frac{\partial f}{\partial x}=0, \quad \frac{\partial f}{\partial y}=0, \quad y\frac{\partial f}{\partial y}+y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+\cdots+y_m\frac{\partial f}{\partial y_m}$$

und somit ist f eine arbiträre Function von

$$\frac{y_2}{y_1} \; \frac{y_3}{y_1} \cdots \frac{y_m}{y_1}.$$

6. Die zu der Gruppe p, q, yq, xp gehörige Determinante

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & y_1 & y_2 \\ x & 0 & -y_1 & -2y_2 \end{vmatrix}=-y_1y_2$$

verschwindet nicht identisch. Es giebt drei invariante Differentialgleichungen, deren Ordnung kleiner als 3 ist, nämlich

$$y_1 = 0, \quad \frac{1}{y_1} = 0, \quad y_2 = 0.$$

Zur Bildung der invarianten Gleichungen höherer Ordnung

$$f(xy \dots y_m) = 0$$

bilden wir vier lineare partielle Differentialgleichungen, unter denen zwei nur aussagen, dass f von x und y unabhängig ist. Die beiden übrigen Gleichungen

$$y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \cdots + y_m \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0$$

$$y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + 2y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + \cdots + (m-1) y_m \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0$$

zeigen, dass f eine arbiträre Function von

$$\frac{y_1 y_3}{y_2^2}, \quad \frac{y_1^2 y_4}{y_2^3}, \dots \frac{y_1^{m-2} y_m}{y_2^{m-1}}$$

ist.

7. Die zu der Gruppe p, q, $xp + cyq$ gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & cy & (c-1)y_1 \end{vmatrix} = (c-1)y_1$$

verschwindet identisch dann und nur dann, wenn $c = 1$ ist. Diesen Ausnahmefall berücksichtigen wir nicht in diesem Paragraphen, indem die Gruppe p, q, $xp + yq$ einfach unendlich viele Differentialgleichungen erster Ordnung, nämlich jede Gleichung der Form

$$y_1 = \text{Const.}$$

invariant lässt.

Wenn c verschieden von 1 ist, so lässt unsere Gruppe nur zwei Gleichungen erster Ordnung, nämlich

$$y_1 = 0, \quad \text{und} \quad \frac{1}{y_1} = 0$$

invariant. Die invarianten Gleichungen höherer Ordnung $f = 0$ werden bestimmt durch

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \; \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \; (c-1) y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + (c-2) y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + \cdots + (c-m) y_m \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0,$$

so dass f eine arbiträre Function der Grössen

$$\frac{y_2}{y_1^{\frac{c-2}{c-1}}} \cdots \frac{y_m}{y_1^{\frac{c-m}{c-1}}}$$

sein muss. Diese Bestimmung bleibt auch dann gültig, wenn c gleich einer unter den Zahlen $2, 3, \ldots m$ ist.

8. Die zu der Gruppe q, yq, y^2q gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & y & y_1 \\ 0 & y^2 & 2yy_1 \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch, indem jede Curve (d. h. Gerade) der Schaar $x =$ Const. bei unserer Gruppe invariant bleibt.

Zur Bestimmung der invarianten Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung bilden wir die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + y_m \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0$$

$$y_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + 3y_1y_2 \frac{\partial f}{\partial y_3} + (4y_1y_3 + 3y_2^2) \frac{\partial f}{\partial y_4} + \cdots = 0,$$

deren Lösungen sind

$$\varphi_1 = x, \quad \varphi_2 = \frac{y_1y_3 - \frac{3}{2} y_2^2}{y_1^2}, \quad \varphi_3 = \frac{y_1^2y_4 + 3y_2^3 - 4y_1y_2y_3}{y_1^3} \text{ etc.}$$

Man verificirt leicht, dass φ_3 (Siehe die Einleitung) eine Function von x, φ_2 und $\frac{d\varphi_2}{dx}$ ist, indem

$$\varphi_3 = \frac{d\varphi_2}{dx}$$

ist. Jede bei der Gruppe $q\ yq\ y^2q$ invariante Differentialgleichung dritter oder höherer Ordnung hat somit die Form

$$f\left(x\ \varphi_2\ \frac{d\varphi_2}{dx}\ \frac{d^2\varphi_2}{dx}\ \ldots\right) = 0,$$

wo φ_2 den obenstehenden Werth besitzt.*)

9. Die zu der Gruppe $p\ q\ yq\ y^2q$ gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & y & y_1 & y_2 \\ 0 & y^2 & 2yy_1 & 2yy_2 + 2y_1^2 \end{vmatrix} = 2y_1^3$$

verschwindet nicht identisch; es giebt, wie man sieht, keine invariante Differentialgleichung zweiter Ordnung. Durch Rechnungen, die mit denen der vorangehenden Nummer fast identisch sind, findet man zur

*) [Die Differentialinvariante φ_2, die schon bei Lagrange auftritt, spielt in Schwarz's schönen Untersuchungen eine wichtige Rolle; Januar 1888.]

Bestimmung der invarianten Differentialgleichungen dritter und höherer Ordnung die Werthe

$$\varphi_1 = \frac{y_1 y_3 - \frac{3}{2} y_2^2}{y_1^2}, \quad \varphi_2 = \frac{d\varphi_1}{dx} = \frac{y_1^2 y_4 - 4 y_1 y_2 y_3 + 3 y_2^3}{y_1^3}$$

und überhaupt

$$\varphi_k = \frac{d^k \varphi_1}{d x_k}.$$

Die betreffenden invarianten Differentialgleichungen haben die Form

$$f(\varphi_1 \varphi_2 \dots \varphi_k) = 0.$$

10. Die zu der Gruppe $p + q$, $xp + yq$, $x^2p + y^2q$ gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ x & y & 0 \\ x^2 & y^2 & 2(y-x)y_1 \end{vmatrix} = 2(y-x)^2 y_1$$

verschwindet nicht identisch. Die Gleichung

$$y - x = 0$$

bestimmt eine invariante Curve. Die invarianten Differentialgleichungen zweiter und dritter Ordnung werden bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + y\frac{\partial f}{\partial y} - y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - 2y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$

$$x^2\frac{\partial f}{\partial y} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} + 2(y-x)y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + [(2y-4x)y_2 + 2y_1^2 - 2y_1]\frac{\partial f}{\partial y_2}$$
$$+ [(2y-6x)y_3 + 6y_1y_2 - 6y_2]\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$

von denen die erste uns lehrt, dass f die Grössen x und y nur in der Combination $u = x - y$ enthält. Die beiden letzten Gleichungen erhalten durch Einführung von u als Variabeln statt x und y die Form

$$u\frac{\partial f}{\partial u} - y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - 2y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$

$$2uy_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + [3uy_2 - 2y_1^2 + 2y_1]\frac{\partial f}{\partial y_2} + [4uy_2 - 6y_1y_2 + 6y_2]\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0.$$

Wir führen die Lösungen der ersten Gleichung, nämlich

$$y_1, \; uy_2 = v_2, \; u^2 y_3 = v_3$$

als Variabeln in die letzte Gleichung ein; dies giebt

$$2y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + (3v_2 - 2y_1^2 + 2y_1)\frac{\partial f}{\partial v_2} + [4v_3 - 6y_1v_2 + 6v_2]\frac{\partial f}{\partial v_3} = 0.$$

Die entsprechenden Lösungen

$$v_2 y_1^{-\frac{3}{2}} + 2\left(y_1^{\frac{1}{2}} + y_1^{-\frac{1}{2}}\right) = \varphi_1,$$

$$v_3 y_1^{-2} + 6\varphi_1\left(y_1^{\frac{1}{2}} + y_1^{-\frac{1}{2}}\right) - 6(y_1 + y_1^{-1}) = \varphi_2$$

sind die gesuchten Grössen φ_1 und φ_2. Es bleibt nur übrig die Werthe von v_2 und v_3 einzuführen.

11. Die zu der Gruppe p, q, yq, xp, y^2q gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & y_1 & y_2 & y_3 \\ x & 0 & -y_1 & -2y_2 & -3y_3 \\ 0 & y^2 & 2yy_1 & 2yy_2 + 2y_1^2 & 2yy_3 + 6y_1y_2 \end{vmatrix} = 4y_1^2\left(y_1y_3 - \frac{3}{2}y_2^2\right)$$

verschwindet nicht identisch. Es giebt ausser $y_1 = 0$ und $\frac{1}{y_1} = 0$ nur eine invariante Differentialgleichung, deren Ordnung nicht 3 übersteigt, nämlich

$$2y_1y_3 - 3y_2^2 = 0^{*)}.$$

Zur Bestimmung der Grössen φ_1, φ_2 bemerken wir, dass sie als Functionen der drei Grössen

$$(3)\qquad \begin{cases} w_1 = \frac{y_3}{y_1} - \frac{3}{2}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2 \\ w_2 = \frac{dw_1}{dx} = \frac{y_4}{y_1} - 4\frac{y_2y_3}{y_1^2} + 3\frac{y_2^3}{y_1^3} \\ w_3 = \frac{d^2w_1}{dx_2} = \frac{y_5}{y_1} - 5\frac{y_2y_4}{y_1^2} - 4\frac{y_3^2}{y_1^2} + 17\frac{y_2^2y_3}{y_1^3} - 9\frac{y_2^4}{y_1^4} \end{cases}$$

durch die (der infinitesimalen Transformation xp entsprechende) Gleichung

$$B_4 f = y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + 2y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} + 3y_4\frac{\partial f}{\partial y_4} + 4y_5\frac{\partial f}{\partial y_5} = 0$$

bestimmt sind. Nun ist aber

$$B_4 w_1 = 2w_1, \quad B_4 w_2 = 3w_2, \quad B_4 w_3 = 4w_3$$

und also wird

$$B_4 f = 0 = 2w_1\frac{\partial f}{\partial w_1} + 3w_2\frac{\partial f}{\partial w_2} + 4w_3\frac{\partial f}{\partial w_3}.$$

Die Lösungen dieser Gleichungen

$$\varphi_1 = \frac{w_2}{w_1^{\frac{3}{2}}}, \quad \varphi_2 = \frac{w_3}{w_1^2}$$

sind die gesuchten Grössen φ_1 und φ_2.

---

*) Die invariante Differentialgleichung des Textes bestimmt alle Kegelschnitte durch zwei gemeinsame Punkte. Diese Kegelschnitte werden durch passende Coordinatenwahl alle Kreise der Ebene (oder alle Kreise einer Kugel).

12. Die zu der Gruppe

$$p \quad q \quad yq \quad xp \quad y^2q \quad x^2p$$

gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ x & 0 & -y_1 & -2y_2 & -3y_3 & -4y_4 \\ 0 & y^2 & 2yy_1 & 2yy_2+2y_1^2 & 2yy_3+6y_1y_2 & 2yy_4+8y_1y_3+6y_2^2 \\ x^2 & 0 & -2xy_1 & -4xy_2-2y_1 & -6xy_3-6y_2 & -8xy_4-12y_3 \end{vmatrix}$$

hat den nicht identisch verschwindenden Werth

$$\Delta = -4y_1(2y_1y_3 - 3y_2)^2.$$

Es giebt daher ausser $y_1 = 0$ und $\frac{1}{y_1} = 0$ nur eine invariante Differentialgleichung, deren Ordnung kleiner als fünf ist, die folgende nämlich:

$$2y_1y_3 - 3y_2 = 0.$$

Die zu der Gruppe gehörigen Grössen φ_1 und φ_2 sind Functionen von den früher (3) gefundenen Grössen

$$w_1 = \eta_3 - \frac{3}{2}\eta_2^2 \text{ *)}$$
$$w_2 = \eta_4 - 4\eta_2\eta_3 + 3\eta_2^3$$
$$w_3 = \eta_5 - 5\eta_2\eta_4 - 4\eta_3^2 + 17\eta_2^2\eta_3 - 9\eta_2^4$$
$$w_4 = \eta_6 - 6\eta_2\eta_5 - 13\eta_3\eta_4 + 27\eta_2^2\eta_4 + 42\eta_2\eta_3^2 - 87\eta_2^3\eta_3 + 36\eta_2^5$$

und zwar genügen sie (den Transformationen xp und x^2p entsprechend) den beiden Gleichungen

$$Af = \eta_2\frac{\partial f}{\partial \eta_2} + 2\eta_3\frac{\partial f}{\partial \eta_3} + \cdots + 5\eta_6\frac{\partial f}{\partial \eta_6} = 0,$$
$$Bf = \frac{\partial f}{\partial \eta_2} + 3\eta_2\frac{\partial f}{\partial \eta_3} + 6\eta_3\frac{\partial f}{\partial \eta_4} + 10\eta_4\frac{\partial f}{\partial \eta_5} + 15\eta_5\frac{\partial f}{\partial \eta_6} = 0.$$

Nun ist

$$Aw_1 = 2w_1, \quad Aw_2 = 3w_2, \quad Aw_3 = 4w_3, \quad Aw_4 = 5w_4,$$
$$Bw_1 = 0, \quad Bw_2 = 2w_1, \quad Bw_3 = 5w_2, \quad Bw_4 = 9w_3.$$

Daher sind φ_1 und φ_2 bestimmt als Functionen der w_2 durch die Gleichungen

$$2w_1\frac{\partial f}{\partial w_1} + 3w_2\frac{\partial f}{\partial w_2} + 4w_3\frac{\partial f}{\partial w_3} + 5w_4\frac{\partial f}{\partial w_4} = 0,$$
$$2w_1\frac{\partial f}{\partial w_2} + 5w_2\frac{\partial f}{\partial w_3} + 9w_3\frac{\partial f}{\partial w_4} = 0,$$

deren Lösungen sind

*) Im Texte setzen wir überall η_i statt $\frac{y_i}{y_1}$.

$$\varphi_1 = \frac{4w_1w_3 - 5w_2^2}{w_1^3},$$

$$\varphi_2 = \frac{4w_1^2w_4 - 18w_1w_2w_3 + 15w_2^3}{w_1^{\frac{9}{2}}}.$$

Führt man hier die Werthe der Grössen w_k ein, so erhält man die Ausdrücke von φ_1 und φ_2 als Functionen von den y_k.

§ 3.

Gruppen, die eine und nur eine Differentialgleichung erster Ordnung invariant lassen.

Gruppen, die eine und nur eine Differentialgleichung 1. O. invariant lassen, können (Göttinger Nachr. 1874; Math. Annalen, Bd. XVI) auf eine der folgenden canonischen Formen gebracht werden, wobei X_i eine Function von x, ε und c Constante bezeichnen.

X_1q	X_1q	X_1q	X_1q	q
X_2q	.	.	.	xq
.	.	.	.	.
.	.	.	.	.
.	X_rq	X_rq	X_rq	x^rq
			yq	p
X_rq	yq	$p + \varepsilon yq$	p	$xp + cyq$

q	q	q	q
xq	xq	xq	xq
.	.	.	.
.	.	.	.
.	.	.	.
x^rq	x^rq	x^rq	x^rq
p	yq	p	p
$xp+[(r+1)y+x^{r+1}]q$	p	$2xp+ryq$	yq
	xp	$x^2p+rxyq$	xp
			$x^2p+rxyq$

p	yq
$xp+yq$	p
$x^2p+2xyq$	xp
	x^2p+xyq

Wir werden successiv diese canonischen Gruppen betrachten und ihre invarianten Differentialgleichungen zweiter und höherer Ordnung bestimmen.

13. Die zu der Gruppe $p,\ xp + yq,\ x^2p + 2xyq$ gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ x & y & 0 \\ x^2 & 2xy & 2y \end{vmatrix} = 2y^2$$

verschwindet nicht identisch. Die invariante Gleichung 1. O.:

$$\frac{1}{y_1} = 0$$

entgeht uns bei unserer speciellen Coordinatenwahl.

Die Grössen φ_1 und φ_2 haben als Lösungen der Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} - y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - 2y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0$$

$$y\frac{\partial f}{\partial y_1} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_2} = 0$$

die Werthe

$$\varphi_1 = 2yy_2 - y_1^2, \quad \varphi_2 = y^2y_3.$$

14. Die zu der Gruppe $yq,\ p,\ xp,\ x^2p + xyq$ gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & y & y_1 & y_2 \\ x & 0 & -y_1 & -2y_2 \\ x^2 & xy & y - xy_1 & -3xy_2 \end{vmatrix} = 2y^2y_2$$

verschwindet nicht identisch. Die Gruppe lässt daher eine Gleichung zweiter Ordnung und zwar $y_2 = 0$ invariant, was darauf hinauskommt, dass die Gruppe eine *projective* ist.

