Zur Theorie der Maxima und Minima einfacher Integrale mit bestimmten Integrationsgrenzen.

Von

J. W. LINDEBERG in Helsingfors.

1. Es sei 0 ein Punkt auf einer Lagrange'schen Kurve C, die dem Problem das Integral

$$(1) \qquad \int F(x, y, y')\, dx \qquad \left(y' = \frac{dy}{dx}\right)$$

zu einem Extremum zu machen, entspricht. Ferner sei 1 der zu 0 konjugierte Punkt auf C, 2 ein dritter Punkt dieser Kurve und C_{02} das zwischen den Punkten 0 und 2 fallende Stück derselben. Schließlich werde angenommen die Funktion $F_{y'y'} = \frac{\partial^2 F}{\partial y'^2}(x, y, y')$ habe auf C_{02}, inklusive die Grenzen, ein festes Vorzeichen ohne zu verschwinden. Wenn der Punkt 2 zwischen 0 und 1 fällt, gibt dann bekanntlich der Bogen C_{02}, im Vergleich mit allen Kurven deren Endpunkte 0 und 2 sind, und die einer gewissen engeren Nachbarschaft desselben angehören, ein Extremum des Integrals (1). Wenn der Punkt 2 mit 1 zusammenfällt, gibt derselbe im allgemeinen nicht mehr ein Extremum und wenn der Bogen C_{02} über 1 hinausreicht, so findet das Extremum niemals statt. Das Aufhören des Extremums in diesem letzten Falle wurde zuerst von Weierstraß mit Hilfe der Theorie der zweiten Variation streng nachgewiesen, und ganz neulich hat Kneser*) einen neuen Beweis dafür gegeben, der auch den Fall, wo der Punkt 2 mit 1 zusammenfällt, erledigt. Der Beweis von Kneser ist sehr einfach, erfordert aber daß von dem Punkte 1 ein Zweig der Enveloppe der durch den Punkt 0 gehenden Schar von Lagrange'schen Kurven in der Richtung von 1 nach 0 ausgeht, und schließt somit den Fall aus, wo die Enveloppe in 1 einen Rückkehrpunkt hat und die beiden Zweige derselben die zu der Richtung von 1 nach 0 entgegengesetzte Richtung haben.

*) Kneser, Zur Variationsrechnung. Mathematische Annalen Bd. 50.

Das Ziel der vorliegenden Untersuchung ist zu zeigen wie man durch Verfolgung des von Kneser eingeschlagenen Weges die Frage ob und wann das Extremum aufhört ohne die zweite Variation in Betracht zu nehmen vollständig lösen kann. Aus dieser Untersuchung wird auch hervorgehen daß, obgleich ein Bogen von C der in 0 anfängt und über 1 hinausreicht niemals ein Extremum ergibt, doch verschiedene Fälle vorkommen können, wenn man auf die Möglichkeit Rücksicht nimmt, Punkte von C außerhalb C_{01} mit 0 vermittels Kurven zu verbinden, die wirklich ein Extremum ergeben.

Die Voraussetzungen, die der Untersuchung zu Grunde liegen, sind folgende:

1) Die Funktion $F(x, y, y')$ ist in der Umgebung jedes in Betracht kommenden Wertsystems von x, y und y' eine eindeutige reguläre analytische Funktion.

2) Die Ableitung $F_{y'y'}(x, y, y')$ hat auf jedem in Frage kommenden Bogen von C ein konstantes Vorzeichen ohne zu verschwinden.

3) Jedes Stück von C, das in Betracht genommen wird, definiert y als eine eindeutige Funktion von x, deren Ableitung niemals unendlich wird.

Da es sich hauptsächlich um einen Beweis für das Aufhören des Extremums handeln wird, und das starke Extremum niemals eintreten kann ohne daß das schwache vorliegt, so werden wir nur diese letzte Art von Extremum berücksichtigen. Schließlich wollen wir, um die Redeweise abzukürzen, nur das Minimum in Betracht nehmen, und setzen also voraus, die Funktion $F_{y'y'}(x, y, y')$ sei immer positiv.

