Beweis eines Satzes von *Legendre*.

(Von Herrn *Stern* in Göttingen.)

1.

Legendre stellt in seinem *traité des intégrales Euleriennes* einen Satz auf, welchen er durch Induction gefunden hat, und den man, meines Wissens, bis jetzt nicht bewiesen hat. Ist nämlich z eine gegebene ganze positive Zahl und legt man die beiden bekannten Gleichungen

$$(A.)\qquad \Gamma x.\Gamma(1-x) = \frac{\pi}{\sin\pi x}$$

$$(B.)\qquad \Gamma x.\Gamma\left(\frac{1}{a}+x\right)\ldots\Gamma\left(\frac{a-1}{a}+x\right) = \Gamma ax.a^{\frac{1}{2}-ax}(2\pi)^{\frac{1}{2}(a-1)}$$

zu Grunde, so kann man, nach diesem Satze, mit Hülfe dieser Gleichungen, die sämmtlichen in der Reihe

$$(C.)\qquad \Gamma\frac{1}{z},\quad \Gamma\frac{2}{z},\quad \ldots\quad \Gamma\frac{z-1}{z}$$

enthaltenen Grössen finden, wenn man von denselben bereits die Anzahl

$$N = \frac{z}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left(1-\frac{1}{\beta}\right)\left(1-\frac{1}{\gamma}\right)\ldots$$

kennt, wo α, β, γ, ... u. s. w. die Primzahlen bedeuten, durch welche z theilbar ist, so dass also N der Hälfte der Anzahl der Zahlen gleich ist, welche relative Primzahlen zu z sind.

Legendre bemerkt jedoch zugleich, dass man nicht willkürlich N Grössen aus der Reihe ($C.$) zu diesem Zwecke auswählen kann, dass vielmehr diese Auswahl Beschränkungen unterliegt, und dass es nicht leicht sei, vorauszusehen, welche N Grössen für einen gegebenen Werth z mit Sicherheit zur Berechnung der übrigen führen. Ich hoffe, dass die folgenden Erörterungen zur Aufklärung dieses Gegenstandes beitragen werden.

2.

Zur Abkürzung soll im Folgenden statt $\log.\Gamma\frac{b}{n}$ das Zeichen $\left[\frac{b}{n}\right]$ gesetzt werden. Setzt man in ($B.$)

$$x = \frac{b}{n};\quad a = \frac{n}{c}$$

und nimmt die Logarithmen, so hat man also

$$\log.\left(a^{\frac{1}{2}-\frac{ab}{n}}.2^{\frac{1}{2}(a-1)}.\pi^{\frac{1}{2}(a-1)}\right)+\left[\frac{ab}{n}\right] = \left[\frac{b}{n}\right]+\left[\frac{b+c}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{b+(a-1)c}{n}\right].$$

Ich werde jedoch den in dieser Formel erscheinenden Logarithmen, auf welchen bei der Beweisführung Nichts ankommt, weglassen und kürzer schreiben

$$(D.)\qquad \left[\frac{ab}{n}\right] = \left[\frac{b}{n}\right]+\left[\frac{b+c}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{b+(a-1)c}{n}\right],$$

so dass man jedesmal, wenn die Formel streng richtig sein soll, den betreffenden Logarithmen noch zu suppliren hat. In demselben Sinne schreibe ich statt der Gleichung (*A.*), die Gleichung

$$(E.)\qquad [x] = -[1-x].$$

Auch werde ich, statt zu sagen $\log \Gamma \frac{b}{n}$, mich des Ausdrucks bedienen: der Bruch mit dem Zähler b und dem Nenner n, oder: der Bruch $\left[\frac{b}{n}\right]$, was zu keinem Missverständnisse führen kann, da von anderen Grössen in Bruchform keine Rede sein wird. Sind zwei solche Brüche $\left[\frac{b}{n}\right]$ und $\left[\frac{b'}{n}\right]$ so beschaffen, dass $b+b'=n$, so sage ich: diese Brüche *ergänzen* sich, und man hat also nach (*E.*)

$$\left[\frac{b}{n}\right] = -\left[\frac{b'}{n}\right].$$

Auch werde ich die Zahlen, welche zu n Primzahlen und nicht grösser als $\frac{n}{2}$ sind, die *Hauptzahlen* von n nennen.

3.

Sei nun zuerst $z=n^\alpha$ und n eine Primzahl (2 nicht ausgeschlossen). Es ist also zu beweisen, dass man sämmtliche in der Reihe

$$(F.)\qquad \left[\frac{1}{n^\alpha}\right],\quad \left[\frac{2}{n^\alpha}\right],\quad \ldots\quad \left[\frac{n^\alpha-1}{n^\alpha}\right]$$

enthaltenen Brüche finden kann, wenn man gewisse in dieser Reihe enthaltene Glieder kennt, deren Anzahl $\frac{n^\alpha}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ ist.