Die Grössen φ_1 und φ_2 befriedigen die vier Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad y\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + y_4\frac{\partial f}{\partial y_4} = 0,$$

$$+ y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + 2y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} + \cdots + 4y_4\frac{\partial f}{\partial y_4} = 0,$$

$$- y\frac{\partial f}{\partial y_1} + 3y_2\frac{\partial f}{\partial y_3} + 8y_3\frac{\partial f}{\partial y_4} = 0,$$

und haben somit die Werthe

$$\varphi_1 = \frac{yy_3 + 3y_1y_2}{y^{\frac{1}{2}}y_2^{\frac{3}{2}}}$$

$$\varphi_2 = \frac{3yy_2y_4 - 4yy_3^2}{y_2^3}.$$

15. Die zu der Gruppe $X_1 q \cdots X_r q$ gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 \, X_1 \, X_1' \cdots X_1^{(r-2)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 \, X_r \, X_r' \cdots X_r^{(r-2)} \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch, da jede Curve (d. h. Gerade) der Schaar $x = $ Const. bei der Gruppe invariant bleibt. Zur Bestimmung der invarianten Differentialgleichungen

$$f(x y y_1 \cdots y_m) = 0$$

bilden wir die r Gleichungen

$$(4) \qquad X_i \frac{\partial f}{\partial y} + X_i' \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + X_i^{(m)} \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0,$$

die nur wenn $m > r - 1$ ist, andere gemeinsame Lösungen als x besitzen können*). Für $m = r$ ist, wie man leicht verificirt, ausser x zugleich die Determinante

$$D = \begin{vmatrix} X_1 \, X_1' \cdots X_1^{(r)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_r \, X_r' \cdots X_r^{(r)} \\ y \quad y_1 \cdots y_r \end{vmatrix}$$

eine Lösung. Wir können daher

$$\varphi_1 = x, \quad \varphi_2 = D^{**})$$

setzen. Setzt man überhaupt

$$D_i = \begin{vmatrix} X_1 \, X_1' \cdots X_1^{(r-1)} \, X_1^{(r+i)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_r \, X_r' \cdots X_r^{(r-1)} \, X_r^{(r+i)} \\ y \quad y_1 \cdots y_{r-1} \quad y_{r+i} \end{vmatrix}$$

so ist D_i immer eine Lösung der Gleichungen (4), dabei vorausgesetzt dass $m \geqq r + i$. Man kann daher

$$\varphi_{i+2} = D_i$$

setzen.

16. Die zu der Gruppe $X_1 q \cdots X_r q \; yq$ gehörige Determinante Δ verschwindet identisch. Die invarianten Differentialgleichungen $f = 0$ sind bestimmt durch die $(r + 1)$ Gleichungen

---

*) Der Schluss im Texte beruht darauf, dass die X_k in dem Sinne unabhängige Functionen von x sind, dass keine Relation der Form $\Sigma c_i X_i = 0$ mit constanten Coefficienten besteht.

**) Ist $r = 1$, so giebt es unbeschränkt viele invariante Differentialgleichungen *erster* Ordnung, indem die invariante Gleichung $D = f(x)$ von erster Ordnung ist.

$$X_i \frac{\partial f}{\partial y} + X_i' \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + X_i^{(m)} \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0$$
$$y \frac{\partial f}{\partial y} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + y_m \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0.$$

Dieselben haben (ausser x) keine gemeinsame Lösung, wenn $m < r$. Ist $m = r$, so giebt es eine specielle gemeinsame Lösung, nämlich die lineare und homogene Differentialgleichung

$$D = 0,$$

wobei wir D in derselben Bedeutung wie soeben brauchen. Ist $m = r + i$, so sind die Grössen

$$x \frac{D_1}{D} \frac{D_2}{D} \cdots \frac{D_i}{D}$$

Lösungen unserer linearen partiellen Differentialgleichungen, und wir können daher

$$\varphi_1 = x, \quad \varphi_2 = \frac{D_1}{D}, \cdots \varphi_{i+1} = \frac{D_i}{D}$$

setzen.

17. Die zu der Gruppe

$$X_1 q \cdots X_r q, \quad p + \varepsilon y q \ (\varepsilon = \text{Const.})$$

gehörige Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & \varepsilon y & \varepsilon y_1 & \cdots & \varepsilon y_{r-1} \\ 0 & X_1 & X_1' & \cdots & X_1^{(r-1)} \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ \cdot & & & & \\ 0 & X_r & X_r' & \cdots & X_r^{(r-1)} \end{vmatrix}$$

verschwindet nicht identisch. Ausser $\frac{1}{y_1} = 0$ giebt es keine invariante Differentialgleichung, deren Ordnung kleiner als r ist*). Die Grössen $\varphi_1 \varphi_2 \cdots$ sind Functionen von $x, D, D_1, D_2 \cdots$ und genügen dabei der Gleichung

$$Bf = \frac{\partial f}{\partial x} + \varepsilon y \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + \varepsilon y_m \frac{\partial f}{\partial y_m} = 0$$

oder der äquivalenten

$$Bx \cdot \frac{\partial f}{\partial x} + BD \cdot \frac{\partial f}{\partial D} + BD_1 \cdot \frac{\partial f}{\partial D_1} + \cdots = 0,$$

---

*) Den Fall $r = 1$ schliessen wir im Texte aus, indem es dann unendlich viele invariante Differentialgleichungen 1. O. giebt (siehe § 4).

wo $Bx = 1$ zu setzen ist. Zur Berechnung der Ausdrücke BD_i erinnern wir (Math. Ann. Bd. XVI p. 499) daran, dass die X_k Relationen der Form

$$(5)\qquad \begin{cases} X_1' = \lambda_{11} X_1 \\ X_2' = \lambda_{21} X_1 + \lambda_{22} X_2 \\ X_3' = \lambda_{31} X_1 + \lambda_{32} X_2 + \lambda_{33} X_3 \qquad (\lambda_{ik} = \text{Const.}) \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ X_k' = \lambda_{k1} X_1 + \lambda_{k2} X_2 + \cdots \lambda_k X_k \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{cases}$$

erfüllen. Daher ist, wie man durch Ausführung findet,

$$\begin{aligned} BD &= (\lambda_{11} + \lambda_{22} + \cdots + \lambda_{rr} + \varepsilon)\, D = kD \\ BD_1 &= (\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)\, D_1 = kD_1 \\ &\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ BD_i &= (\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot)\, D_i = kD_i \end{aligned}$$

wo k eine Constante bezeichnet. Die gesuchten Grössen φ_1, φ_2 sind daher bestimmt durch die Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial x} + kD \frac{\partial f}{\partial D} + kD_1 \frac{\partial f}{\partial D_1} + \cdots = 0,$$

sodass

$$\varphi_1 = De^{-kx}, \quad \varphi_2 = D_1 e^{-kx}, \quad \cdots \varphi_{i+1} = D_i e^{-kx}$$

wird.

Unter Nummer 15 gaben wir die allgemeinen Ausdrücke der Grössen D_i. Diese Ausdrücke können indess vermöge der Formeln (5) wesentlich vereinfacht werden. Denn es ist

$$\frac{\partial D_i}{\partial x} = (\lambda_{11} + \cdots + \lambda_{rr})\, D_i = \Sigma \lambda_{kk} \cdot D_i$$

woraus

$$D_i = e^{x \Sigma \lambda_{kk}}\, \Omega_1$$

wo Ω_i eine lineare homogene Function mit *constanten* Coefficienten von $y y_1 \cdots y_{r-1} y_{r+i}$ bezeichnet. Daher wird

$$D_i = e^{x \Sigma \lambda_{kk}} (k_{i0}\, y + k_{i1}\, y_1 + \cdots + k_{i,r-1}\, y_{r-1} + k_{i,r+i}\, y_{r+i})$$

und

$$\varphi_{i+1} = e^{-\varepsilon x} (k_{i0}\, y + \cdots + k_{i,r-1}\, y_{r-1} + k_{i,r+i}\, y_{r+i}).$$

Wir gehen hier nicht auf die einfache Berechnung der Constanten k_{ij} ein*). Dagegen heben wir ausdrücklich hervor, dass die Con-

*) $D = 0$ ist, wie wir gesehen haben, im vorliegenden Falle eine lineare homogene Differentialgleichung mit constanten Coefficienten. Es ist dabei klar, dass diese Constante beliebige Werthe haben können.

stante ε ohne wesentliche Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann.

Wir bemerken nur noch, dass sich unter den invarianten Differentialgleichungen beliebig viele lineare und homogene mit *constanten* Coefficienten finden. Denn wenn $c_1, c_2 \cdots$ beliebige Constanten bezeichnen, so stellt

$$c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \cdots = 0$$

immer eine solche Gleichung dar.

18. Die der Gruppe

$$X_1 q \cdots X_r q \; yq \; p$$

entsprechende Determinante

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & X_1 & X_1' & \cdots & X_1^{(r)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & X_r & X_r' & \cdots & X_r^{(r)} \\ 0 & y & y_1 & \cdots & y_r \end{vmatrix} = D$$

verschwindet nicht identisch. Es giebt ausser $\frac{1}{y_1} = 0$ eine und nur eine invariante Differentialgleichung, deren Ordnung r nicht übersteigt, nämlich

$$D = 0^{*)}.$$

Die Grössen $\varphi_1\ \varphi_2 \cdots$ sind Functionen von x, D, $D_1 \cdots$, bestimmt durch die Gleichungen

$$\frac{df}{dx} = 0 = \frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial D}\frac{\partial D}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial D_1}\frac{\partial D_1}{\partial x} + \cdots$$

$$0 = y\frac{\partial f}{\partial y} + y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + y_m\frac{\partial f}{\partial y_m}.$$

Nun ist, da die X_k durch Relationen der Form

$$X_k' = \lambda_{k1}X_1 + \lambda_{k2}X_2 \cdots + \lambda_{kk}X_k$$

verknüpft sind:

$$\frac{dD_i}{dx} = D_i(\lambda_{11} + \cdots + \lambda_{rr}) = D_i k,$$

woraus

$$D_i = e^{kx}(c_{i0}y + c_{i1}y_1 + \cdots + c_{i,r-1}y_{r-1} + c_{i,r+i}y_{r+i}).$$

Hieraus ergiebt sich, dass wir

$$\varphi_1 = \frac{D_1}{D}, \quad \varphi_2 = \frac{D_2}{D} \text{ etc.}$$

*) Ist $r = 1$, so giebt es zwei invariante Gleichungen i. O.: $\frac{1}{y_1} = 0$ und $D = 0$. Diesen Fall schliessen wir im Texte aus.

setzen können. Die φ_k sind Brüche, deren Zähler und Nenner ganze und lineare Functionen (mit constanten Coefficienten) von $y y_1 y_2 \cdots$ sind.

19. Die Determinante Δ der Gruppe

$$q \;\; xq \cdots x^{r-1}q \;\; p \;\; xp + cyq$$

hat den Werth

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ 0 & x & 1 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & x^{r-1} & (r-1)x^{r-2} & \cdots & (r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1 & & & & & 0 \\ x & cy & (c-1)y_1 & \cdots & (c-r-1)y_{r-1} & & & & & (c-r)y_r \end{vmatrix}$$

d. h. es ist, wenn wir einen nicht verschwindenden Factor wegwerfen,

$$\Delta = (c-r)\,y_r.$$

Δ verschwindet daher nur, wenn $c = r$ ist.

Ist $c \neq r$, so ist $y_r = 0$ $\left(\text{ausser } \frac{1}{y_1} = 0\right)$ die einzige invariante Differentialgleichung, deren Ordnung r nicht übersteigt*). Die Grössen $\varphi_1\,\varphi_2 \cdots$ sind (Nummer 15) Functionen von $x D D_1 \cdots$ und erfüllen überdies die Relationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} + cy\frac{\partial f}{\partial y} + (c-1)\,y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots = 0.$$

Nun aber ist, wie man durch Ausführung findet, indem man unwesentliche constante Factoren wegwirft,

$$D = y_r, \quad D_1 = y_{r+1}, \quad D_2 = y_{r+2} \quad \cdots$$

Also wird

$$\varphi_1 = \frac{y_{r+1}}{y_r^{\frac{c-r-1}{c-r}}}, \quad \varphi_2 = \frac{y_{r+2}}{y_r^{\frac{c-r-2}{c-r}}}, \quad \cdots.$$

Zurück steht noch der Ausnahmefall $c = r$. In diesem Falle verschwindet Δ identisch. Man findet, dass

$$\frac{1}{y_1} = 0, \quad y_r = \text{Const.}^{**}), \quad y_{r+1} = 0$$

die einzigen invarianten Differentialgleichungen sind, deren Ordnung $r + 1$ nicht übersteigt. Die Grössen $\varphi_1\,\varphi_2$ sind Functionen von

$$y_r, \; y_{r+1}, \; y_{r+2} \cdots,$$

---

*) Auch jetzt soll der Fall $r = 1$ ausgeschlossen sein.

**) Ist insbesondere $r = c = 1$, so giebt es ∞^1 invariante Differentialgleichungen 1. O. (siehe § 4).

bestimmt durch die Gleichung

$$y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}}+2y_{r+2}\frac{\partial f}{\partial y_{r+2}}+3y_{r+3}\frac{\partial f}{\partial y_{r+3}}+\cdots=0.$$

Daher wird

$$\varphi_1=y_r,\quad \varphi_2=\frac{y_{r+2}}{y_{r+1}^2},\quad \varphi_3=\frac{y_{r+3}}{y_{r+1}^3}\ \text{etc.}\ \cdots$$

20. Die Determinante Δ der Gruppe

$$q\ \ xq\cdots x^{r-1}q\ \ p\ \ xp+(ry+x^r)\,q$$

hat den Werth

$$\Delta=r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1$$

und verschwindet somit weder identisch noch für specielle Werthe der Variabeln. Ausser $\frac{1}{y_1}=0$ giebt es daher keine invariante Differentialgleichung, deren Ordnung r nicht übersteigt. Die Grössen $\varphi_1\,\varphi_2$ sind bestimmt durch die Relation

$$r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1\,\frac{\partial f}{\partial y_r}-y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}}-2y_{r+2}\frac{\partial f}{\partial y_{r+2}}-\cdots=0$$

und haben daher, wenn man zur Abkürzung

$$r(r-1)\cdots 3\cdot 2\cdot 1=\frac{1}{\omega}$$

setzt, die Werthe

$$\varphi_1=y_{r+1}e^{\omega y_r},\quad \varphi_2=y_{r+2}e^{2\omega y_r},\quad \varphi_3=y_{r+3}e^{3\omega y_r}\ \text{etc.}$$

21. Die Determinante der Gruppe

$$q\ \ xq\cdots x^{r-1}q\ \ yq\ \ p\ \ xp$$

hat den Werth:

$$\Delta=y_r y_{r+1}.$$

Es giebt daher drei invariante Differentialgleichungen, deren Ordnung kleiner als $r+2$ ist, nämlich

$$\frac{1}{y_1}=0,\quad y_r=0,\quad y_{r+1}=0\ ^*).$$

Die Grössen $\varphi_1\,\varphi_2\cdots$ hängen nur von $y_r,\ y_{r+1}\,y_{r+2}\cdots$ ab und erfüllen dabei die beiden Gleichungen

$$y_r\frac{\partial f}{\partial y_r}+y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}}+y_{r+2}\frac{\partial f}{\partial y_{r+2}}+\cdots=0$$

$$y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}}+2y_{r+2}\frac{\partial f}{\partial y_{r+2}}+\cdots=0.$$

*) Der Fall $r=1$ ist im Texte ausgeschlossen.