2. Es seien x_0, y_0 und x_1, y_1 die Koordinaten der Punkte 0 und 1 $(x_0 < x_1)$, und $y = y(x, \lambda)$ die Gleichung der durch den Punkt 0 gehenden Schar von Lagrange'schen Kurven. Hierbei nehmen wir an λ sei so gewählt, daß $\lambda = \frac{\partial y}{\partial x}(x_0, \lambda)$, und mit λ_0 bezeichnen wir den Wert von λ der der Kurve C entspricht. Die Funktion $y(x, \lambda)$ ist dann, auf Grund der über die Funktion $F(x, y, y')$ und ihre zweite Ableitung nach y' gemachten Voraussetzungen, in der Umgebung jedes Wertsystems $x_0 \leq x \leq x_1$, $\lambda = \lambda_0$ eine reguläre analytische Funktion ihrer Argumente und man hat

$$\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x_0, \lambda_0) = 0; \qquad \frac{\partial y}{\partial \lambda}(x_1, \lambda_0) = 0.$$

Die Ableitung $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)$ behält ferner im Intervalle $x_0 < x < x_1$ dasselbe Vorzeichen ohne zu verschwinden, und zwar wird sie, zufolge der über λ gemachten Voraussetzung, positiv. Hieraus folgt, daß die Größe $\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial x}(x_1, \lambda_0)$, die nicht Null sein kann*), negativ ist.

*) Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung 24.

Es sei noch $\frac{\partial^n y}{\partial \lambda^n}(x, \lambda)$ die erste Ableitung von $y(x, \lambda)$ nach λ, die für $x = x_1$, $\lambda = \lambda_0$ nicht verschwindet, und es werde gesetzt

$$\frac{\partial y}{\partial x}(x_1, \lambda_0) = M; \quad \frac{1}{(n-1)!}\frac{\partial^n y}{\partial \lambda^n}(x_1, \lambda_0) = N; \quad 2\frac{\partial^2 y}{\partial \lambda \partial x}(x_1, \lambda_0) = -L^2.$$

Man hat dann

$$\begin{aligned} y(x, \lambda) - y(x_1, \lambda_0) = {} & M(x - x_1) - L^2(x - x_1)(\lambda - \lambda_0) \\ & + \frac{N}{n}(\lambda - \lambda_0)^n + R_1(x - x_1, \lambda - \lambda_0), \end{aligned} \tag{2}$$

wo $R_1(x - x_1, \lambda - \lambda_0)$ eine nach Potenzen von $x - x_1$ und $\lambda - \lambda_0$ fortschreitende Reihe bedeutet, wo die Glieder, die nur $x - x_1$ oder nur $\lambda - \lambda_0$ enthalten, von höherem Grade als resp. der ersten und der n^{ten} und die übrigen Glieder von höherem Grade als der zweiten sind. Die Reihenentwicklung von $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ in der Umgebung von $x = x_1$, $\lambda = \lambda_0$ fängt also mit den Gliedern $-L^2(x - x_1) + N(\lambda - \lambda_0)^{n-1}$ an, und die Gleichung $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda) = 0$ gibt daher, nach $x - x_1$ aufgelöst, das Resultat

$$x - x_1 = \frac{N}{L^2}(\lambda - \lambda_0)^{n-1} + R_2(\lambda - \lambda_0), \tag{3}$$

wo $R_2(\lambda - \lambda_0)$ eine nach Potenzen von $\lambda - \lambda_0$ fortschreitende Reihe bedeutet, die nur Glieder von höherer Ordnung als der $n - 1^{\text{ten}}$ enthält. Diese Gleichung stellt, zusammen mit (2), die Enveloppe der Kurvenschar $y = y(x, \lambda)$ dar. Wenn wir für $x - x_1$ den Ausdruck (3) substituieren, nimmt (2) die einfachere Form

$$y - y_1 = \frac{MN}{L^2}(\lambda - \lambda_0)^{n-1} + R_3(\lambda - \lambda_0), \tag{4}$$

wo $R_3(\lambda - \lambda_0)$ dieselbe Bedeutung hat wie $R_2(\lambda - \lambda_0)$, und die Enveloppe wird somit auch durch die zwei Gleichungen (3) und (4) repräsentiert.

Wir wenden uns zunächst zu einer Untersuchung der Gestalt der Enveloppe und des Verlaufes der Kurven $y = y(x, \lambda)$ in der Umgebung des Punktes 1. Hierbei unterscheiden wir die folgenden vier Fälle:

(a) n ist gerade,
(b) n ist ungerade und N positiv,
(c) n ist ungerade und N negativ,
(d) n ist unendlich.

Im Falle (a) kann man, da die Größe N nach ihrer Definition von Null verschieden ist, aus den Gleichungen (3) und (4) unmittelbar schließen, daß die Enveloppe in 1 einen gewöhnlichen Punkt hat. Um zu untersuchen wie die Kurven der Schar $y = y(x, \lambda)$ im Verhältnis zu der Enveloppe verlaufen, verfahren wir wie folgt.

