

## Zwei dem numerischen Rechnen angehörende Betrachtungen.

Von **Otto Biermann** in Brinn.

Eine ganze Zahl, unter deren Ziffern eine vom Range  $n$  vorkommt, aber keine von höherem Range, heiße bei den folgenden Auseinandersetzungen selbst eine Zahl vom Range  $n$ .

Der Quotient zweier Zahlen  $a$  und  $b$  von den Rangzahlen  $m$  beziehungsweise  $n$  ( $m \geq n$ ) ist vom Range  $m - n - 1$  oder  $m - n$ , je nachdem bei der Gegenüberstellung der ersten  $n + 1$  Ziffern von  $a$ , d. h. derjenigen  $n + 1$  Ziffern, die die höchsten Rangzahlen haben, und der Ziffern von  $b$ , eine größere unter denen von gleicher Ordnungszahl zuerst im Divisor  $b$  vorkommt oder aber das nicht der Fall ist.

$237:28$  ist vom Range  $2 - 1 - 1 = 0$ , weil in  $a$  und  $b$  gleich viel Hunderter und Zehner, aber in  $b$  mehr Einer vorkommen als in  $a$  Zehner; und  $237:23$  ist vom Range  $2 - 1 = 1$ , weil unter den einander entsprechenden ersten zwei Ziffern von  $a$  und  $b$  eine größere im Divisor nicht vorkommt.

Bildet man das Produkt von  $a$  und  $b$ , dividiert dann  $c = ab$  wieder durch  $b$  oder  $a$ , so wird der Quotient  $a$  beziehungsweise  $b$ , also vom Range  $m$  beziehungsweise  $n$ .

Damit das aber eintreten könne, kann das Produkt  $c$  nur vom Range  $m + n$  oder  $m + n + 1$  sein. Man sieht nach dem Früheren, daß das Produkt  $c$  vom Range  $m + n + 1$  ist, wenn bei der Gegenüberstellung der  $m + 1$  oder  $n + 1$  ersten Ziffern in  $c$ , die man nach der symmetrischen Multiplikationsmethode zuerst herstelle, und der Ziffern der Faktoren  $a$  und  $b$ , unter denen von gleicher Ordnungszahl, zuerst eine größere in einem Faktor vorkommt; und  $c$  wird vom Range  $m + n$ , wenn dieses Vorkommnis nicht besteht.

Ist  $a = 715$ ,  $b = 318$ , so lehrt die symmetrische Multiplikationsmethode daß die Ziffer höchsten Ranges in  $ab$  2 ist. Doch weil in  $a$  sowie in  $b$  die erste Ziffer größer ist als 2, so wird der Rang von

$$715 \times 318 \quad 2 + 2 + 1 = 5.$$

Ist aber  $a = 378$ ,  $b = 263$ , so wird die Ziffer höchsten Ranges in  $ab$   $6 + 3 = 9$  und darnach wird das Produkt vom Range  $2 + 2 = 4$ .

Diese Regel mag nun gleich auch in folgender Weise ausgesprochen werden:

Das Produkt zweier ganzer Zahlen  $a$  und  $b$  aus  $p$ , beziehungsweise  $q$ -Ziffern, wo  $p \geq q$  sei, ist eine  $p + q$ -stellige Zahl, wenn unter den Ziffern jedes der Faktoren zuerst eine vorkommt, die größer ist als die entsprechende in dem Produkt, von dem man im ungünstigsten Falle die  $q$ -Ziffern der höchsten Rangzahlen bestimmen wird; in jedem anderen Falle hat das Produkt  $p + q - 1$  Ziffern.

$$87 \times 63 = 5481, \quad 91 \times 11 = 1001, \quad 12 \times 13 = 156.$$

Die angegebene Regel zur Bestimmung des Ranges des Produkts zweier Zahlen ist dann von Bedeutung, wenn das Produkt zweier Dezimalzahlen von den Rangzahlen  $m$  und  $n$  auf eine bestimmte Anzahl von Dezimalstellen genau berechnet werden soll. Man kann in dem Produkt  $m + n + 2$  oder  $m + n + 1$  Ziffern von links ab zählend die Zahl vom Range Null angeben, d. h. den Dezimalpunkt des Produkts bestimmen und dann die weitere Multiplikation so einrichten, daß die genau zu rechnende Dezimalstelle nicht mehr berührt wird.

Soll z. B.  $a = 794 \cdot 5246$  mit  $b = 231 \cdot 6473$  bis auf ein Zehntel genau multipliziert werden, so beachte man zunächst, daß das Produkt vom Range 5 sein wird, und dann bilde man entsprechend dem Gesagten

$$\begin{array}{r} 794 \cdot 52 \ 46 \\ 231 \cdot 64 \ 73 \\ \hline 492 \ 35 \ 869 \\ 1347 \ 02 \ 50 \\ \phantom{1347} 1 \ 11 \ 1 \\ \hline 1840 \ 49 \cdot 469 \end{array}$$

anstatt, daß man wie sonst mit Hilfe der Ungleichung

$$10^{m+n-\lambda} q < \frac{1}{10},$$

wo  $q$  die größere Ziffernsumme der Faktoren bedeutet, (das ist hier 37), erst die Zahl  $\lambda$  bestimmt, die anzeigt, die wievielte Stelle nach der vom höchsten Range in dem Faktor mit der Ziffernsumme  $q$  bei der symmetrischen Multiplikationsmethode benützt werden muß, damit der Fehler kleiner als  $\frac{1}{10}$  wird. Man schreibt die Rechnung in dem früheren Beispiele, wo  $\lambda = 7$  gilt, folgendermaßen:

$$\begin{array}{r}
794\,52\,460 \\
37\,46\,132 \\
\hline
1589\,04\,920 \\
238\,35\,738 \\
7\,94\,524 \\
4\,76\,712 \\
31\,780 \\
5\,558 \\
237 \\
\hline
1840\,49\,469.
\end{array}$$