Sie besitzen somit die Form

$$\varphi_1 = \frac{y_r y_{r+2}}{y_{r+1}^2}, \quad \varphi_2 = \frac{y_r^2 y_{r+3}}{y_{r+1}^3}, \dots .$$

22. Die Determinante Δ der Gruppe

$$q, \; xq, \cdots x^{r-1}q, \; p, \; 2xp + (r-1)yq, \; x^2p + (r-1)xyq$$

besitzt (wenn wir von einem nicht verschwindenden constanten Factor absehen) den Werth: y_r^2. Es giebt daher ausser $\frac{1}{y_1} = 0$ nur eine invariante Gleichung, nämlich $y_r = 0$*), deren Ordnung $r+1$ nicht übersteigt. Die Grössen $\varphi_1 \varphi_2 \cdots$ sind Functionen von $y_r y_{r+1} \cdots$ und erfüllen dabei die beiden Gleichungen:

$$Bf = (r+1)y_r \frac{\partial f}{\partial y_r} + (r+3)y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}} + (r+5)y_{r+2}\frac{\partial f}{\partial y_{r+2}} + \cdots = 0$$

$$(r+1)y_r \frac{\partial f}{\partial y_{r+1}} + 2(r+2)y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+2}} + 3(r+3)y_{r+2}\frac{\partial f}{\partial y_{r+3}} = 0.$$

Die Lösungen der letzten Gleichung sind

$$y_r, \quad (r+1)y_r y_{r+2} - (r+2)y_{r+1}^2 = u$$

$$(r+1)^2 y_r^2 y_{r+3} - 3(r+1)(r+3)y_r y_{r+1} y_{r+2} + 2(r+2)(r+3)y_{r+1}^3 = u_1.$$

Führt man dieselben als Variabeln in $Bf = 0$ ein, so kommt die Gleichung

$$(r+1)\,y_r \frac{\partial f}{\partial y_r} + 2(r+3)\,u \frac{\partial f}{\partial u} + 3(r+3)\,u_1 \frac{\partial f}{\partial u_1} = 0$$

mit den Lösungen

$$\varphi_1 = \frac{u}{y_r^{\frac{2(r+3)}{r+1}}}$$

$$\varphi_2 = \frac{u_1}{y_r^{\frac{3(r+3)}{r+1}}}.$$

23. Die Determinante Δ der Gruppe

$$q \; xq \cdots x^{r-1}q \; yq \; p \; xp \; x^2p + (r-1)\,xyq$$

hat den Werth

$$\Delta = y_r[(r+2)\,y_{r+1}^2 - (r+1)\,y_r y_{r+2}];$$

dabei ist vorausgesetzt, dass wir von einem constanten, nicht verschwindenden Factor absehen. Es giebt daher ausser $\frac{1}{y_1} = 0$ nur zwei invariante Differentialgleichungen, deren Ordnung $r+2$ nicht über-

*) Der Fall $r = 1$ soll im Texte ausgeschlossen sein.

steigt. Die eine ist $y_r = 0$ *), die zweite kann auf die bemerkenswerthe Form

$$\left(y_r^{-\frac{1}{r+1}}\right)'' = 0$$

gebracht werden.

Die Grössen $\varphi_1\, \varphi_2 \cdots$ unserer Gruppe sind Functionen von den φ_k der vorangehenden Gruppe. Ueberdies erfüllen sie, der Transformation yq entsprechend, die Relation

$$y_r \frac{\partial f}{\partial y_r} + y_{r+1} \frac{\partial f}{\partial y_{r+1}} + y_{r+2} \frac{\partial f}{\partial y_{r+2}} + \cdots = 0;$$

daher können wir, indem wir die Symbole u, u_1, u_2 in derselben Bedeutung wie in der vorangehenden Nummer gebrauchen, den Grössen φ_k unserer Gruppe die folgenden Werthe beilegen:

$$\varphi_1 = \frac{u_1}{u^{\frac{3}{2}}}, \quad \varphi_2 = \frac{u_2}{u^2}.$$

§ 4.

Gruppen, die unendlich viele Differentialgleichungen 1. O. invariant lassen.

Wenn eine Gruppe unendlich viele Differentialgleichungen 1. O. invariant lässt, so kann sie auf eine von den drei folgenden canonischen Formen gebracht werden

$$\boxed{\begin{matrix} p \\ q \\ xp + yq \end{matrix}} \quad \boxed{\begin{matrix} q \\ xp + yq \end{matrix}} \quad \boxed{p}.$$

Wir werden successiv diese drei canonischen Gruppen betrachten und ihre invarianten Differentialgleichungen bestimmen.

24. Die Determinante Δ der Gruppe $p\ q\ xp + yq$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ x & y & 0 \end{vmatrix}$$

verschwindet identisch. Die invarianten Differentialgleichungen sind bestimmt durch die Relationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + 2y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3} + 3y_4 \frac{\partial f}{\partial y_4} + \cdots = 0.$$

*) Der Fall $r = 1$ soll im Texte ausgeschlossen sein.

Daher sind

$$y_1 = \text{Const.}, \quad y_2 = 0$$

die einzigen invarianten Differentialgleichungen, deren Ordnung 2 nicht übersteigt. Die Grössen $\varphi_1 \varphi_2 \cdots$ haben die Werthe

$$\varphi_1 = y_1, \quad \varphi_2 = \frac{y_3}{y_2^2}, \quad \varphi_3 = \frac{y_4}{y_2^3} \cdots$$

25. Die Determinante Δ der Gruppe $q\ xp + yq$:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ x & y \end{vmatrix} = -x$$

verschwindet nicht identisch. Die Gerade $x = 0$ bleibt bei der Gruppe invariant. Die Grössen φ_i sind bestimmt durch die Relationen

$$\frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} - y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - 2y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} - 3y_4\frac{\partial f}{\partial y_4} \cdots = 0$$

und haben daher die Werthe:

$$\varphi_1 = y_2 x, \quad \varphi_2 = y_3 x^2, \quad \varphi_3 = y_4 x^3 \cdots$$

25. Wenn endlich eine Differentialgleichung die einzige infinitesimale Transformation p gestattet, so besitzt sie die Form

$$f(y y_1 y_2 \cdots y_m) = 0.$$

Hiermit kennen wir canonische Formen aller Differentialgleichungen zwischen x und y, die eine Gruppe von Transformationen zwischen x und y gestatten.

§ 5.

Reduction einer beliebigen Gruppe auf ihre canonische Form.

Wenn eine beliebige Gruppe von Transformationen zwischen x und y vorgelegt ist, so lässt sich immer, wie wir zeigen werden, durch ausführbare Operationen entscheiden, auf welche canonische Form sie gebracht werden kann. Ist diese Bestimmung geleistet, so verlangt die wirkliche Reduction der vorgelegten Gruppe auf ihre canonische Form in den meisten Fällen nur ausführbare Operationen; ausnahmsweise wird jedoch die Integration einer Gleichung 1. O. nothwendig.

Hieraus folgt, dass die Bestimmung der zu einer *beliebigen* Gruppe gehörigen invarianten Differentialgleichungen im ungünstigsten Falle die Integration einer Gleichung 1. O. verlangt.

26. Wir zeigen in dieser Nummer, wie man durch ausführbare Operationen entscheidet, auf welche canonische Form eine vorgelegte Gruppe gebracht werden kann.

Man bestimmt zuerst durch Determinantenbildung, ob es keine, eine, zwei oder unendlich viele invariante Differentialgleichungen 1. O. giebt.

Existirt keine solche Gleichung 1. O., so hat die Gruppe 5, 6 oder acht unabhängige infinitesimale Transformationen. In jedem von diesen drei Fällen giebt es nur eine entsprechende canonische Form, so dass eine weitere Discussion überflüssig wird.

Giebt es zwei und nur zwei invariante Gleichungen 1. O., so fragt es sich zunächst, ob Δ identisch verschwindet oder nicht. Verschwindet Δ nicht identisch, so hat die Gruppe 3, 4, 5 oder 6 unabhängige infinitesimale Transformationen, und dabei ist die canonische Form vollständig bestimmt, wenn die Zahl der inf. Transformationen gleich 5 oder 6 ist. Enthält unsere Gruppe drei infinitesimale Transformationen $B_1 f, B_2 f, B_3 f$, so kann sie entweder die canonische Form $p, q, xp + cyq$ oder die canonische Form $p + q,\ xp + yq,\ x^2 p + y^2 q$ erhalten. Diese beiden Fälle lassen sich dadurch charakterisiren, dass die inf. Transformationen $(B_i B_k)$ im ersten Falle eine zweigliedrige Untergruppe bestimmen, während sie im letzten Falle eine dreigliedrige Gruppe, nämlich die ursprüngliche Gruppe liefern. Enthält unsere Gruppe vier infinitesimale Transformationen, so kann sie entweder die canonische Form $q\ yq\ p\ xp$ oder die Form $q\ yq\ y^2 q\ p$ erhalten; diese Fälle lassen sich dadurch charakterisiren, dass die $(B_i B_k)$ im ersten Falle eine zweigliedrige Untergruppe, im zweiten eine dreigliedrige Untergruppe liefern. Verschwindet Δ identisch, so kann die Gruppe entweder auf die canonische Form $q,\ yq$, oder auf die canonische Form $q,\ yq,\ y^2 q$ gebracht werden. Die Zahl der unabhängigen infinitesimalen Transformationen entscheidet, welcher Fall vorliegt.

Jetzt setzen wir voraus, dass eine vorgelegte Gruppe $B_1 f \cdots B_s f$ eine und nur eine Gleichung erster Ordnung

$$X \frac{\partial f}{\partial x} + Y \frac{\partial f}{\partial y} = Af = 0$$

invariant lässt. Unter den infinitesimalen Transformationen $k_1 B_1 + \cdots + k_s B_s$ giebt es einige, etwa $B_k^{(0)} f$, die eine Relation der Form

$$B_k^{(0)} f = \varphi_k(xy)\, Af$$

erfüllen; denn es giebt ja jedenfalls $r - 3$ inf. Transformationen, die jede Integralcurve von $Af = 0$ invariant lassen. Wir haben also 4 wesentlich verschiedene Möglichkeiten zu berücksichtigen: a) Befriedigt eine jede inf. Transformation $B_k f$ eine Relation der Form

$$B_k f = \varphi_k(xy)\, Af,$$

so kann die Gruppe entweder auf die canonische Form $X_1 q \cdots X_r q$ oder auf die Form $X_1 q \cdots X_r q\ yq$ gebracht werden. Das erste tritt ein, wenn alle $(B_i B_k) = 0$ sind. Die zweite Hypothese findet statt wenn die $(B_i B_k)$ nicht sämmtlich verschwinden. b) Giebt es unter den s Ausdrücken $B_i f\ s-1$, etwa $B_1{}^0 f \cdots B^0_{s-1} f$, die eine Relation

$$B_k{}^{(0)} f = \varphi_k(xy)\, Af$$

erfüllen, so bilden die $s-1$ Transformationen $B_k{}^{(0)} f$ eine Untergruppe, die der Categorie (a) angehört. Verschwinden alle $(B_i{}^{(0)} B_k{}^{(0)})$, so hat die Gruppe $B_k f$ die canonische Form $X_1 q \cdots X_r q\ p + \varepsilon y q$, wo ε ohne Beschränkung gleich Null gesetzt werden kann. Verschwinden die $(B_i{}^{(0)} B_k{}^{(0)})$ nicht sämmtlich, so ist $X_1 q \cdots X_r q\ yq\ p$ die gesuchte canonische Form. c) Giebt es $s-2$ Ausdrücke $B_k{}^{(0)} f$, die eine Relation

$$B_k{}^{(0)} f = \varphi \cdot Af$$

erfüllen, so bilden die Transformationen $(B_i B_k)$ eine Untergruppe, die der Categorie (b) gehört. Eine zweite Untergruppe bilden alle $B_k{}^{(0)} f$. Verschwinden die $(B_i{}^{(0)} B_k{}^{(0)})$ nicht sämmtlich, so hat die Gruppe die canonische Form $q\ xq \cdots x^{r-1} q\ yq\ p\ xp$. Verschwinden dagegen alle $(B_i{}^0 B_k{}^0)$, so kann die Gruppe entweder die Form $q\ xq \cdots x^{r-1}\ p\ xp + Kyq$ oder die Form $q xq \cdots x^{r-1} q\ p\ xp + (ry + x^r) q$ erhalten. Um zwischen diesen beiden Möglichkeiten zu entscheiden, bildet man die Determinante Δ. Ist Δ ein nicht identisch verschwindender Differentialausdruck $(s-2)^{\text{ter}}$ Ordnung, so hat unsere Gruppe die canonische Form

$$q\ xq \cdots x^{r-1} q\ \ p\ \ xp + Kyq$$
$$K \neq r.$$

Verschwindet Δ identisch, so hat die Gruppe ebenfalls die eben hingeschriebene Form, nur mit dem Unterschiede, dass $K = r$ ist. Wenn endlich Δ eine nicht identisch verschwindende Function von x, y und y' ist, so kann unsere Gruppe die canonische Form

$$q\ \ xq \cdots x^{r-1} q\ \ p\ \ xp + (ry + x^r)\ q$$

erhalten. d) Giebt es $s-3$ infinitesimale Transformationen $B_k{}^{(0)}$, so sind vier verschiedene Fälle möglich. Ist $s = 3$, so kann die Gruppe die canonische Form

$$p\ \ xp + yq\ \ x^2 p + 2xyq$$

erhalten. Ist $s = 4$, so ist

$$yq\ \ p\ \ xp\ \ x^2 p + xyq$$

die gesuchte canonische Form. Ist $s > 4$ und ist dabei jedes $(B_i{}^{(0)} B_k{}^{(0)}) = 0$, so ist

$$q\ xq \cdots x^{r-1} q\ p,\ \ 2xp + (r-1)\, yq,\ \ x^2 p + (r-1)\, xyq$$

die gesuchte canonische Form. Sind dagegen die $(B_i{}^{(0)} B_k{}^{(0)})$ nicht sämmtlich Null, so kann unsere Gruppe die canonische Form

$$q \quad xq \cdots x^{r-1}q, \quad yq, \quad p, \quad xp, \quad x^2p + (r-1)xyq$$

erhalten.

Wenn endlich eine vorgelegte Gruppe unendlich viele Gleichungen erster Ordnung invariant lässt, so kann sie auf eine von den drei Formen

$$q; \quad q, \quad p + cyq; \quad p \quad q \quad x\,p + yq$$

gebracht werden. Die Anzahl der unabhängigen inf. Transformationen entscheidet, welcher Fall vorliegt.

Also ist es uns wirklich gelungen, durch sehr einfache, immer ausführbare Rechnungen zu entscheiden, welche canonische Form eine vorgelegte Gruppe besitzt.

27. Hat man nach den soeben entwickelten Regeln die zu einer beliebig vorgelegten Gruppe gehörige canonische Form bestimmt, so stellt sich die Frage, wie die Ueberführung auf diese Form wirklich geleistet wird. Ich gebe eine kurzgefasste Erledigung dieser Frage.

Betrachten wir zunächst ein einfaches Beispiel. Sei $B_1 f \cdots B_4 f$ die vorgelegte Gruppe und $p_1, q_1, x_1 p_1, y_1 q_1$ ihre canonische Form. Bilde ich dann die $(B_i B_k)$, so erhalte ich eine zweigliedrige Untergruppe, die überdies in der viergliedrigen invariant ist. Sei $B_1\,B_2$ diese Untergruppe. Ich bilde die Gleichungen

$$(c_1 B_1 + c_2 B_2,\ B_3) = k_1(c_1 B_1 + c_2 B_2)$$
$$(c_1 B_1 + c_2 B_2,\ B_4) = k_2(c_1 B_1 + c_2 B_2),$$

in denen $c_1\,c_2\,k_1\,k_2$ Constante bezeichnen sollen. Das Verhältniss $\frac{c_1}{c_2}$ wird bestimmt durch eine quadratische Gleichung, deren Wurzeln ich ohne Beschränkung gleich 0 und ∞ setzen kann. Alsdann sind B_1 und B_2 die beiden einzigen invarianten Transformationen unserer Gruppe; sie entsprechen daher p_1 und q_1. Darnach wähle ich B_3 und B_4 so, dass die folgenden Relationen bestehen:

$$(B_1 B_3) = B_1, \quad (B_1 B_4) = 0, \quad (B_2 B_4) = B_2, \quad (B_2 B_3) = 0, \quad (B_3 B_4) = 0.$$

Setze ich sodann

$$B_1 = \xi_1 p + \eta_1 q = p_1, \qquad B_2 = \xi_2 p + \eta_2 q = q_1,$$
$$B_3 = \xi_3 p + \eta_3 q = x_1 p_1, \quad B_4 = \xi_4 p + \eta_4 q = y_1 q_1,$$

so finde ich

$$x_1 = \frac{\xi_3}{\xi_1} = \frac{\eta_3}{\eta_1}, \quad y_1 = \frac{\xi_4}{\xi_2} = \frac{\eta_4}{\eta_2}.$$

Durch Einführung der hiermit bestimmten Variabeln $x_1\,y_1$ erhält die vorgelegte Gruppe $B_i f$ ihre canonische Form.