Es sei λ' ein Wert von λ aus der Umgebung von λ_0, und mit x' werde die Abszisse des Punktes bezeichnet, wo die Kurve $y = y(x, \lambda')$ die Enveloppe berührt. Beachten wir, daß nach (3)

$$x' - x_1 = \frac{N}{L^2}(\lambda' - \lambda_0)^{n-1} + R_2(\lambda' - \lambda_0)$$

und bilden wir mit Hilfe der Gleichung (2) die Differenz $y(x', \lambda') - y(x', \lambda_0)$, so kommt

$$(5) \qquad y(x', \lambda') - y(x', \lambda_0) = \left(\frac{N}{n} - N\right)(\lambda' - \lambda_0)^n + R_4(\lambda' - \lambda_0),$$

wo $R_4(\lambda' - \lambda_0)$ eine nach Potenzen von $\lambda' - \lambda_0$ fortschreitende Reihe bedeutet, die nur Glieder von höherem Grade als der n^{ten} enthält. Die rechte Seite dieser Gleichung behält nun für jedes λ' aus der Umgebung von λ_0 ein konstantes Vorzeichen, das nur von dem Zeichen von N abhängt. Wenn beobachtet wird, daß $y(x', \lambda')$ die Ordinate des Punktes der Enveloppe ist, deren Abszisse x' ist, so folgt hieraus, daß die Kurve C in der Umgebung ihres Berührungspunktes mit der Enveloppe vollständig entweder oberhalb oder unterhalb derselben fällt. Jedenfalls schneidet also die Kurve C die Enveloppe im Punkte 1 nicht. Was die zu C benachbarten Kurven der Schar $y = y(x, \lambda)$ betrifft, so verlaufen sie offenbar in der Umgebung ihrer Berührungspunkte mit der Enveloppe ähnlich wie die Kurve C.

Es sei jetzt, immer unter der Voraussetzung (a), ε eine positive Konstante und T_ε die Gesamtheit der Bogen, die zu den Kurven der Schar $y = y(x, \lambda)$ gehören, für welche $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$, und die zwischen dem Punkte 0 und den Berührungspunkten dieser Kurven mit der Enveloppe fallen. Wir wollen zeigen, daß diese Gesamtheit, wenn ε hinreichend klein ist, ein gewisses Gebiet der Ebene vollständig aber einfach bedeckt.

Zunächst können wir offenbar zwei positive Größen ε_0 und ε_1 so feststellen, daß die Ableitung $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda)$ im Gebiete $|x - x_0| < \varepsilon_0$, $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_0$ nur für $x = x_0$, $\lambda = \lambda_0$ und im Gebiete $|x - x_1| < \varepsilon_1$, $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_1$ nur für Wertsysteme von x und λ, die der Gleichung (3) genügen, Null wird. Da diese Ableitung eine in der Umgebung der Wertsysteme $x_0 \leq x \leq x_1$, $\lambda = \lambda_0$ stetige Funktion ihrer Argumente ist und $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(x, \lambda_0)$ im Intervalle $x_0 + \varepsilon_0 \leq x \leq x_1 - \varepsilon_1$ nicht Null wird, so ist es ferner möglich eine positive Größe ε_2 so klein zu wählen, daß die genannte Ableitung im Gebiete $x_0 + \varepsilon_0 \leq x \leq x_1 - \varepsilon_1$, $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_2$ nicht verschwindet. Schließlich ist, da die Voraussetzung (a) unserer Betrachtung zu Grunde liegt, die Existenz einer solchen positiven Größe ε_3 gesichert, daß die durch die Gleichung (3) definierte Funktion x von λ im Intervalle $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon_3$

entweder beständig zunehmend oder beständig abnehmend ist. Wenn nun ε kleiner ist als die kleinste der Größen ε_0, ε_1, ε_2 und ε_3, so geht in folgender Weise hervor, daß die Gesamtheit T_ε ein gewisses Gebiet der Ebene genau einfach bedeckt.

Es seien λ' und λ'' $(\lambda' < \lambda'')$ zwei Werte von λ aus dem Intervalle $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ und mit x' und x'' mögen die Abszissen der Punkte bezeichnet werden, wo die entsprechenden Kurven der Schar $y = y(x, \lambda)$ die Enveloppe berühren. Aus den Feststellungen über ε folgt, daß die Kurven, für welche $\lambda' < \lambda < \lambda''$, die Enveloppe in Punkten berühren, deren Abszissen zwischen x' und x'' fallen, und weiter, daß, wenn ξ größer als x_0 aber kleiner als x' und x'' ist, die Ableitung $\frac{\partial y}{\partial \lambda}(\xi, \lambda)$ im Intervalle $\lambda' < \lambda < \lambda''$ wesentlich positiv ist. Die Werte der Größen $y(\xi, \lambda')$ und $y(\xi, \lambda'')$ können daher nicht gleich sein, und also können die Bogen der Schar T_ε, die zu den Werten λ' und λ'' von λ gehören, einander nicht schneiden. Da λ' und λ'' beliebige Werte von λ aus dem Intervalle $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ sind, so folgt hieraus, daß keine zwei Bogen der Gesamtheit T_ε einander schneiden können.