Von Bedeutung ist die Regel aber auch für die, welche mit dem Rechenschieber Multiplikationen von Dezimalbrüchen ausführen, indem dieser wohl die Ziffern des Produktes aber nicht den Rang gibt. —

Die zweite Betrachtung betrifft die Multiplikation zweier unendlicher Dezimalbrüche  $a$  und  $b$ , die durch

$$\begin{aligned}
a' &= a_0 10^m + a_1 10^{m-1} + \dots + a_\lambda 10^{m-\lambda} \\
b' &= b_0 10^n + b_1 10^{n-1} + \dots + b_\lambda 10^{n-\lambda},
\end{aligned}$$

wo die  $a$  und  $b$  mit Indizes Ziffern sind, so weit genau angegeben seien, daß in

$$\begin{aligned}
a &= a' + \Delta a, \quad \Delta a < 10^{m-\lambda} \\
b &= b' + \Delta b, \quad \Delta b < 10^{n-\lambda}
\end{aligned}$$

ist.

Wenn man bei der symmetrischen Multiplikationsmethode von  $a'$  und  $b'$  nur die Glieder

$$\sum_{\kappa=0}^{\kappa=\lambda} (a_0 b_\kappa + a_1 b_{\kappa-1} + \dots + a_\kappa b_0) 10^{m+n-\kappa}$$

vereinigt, so macht man gegenüber dem wahren Wert von  $a' b'$  einen Fehler

$$< q \cdot 10^{m+n-\lambda}$$

wo jetzt  $q$  die größere der Ziffernsumme von  $a'$  und  $b'$  bezeichnet. Wenn man aber auch  $ab$  näherungsweise durch dieses Aggregat ersetzt, so macht man einen größeren Fehler, von dem gilt, daß er kleiner ist als

$$\begin{aligned}
& q \cdot 10^{m+n-\lambda} + 10^{m+n} \left\{ \left( \frac{a_0}{10^\lambda} + \frac{a_1}{10^{\lambda+1}} + \dots + \frac{a_\lambda}{10^{2\lambda}} \right) + \right. \\
& \quad \left. + \left( \frac{b_0}{10^\lambda} + \frac{b_1}{10^{\lambda+1}} + \dots + \frac{b_\lambda}{10^{2\lambda}} \right) \right\} + 10^{m+n-2\lambda} < \\
& < q \cdot 10^{m+n-\lambda} + 2 \cdot 10^{m+n} \cdot \frac{10-1}{10^\lambda} \cdot \frac{1}{1-\frac{1}{10}} + 10^{m+n-2\lambda}
\end{aligned}$$

so daß wir sagen können, der Fehler wird kleiner als

$$(q + 20) 10^{m+n-2} + 10^{m+n-2\lambda}.$$

Danach muß in gewissen Fällen, wo  $q$  unter einer Potenz von 10 ist, die aber von  $q + 20$  schon erreicht oder überschritten wird, die Rechnung zur Sicherstellung eines vorgegebenen Teiles der Einheit in dem Produkt unendlicher Dezimalbrüche anders vollzogen werden, als es die abgekürzte Multiplikationsvorschrift endlicher Dezimalbrüche besagt.

Gibt man  $\sqrt{38 \cdot 62}$  und  $\sqrt{12 \cdot 38}$  näherungsweise durch 6·21 beziehungsweise 3·51, jedes auf  $\frac{1}{100}$  genau, so berechnet man das Produkt der Näherungswerte bis auf  $\frac{1}{10}$ , indem man bildet:

$$\begin{array}{r} 6 \cdot 21 \\ 3 \cdot 51 \\ \hline 8 \ 69 \\ 13 \ 1 \\ \hline 21 \cdot 79 \end{array}$$

Doch will man das Produkt der Irrationalzahlen auf  $\frac{1}{10}$  genau, so muß man die Tausendstel in den irrationalen Größen aufsuchen, d. i. 4 beziehungsweise 8 und dann bilden:

$$\begin{array}{r} 6 \cdot 214 \\ 3 \cdot 518 \\ \hline 8 \ 697 \\ 13 \ 16 \\ \hline 21 \cdot 857, \end{array}$$

welcher Wert dem wirklichen näher liegt als der frühere.

Daß man nach der entwickelten Regel zur Multiplikation der gegebenen Irrationalzahlen die Tausendstel mitzubenützen hat, wenn das Produkt auf  $\frac{1}{10}$  genau sein soll, ist um so auffallender, als bei der Berechnung der absoluten Fehler der Faktoren des Produktes gemäß der Ungleichung

$$\Delta(\sqrt{38 \cdot 62} \sqrt{12 \cdot 38}) = \sqrt{38 \cdot 62} \Delta \sqrt{12 \cdot 38} + \sqrt{12 \cdot 38} \Delta \sqrt{38 \cdot 62} < \frac{1}{10}$$

diese befriedigt wird, wenn

$$\Delta \sqrt{12 \cdot 38} = \Delta \sqrt{38 \cdot 62} < \frac{1}{10^2}$$

ist, d. h. man findet hier, was ja auch richtig ist, daß schon das Produkt der auf Hunderstel genau angegebenen Faktoren auf Zehntel „genau“ ist.