Als zweites Beispiel betrachte ich eine dreigliedrige Gruppe $B_1 f\ B_2 f\ B_3 f$, die auf die canonische Form $q_1\ x_1 q_1\ y_1 q_1$ gebracht werden kann. Ich bilde die drei Ausdrücke $(B_i B_k)$, die eine zweigliedrige Untergruppe, etwa $B_1{}^0 B_2{}^0$, bilden. Dabei kann ich ohne Beschränkung annehmen, dass $B_1{}^0$, $B_2{}^0$ und B_3 unabhängige infinitesimale Transformationen unserer Gruppe sind; durch Multiplication von B_3 mit einer zweckmässigen Constante erreicht man, dass Relationen der Form

$$(B_1{}^0 B_2{}^0) = 0, \quad (B_1{}^0 B_3) = B_1{}^0, \quad (B_2{}^0 B_3) = B_2{}^0$$

bestehen. Sodann setze ich

$$\begin{aligned} B_1{}^0 &= \xi_1 p + \eta_1 q = q_1 \\ B_2{}^0 &= \xi_2 p + \eta_2 q = x_1 q_1 \\ B_3{}^0 &= \xi_3 p + \eta_3 q = y_1 q_1, \end{aligned}$$

woraus durch Elimination von q_1

$$\begin{aligned} (\xi_2 - x_1 \xi_1) p + (\eta_2 - x_1 \eta_1) q = 0 \\ (\xi_3 - y_1 \xi_1) p + (\eta_3 - y_1 \eta_1) q = 0 \end{aligned}$$

und

$$\begin{aligned} x_1 &= \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1} \\ y_1 &= \frac{\xi_3}{\xi_1} = \frac{\eta_3}{\eta_1} \end{aligned}$$

folgt. Hiermit kennen wir eine Punkttransformation, vermöge deren unsere Gruppe auf ihre canonische Form gebracht wird.

In den beiden vorangehenden Beispielen hat die Reduction der vorgelegten Gruppe auf ihre canonische Form weder Quadraturen noch Integrationen von Differentialgleichungen, sondern nur Differentiationen und andere ausführbare Operationen verlangt.

Als drittes Beispiel betrachten wir eine dreigliedrige Gruppe $B_1\ B_2\ B_3$ mit der canonischen Form $q\ xq\ p$. Wir bestimmen wie in der vorangehenden Nummer die invariante Gleichung 1. O.: $Af = X\frac{\partial f}{\partial x} + Y\frac{\partial f}{\partial y}$ und suchen darnach alle infinitesimalen Transformationen B^0, die eine Relation der Form

$$B_k{}^0 f = \varphi_k(xy)\, Af$$

erfüllen. Wir wollen annehmen, dass $B_1 f$ und $B_2 f$ solche sind. Dann kann ich ohne Beschränkung voraussetzen, dass die folgenden Relationen bestehen:

$$(B_1 B_3) = 0, \quad (B_2 B_3) = B_1, \quad (B_1 B_2) = 0.$$

Alsdann setze ich

$$\begin{aligned} B_1 &= \xi_1 p + \eta_1 q = q_1 \\ B_2 &= \xi_2 p + \eta_2 q = x_1 q_1 \\ B_3 &= \xi_3 p + \eta_3 q = p_1 \end{aligned}$$

woraus zunächst

$$x_1 = \frac{\xi_2}{\xi_1} = \frac{\eta_2}{\eta_1}$$

hervorgeht. Die Grösse y_1 ist eine Lösung der Gleichung

$$\text{(A)} \qquad \frac{\partial f}{\partial x_1} = 0 = \xi_3 \frac{\partial f}{\partial x} + \eta_3 \frac{\partial f}{\partial y}$$

und diese Gleichung gestattet die bekannte infinitesimale Transformation $q_1 = \xi_1 p + \eta_1 q$; daher findet man ohne weiteres einen Integrabilitätsfactor und für y_1 den Werth

$$y_1 = \int \frac{\xi_3 dy - \eta_3 dx}{\xi_1 \eta_3 - \xi_3 \eta_1}.$$

Als viertes Beispiel betrachten wir eine zweigliedrige Gruppe $B_1 B_2$ mit der canonischen Form q_1, $x_1 p_1 + y_1 q_1$. Wir können ohne Beschränkung annehmen, dass $(B_1 B_2) = B_1$ ist. Wir setzen

$$B_1 = X_1 p + Y_1 q = q_1$$
$$B_2 = X_2 p + Y_2 q = x_1 p_1 + y_1 q_1.$$

Dann ist x_1 eine Lösung der Gleichung

$$\frac{\partial f}{\partial y_1} = 0 = X_1 \frac{\partial f}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial f}{\partial y}$$

mit der bekannten infinitesimalen Transformation $B_2 f$. Also ist der Ausdruck

$$w = \int \frac{X_1 dy - Y_1 dx}{X_1 Y_2 - Y_1 X_2}$$

eine Function von x_1 und zwar, wie wir jetzt zeigen, gleich $\log x_1$. Es ist nach meinen bekannten Formeln

$$(q_1 x_1) = 0, \quad (x_1 p_1 + y_1 q_1, x_1) = x_1$$

das heisst

$$X_1 \frac{\partial x_1}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial x_1}{\partial y} = 0, \quad X_2 \frac{\partial x_1}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial x_1}{\partial y} = x_1,$$

woraus

$$(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \frac{\partial \log x_1}{\partial x} = - Y_1$$

$$(X_1 Y_2 - X_2 Y_1) \frac{\partial \log x_1}{\partial y} = X_1$$

und

$$\log x_1 = \int \frac{X_1 dy - Y_1 dx}{X_1 Y_2 - X_2 Y_1}$$

folgt, wie behauptet wurde. — Zur Bestimmung von y_1 bilden wir die Gleichungen

$$(q_1 y_1) = 1, \quad (x_1 p_1 + y_1 q_1, y_1) = y_1$$

oder die äquivalenten

$$X_1 \frac{\partial y_1}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial y_1}{\partial y} = 1, \quad X_2 \frac{\partial y_1}{\partial x} + Y_2 \frac{\partial y_1}{\partial y} = y_1$$

und hieraus die Relationen

$$(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)\frac{\partial y_1}{\partial x} + Y_1 y_1 = X_2$$
$$(X_1 Y_2 - X_2 Y_1)\frac{\partial y_1}{\partial y} - X_1 y_1 = - X_2,$$

vermöge deren y_1 durch zwei successive Quadraturen bestimmt wird.

Als fünftes Beispiel betrachten wir eine zweigliedrige Gruppe $B_1 B_2$ mit der canonischen Form $q_1, y_1 q_1$. Dabei können wir annehmen, dass $(B_1 B_2) = B_1$ ist. Wir setzen

$$B_1 = X_1 p + Y_1 q = q_1$$
$$B_2 = X_2 p + Y_2 q = y_1 q_1,$$

woraus

$$y_1 = \frac{X_2}{X_1} = \frac{Y_2}{Y_1}.$$

Die Grösse x_1 ist eine ganz beliebige Lösung der Gleichung

$$X_1 \frac{\partial f}{\partial x} + Y_1 \frac{\partial f}{\partial y} = 0,$$

deren Integration somit erforderlich ist.

Sei jetzt überhaupt $B_1 \ldots B_r$,

$$B_k f = X_k \frac{\partial f}{\partial x} + Y_k \frac{\partial f}{\partial y},$$

eine beliebige vorgelegte Gruppe und $C_1 \ldots C_r$,

$$C_i f = \xi_i \frac{\partial f}{\partial x_1} + \eta_i \frac{\partial f}{\partial y_1},$$

ihre canonische Form, die nach den Regeln der vorangehenden Nummer bestimmt wird. Wir können in jedem einzelnen Falle die $B_1 f$ derart wählen, dass die r Gleichungen

$$B_1 f = C_1 f,\ B_2 f = C_2 f, \ldots B_r f = C_r f$$

bestehen können. Können diese Relationen zwischen $x\, y\, p\, q$ und $x_1\, y_1\, p_1\, q_1$ hinsichtlich $x_1\, y_1$ aufgelöst werden, so ist hiermit die gesuchte Punkttransformation gefunden. Ist eine solche Auflösung unmöglich so bildet man zunächst die Ausdrücke

$$C_i x_1 \quad C_i y_1,$$

die *bekannte* Functionen von x_1 und y_1 sind und setzt sodann

$$B_i x_1 = X_i \frac{\partial x_1}{\partial x} + Y_i \frac{\partial x_1}{\partial y} = C_i x_1,$$
$$B_i y_1 = X_i \frac{\partial y_1}{\partial x} + Y_i \frac{\partial y_1}{\partial y} = C_i y_1.$$

Dies giebt $2r$ Differentialgleichungen 1. O. zwischen $x_1\, y_1\; y$ und x, die im Allgemeinen zur Bestimmung von $x_1\, y_1$ durch Quadratur genügen. Nur wenn die canonische Form die eine von den drei folgenden ist

$$q_1;\ q_1\ y_1 q_1;\ q_1\ y_1 q_1\ y_1^2 q_1,$$

ist die Integration einer Differentialgleichung 1. O. nothwendig.

Wenn eine beliebige Gruppe von Transformationen zwischen x und y vorgelegt ist, so entscheidet man zuerst durch Differentiation, auf welche canonische Form sie gebracht werden kann. Ist dies geschehen, so verlangt die Reduction auf diese canonische Form im Allgemeinen nur ausführbare Operationen. Nur wenn die betreffende Form eine von den folgenden ist,

$$q;\quad q, yq;\quad q, yq, y^2 q,$$

wird die Integration einer Gleichung 1. *O. nothwendig.*

28. Sucht man alle bei einer beliebig vorgelegten Gruppe zwischen x und y invarianten Differentialgleichungen, so bringt man die Gruppe zuerst auf ihre canonische Form und stellt sodann ohne weiteres die betreffenden Differentialgleichungen auf.

Dies giebt den folgenden Satz, der die wichtigsten Ergebnisse dieser Abhandlung resumirt.

Ist eine ganz beliebige continuirliche Gruppe von Transformationen zwischen x und y vorgelegt, so findet man alle invarianten Differentialgleichungen ohne Integration von Differentialgleichungen, wenn die Gruppe mehr als drei infinitesimale Transformationen enthält. Giebt es drei inf. Transformationen mit der canonischen Form $q\ yq\ y^2 q$ oder zwei inf. Transformationen mit der canonischen Form $q\ \ yq$ oder endlich nur eine inf. Transformation, so wird die Integration einer Gleichung 1. *O. nothwendig. In allen anderen Fällen genügen Differentiationen und Quadraturen.*

In diesem Satze wird vorausgesetzt, dass nur die *infinitesimalen* Transformationen der vorgelegten Gruppe bekannt sind. Kennt man zugleich die *endlichen* Transformationen dieser Gruppe, so kann man immer, auch in den drei Ausnahmefällen, die zugehörigen invarianten Differentialgleichungen ohne Quadratur oder Integration angeben.

Januar 1883.

Abschnitt II.

In dem vorhergehenden Abschnitt bestimmte ich die Form aller Gleichungen

$$f(xy_1 y_2 \ldots y_m) = 0,$$

die eine continuirliche Gruppe von Transformationen gestatten. In diesem zweiten Abschnitt entwickele ich die allgemeine Integrationstheorie aller derartigen Gleichungen, indem ich meine allgemeine Integrationstheorie von linearen partiellen Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen für die betreffenden Beispiele im Detail durchführe.

Dieser Abschnitt zerfällt in mehrere Paragraphen, deren jeder sich an einen bestimmten Paragraphen der ersten Arbeit als Fortsetzung anschliesst.

§ 1.

Integrationstheorie von Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen der Form $X(x)p + Y(y)q$.

In diesem Paragraphen integrire ich successive alle Differentialgleichungen 2ter und höherer Ordnung mit einer bekannten Gruppe, deren infinitesimale Transformationen sämmtlich die Form

$$X(x)p + Y(y)q$$

besitzen. Es wird dabei vorausgesetzt, dass die betreffende Gruppe keine anderen Differentialgleichungen 1. O. als $y' = 0$ und $\frac{1}{y'} = 0$ invariant lässt.

1. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe q, yq so ist sie, wenn wir $\frac{y_2}{y_1} = u$ setzen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(x u \frac{du}{dx} \cdots \frac{d^{m-2}u}{dx^{m-2}}\right) = 0.$$

Man integrirt diese Gleichung $(m-2)^{\text{ter}}$ Ordnung und erhält hierdurch eine Relation mit $m-2$ Constanten

$$y_2 = y_1 f(x a_1 \ldots a_{m-2}),$$

aus der durch wiederholte Integration

$$y_1 = e^{\int f(x)dx}$$

$$y = \int dx\, e^{\int f(x)dx}$$

hervorgeht.

2. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe p, q, yq, so ist sie, wenn wir

$$\frac{y_2}{y_1} = u, \quad \frac{y_3}{y_1} = v$$

setzen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(u v \frac{dv}{du} \cdots \frac{d^{m-3}v}{du^{m-3}}\right) = 0.$$

Durch Integration dieser Gleichung $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung erhält man eine Relation mit $m-3$ Constanten

(1) $$f\left(\frac{y_2}{y_1}\,\frac{y_3}{y_1}\,a_1\cdots a_{m-3}\right)=0,$$

die wir auch folgendermassen schreiben können

$$\varphi\left(\frac{y_2}{y_1}\,\frac{d}{dx}\left(\frac{y_2}{y_1}\right)a_1\cdots\right)=0.$$

Man erhält daher jedenfalls durch eine Quadratur eine Gleichung, $y_2=y_1 F(x)$, die nach den Regeln der vorangehenden Nummer durch zwei Quadraturen integrirt wird.

Nach der soeben angegebenen Methode verlangt die Integration einer Gleichung der Form

(2) $$\frac{y_3}{y_1}=F\left(\frac{y_2}{y_1}\right)$$

drei und zwar *drei successive* Quadraturen. Ich entwickele jetzt in Uebereinstimmung mit meinen alten Integrationstheorien eine etwas andere Methode, die allerdings ebenfalls drei Quadraturen, nicht aber drei successive Quadraturen verlangt. Die Gleichung (2) ist äquivalent mit der linearen partiellen Differentialgleichung

$$Af=\frac{\partial f}{\partial x}+y_1\frac{\partial f}{\partial y}+y_2\frac{\partial f}{\partial y_1}+y_1F\frac{\partial f}{\partial y_2}=0,$$

welche die drei infinitesimalen Transformationen

$$B_1f=\frac{\partial f}{\partial x},\quad B_2f=\frac{\partial f}{\partial y},\quad B_3f=y\frac{\partial f}{\partial y}+y_1\frac{\partial f}{\partial y_1}+y_2\frac{\partial f}{\partial y_2}$$

gestattet. Jetzt kann man in *zwei* Weisen ein dreigliedriges vollständiges System mit einer bekannten infinitesimalen Transformation bilden. Einerseits gestattet nämlich das vollständige System

$$Af=0,\quad B_1f=0,\quad B_2f=0$$

die infinitesimale Transformation B_3f und daher (Math. Ann. Bd. XI) hat die äquivalente totale Differentialgleichung

$$y_1F\,dy_1-y_2\,dy_2=0$$

einen bekannten Integrabilitätsfactor, nämlich $\frac{1}{\Delta}$, wo

$$\Delta=\begin{vmatrix}1 & y_1 & y_2 & y_1F\\ 1 & 0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0\\ 0 & y & y_1 & y_2\end{vmatrix}=y_2^2-y_1^2F.$$

Dies liefert ein Integral von $Af=0$ nämlich

(3) $$\int\frac{y_1F\,dy_1-y_2\,dy_2}{y_2^2-y_1^2F}=\text{Const.}$$

Anderseits aber gestattet das vollständige System

$$Af = 0, \quad B_2 f = 0, \quad B_3 f = 0$$

die bekannte infinitesimale Transformation $B_1 f$ und daher liefert meine alte Theorie auch das Integral

$$\int \frac{(y_1^2 F - y_2^2)\,dx + y_2 dy_1 - y_1 dy_2}{y_1^2 F - y_2^2} = \text{Const.}$$

von $Af = 0$. Aus den beiden hiermit gefundenen Integralgleichungen erhält man durch Auflösung y_1 als Function von x, und darnach durch eine neue Quadratur y als Function von x.

3. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe $p, q, xp + cyq$, wobei die Constante c von Null und 1 verschieden sein soll, so kann sie, indem wir

$$\varphi_1 = \frac{y_2}{y_1^{\frac{c-2}{c-1}}} \quad \varphi_2 = \frac{y_3}{y_1^{\frac{c-3}{c-1}}}$$

setzen, auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2\,\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\cdots\frac{d^{m-3}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-3}}\right) = 0$$

reducirt werden. Durch Integration dieser Gleichung $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung erhält man eine Relation mit $m-3$ Constanten

$$f(\varphi_1\,\varphi_2\,a_1\ldots a_{m-3}) = 0.$$

Kommt in derselben φ_2 nicht vor, so findet man durch Auflösung

$$y_2 = K \cdot y_1^{\frac{c-2}{c-1}}$$

und darnach y als Function von x durch zwei (unabhängige) Quadraturen. Hat man dagegen zur Integration eine Gleichung der Form

$$y_3 = y_1^{\frac{c-3}{c-1}} F\left(\frac{y_2}{y_1^{\frac{c-2}{c-1}}}\right) = \Pi,$$

so setzt man

$$y_3 = \frac{dy_2}{dy_1}\,y_2 = \Pi$$

woraus

$$\frac{dy_2}{dy_1} = y_2^{-1} y_1^{\frac{c-3}{c-1}} F\left(\frac{y_2}{y_1^{\frac{c-2}{c-1}}}\right) = \Phi. \tag{4}$$

Diese Gleichung 1. O. zwischen den Variabeln y_1 und y_2 gestattet die infinitesimale Transformation

$$(c-1)y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + (c-2)y_2\frac{\partial f}{\partial y_2},$$

und daher ist

$$\frac{1}{\begin{vmatrix} 1 & \Phi \\ (c-1)\,y_1 & (c-2)\,y_2 \end{vmatrix}} = \frac{1}{(c-2)\,y_2 - (c-1)\,y_1\,\Phi}$$

ein Integrabilitätsfactor und somit

$$\int \frac{dy_2 - \Phi\, dy_1}{(c-1)\,y_2 - (c-1)\,y_1\,\Phi} = \text{Const.}$$

ein Integral von (4). Nachdem hiermit eine Relation zwischen y_1 und y_2 erhalten ist, bestimmt man y als Function von x durch zwei (unabhängige) Quadraturen.

4. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe $p\ q\ yq\ xp$, so ist sie, wenn wir von der unmittelbar integrablen Gleichung $y'' = 0$ absehen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2 \cdots \frac{d^{m-4}\varphi_2}{d\varphi_1^{\,m-4}}\right) = 0,$$

wo φ_1 und φ_2 die Werthe

$$\varphi_1 = \frac{y_1 y_3}{y_2^2}, \quad \varphi_2 = \frac{y_1^2\, y_4}{y_2^3}$$

haben. Durch Integration dieser Gleichung $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung erhält man eine Relation zwischen $\varphi_1\,\varphi_2$ und $m-4$ Constanten:

$$\varphi_2 = f(\varphi_1),$$

wobei wir von dem einfachen Falle einer Relation $\varphi_1 = \text{Const.}$ absehen. Es handelt sich also darum eine Gleichung der Form

$$y_4 = \frac{y_2^3}{y_1^2}\, f\left(\frac{y_1 y_3}{y_2^2}\right)$$

zu integriren. Wir setzen

$$\frac{y_2}{y_1} = v, \quad \frac{y_3}{y_1} = u;$$

dann wird

$$\frac{du}{dv} = \frac{y_1 y_4 - y_2 y_3}{y_1 y_3 - y_2^2} = v\,\frac{\varphi_2 - \varphi_1}{\varphi_1 - 1}$$

$$\varphi_1 = \frac{u}{v^2}, \quad \varphi_2 = f\left(\frac{u}{v^2}\right),$$

sodass wir eine Differentialgleichung 1. O. der Form

$$\frac{du}{dv} = v\,F\left(\frac{u}{v^2}\right)$$

integriren müssen. Dieselbe ist homogen in u und v^2, und also ist

$$\int \frac{du - v\,F\,dv}{2u - v^2 F} = \text{Const.}$$

eine Integralgleichung. Hiermit ist Alles reducirt auf die Integration einer Differentialgleichung dritter Ordnung der Form $u = \psi(v)$ oder

$$\frac{y_3}{y_1} = \psi\left(\frac{y_2}{y_1}\right).$$

Dieselbe kann nach den Regeln der Nummer 2 erledigt werden. Es ist aber möglich einen anderen und einfacheren Weg zu gehen, wie ich jetzt in Uebereinstimmung mit meiner alten Integrationstheorie zeigen werde.

Die vorgelegte Gleichung

$$y_4 = \frac{y_2^3}{y_1^2} f\left(\frac{y_1 y_3}{y_2^2}\right) = W$$

ist äquivalent mit der linearen partiellen Differentialgleichung

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_2} + W \frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$

welche vier bekannte infinitesimale Transformationen, nämlich

$$B_1 f = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad B_2 f = \frac{\partial f}{\partial y}$$

$$B_3 f = y \frac{\partial f}{\partial y} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} + y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}$$

$$B_4 f = x \frac{\partial f}{\partial x} - y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} - 2y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} - 3y_3 \frac{\partial f}{\partial y_3}$$

gestattet. Dabei bilden einerseits die Gleichungen

$$Af = 0, \quad B_1 f = 0, \quad B_2 f = 0, \quad B_3 f = 0$$

ein vollständiges System mit der bekannten infinitesimalen Transformation $B_4 f$ und dem entsprechenden Integrale

$$\int \frac{(y_3^2 - y_2 W)\, dy_1 + (y_1 W - y_2 y_3)\, dy_2 + (y_2^2 - y_1 y_3)\, dy_3}{y_2^2 y_3 - 2 y_1 y_3^2 + y_1 y_2 W};$$

und anderseits bilden die Gleichungen

$$Af = 0, \quad B_1 f = 0, \quad B_2 f = 0, \quad B_4 f = 0$$

ein vollständiges System mit der bekannten infinitesimalen Transformation $B_3 f$ und dem entsprechenden Integrale

$$\int \frac{(3y_3^2 - 2y_2 W)\, dy_1 + (y_1 W - 3y_2 y_3)\, dy_2 + (2y_2^2 - y_1 y_3)\, dy_3}{y_2^2 y_3 - 2y_1 y_3^2 + y_1 y_2 W}.$$

Eliminirt man y_3 zwischen den beiden gefundenen Integralgleichungen, so erhält man eine Differentialgleichung zweiter Ordnung

$$\varphi(y_2 y_1) = 0,$$

die durch zwei (unabhängige) Quadraturen erledigt wird.

5. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe $p+q$, $xp+yq$, x^2p+y^2q, so ist sie, wenn wir

$$\varphi_1 = (x-y)y_2y_1^{-\frac{3}{2}} + 2\left(y_1^{\frac{1}{2}} + y_1^{-\frac{1}{2}}\right)$$

$$\varphi_2 = (x-y)^2y_3y_1^{-2} + 6\varphi_1\left(y_1^{\frac{1}{2}} + y_1^{-\frac{1}{2}}\right) - 6(y_1+y_1^{-1})$$

setzen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\varphi_2 \cdots \frac{d^{m-3}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-3}}\right) = 0.$$

Wir integriren diese Differentialgleichung $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung und erhalten hierdurch eine Relation mit $m-3$ Constanten

$$f(\varphi_1\,\varphi_2\,a_1 \cdots) = 0.$$

Enthält dieselbe nicht die Grösse φ_2, so integrirt man die betreffende Gleichung $\varphi_1 = \text{Const.}$, indem man nur die infinitesimalen Transformationen $p+q$ und $xp+yq$ berücksichtigt. Dagegen ist es unmöglich, eine Gleichung der Form

$$\varphi_2 = F(\varphi_1)$$

allgemein zu integriren, während man sie allerdings auf eine *Riccatische* Gleichung erster Ordnung reduciren kann. Dies soll jetzt gezeigt werden.

Als Variabeln wählen wir die Grössen y_1 und φ_1. Es ist, wie eine einfache Rechnung zeigt:

$$\frac{dy_1}{d\varphi_1} = \frac{y_1\left(\varphi_1 - 2y_1^{\frac{1}{2}} - 2y_1^{-\frac{1}{2}}\right)}{\varphi_2 - \frac{3}{2}\varphi_1 - 12}$$

oder, wenn wir $\sqrt{y_1} = z$ setzen,

$$2\frac{dz}{d\varphi_1} = \frac{z\varphi_1 - 2z^2 - 2}{F(\varphi_1) - \frac{3}{2}\varphi_1 - 12}.$$

Ist $\Phi(y_1\varphi_1) = \text{Const.}$ eine Integralgleichung der soeben gefundenen Riccatischen Gleichung, so findet man die beiden fehlenden Integralgleichungen von $\varphi_2 = F(\varphi_1)$, durch Differentiation. Setzen wir nämlich

$$Bf = x^2\frac{\partial f}{\partial x} + y^2\frac{\partial f}{\partial y} + 2(y-x)y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} + [(2y-4x)y^2 + 2y_1^2 - 2y_1]\frac{\partial f}{\partial y_2},$$

so sind

$$B(\Phi) = \text{Const.} \quad \text{und} \quad B(B(\Phi)) = \text{Const.}$$

ebenfalls Integralgleichungen von $\varphi_2 = F(\varphi_1)$, und es genügt daher nachzuweisen, dass die drei Grössen Φ, $B\Phi$ und $B(B(\Phi))$ unabhängige Functionen von $x\,y\,y_1$ und y_2 sind. Es ist, da $B\varphi_1$ verschwindet:

$$B(\Phi) = 2(y-x)\cdot y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$$

$$B(B(\Phi) = 4(y-x)^2 y_1 \frac{\partial}{\partial y_1}\left(y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}\right) + 2(y^2-x^2)y_1 \frac{\partial \Phi}{\partial y_1}$$

und also sind die Grössen Φ, $B\Phi$ und $B(B(\Phi))$ unabhängig hinsichtlich $x\,y\,y_1$ und φ_1, womit der Nachweis geführt ist*).

6. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe q, yq, y^2q, so ist sie reducibel auf die Form

$$\Omega\left(x\, w \frac{dw}{dx} \cdots \frac{d^{m-3}w}{dx^{m-3}}\right) = 0,$$

wo

$$\frac{y_3}{y_1} - \frac{3}{2}\frac{y_2^2}{y_1^2} = w$$

gesetzt ist. Wir integriren die Gleichung $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ und erhalten hierdurch eine Differentialgleichung 3. O. der Form

$$\frac{y_3}{y_1} - \frac{3}{2}\frac{y_2^2}{y_1^2} = F(x)$$

die wir jetzt auf eine *Riccatische* Gleichung 1. O. reduciren werden. Setzen wir

$$\frac{y_2}{y_1} = z,$$

so wird

$$\frac{dz}{dx} = \frac{y_3}{y_1} - \frac{y_2^2}{y_1^2}$$

oder

$$\frac{dz}{dx} = \frac{1}{2}z^2 + F(x). \tag{5}$$

Ist $W(zx) = \text{Const.}$ eine Integralgleichung dieser Riccatischen Gleichung, so findet man die beiden fehlenden Integralgleichungen von $w = F(x)$ folgendermassen durch Differentiation. Setzen wir

$$y^2 \frac{\partial f}{\partial y} + 2yy_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} + (2y\,y_2 + 2y_1^2)\frac{\partial f}{\partial y_2} = Bf,$$

---

*) Die Entwickelungen des Textes liefern das einfachste Beispiel zu einem allgemeinen Theoreme in meiner Theorie der Transformationsgruppen. Gesetzt in der That, dass ein vollständiges System $A_1 f = 0 \ldots A_r f = 0$ in den Variabeln $x_1 \ldots x_n$ $n-r$ inf. Transformationen $B_1 f \ldots B_{n-r} f$ gestattet, und dass es nicht gelingt, ein Integral durch Differentiation zu bilden. Dann kann man ohne Beschränkung annehmen, dass die $B_i f$ eine Gruppe bilden. Sei diese Gruppe *einfach*, und sei $B_1 f \ldots B_\varrho f$ eine Untergruppe mit der grösstmöglichen Zahl Parameter. Dann bildet man das vollständige System

$$A_1 f = 0 \ldots A_r f = 0, \quad B_1 f = 0 \ldots B_\varrho f = 0.$$

Gelingt es dasselbe zu integriren, so findet man immer die fehlenden Lösungen des Systems $A_i f = 0$ durch Differentiation. In dieser Arbeit setze ich diesen Satz, den ich im Uebrigen früher in viel allgemeinerer Form aufgestellt habe, nicht als bekannt voraus.

so sind $BW = \text{Const.}$ und $B(B(W)) = \text{Const.}$ bekanntlich Integralgleichungen von $w = F(x)$; es genügt daher nachzuweisen, dass W, BW und $B(B(W))$ unabhängige Functionen von $x\,y\,y_1$ und y_2 sind. Es ist $B(x) = 0$ und

$$B(W) = \frac{\partial W}{\partial z} Bz = 2\frac{\partial W}{\partial z} y_1,$$

$$B(B(W)) = 4\frac{\partial^2 W}{\partial z^2} y_1^2 + 4\frac{\partial W}{\partial z} y y_1,$$

sodass W, BW und $B(B(W))$ wirklich hinsichtlich $y\,x\,y_1$ und z unabhängig sind. Hiermit ist die Integration von $w = F(x)$ auf diejenige der Riccatischen Gleichung (5) zurückgeführt.

7. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe $q\,yq\,y^2q\,p$, so ist sie reducibel auf die Form

$$\Omega\left(w\frac{dw}{dx}\cdots\frac{d^{m-3}w}{dx^{m-3}}\right) = 0,$$

wo wiederum

$$\frac{y_3}{y_1} - \frac{3}{2}\frac{y_2^2}{y_1^2} = w$$

gesetzt ist. Man integrirt die Gleichung $(m-3)^{\text{ter}}$ Ordnung, die offenbar immer auf eine Gleichung $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung reducirbar ist. Die hierdurch gefundene Differentialgleichung 3. O. von der Form

$$w = F(x)$$

wird darnach nach den Regeln der letzten Nummer auf eine Riccatische Gleichung 1. O. zurückgeführt.

8. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q\,yq\,y^2q\,p\,xp,$$

so ist sie*) reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\cdots\frac{d^{m-5}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-5}}\right) = 0,$$

wo

$$\varphi_1 = \frac{w'}{w^{\frac{3}{2}}},\quad \varphi_2 = \frac{w''}{w^2},\quad w' = \frac{dw}{dx},\quad w'' = \frac{d^2w}{dx^2}$$

gesetzt ist. Man integrirt die Gleichung $(m-5)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ und findet hierdurch eine Differentialgleichung

$$\varphi_2 = f(\varphi_1),$$

die wir folgendermassen schreiben

*) Wenn wir von der unmittelbar integrablen Gleichung: $2y_1y_3 - 3y_2^2 = 0$ absehen.

$$w'' = w^2 f\left(\frac{w'}{w^{\frac{3}{2}}}\right).$$

Diese Differentialgleichung gestattet zwei bekannte infinitesimale Transformationen

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ und } x\frac{\partial f}{\partial x} - y_1\frac{\partial f}{\partial y_1} - 2y_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - 3y_3\frac{\partial f}{\partial y_3} - \cdots,$$

die in den Variabeln x und w die Form

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ und } x\frac{\partial f}{\partial x} - 2w\frac{\partial f}{\partial w}$$

besitzen. Also ist

$$\int\frac{w'\,dw' - w^2 f.dw}{3w'^2 - 2w^3 f} = \text{Const.}$$

eine erste Integralgleichung. Hiernach findet man durch Auflösung und Quadratur eine Differentialgleichung der Form

$$w = F(x),$$

die nach den Regeln der Nummer 6 auf eine *Riccatische* Gleichung 1. O. reducirt wird.