Insbesondere schneiden die Teile der Kurven $y = y(x, \lambda_0 + \varepsilon)$ und $y = y(x, \lambda_0 - \varepsilon)$, die zwischen dem Punkte 0 und den Berührungspunkten derselben mit der Enveloppe fallen, weder einander noch den Bogen C_{01}. Wir bezeichnen das Gebiet der Ebene, das von diesen Kurvenstücken und der Enveloppe begrenzt wird, mit S_ε, und behaupten, daß durch jeden Punkt dieses Gebietes ein Bogen der Gesamtheit T_ε geht.

Wenn ξ, η ein Punkt dieses Gebietes ist, so schneidet die Gerade $x = \xi$ die Begrenzung desselben in zwei Punkten, von denen der eine immer auf eine der begrenzenden Lagrange'schen Kurven fällt, der zweite entweder auf die andere Lagrange'sche Kurve oder auf die Enveloppe. Im ersten Falle sind die Ordinaten der Schnittpunkte $y(\xi, \lambda_0 + \varepsilon)$ und $y(\xi, \lambda_0 - \varepsilon)$, und da η zwischen diesen beiden Werten liegt, so muß es, da die Funktion $y(\xi, \lambda)$ im Intervalle $|\lambda - \lambda_0| < \varepsilon$ stetig ist, einen Wert von λ in diesem Intervalle geben, für welchen $y(\xi, \lambda) = \eta$. Da die entsprechende Kurve $y = y(x, \lambda)$ die Enveloppe in einem Punkte berührt, deren Abszisse größer als ξ ist, so liegt also der Punkt ξ, η auf der Strecke dieser Kurve, die zu der Gesamtheit T_ε gehört. Im zweiten Falle sei λ' der Wert von λ der zu der Kurve der Schar $y = y(x, \lambda)$ gehört, die die Enveloppe in ihrem Schnittpunkte mit der Geraden $x = \xi$ berührt. Die Größe λ' liegt zwischen $\lambda_0 + \varepsilon$ und $\lambda_0 - \varepsilon$ und es gibt, je nachdem der zweite Schnittpunkt zu der Kurve $y = y(x, \lambda_0 + \varepsilon)$ oder $y = y(x, \lambda_0 - \varepsilon)$ gehört, entweder zwischen λ' und $\lambda_0 + \varepsilon$ oder zwischen λ' und $\lambda_0 - \varepsilon$ einen Wert von λ, für welchen $y(\xi, \lambda) = \eta$. Hieraus folgt, gleich wie oben, daß auch in diesem Falle der betrachtete Punkt auf einem Bogen der Gesamtheit T_ε liegt, und unsere Behauptung ist hiermit bewiesen.

Da nun keine zwei Bogen der Schar T_ε einander schneiden können und durch jeden Punkt des Gebietes S_ε ein solcher Bogen geht, bedeckt diese Schar also vollständig aber einfach das genannte Gebiet.

Nach dem vorigen wissen wir, daß die Kurve C die Enveloppe im Punkte 1 nicht schneidet. Sie tritt also nach der Berührung mit derselben wieder in das Gebiet S_ε ein (Fig. 1), und wir können somit behaupten, daß jeder Punkt 2 von C, der in der Nähe von 1 außerhalb C_{01} liegt, mit 0 vermittels eines Bogens der Gesamtheit T_ε verbunden werden kann. Man kann auch bemerken, daß dieser Bogen sich unendlich nahe an C schließt, wenn der Punkt 2 gegen 1 rückt.

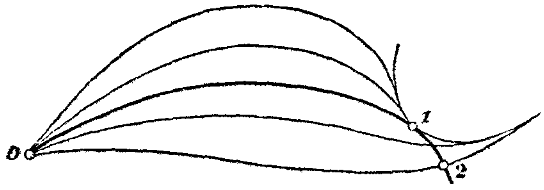

Fig. 1.

Im Falle (b) folgt aus den Gleichungen (3) und (4), daß die Enveloppe in 1 einen Rückkehrpunkt hat, wovon die beiden Zweige nach rechts ausgehen. Die Gleichung

$$(6)\qquad \begin{aligned} &y(x,\lambda)-y(x,\lambda_0)\\ &\quad=(\lambda-\lambda_0)\left\{-L^2(x-x_1)+\frac{N}{n}(\lambda-\lambda_0)^{n-1}+R_5(\lambda-\lambda_0,x-x_1)\right\},\end{aligned}$$

die unmittelbar aus (2) folgt und wo $R_5(x-x_1,\lambda-\lambda_0)$ eine nach Potenzen von $x-x_1$ und $\lambda-\lambda_0$ fortschreitende Reihe bedeutet, in welcher die von $x-x_1$ freien Glieder von höherem Grade als n und die übrigen Glieder von höherem Grade als 1 sind, zeigt uns in diesem Falle zunächst, daß die Schnittpunkte der Geraden $x=x_1$ mit den Kurven $y=y(x,\lambda)$, $\lambda>\lambda_0$ oberhalb C liegen, während die Schnittpunkte dieser Geraden mit der andern Hälfte der Kurven $y=y(x,\lambda)$ sich unterhalb C befinden. Ferner folgt aus (5), daß eine Kurve der Schar $y=y(x,\lambda)$, die einem Werte λ' von λ entspricht, der größer als λ_0 ist, die Enveloppe unterhalb C berührt. Sie schneidet also erst die Kurve C außerhalb C_{01} und berührt nachher die Enveloppe (Fig. 2). Ebenso sieht man, daß, wenn $\lambda'<\lambda_0$, die entsprechende Kurve der Schar $y=y(x,\lambda)$ erst die Kurve C außerhalb C_{01} schneidet und nachher die Enveloppe oberhalb C berührt.

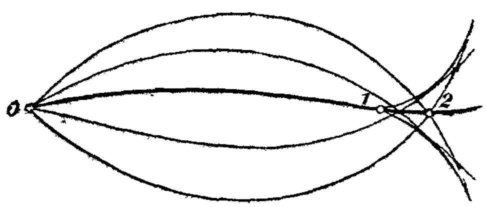

Fig. 2.

Bezeichnen wir jetzt mit $T_{+\varepsilon}$ die Gesamtheit der Bogen, die zu den Kurven der Schar $y=y(x,\lambda)$ für welche $\lambda_0<\lambda<\lambda_0+\varepsilon$ gehören und vom Punkte 0 bis zu den Berührungspunkten dieser Kurven mit der Enveloppe gerechnet sind, so gelten offenbar für diese Gesamtheit, wenn ε hinreichend klein ist, alle im Falle (a) hinsichtlich der Gesamtheit T_ε gemachten Schlüsse. Ebenso gelten diese Schlüsse für die Gesamtheit $T_{-\varepsilon}$ die aus den Kurven $y = y(x, \lambda)$ für welche $\lambda_0 - \varepsilon < \lambda < \lambda_0$ ähnlich wie $T_{+\varepsilon}$ aus der andern Hälfte derselben hervorgeht. Die beiden Scharen $T_{+\varepsilon}$ und $T_{-\varepsilon}$ bedecken also gewisse Gebiete der Ebene genau einfach, und es geht durch jeden Punkt 2 von C, der in der Nähe von 1 außerhalb C_{01} liegt, sowohl ein Bogen von $T_{+\varepsilon}$ als ein Bogen von $T_{-\varepsilon}$.

Wenn der Fall (c) vorliegt, so hat die Enveloppe wie im vorigen Falle in 1 einen Rückkehrpunkt, die beiden Zweige derselben gehen aber diesmal von diesem Punkte nach links aus. Um zu sehen, ob und wo die Kurven $y = y(x, \lambda)$ die Kurve C schneiden, lösen wir die Gleichung $y(x, \lambda) - y(x, \lambda_0) = 0$ nach $x - x_1$ auf und erhalten dabei, wegen der Gleichung (6), ein Resultat von der Form

$$x - x_1 = \frac{N}{nL^2}(\lambda - \lambda_0)^{n-1} + R_6(\lambda - \lambda_0),$$

wo $R_6(\lambda - \lambda_0)$ nur Glieder in $\lambda - \lambda_0$ von höherem Grade als $n - 1$ enthält. Gehört nun λ einer gewissen Umgebung von λ_0, so sind, da n ungerade und N negativ ist, die zugehörigen Werte von x alle kleiner als x_1. Die entsprechenden Kurven $y = y(x, \lambda)$ schneiden also die Kurve C auf der Strecke C_{01} (Fig. 3), und wir können also behaupten, daß durch die Punkte von C, die außerhalb C_{01} in der Nähe von 1 liegen, keine Kurven der Schar $y = y(x, \lambda)$ für welche $|\lambda - \lambda_0|$ klein ist gehen.