Man kann im Uebrigen die Integration der Gleichung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ in etwas anderer Weise durchführen, wie hier kurz angedeutet werden soll. In der That, setzt man

$$u = \sqrt{\frac{y_1 y_3}{y_2^2} - \frac{3}{2}},$$

so wird

$$\frac{du}{d\varphi_1} = \frac{u\varphi_1 - 2u^2 - 1}{2\varphi_2 - 3\varphi_1}.$$

Ist diese Riccatische Gleichung integrirt, so findet man durch Differentiation zwei weitere Integralgleichungen der Gleichung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$, die man darnach auf eine Differentialgleichung zweiter Ordnung mit den beiden infinitesimalen Transformationen p und xp reducirt. Durch zwei Quadraturen findet man daher endlich y als Function von x.

9. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q \quad yq \quad y^2q \quad p \quad xp \quad x^2p,$$

so ist sie, wenn wir von der integrablen Gleichung $2y_1y_3 - 3y_2^2 = 0$ absehen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\varphi_2\cdots\frac{d^{m-6}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-6}}\right) = 0,$$

wo

$$\varphi_1 = \frac{4ww'' - 5w'^2}{w^3}$$

$$\varphi_2 = \frac{4w^2w''' - 18ww'w'' + 15w'^3}{w^{\frac{9}{2}}}$$

und wie früher

$$w = \frac{y_3}{y_1} - \frac{3}{2}\frac{y_2^2}{y_1^2}, \quad w' = \frac{dw}{dx} \dots$$

gesetzt ist. Durch Integration der Gleichung $(m-6)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ erhält man eine Relation der Form

$$\varphi_2 = f(\varphi_1),$$

die eine Differentialgleichung 3. O. in den Variabeln x und w darstellt. Dieselbe gestattet drei bekannte infinitesimale Transformationen p, xp, x^2p, die in den Variabeln xw die Form

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x} - 2w\frac{\partial f}{\partial w}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial x} - 4xw\frac{\partial f}{\partial w}$$

besitzen. Zur Integration unserer Differentialgleichung 3. O. führen wir die Grössen

$$u = w^{-\frac{3}{2}} w', \quad \varphi_1 = 4w^{-2}w'' - 5w^{-3}w'^2$$

als neue Variabeln ein. Dann wird

$$\frac{du}{d\varphi_1} = \frac{\varphi_1 - u^2}{\varphi_2}. \tag{6}$$

Ist

$$W(u\varphi_1) = \text{Const.}$$

eine Integralgleichung dieser Riccatischen Gleichung 1. O., so findet man folgendermassen durch Differentiation die beiden fehlenden Integralgleichungen von $\varphi_2 = f(\varphi_1)$, aufgefasst als Differentialgleichung 3. O. in w und x. Setzen wir

$$Bf = x^2\frac{\partial f}{\partial x} - 4xw\frac{\partial f}{\partial w} - (6xw' + 4w)\frac{\partial f}{\partial w'} - (8xw'' + 10w')\frac{\partial f}{\partial w''}$$

so ist $B\varphi_1 = 0$

$$BW = \frac{\partial f}{\partial u}Bu = -4\frac{\partial W}{\partial u}w^{-\frac{1}{2}}$$

$$BBW = 16\frac{\partial^2 W}{\partial u^2}w^{-1} - 8xw^{-\frac{1}{2}}\frac{\partial W}{\partial u},$$

und da die Grössen W, BW und BBW hinsichtlich $u\,\varphi_1\,x$ und w unabhängig sind, so findet man durch Elimination von u und φ_1 zwischen den drei Gleichungen

$$W = \text{Const.}, \quad BW = \text{Const.}, \quad BBW = \text{Const.} \tag{7}$$

die Grösse w bestimmt als Function von x:

$$w = F(x).$$

Diese Gleichung ist nun selbst eine Differentialgleichung 3. O. in y und x, die nach den Regeln der Nummer 6 vermöge einer Riccatischen 1. O. integrirt wird.

Hiermit ist die Gleichung sechster Ordnung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ vermöge *zweier* Riccatischer Gleichungen 1. O. integrirt. Dabei ist indess zu bemerken, dass wir erst nach der Integration der ersten Hülfsgleichung (6) die zweite Hülfsgleichung 1. O. aufstellen konnten. Es ist aber nicht schwierig einzusehen, dass man die Integration von $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ auf die Integration zweier *von einander unabhängiger Riccatischer* Gleichungen 1. O. zurückführen kann. Man bemerke in der That nur, dass die beiden Gruppen q, yq, y^2q und $p\; xp\; x^2p$ vollständig gleichberechtigt sind. Vertauscht man daher im Vorangehenden die Grössen x und y, so erhält man eine mit (6) analoge Riccatische Gleichung, deren Integration ebenfalls drei Integralgleichungen

$$W_1 = \text{Const.}, \quad CW_1 = \text{Const.}, \quad CCW_1 = \text{Const.}$$

von $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ liefert. Dabei ist es einleuchtend, dass diese drei neuen Integralgleichungen von den drei früheren (7) unabhängig sind. Und also ist wirklich die Gleichung sechster Ordnung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ auf zwei unabhängige Riccatische Gleichungen 1. O. zurückgeführt.

§ 2.

Integration von Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen der Form $X(x)p + Y(xy)q$.

In diesem Paragraphen entwickeln wir die Integrationstheorie aller Differentialgleichungen von zweiter und höherer Ordnung mit einer bekannten Gruppe, deren sämmtliche infinitesimale Transformationen die Form $X(x)p + \eta(xy)q$ besitzen. Dabei wird ausdrücklich vorausgesetzt, dass die betreffende Gruppe keine andere Differentialgleichung erster Ordnung als $\frac{1}{y'} = 0$ invariant lässt.

Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe p, $xp + yq$, $x^2p + 2xyq$, so ist sie, wenn wir

$$2yy_2 - y_1^2 = \varphi_1, \quad y^2y_3 = \varphi_2$$

setzen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2 \cdots \frac{d^{m-3}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-3}}\right) = 0.$$

Man integrirt diese Gleichung $(m-3)$. O. und erhält hierdurch eine Differentialgleichung 3. O.:

$$\varphi_2 = f(\varphi_1),$$

die wir jetzt auf eine Riccatische Gleichung 1. O. reduciren werden. Wir führen neue Variable ein, nämlich y_1 und φ_1; dann wird

$$\frac{dy_1}{d\varphi_1} = \frac{y_1^2 + \varphi_1}{4\varphi_2}.$$

Sei $W(y_1\varphi_1) = \text{Const.}$ eine Integralgleichung der soeben erhaltenen Riccatischen Gleichung und sei

$$Bf = x^2\frac{\partial f}{\partial x} + 2xy\frac{\partial f}{\partial y} + 2y\frac{\partial f}{\partial y_1} + (2y_1 - 2xy_2)\frac{\partial f}{\partial y_2},$$

so wird

$$BW = 2\frac{\partial W}{\partial y_1}y$$

$$BBW = 4y^2\frac{\partial^2 W}{\partial y_1^2} + 4xy\frac{\partial W}{\partial y_1},$$

und, da die Grössen W, BW und BBW offenbar unabhängig sind, so geben die Integralgleichungen

$$W = \text{Const.},\quad BW = \text{Const.},\quad BBW = \text{Const.}$$

durch Elimination von y_1 und φ_1 die Bestimmung von y als Function von x.

11. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$yq,\quad p,\quad xp,\quad x^2p + xyq$$

so ist sie, wenn wir von der unmittelbar integrablen Gleichung $y_2 = 0$ absehen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\varphi_2\cdots\frac{d^{m-4}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-4}}\right) = 0$$

wo φ_1 und φ_2 die Werthe

$$\varphi_1 = y^{\frac{1}{2}}y_2^{-\frac{3}{2}}y_3 + 3y^{-\frac{1}{2}}y_1y_2^{-\frac{1}{2}}$$

$$\varphi_2 = 3yy_2^{-2}y_4 - 4yy_2^{-3}y_3^2$$

haben. Wir integriren die Gleichung $(m-4)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$, und erhalten hierdurch eine Relation

$$\varphi_2 = f(\varphi_1)$$

das heisst eine Differentialgleichung vierter Ordnung, die unsere Gruppe gestattet. Dieselbe soll jetzt auf eine Riccatische Gleichung 1. O. reducirt werden. Wir führen φ_1 und

$$u = (yy_1^{-2}y_2)^{\frac{1}{2}}$$

als neue Variabeln ein. Dann wird

$$\frac{du}{d\varphi_1} = \frac{u\varphi_1 - 2 - 2u^2}{\frac{2}{3}\varphi_2 - \frac{1}{3}\varphi_1^2 + 6}.$$

Ist $W(u\varphi_1)$ eine Integralgleichung der gefundenen Riccatischen Gleichung, so setzen wir

$$Bf = x^2\frac{\partial f}{\partial x} + xy\frac{\partial f}{\partial y} + (y - xy_1)\frac{\partial f}{\partial y_1} - 3xy_2\frac{\partial f}{\partial y_2} - (5xy_3 + 3y_2)\frac{\partial f}{\partial y_3}$$

und bilden die Ausdrücke

$$BW = -\frac{\partial W}{\partial u} u y y_1^{-1}$$

$$BBW = u\frac{\partial}{\partial u}\left(u\frac{\partial W}{\partial u}\right) y^2 y_1^{-2} + u\frac{\partial W}{\partial u}(y^2 y_1^{-2} - 2xyy_1^{-1}),$$

die offenbar von einander und von W unabhängig sind. Daher erhält man durch Elimination von u und φ_1 zwischen den Gleichungen

$$W = \text{Const.}, \quad BW = \text{Const.}, \quad BBW = \text{Const.}$$

eine Relation der Form

$$yy_1^{-1} = F(x),$$

woraus als definitive Integralgleichung

$$y = e^{\int\frac{dx}{F}}$$

hervorgeht.

Man kann im Uebrigen die Integration der Gleichung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ in etwas anderer Weise durchführen, wie ich hier kurz angeben werde. Bringt man in der That die vorgelegte Gruppe auf die Form

$$B_1f = p, \quad B_2f = 2xp + yq, \quad B_3f = x^2p + xyq$$
$$B_4f = yq,$$

so bilden $B_1f\,B_2f\,B_3f$ eine dreigliedrige Untergruppe und dabei bestehen die Relationen

$$(B_1B_4) = 0, \quad (B_2B_4) = 0, \quad (B_3B_4) = 0$$

(die, wie ich beiläufig bemerke, aussagen, dass $B_1\,B_2\,B_3$ eine *invariante* Untergruppe bilden). Bringe ich daher die Gleichung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ auf die Form

$$y_4 = F(xyy_1y_2y_3)$$

und ersetze sie darnach durch die lineare partielle Differentialgleichung

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y_1\frac{\partial f}{\partial y} + y_2\frac{\partial f}{\partial y_1} + y_3\frac{\partial f}{\partial y_2} + F\frac{\partial f}{\partial y_3} = 0,$$

so bilden die Gleichungen

$$Bf = 0, \quad B_1f = 0, \quad B_2f = 0, \quad B_3f = 0$$

ein vollständiges System mit der bekannten infinitesimalen Transformation B_4f. Das entsprechende Integral, das man ohne weiteres aufstellen kann, liefert eine Differentialgleichung 3. O. mit der bekannten Gruppe p, $2xp + yq$, $x^2p + xyq$. Sie wird nach den Regeln der vorangehenden Nummer auf eine Riccatische Gleichung 1. O. reducirt.

13. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$X_1q, \; X_2q \ldots X_rq,$$

so ist sie reducibel auf die Form

$$\Omega\left(x\, D\, \frac{dD}{dx} \cdots \frac{d^{m-r}D}{dx^{m-r}}\right) = 0,$$

wo

$$\begin{vmatrix} X_1 X_1' \cdots X_1^{(r)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_r X_r' \cdots X_r^r \\ y \quad y_1 \cdots y_r \end{vmatrix} = D$$

gesetzt ist. Durch Integration der Gleichung $(m-r)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ erhält man eine Relation

$$D = F(x)$$

das heisst eine lineare Differentialgleichung r^{ter} Ordnung, die bekanntlich nach *Lagranges* oder *Cauchys* Regeln integrirt werden kann, indem das allgemeine Integral von $D = 0$ bekannt und gleich $\Sigma c_i X_i$ ist.

Ist die vorgelegte Gleichung m^{ter} Ordnung linear, so ist auch $\Omega = 0$ linear. Der bekannte Satz, dass eine lineare Gleichung m^{ter} Ordnung mit r bekannten Particularintegralen sich auf eine lineare Gleichung $(m-r)^{\text{ter}}$ Ordnung reduciren lässt, ist somit ein sehr specieller Fall unserer soeben entwickelten Theorie.

Auch die oben besprochene Reduction der Gleichung $D = F(x)$ auf die einfachere Gleichung $D = 0$ fliesst als sehr specielles Corollar aus meinen alten Integrationstheorien. Ich werde diesen Zusammenhang in zwei etwas von einander verschiedenen Weisen begründen. Sei die Gleichung $D = F(x)$ auf die Form

$$y_r = V$$

oder die äquivalente Form

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + V \frac{\partial f}{\partial y_{r-1}} = 0$$

gebracht. Diese lineare partielle Differentialgleichung gestattet r bekannte infinitesimale Transformationen:

$$B_i f = X_i \frac{\partial f}{\partial y} + X_i' \frac{\partial f}{\partial y_1} + \cdots + X_i^{(r-1)} \frac{\partial f}{\partial y_{r-1}}, \quad (i = 1, 2 \cdots r)$$

die paarweise in der Beziehung

$$(B_i B_k) = 0$$

stehen. Also bilden die Gleichungen

$$Af = 0 \quad B_1 f = 0 \quad B_{k-1} f = 0 \quad B_{k+1} f = 0 \cdots B_r f = 0$$

ein vollständiges System mit der bekannten infinitesimalen Transformation $B_k f$; und daher findet man die entsprechende Lösung W_k

durch Quadratur. In dieser Weise findet man r unabhängige Lösungen von $Af = 0$, deren Integration hiermit geleistet ist.

Die hiermit ausgeführte, principiell einfache Integration von $D = F(x)$ ist insofern unvollkommen, als sie nicht die explicite Form der Grösse y als Function von x liefert. Daher füge ich die folgenden Bemerkungen hinzu. Setze ich

$$\begin{vmatrix} X_1 X_1' \cdots X_1^{(r-1)} \\ \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ X_{r-1} \cdots\cdots X_{r-1}^{(r-1)} \\ y \cdots\cdots y_{r-1} \end{vmatrix} = D_r,$$

so kann die Gleichung $D + F(x) = 0$ nach dem Vorangehenden auf die Form

$$\frac{dD_r}{dx} + \varphi(x) D_r + f(x) = 0$$

gebracht werden. Ordnen wir die letzte Gleichung nach den Grössen y_i, so kommt

$$(X_1 X_2' \cdots X_{r-1}^{(r-2)}) \{y_r + \varphi \cdot y_{r-1}\} + \cdots + f(x) = 0$$

und anderseits erhält $D + F(x)$ durch Entwickelung, wenn wir zur Abkürzung

$$(X_1 X_2' \cdots X_r^{r-1}) = \Delta$$

setzen, die Form:

$$\Delta \cdot y_r + \frac{d\Delta}{dx} y_{r-1} + \cdots + F(x).$$

Durch Vergleichung findet man daher die folgenden Werthe von $\varphi(x)$ und $f(x)$:

$$\varphi(x) = \frac{d \log \Delta}{dx}, \quad f(x) = \frac{\Delta_r}{\Delta} F(x),$$

wo

$$(X_1 X_2' \cdots X_{r-1}^{(r-2)}) = \Delta_r$$

gesetzt ist. Also kann $D + F(x) = 0$ die Form

$$\frac{dD_r}{dx} + \frac{d \log \Delta}{dx} D_r + \frac{\Delta_r}{\Delta} F(x) = 0$$

erhalten und durch Integration kommt

$$D_r = -\frac{1}{\Delta} \int \Delta_r F(x) \, dx.$$

Analoge Ueberlegungen geben uns die r Formeln

$$D_i = -\frac{1}{\Delta} \int \Delta_i F(x) \, dx, \quad (i = 1 \cdots r),$$

und da die r Grössen D_i linear und homogen in den Grössen $y y_1 \ldots y_{r-1}$ sind, so findet man durch Auflösung die bekannte Form der Grösse y.

Man sieht leicht, dass diese beiden Integrationstheorien der Gleichung $D+F(x)=0$ im Wesentlichen identisch sind.

13. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$X_1 q \cdots X_r q \quad y q,$$

so ist sie reducibel auf die Form

$$\Omega\left(x \frac{d \log D}{dx} \cdots \frac{d^{m-r} \log D}{dx^{m-r}}\right)=0,$$

wo D dieselbe Determinante wie in der vorangehenden Nummer bezeichnet. Durch Integration dieser Gleichung $(m-r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung erhält man eine Relation

$$\frac{d \log D}{dx}=F(x)$$

und durch Quadratur die lineare Gleichung

$$D=e^{\int F \cdot dx},$$

die nach den Regeln der vorangehenden Nummer integrirt wird.

14. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung eine Gruppe von der Form

$$X_1 q \cdots X_r q, \; p,$$

so ist sie reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi \frac{d\varphi}{dx} \cdots \frac{d^{m-r} \varphi}{dx^{m-r}}\right)=0$$

wo φ eine lineare und homogene Function mit constanten Coefficienten von $y\, y_1 \ldots y_r$ darstellt:

$$\varphi=c y+c_1 y_1+\cdots+c_r y_r.$$

Man integrirt $\Omega=0$, die als eine Gleichung $(m-r-1)^{\text{ter}}$ Ordnung zu betrachten ist. Hierdurch findet man eine Differentialgleichung r^{ter} Ordnung der Form

$$c y+\cdots+c_r y_r=F(x),$$

die in der bekannten Weise integrirt wird.

15. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$X_1 q \cdots X_r q \quad y q \quad p,$$

so ist sie reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\, \varphi_2 \cdots \frac{d^{m-r-2} \varphi_2}{d \varphi_1^{\,m-r-2}}\right)=0;$$

φ_1 und φ_2 haben die Werthe

$$\varphi_1 = \frac{\frac{d\varphi}{dx}}{\varphi} \quad \varphi_2 = \frac{\frac{d^2\varphi}{dx^2}}{\varphi}$$

wo φ wie soeben eine ganze und homogene Function mit constanten Coefficienten von $y\, y_1 \ldots y_r$ bezeichnet.

Durch Integration der Gleichung $(m-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ kommt eine Relation

$$\varphi_2 = f(\varphi_1)$$

oder

$$\frac{1}{\varphi}\frac{d^2\varphi}{dx^2} = f\left(\frac{d\log\varphi}{dx}\right)$$

oder endlich

$$\frac{d^2\log\varphi}{dx^2} = f\left(\frac{d\log\varphi}{dx}\right) - \left(\frac{d\log\varphi}{dx}\right)^2.$$

Diese Differentialgleichung zweiter Ordnung erledigt man durch zwei Quadraturen, und erhält so eine Gleichung

$$\varphi = F(x)$$

die in der bekannten Weise integrirt wird.

16. Gestattet eine Gleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q\, xq \cdots x^{r-1}q,\ p,\ xp + cyq,\ c \neq r,$$

so ist sie reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\varphi_2 \cdots \frac{d^{m-r-2}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-r-2}}\right) = 0,$$

wo

$$\varphi_1 = \frac{y_{r+1}}{y_r^{\frac{c-r-1}{c-r}}},\quad \varphi_2 = \frac{y_{r+2}}{y_r^{\frac{c-r-2}{c-r}}}.$$

Durch Integration der Gleichung $(m-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ erhält man eine Relation

$$y_{r+1}\frac{dy_{r+1}}{dy_r} = y_r^{\frac{c-r-2}{c-r}} f(\varphi_1),$$

die eine Differentialgleichung 1. O. in den Variabeln y_r und y_{r+1} darstellt. Diese Gleichung gestattet die infinitesimale Transformation

$$x\frac{\partial f}{\partial x} + cy\frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + (c-r)y_r\frac{\partial f}{\partial y_r} + (c-r-1)y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}},$$

und also giebt eine Quadratur eine Bestimmung von y_{r+1} als Function von y_r. Darnach giebt eine zweite Quadratur y_r als Function von x und endlich findet man vermöge r neuer Quadraturen y als Function von x.

17. Gestattet eine Gleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q\ xq \ldots x^{r-1}q\ p\ xp + ryq,$$

so ist sie, wenn wir von den integrabeln Gleichungen $y_{r+1}=0$, $y_r=\text{Const.}$ absehen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2\cdots\frac{d^{m-r-2}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-r-2}}\right)=0,$$

wo

$$\varphi_1=y_r,\quad \varphi_2=\frac{y_{r+2}}{y_{r+1}^2}.$$

Durch Integration der Gleichung $(m-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega=0$ erhält man eine Relation

$$y_{r+2}=y_{r+1}^2\,f(y_r)$$

oder

$$\frac{dy_{r+1}}{dy_r}=y_{r+1}f(y_r),$$

woraus

$$y_{r+1}=e^{\int f(y_r)\,dy_r}$$

und

$$x=\int dy_r\,e^{-\int f(y_r)\,dy_r}.$$

Hierdurch ist y_r bestimmt als Function von x und daher findet man y durch r weitere Quadraturen.

18. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q\;xq\cdots x^{r-1}q\;p,\,xp+(ry+x^r)\,q,$$

so hat sie die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2\cdots\frac{d^{m-r-2}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-r-2}}\right)=0,$$

wo

$$\varphi_1=y_{r+1}\,e^{wy_r},\quad \varphi_2=y_{r+2}\,e^{2wy_r}$$

$$\frac{1}{w}=1\cdot2\cdots(r-1)r.$$

Durch Integration der Gleichung $(m-r-2)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega=0$ erhält man eine Relation $\varphi_2=f(\varphi_1)$ oder

$$y_{r+1}\frac{dy_{r+1}}{dy_r}=e^{-2wy_r}f\left(y_{r+1}\,e^{wy_r}\right),$$

das heisst eine Differentialgleichung 1. O. zwischen y_r und y_{r+1} mit der bekannten infinitesimalen Transformation

$$x\frac{\partial f}{\partial x}+(ry+x^r)\frac{\partial f}{\partial y}+\cdots+\frac{1}{w}\frac{\partial f}{\partial y_r}-y_{r+1}\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}}.$$

Daher bestimmt man zuerst y_{r+1} als Function von y_r durch eine

Quadratur, darnach y_r als Function von x durch eine zweite Quadratur und schliesslich y als Function von x vermöge r Quadraturen.

19. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q \quad xq \cdots x^{r-1}q \quad yq \quad p \quad xp,$$

so hat sie, wenn wir von den beiden integrabeln Gleichungen $y_r = 0$, $y_{r+1} = 0$ absehen, die Form

$$\Omega\left(\varphi_1 \varphi_2 \cdots \frac{d^{m-r-3}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-r-2}}\right) = 0,$$

wo

$$\varphi_1 = \frac{y_r y_{r+2}}{y_{r+1}^2}, \quad \varphi_2 = \frac{y_r^2 y_{r+3}}{y_{r+1}^3}.$$

Durch Integration der Gleichung $(m-r-3)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ erhält man eine Relation $\varphi_2 = f(\varphi_1)$, das heisst eine Differentialgleichung 2. O. in y_r und y_{r+1}:

$$\frac{y_{r+3}}{y_{r+1}} = \frac{dy_{r+2}}{dy_r} = \frac{y_{r+1}^2}{y_r^2} f\left(\frac{y_r y_{r+2}}{y_{r+1}^2}\right) = \frac{d}{dy_r}\left(y_{r+1} \frac{dy_{r+1}}{dy_r}\right)$$

mit zwei bekannten infinitesimalen Transformationen

$$y_r \frac{\partial f}{\partial y_r} \quad \text{und} \quad y_{r+1} \frac{\partial f}{\partial y_{r+1}}.$$

Hier führen wir

$$\eta = \log y_{r+1}, \quad \xi = \log y_r$$

als neue Variabeln ein, dann wird

$$\varphi_1 = \frac{y_r y_{r+2}}{y_{r+1}^2} = \frac{d\eta}{d\xi}, \quad \varphi_2 = \frac{d^2\eta}{d\xi^2} + 2\frac{d\eta^2}{d\xi} - \frac{d\eta}{d\xi},$$

sodass die Gleichung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ die Form annimmt:

$$\frac{d^2\eta}{d\xi_1} = F\left(\frac{d\eta}{d\xi}\right).$$

Daher geben zwei Quadraturen η als Function von ξ, das heisst y_{r+1} als Function von y_r. Eine neue Quadratur giebt y_r als Function von x, wonach y durch r Quadraturen als Function von x bestimmt wird.

20. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q \quad xq \cdots x^{r-1}q \quad p \quad 2xp + (r-1)\,yq \quad x^2p + (r-1)xyq$$

so ist sie, wenn wir von der unmittelbar integrabeln Gleichung $y_r = 0$ absehen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2,\cdots\frac{d^{m-r-3}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-r-3}}\right)=0$$

wo φ_1 und φ_2 die Werthe

$$\varphi_1 = y_r^{\frac{-2(r+3)}{r+1}}\left((r+1)\,y_r y_{r+2} - (r+2)\,y_{r+1}^2\right) = y_r^{\frac{-2(r+3)}{r+1}}\,u$$

$$\varphi_2 = y_r^{\frac{-3(r+3)}{r+1}}\,u_1 =$$

$$y_r^{\frac{-3(r+3)}{r+1}}\left((r+1)^2 y_r^2 y_{r+3} - 3(r+1)(r+3)\,y_r y_{r+1} y_{r+2} + 2(r+2)(r+3)\,y_{r+1}^3\right)$$

haben. Durch Integration der Gleichung $(m-r-3)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega=0$ erhält man eine Relation $\varphi_2=f(\varphi_1)$, die nicht allgemein integrabel ist, während sie, wie jetzt gezeigt werden soll, immer auf eine *Riccatische* Gleichung 1. O. reducirt werden kann. Wir wählen φ_1 und

$$v = y_r^{-\frac{r+3}{r+1}}\,y_{r+1}$$

als neue Variabeln. Dann wird

$$\frac{dv}{d\varphi_1} = \frac{v^2+\varphi_1}{\varphi_2} = \frac{v^2+\varphi_1}{f(\varphi_1)}.$$

Ist $W(v\varphi_1) =$ Const. eine Integralgleichung dieser Riccatischen Gleichung, so findet man zwei weitere Integralgleichungen von $\varphi_2=f(\varphi_1)$ durch Differentiation. In der That setzt man

$$Bf = (r+1)\,x\,y_r\frac{\partial f}{\partial y_r} + [(r+3)\,xy_{r+1} + (r+1)\,y_r]\frac{\partial f}{\partial y_{r+1}}$$
$$+ [(r+5)\,xy_{r+2} + 2(r+2)\,y_{r+1}]\frac{\partial f}{\partial y_{r+2}},$$

so ist $B\varphi_1=0$, während die Ausdrücke

$$BW = \frac{\partial f}{\partial v}(r+1)\,y_r$$
$$BBW = \frac{\partial^2 f}{\partial v^2}(r+1)^2 y_r^2 + (r+1)^2\,xy_r\frac{\partial f}{\partial v}$$

von W unabhängig sind. Daher sind die Relationen $W=$ Const., $BW=$ Const., $BBW=$ Const. unabhängige Integralgleichungen von $\varphi_2=f(\varphi_1)$. Und daher erhält man durch Elimination von $y_{r+1}y_{r+2}$ und y_{r-3} eine Differentialgleichung der Form

$$y_r = F(x)$$

(mit der bekannten Gruppe $q\ xq\cdots x^{r-1}q$) und schliesslich geben r Quadraturen die Bestimmung von y als Function von x.

21. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung die Gruppe

$$q\ xq \cdots x^{r-1}q\ p,\ xp\ yq\ x^2p + (r-1)\,xyq$$

so ist sie, wenn wir von den unmittelbar integrabeln Gleichungen

$$y_r = 0, \quad \left(y^{-\frac{1}{r+1}}\right)'' = 0$$

absehen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\ \varphi_2 \cdots \frac{d^{m-r-4}\varphi_2}{d\varphi_1^{\,m-r-4}}\right) = 0,$$

wo

$$\varphi_1 = u^{-\frac{3}{2}}\,u_1, \quad \varphi_2 = u^{-2}u_2$$

während u, u_1 und u_2 dieselben Werthe wie in der vorangehenden Nummer (siehe auch Abschn. I, Nummer 23) haben. Durch Integration der Gleichung $(m-r-4)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ erhält man eine Differentialgleichung $(r-4)^{\text{ter}}$ Ordnung $\varphi_2 = f(\varphi_1)$, die allerdings nicht allgemein integrabel ist, während sie immer, wie jetzt gezeigt werden soll, auf eine Riccatische Differentialgleichung 1. O. reducirt werden kann. Um dies nachzuweisen betrachten wir $\varphi_2 = f(\varphi_1)$ als eine Differentialgleichung *vierter* Ordnung zwischen y_r und x. In diesen Variabeln erhalten die bekannten inf. Transformationen p, xp, yq, $x^2p + (r-1)\,xyq$ die Formen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad y_r\frac{\partial f}{\partial y_r}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial x} - (r+1)\,xy_r\frac{\partial f}{\partial y_r}.$$

Setzen wir

$$\eta = y_r^{-\frac{1}{r+1}},$$

so erhalten wir eine Differentialgleichung vierter Ordnung zwischen η und x mit den vier bekannten infinitesimalen Transformationen

$$\frac{\partial f}{\partial x}, \quad x\frac{\partial f}{\partial x}, \quad \eta\frac{\partial f}{\partial \eta}, \quad x^2\frac{\partial f}{\partial x} + \eta x\frac{\partial f}{\partial \eta}.$$

Daher findet man nach den Regeln der Nummer 11 vermöge einer Riccatischen Gleichung 1. O. die Grösse η bestimmt als Function von x

$$\eta = y_r^{-\frac{1}{r+1}} = F(x),$$

woraus

$$y_r = F(x)^{-(r+1)};$$

hiernach genügen r Quadraturen zur Bestimmung von y als Function von x.

§ 3.

Integration von Differentialgleichungen mit bekannten infinitesimalen Transformationen der Form $X(xy)p + Y(xy)q$.

In diesem Paragraphen integrire ich alle Differentialgleichungen mit einer bekannten fünfgliedrigen, sechsgliedrigen oder achtgliedrigen Gruppe; dabei wird ausdrücklich vorausgesetzt, dass die betreffende Gruppe keine Curvenschaar $\varphi(xy) = a$ invariant lässt und dass sie daher in Uebereinstimmung mit meinen alten Untersuchungen auf die Form einer projectiven Gruppe gebracht worden ist. Ich sehe ab von den unmittelbar integrabeln Gleichungen

$$y_2 = 0, \quad 5y_3^2 - 3y_2y_4 = 0,$$
$$9y^2y_5 - 45y_2y_3y_4 + 40y_3^3 = 0,$$

unter denen die erste alle gerade Linien, die zweite alle Parabeln, die dritte alle Kegelschnitte der Ebene xy bestimmt.

22. Gestattet eine Differentialgleichung, deren Ordnungszahl m grösser als 2 ist, die Gruppe

$$p \quad q \quad xq \quad xp - yq \quad yp,$$

so besitzt sie die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2\,\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1} \cdots \frac{d^{m-5}\varphi_2}{d\varphi_1^{\,m-5}}\right) = 0$$

wo

$$\varphi_1 = y_2^{-\frac{8}{3}}\varrho_2, \quad \varphi_2 = y_2^{-4}\varrho_3$$

und

$$\varrho_2 = 3y_2y_4 - 5y_3^2, \quad \varrho_3 = 3y_2^2y_5 - 15y_2y_3y_4 + \frac{40}{3}\,y_3^3.$$

Man integrirt die Gleichung $(m-5)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$ und erhält hierdurch eine Relation

$$\varphi_2 = F(\varphi_1)$$

das heisst eine Differentialgleichung*) fünfter Ordnung, die wir jetzt auf eine *Riccatische* Gleichung 1. O. reduciren werden.