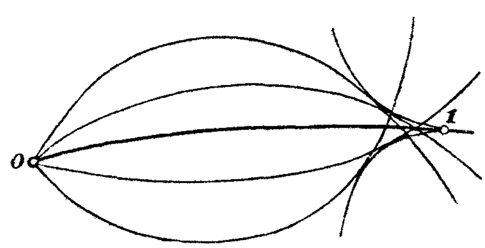

Fig 3.

Im Falle (d) schließlich gehen alle Kurven der Schar $y = y(x, \lambda)$ durch den Punkt 1. Die Punkte aus der Umgebung von 1, die auf C liegen, können also nicht mit 0 vermittels andern Kurven der betrachteten Schar als der Kurve C verbunden werden.

3. Es sei jetzt c ein Bogen einer Kurve der Schar $y = y(x, \lambda)$, der in seiner ganzen Ausdehnung zwischen 0 und dem Berührungspunkte dieser Kurve mit der Enveloppe fällt, und mit T werde eine Schar von Bogen der Kurven $y = y(x, \lambda)$ bezeichnet, die ein das Kurvenstück enthaltendes Gebiet S der Ebene genau einfach bedeckt. Ferner sei $\bar{c}$ eine im Gebiete S verlaufende reguläre Kurve mit denselben Endpunkten wie c und $p(x, y)$ die Funktion von x und y, die in jedem Punkte von S mit der Ableitung des durch denselben gehenden Bogens der Schar T übereinstimmt. Wenn I_c und $I_{\bar{c}}$ die Werte des Integrals (1) über respektive c und $\bar{c}$ erstreckt bedeuten, so hat man dann*)

*) Siehe z. B. Kneser, Lehrbuch der Variationsrechnung 20.

$$(7)\quad I_{\bar{c}}-I_c=\int\limits_{\bar{c}}\left\{F(x,y,y')-F(x,y,p(x,y))-(y'-p(x,y))\frac{\partial F}{\partial y'}(x,y,p(x,y))\right\}dx$$
$$\left(y'=\frac{\partial y}{\partial x}\right),$$

wo das Integral über die Kurve $\bar{c}$ zu erstrecken ist.

Wenn nun der Fall (a) vorliegt und T_ε die Bogengesamtheit ist, die für die Bestimmung der Funktion $p(x, y)$ zu Grunde liegt, so gilt also diese Gleichung zunächst, wenn c ein Stück von C_{01} ist, das keinen der Endpunkte 0 und 1 enthält, und $\bar{c}$ eine reguläre Kurve mit denselben Endpunkten bedeutet, die vollständig im Innern des Gebietes S_ε liegt. Die genannte Gleichung gilt aber noch, wie man ohne Schwierigkeit durch einen Grenzübergang einsieht, wenn man als c den Bogen C_{01} selbst nimmt und als $\bar{c}$ die Kurve, die von 0 bis zu einem Punkte 3 der Enveloppe mit dem diese Punkte verbindenden Bogen der Gesamtheit T_ε, und von 3 bis 1 mit der Enveloppe selbst zusammenfällt. Die Tangente der Kurve $\bar{c}$ fällt aber dann in jedem Punkte mit der Tangente des durch denselben gehenden Bogens der Gesamtheit T_ε zusammen, und die Größe y' erhält also in jedem Punkte von $\bar{c}$ denselben Wert wie $p(x, y)$. Hieraus folgt, daß der Integrand der Gleichung (7) in jedem Punkte verschwindet, und es kommt also

$$I_{\bar{c}} - I_c = 0.$$

Nun ist zu bemerken, daß die Enveloppe in der Umgebung von 1 keine Lagrange'sche Kurve ist; denn durch einen Punkt können nicht zwei Lagrange'sche Kurven mit derselben Tangente gehen, wenn die Ableitung $F_{y'y'}(x, y, y')$ für den von dem Punkte und der Tangente definierten Wertsystem von x, y und y' von Null verschieden ist. Es gibt also in jeder beliebigen noch so eng festgestellten Nachbarschaft des Bogens 3 1 der Enveloppe die Punkte 3 und 1 verbindende Kurven, die dem Integrale (1) kleinere Werte erteilen als dieser Bogen. Hieraus folgt unmittelbar, daß es auch in jeder Nachbarschaft des Bogens C_{01} Kurven gibt, die das Integral (1) kleiner machen als dieser, und hiermit ist bewiesen, daß das Stück C_{01} von C im Falle (a) kein Minimum geben kann.

Ein Stück C_{02} von C, das über 1 hinausreicht, ergibt also auch nicht ein Minimum.

Im § 2 wurde erwähnt, daß jeder Punkt 2 von C, der in der Nähe von 1 außerhalb C_{01} liegt, mit 0 vermittels eines Bogens der Gesamtheit T_ε verbunden werden kann, und daß sich dieser Bogen, den wir mit C'_{02} bezeichnen wollen, unendlich nahe an C schließt, wenn der Punkt 2 gegen 1 rückt. Da nun die Ableitung $F_{y'y'}(x, y, y')$ für jedes, durch ein Element des Bogens C_{02} definierte Wertsystem von x, y und y', positiv ist, so kann man also, indem man den Punkt 2 hinreichend nahe an 1 nimmt, bewirken, daß diese Ableitung auch für alle durch den Bogen $C_{0\,2}'$ definierte Wertsysteme dieser Größen positiv wird. Wenn dies der Fall ist, so gibt $C_{0\,2}'$ im Vergleich mit allen Kurven einer gewissen Nachbarschaft ein Minimum des Integrals (1), denn der Endpunkt dieses Bogens liegt vor dem zum Anfangspunkte konjugierten Punkte der entsprechenden Lagrange'schen Kurve.

Man kann bemerken, daß, wenn 2 hinreichend nahe an 1 liegt, auch die Kurve C_{02} zu den Kurven gehört, im Vergleich mit welchen das Minimum stattfindet. Die Gleichung (7) gilt nämlich noch, wenn man $C_{0\,2}'$ als c und C_{02} als $\bar{c}$ nimmt. Im Intervalle von 0 bis 1 stimmen dann die Werte von y' und $p(x, y)$ überein, und der Integrand der Gleichung (7) verschwindet daher in jedem Punkte dieses Intervalles. Von 1 bis 2 werden dagegen die Werte von y' und $p(x, y)$ verschieden, denn die Bogen der Gesamtheit T_ε schneiden die Kurve C unter nicht verschwindendem Winkel. Beachtet man, daß dieser Winkel in 1 Null ist und sich beim Fortgange längs C stetig verändert, so kann hieraus geschlossen werden, daß, wenn 2 hinreichend nahe an 1 liegt, die genannten Werte zu dem Bereiche gehören, wo der Integrand der Gleichung (7), zufolge der über $F_{y'y'}(x, y, y')$ gemachten Voraussetzung, positiv verbleibt ohne zu verschwinden. Man erhält also $I_{\bar{c}} - I_c > 0$, und hiermit ist die gemachte Behauptung bewiesen.

Im Falle (b) ergibt das Stück C_{01} von C noch ein Minimum. Die Gleichung (7) gilt nämlich dann noch, wenn man als c das Stück C_{01} von C nimmt und als $\bar{c}$ eine beliebige Kurve aus der Nachbarschaft von C_{01}, und der Integrand dieser Gleichung kann nicht längs einer solchen Kurve identisch verschwinden. Wenn der Bogen C_{02} über 1 hinausreicht, kann man in folgender Weise zeigen, daß das Minimum nicht mehr stattfindet.

Es werde angenommen, daß der Punkt 2 so nahe an 1 liegt, daß derselbe mit 0 vermittels eines der Gesamtheit $T_{+\varepsilon}$ zugehörigen Bogens $C_{0\,2}'$ verbunden werden kann. Ist die Funktion $p(x, y)$ so bestimmt, daß sie der Bogenschar $T_{+\varepsilon}$ entspricht, so können wir dieses Bogenstück als c und das Stück C_{02} von C als $\bar{c}$ nehmen. Der Integrand der Gleichung (7) wird dann Null auf der Strecke von 0 bis 1. Wenn 2 hinreichend nahe an 1 liegt, wird derselbe aber von 1 bis 2 positiv und von Null verschieden, denn die Bogen der Schar $T_{+\varepsilon}$ können nicht die Kurve C in ihren Schnittpunkten mit derselben berühren. Der Bogen $C_{0\,2}'$ gibt also dem Integrale (1) einen kleineren Wert als der Bogen C_{02}.

Hiermit ist aber noch nicht bewiesen, daß der Bogen C_{02} nicht ein Minimum ergeben kann, sondern wir müssen noch zeigen, daß es auch in beliebiger Nähe derselben Kurven gibt, die das Integral (1) kleiner machen als dieser Bogen.