Wir führen neue Variabeln ein, nämlich φ_1 und

$$u = y_2^{-\frac{4}{3}}y_3;$$

dann wird, wie man leicht findet

$$\frac{du}{d\varphi_1} = \frac{1}{3}\,\frac{\varrho_2 + y_3^2}{y_2^{-\frac{4}{3}}\varrho_3} = \frac{1}{3}\,\frac{\varphi_1 + u^2}{\varphi_2}$$

---

*) Wir sehen im Texte ab von der unmittelbar integrablen Gleichung $\varphi_1 = \text{Const.}$

oder

$$\frac{du}{d\varphi_1} = \frac{1}{3}\,\frac{u^2+\varphi_1}{F(\varphi_1)}.$$

Ist

$$W(u\varphi_1) = \text{Const.}$$

eine Integralgleichung dieser Riccatischen Gleichung, so findet man folgendermassen zwei neue Integralgleichungen von $\varphi_2 = F(\varphi_1)$ durch Differentiation. Man setzt

$$Bf = y\,\frac{\partial f}{\partial x} - y_1^2\,\frac{\partial f}{\partial y_1} - 3y_1y_2\,\frac{\partial f}{\partial y_2} - (4y_1y_3+3y_2^2)\,\frac{\partial f}{\partial y_3} - (5y_1y_4+10y_2y_3)\,\frac{\partial f}{\partial y_4},$$

dann ist

$$B\varphi_1 = 0,\quad Bu = -3y_2^{\frac{2}{3}}$$

und

$$BW = -3\,\frac{\partial W}{\partial u}\,y_2^{\frac{2}{3}}$$

$$BBW = 9y_2^{\frac{4}{3}}\,\frac{\partial^2 W}{\partial u^2} + 6y_1y_2^{\frac{2}{3}}\,\frac{\partial W}{\partial u},$$

sodass

$$W = \text{Const.},\quad BW = \text{Const.},\quad BBW = \text{Const.}$$

drei unabhängige Integralgleichungen von $\varphi_2 = F(\varphi_1)$ darstellen. Eliminirt man zwischen ihnen die Grössen y_5, y_4 und y_3, so erhält man eine Differentialgleichung zwischen y_1 und y_2, die durch zwei Quadraturen erledigt wird.

23. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $(m > 4)$ die Gruppe

$$p\quad q\quad xq\quad yq\quad xp\quad yp,$$

so besitzt sie die Form

$$\Omega\left(\varphi_1\,\varphi_2\,\frac{d\varphi_2}{d\varphi_1}\,\cdots\,\frac{d^{m-6}\varphi_2}{d\varphi_1^{m-6}}\right) = 0$$

wo

$$\varphi_1 = \varrho_2^{-\frac{3}{2}}\varrho_3,\quad \varphi_2 = \varrho_2^{-2}\varrho_4$$

und

$$\varrho_2 = 3y_2y_4 - 5y_3^2,$$

$$\varrho_3 = 3y_2^2y_5 - 15y_2y_3y_4 + \frac{40}{3}\,y_3^3,$$

$$\varrho_4 = 3y_2^3y_6 - 21y_2^2y_3y_5 + 35y_2y_3^2y_4 - \frac{35}{3}\,y_3^4.$$

Wir integriren zuerst die Gleichung $(m-6)^{\text{ter}}$ Ordnung $\Omega = 0$, und erhalten hierdurch eine Relation mit $m-6$ Constanten*)

*) Wir betrachten im Texte nicht die unmittelbar integrable Gleichung $\varphi_1 = \text{Const.}$

$$\varphi_2 = F(\varphi_1) \quad \text{oder} \quad y_6 = W(y_1 \cdots y_5),$$

die selbst eine Differentialgleichung sechster Ordnung darstellt. Wir reduciren dieselbe durch Quadratur auf eine Gleichung fünfter Ordnung, die nach den Regeln der letzten Nummer vermöge einer Riccatischen Gleichung 1. O. erledigt werden kann.

Die bekannte sechsgliedrige Gruppe enthält nämlich die invariante fünfgliedrige Untergruppe

$$p \quad q \quad xq \quad xp - yq \quad yp.$$

Daher bildet die mit der vorgelegten Gleichung $y_6 = W$ äquivalente lineare partielle Differentialgleichung

$$Af = \frac{\partial f}{\partial x} + y_1 \frac{\partial f}{\partial y} + \cdots + y_5 \frac{\partial f}{\partial y_4} + W \frac{\partial f}{\partial y_5}$$

zusammen mit den fünf Gleichungen

$$B_1 f = \frac{\partial f}{\partial x} = 0, \quad B_2 f = \frac{\partial f}{\partial y} = 0, \quad B_3 f = x \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial y_1} = 0$$

$$B_4 f = x \frac{\partial f}{\partial x} - y \frac{\partial f}{\partial y} - 2y_1 \frac{\partial f}{\partial y_1} - \cdots - 5y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5} = 0$$

$$B_5 f = y \frac{\partial f}{\partial x} - y_1^2 \frac{\partial f}{\partial y_1} - \cdots = 0$$

ein vollständiges System mit der bekannten infinitesimalen Transformation

$$B_6 f = x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} - y_2 \frac{\partial f}{\partial y_2} - \cdots - 4y_5 \frac{\partial f}{\partial y_5}.$$

Daher liefern meine alten Theorien durch eine Quadratur ein Integral

$$U(xy \cdots y_5) = \text{Const.}$$

des vollständigen Systems. Nun aber ist $U = \text{Const.}$ eine Differentialgleichung fünfter Ordnung, welche die Gruppe $p \; q \; xq \; xp - yq \; yp$ gestattet, und welche somit nach den Regeln der vorangehenden Nummer vermöge einer Riccatischen Gleichung 1. O. integrirt wird.

Um die hiermit scizzirten Rechnungen in einfachster Weise durchzuführen, ist es zweckmässig, folgendermassen zu verfahren. Wir führen in $\varphi_2 = F(\varphi_1)$ neue Variabeln ein, nämlich

$$\alpha_1 = y_2^{-\frac{8}{3}} \varrho_2 = 3y_2^{-\frac{5}{3}} y_4 - 5y_2^{-\frac{8}{3}} y_3^2$$

$$\alpha_2 = y_2^{-4} \varrho_3 = 3y_2^{-2} y_5 - 15 y_2^{-3} y_3 y_4 + \frac{40}{3} y_2^{-4} y_3^3.$$

Dann wird

$$\frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} = \frac{y_2^{-5} \varrho_4 - \frac{5}{3} \alpha_1^2 y_2^{\frac{1}{3}}}{y_2^{\frac{1}{3}} \alpha_2} = \frac{\alpha_1^2 \left(\varphi_2 - \frac{5}{3}\right)}{\alpha_2}$$

und

$$\varphi_1 = \varrho_2^{-\frac{3}{2}} \varrho_3 = \alpha_1^{-\frac{3}{2}} \alpha_2,$$

woraus

$$\varphi_2 = \frac{\alpha_2}{\alpha_1^2} \frac{d\alpha_2}{d\alpha_1} + \frac{5}{3} = F\left(\alpha_1^{-\frac{3}{2}} \alpha_2\right).$$

Die hiermit gefundene Differentialgleichung 1. O. zwischen α_1 und α_2 gestattet die infinitesimale Transformation

$$x \frac{\partial f}{\partial x} + y \frac{\partial f}{\partial y} = -\frac{4}{3} \alpha_1 \frac{\partial f}{\partial \alpha_1} - 2\alpha_2 \frac{\partial f}{\partial \alpha_2}$$

und wird daher durch eine Quadratur integrirt. Die hervorgehende Relation zwischen α_1 und α_2 ist eine Differentialgleichung fünfter Ordnung, die nach den Regeln der vorangehenden Nummer vermöge einer Riccatischen Gleichung 1. O. erledigt wird.

24. Gestattet eine Differentialgleichung m^{ter} Ordnung $(m > 5)$ die allgemeine projective Gruppe

$$p,\ q,\ xq,\ yq,\ xp,\ yp,\ x^2p + xyq,\ xyp + y^2q$$

so ist sie, wenn wir die Symbole ϱ_k, σ, Φ_1 und Φ_2 in derselben Bedeutung wie in Nummer 3 des ersten Abschnittes brauchen, reducibel auf die Form

$$\Omega\left(\Phi_1 \Phi_2 \frac{d\Phi_2}{d\Phi_1} \cdots \frac{d^{m-8}\Phi_2}{d\Phi_1^{m-8}}\right).$$

Durch Integration dieser Gleichung $(m-8)^{\text{ter}}$ Ordnung erhalten wir eine Differentialgleichung achter Ordnung

$$\Phi_2 = F(\Phi_1),$$

die wir jetzt in Uebereinstimmung mit meinen alten allgemeinen Integrationstheorien auf eine Gleichung zweiter Ordnung*) reduciren werden. Da nämlich die allgemeine achtgliedrige projective Gruppe sechsgliedrige Untergruppen (dagegen keine siebengliedrige Untergruppe) enthält, so ist es nach mir möglich, zwei*) Integralgleichungen von $\Phi_2 = F(\Phi_1)$ durch Integration einer Gleichung zweiter Ordnung herzuleiten. Aus diesen beiden Integralen findet man dann nach meinen allgemeinen Regeln neue durch *Differentiation*, und zwar findet man in dieser Weise alle, da die achtgliedrige Gruppe keine invariante Untergruppe enthält.

Um die Rechnungen in einfachster Weise durchzuführen, ist es zweckmässig, neue Variabeln einzuführen und zwar Φ_1 und die Grössen

$$A = \varrho_2^{-\frac{3}{2}} \varrho_3, \quad B = \varrho_2^{-2} \varrho_4,$$

*) Nach einer neueren Bemerkung von mir, die ich der Gesellschaft der Wissenschaften in Christiania im Septbr. 1882 mittheilte, genügt es sogar, *ein* Integral dieser Gleichung 2. O. aufzufinden.

(wir gebrauchen wie schon gesagt die Bezeichnungen der Nummer 3 des ersten Abschnittes). Wir berechnen die Differentialquotienten von A, B und Φ_1 hinsichtlich x und finden darnach durch Division die Differentialquotienten von A und B hinsichtlich Φ_1. Zur Ausführung dieser Rechnung bestimmen wir zuerst die nachstehenden Werthe der Differentialquotienten der Grössen ϱ_k hinsichtlich x:

$$y_2\varrho_2' = \varrho_3 + \frac{10}{3}\, y_3\varrho_2,$$

$$y_2\varrho_3' = \varrho_4 - \frac{5}{3}\,\varrho_2^2 + 5y_3\varrho_3,$$

$$y_2\varrho_4' = \frac{1}{3}\,\varrho_5 - \frac{8}{3}\,\varrho_2\varrho_3 + \frac{20}{3}\, y_3\varrho_4,$$

$$y_2\varrho_5' = \frac{1}{3}\,\varrho_6 - \frac{35}{3}\,\varrho_2\varrho_4 + \frac{25}{3}\, y_3\varrho_5.$$

Folglich wird

$$\frac{dA}{dx} = \frac{B - \frac{5}{3} - \frac{3}{2}\,A^2}{y_2\varrho_2^{-\frac{1}{2}}};$$

$$\frac{dB}{dx} = \frac{\Phi_1 A^{\frac{5}{3}} + 19A - 12AB + 7\left(B - \frac{5}{3}\right)^2 A^{-1}}{6y_2\varrho_2^{-\frac{1}{2}}},$$

$$\frac{d\Phi_1}{dx} = \frac{\varrho_3\sigma' - \frac{8}{3}\,\sigma\varrho_3'}{\varrho_3^{\frac{11}{3}}} = \frac{\frac{2}{3}\,\Phi_2 - 35}{y_2\varrho_3^{-\frac{1}{3}}}$$

und

$$\frac{dA}{d\Phi_1} = \frac{\left(B - \frac{5}{3}\right)A^{-\frac{1}{3}} - \frac{3}{2}\,A^{-\frac{5}{3}}}{\frac{2}{3}\,\Phi_2 - 35},$$

$$\frac{dB}{d\Phi_1} = \frac{\Phi_1 A^{\frac{4}{3}} + 19A^{\frac{2}{3}} - 12A^{\frac{2}{3}}B + 7\left(B - \frac{5}{3}\right)^2 A^{-\frac{4}{3}}}{6\left(\frac{2}{3}\,\Phi_2 - 35\right)}.$$

Da Φ_2 eine gegebene Function von Φ_1 darstellt, so kennen wir hiermit ein gewöhnliches simultanes System zwischen A, B und Φ_1, das offenbar einer Differentialgleichung zweiter Ordnung äquivalent ist.

Unser simultanes System erhält durch die Substitution

$$\alpha = A^{-\frac{4}{3}}\left(B - \frac{5}{3}\right),$$

$$\beta = A^{-\frac{8}{3}}\left(B - \frac{5}{3}\right)^2 - A^{-\frac{2}{3}}$$

die bemerkenswerthe Form

$$(L)\qquad \begin{cases} \dfrac{d\alpha}{d\Phi_1} = \dfrac{\Phi_1 - 2\alpha^2 + \beta}{4\Phi_2 - 210} \\ \dfrac{d\beta}{d\Phi_1} = \dfrac{2\Phi_1\alpha - 2\alpha\beta - 6}{4\Phi_2 - 210} \end{cases} \text{*)}.$$

Setzt man endlich

$$\alpha = \frac{x_1}{x_3}, \quad \beta = \frac{x_2}{x_3}$$

$$\frac{dx_3}{d\Phi_1} = \frac{2x_1}{4\Phi_2 - 210},$$

so erhält unser simultanes System die *lineare* Form

$$\frac{dx_1}{\Phi_1 x_3 + x_2} = \frac{dx_2}{2\Phi_1 x_1 - 6x_3} = \frac{dx_3}{2x_1} = \frac{d\Phi_1}{4\Phi_2 - 210}$$

und kann daher, wenn man es vorzieht, durch eine äquivalente lineare Differentialgleichung 3. O. ersetzt werden.

Kennt man die Lösungen W_1, W_2 des Systems (L), so ist nach meinem früher citirten Satze die Integration von $\Phi_2 = F(\Phi_1)$ als geleistet zu betrachten. Dies sieht man auch so ein: Die Gleichungen $W_1 = a$, $W_2 = b$ mit zwei bestimmten Constanten geben ∞^6 Integralcurven, deren Inbegriff alle projective Transformationen gestattet, bei denen die unendlich entfernte Gerade ihre Lage behält. Man führe jetzt durch eine projective Transformation diese Gerade in eine *neue* Lage g_i über. Gleichzeitig erhalten W_1 und W_2 die Werthe $W_1^{(i)}$ $W_2^{(i)}$. Wählt man nun vier Geraden $g_1\ g_2\ g_3\ g_4$, so bestimmen die acht Gleichungen

$$W_1^{(i)} = a_i, \quad W_2^{(i)} = b_i \qquad (i = 1\ 2\ 3\ 4)$$

mit acht bestimmten Constanten eine Schaar von Integralcurven, deren Inbegriff alle projective Transformationen gestattet, bei denen $g_1\ g_2\ g_3\ g_4$ invariant bleiben. Haben daher unsere vier Geraden eine *allgemeine* Lage, so geben die acht Gleichungen eine *einzige* Integralcurve, sodass die Integration geleistet ist.

Aus meinen 1874 gegebenen allgemeinen Integrationstheorien folgt, wie schon gesagt, als Corollar, dass eine Gleichung m^{ter} Ordnung, welche die allgemeine projective Gruppe gestattet, vermöge zweier Hülfsgleichungen von $(m-8)^{\text{ter}}$ und zweiter Ordnung integrirt wird. Dass die Hülfsgleichung zweiter Ordnung mit einer linearen Gleichung 3. O. äquivalent ist, bemerkte *Halphen* in der Sitzung vom 3. Novbr. 1882 der société mathématique.

---

*) Interpretirt man α und β als Cartesische Coordinaten in einer Ebene, Φ_1 als die Zeit, so definiren die Gleichungen (L) eine mit der Zeit variirende projective und infinitesimale Transformation der besprochenen Ebene.

Ist jetzt eine beliebige Gleichung $f(x\, y\, y_1 \cdots) = 0$ mit einer bekannten Gruppe $B_1 f \cdots B_r f$ vorgelegt, so bestimmt man zuerst nach den Regeln des ersten Abschnittes die canonische Form der Gruppe, und bringt sie darnach auf diese Form. Hiernach verfährt man nach den Regeln dieses Abschnittes. Ich discutire später näher die Fälle der canonischen Formen q; $q\; yq$; $q\; yq\; y^2q$.

Im nächsten Abschnitte zeige ich, wie man die Gruppe einer Gleichung in einfachster Weise bestimmt.

März 1883.

Die vorstehende Abhandlung erschien im Jahre 1883 im norwegischen Archiv. *Sie ist also älter als Sylvesters Untersuchungen über Reciprocanten.* Ebenso ist meine in diesen Annalen Bd. XXIV, 1884 gedruckte Arbeit über Differentialinvarianten älter als die genannten Sylvester'schen Publicationen und die sich daran anschliessenden Untersuchungen.

Juli 1888.

Sophus Lie.