Wenn 3 ein Punkt von C bedeutet, der sich zwischen 1 und 2 befindet, folgt unmittelbar aus dem obigen, daß das Kurvenstück, das aus dem die Punkte 0 und 3 verbindenden Bogen der Gesamtheit $T_{+\varepsilon}$ und des Stückes 3 2 von C zusammengesetzt ist, das Integral (1) kleiner macht als der Bogen C_{02}. Indem man den Punkt 3 hinreichend nahe an 1 nimmt, kann man aber bewirken, daß das genannte Kurvenstück einer beliebig eng festgestellten Nachbarschaft der Kurve C_{02} angehört. Es gibt also in jeder solchen Nachbarschaft Kurven mit denselben Endpunkten wie C_{02} die dem Integrale (1) kleinere Werte ergeben als dieser Bogen, und hiermit ist bewiesen, daß derselbe nicht ein Minimum ergibt.

Da es auch einen der Gesamtheit $T_{-\varepsilon}$ zugehörigen Bogen gibt, der durch 2 geht, so kann in dem vorliegenden Falle jeder Punkt von C, der in der Nähe von 1 außerhalb C_{01} fällt, vermittels zweier Bogen mit 0 verbunden werden, die beide im Vergleich mit den Kurven gewisser Nachbarschaften derselben Minima ergeben, und diese Bogen schließen sich beide unendlich nahe an C, wenn der Punkt 2 gegen 1 rückt.

Im Falle (c) kann man, wie im Falle (a) zeigen, daß der Bogen C_{01} und also auch ein Bogen C_{02}, der über 1 hinausreicht, nicht mehr ein Minimum ergibt. Wie schon im vorigen § bemerkt wurde, ist in diesem Falle auch keine in der Nähe von C fallende Kurve der Schar $y = y(x, \lambda)$ vorhanden, die durch einen Punkt 2 von C, der außerhalb C_{01} in der Nähe von 1 liegt, geht. Da keine andere als eine Lagrange'sche Kurve ein Minimum ergeben kann, folgt hieraus, daß es in diesem Falle keinen in der Nähe von C fallenden Bogen gibt, der einen solchen Punkt mit 0 verbindet und ein Minimum des Integrals (1) ergibt.

Wenn schließlich der Fall (d) vorliegt, geben offenbar auf Grund der Gleichung (7), die Teile von den Kurven der Schar $y = y(x, \lambda)$, die zwischen die Punkte 0 und 1 fallen, dem Integrale (1) alle denselben Wert, und der Bogen C_{01} gibt also kein Minimum. Es gibt aber diesmal keine die Punkte 0 und 1 verbindende Kurven, die dem Integrale kleinere Werte erteilen als C_{01}. Liegt der Punkt 2 auf C außerhalb C_{01}, so gibt es auch solche benachbarte Kurven, die das Integral (1) kleiner machen als C_{02}. Eine Kurve, die von 0 bis 1 mit einer zu C benachbarten Kurve der Schar $y = y(x, \lambda)$ zusammenfällt und von 1 bis 2 längs C läuft, erteilt nämlich dem Integrale (1) denselben Wert wie C_{02}, und da diese Kurve in 1 einen Eckpunkt hat, so gibt es in der Nachbarschaft derselben Kurven, die dem Integrale (1) noch kleinere Werte erteilen.

Indem wir uns der Bedeutung von n und N erinnern, können wir jetzt in folgender Weise die erhaltenen Resultate zusammenfassen:

Wenn der Bogen C_{02} über 1 hinausreicht, so gibt derselbe niemals ein Extremum. Der Bogen C_{01} selbst gibt im allgemeinen auch nicht ein Extremum; wenn aber n ungerade und $\frac{\partial^n y}{\partial \lambda^n}(x_1, \lambda_0)$ positiv ist, so findet hiervon eine Ausnahme statt, indem das Extremum noch besteht.

Ist n gerade, so kann jeder Punkt 2 von C, der in der Nähe von 1 außerhalb C_{01} liegt, mit 0 vermittels einer aber nur einer Lagrange'schen Kurve verbunden werden, die in der Nähe von C_{02} verläuft und die im Vergleich mit allen Kurven einer gewissen Nachbarschaft derselben, zu welcher auch der Bogen C_{02} gehört, ein Extremum ergibt. In dem Falle wo n ungerade ist, gibt es zwei solche Bogen, wenn $\frac{\partial^n y}{\partial \lambda^n}(x_1, \lambda_0)$ positiv, aber keinen einzigen, wenn diese Größe negativ ist. Ist n unendlich, so gibt es auch keinen Bogen dieser Art.