Dies ist aber auch die Anzahl der Hauptzahlen von n^α. Man nehme daher an, dass alle Brüche aus der Reihe (*F.*) bekannt sind, deren Zähler die Hauptzahlen von n^α sind und es wird nun leicht zu zeigen sein, dass man aus diesen alle übrigen Brüche der Reihe (*F.*) finden kann.

Zunächst findet man durch Formel $(E.)$ die Brüche, welche die als bekannt angenommenen ergänzen, man kennt also alle in $(F.)$ enthaltenen Brüche, deren Zähler nicht durch n theilbar sind. Man bilde nun alle Brüche von der Form $\left[\frac{k}{n^{\alpha-1}}\right]$ wo k die Hauptzahlen von $n^{\alpha-1}$ bedeutet. Nach $(D.)$ hat man, wenn man für k seine verschiedenen Werthe setzt, die $\frac{n^{\alpha-1}}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ Gleichungen

$$(G.)\quad \begin{cases} \left[\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right]=\left[n\cdot\frac{1}{n^{\alpha}}\right]=\left[\frac{1}{n^{\alpha}}\right]+\left[\frac{1}{n^{\alpha}}+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{n^{\alpha}}+\frac{n-1}{n}\right], \\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot \\ \left[\frac{n^{\alpha-1}-1}{2}\cdot\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right]=\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{n^{\alpha-1}-1}{n^{\alpha}}\right]+\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{n^{\alpha-1}-1}{n^{\alpha}}+\frac{1}{n}\right]+\cdots+\left[\frac{1}{2}\cdot\frac{n^{\alpha-1}-1}{n^{\alpha}}+\frac{n-1}{n}\right]. \end{cases}$$

Jede dieser Gleichungen enthält auf der rechten Seite n Brüche; in allen Gleichungen zusammen genommen kommen also auf der rechten Seite $\frac{n^{\alpha}}{2}\left(1-\frac{1}{n}\right)$ Brüche vor. Es ist klar, dass sich keiner dieser Brüche auf einen Bruch mit kleinerem Nenner als n^{α} reduciren lässt. Auch können nicht zwei dieser Brüche gleich sein. Denn aus $\left[\frac{l}{n^{\alpha}}+\frac{l'}{n}\right]=\left[\frac{m}{n^{\alpha}}+\frac{m'}{n}\right]$ würde $l-m=(m'-l')n^{\alpha-1}$ folgen, es wäre also $l-m$ durch $n^{\alpha-1}$ theilbar, während sowohl l als m kleiner als $\frac{n^{\alpha-1}}{2}$ sind. Es folgt hieraus zugleich, dass auch $l+m$ nicht durch $n^{\alpha-1}$ theilbar ist, es können sich also auch nicht zwei dieser Brüche $\left[\frac{l}{n^{\alpha}}+\frac{l'}{n}\right]$ und $\left[\frac{m}{n^{\alpha}}+\frac{m'}{n}\right]$ ergänzen, da hieraus $l+m+(l'+m')n^{\alpha-1}=n^{\alpha}$ folgen würde, also $l+m$ durch $n^{\alpha-1}$ theilbar wäre.

Es ergiebt sich hieraus, dass alle diese Brüche entweder die ursprünglich als bekannt angenommenen oder deren Ergänzungen sind, mithin jedenfalls bekannt sind. Es folgt aber zugleich, dass man, um sie kennen zu lernen, auch wirklich die *sämmtlichen* als bekannt vorausgesetzten Brüche (oder ihre Ergänzungen) kennen muss.

Vermittelst der Gleichungen $(G.)$ findet man nun alle oben erwähnten Brüche von der Form $\left[\frac{k}{n^{\alpha-1}}\right]$ und aus diesen wieder ihre Ergänzungen, d. h. also, man kennt nun alle Brüche aus der Reihe $(F.)$ bei welchen der Zähler durch n und keine höhere Potenz von n theilbar ist, oder, mit anderen Worten, alle Brüche aus der Reihe

$$\left[\frac{1}{n^{\alpha-1}}\right] \cdots\cdots \left[\frac{n^{\alpha-1}-1}{n^{\alpha-1}}\right]$$

bei welchen der Zähler nicht durch n theilbar ist.

Aus diesen findet man nun wieder alle Brüche aus der Reihe (F.) bei welchen der Zähler durch n^2 und keine höhere Potenz von n theilbar ist. Diese Brüche (oder ihre Ergänzungen) sind nämlich in der Form $\left[\frac{k'}{n^{\alpha-2}}\right]$ enthalten, wenn k' eine der Hauptzahlen von $n^{\alpha-2}$ bezeichnet. Nun folgt aus (D.)

$$\left[\frac{k'}{n^{\alpha-2}}\right] = \left[\frac{k'}{n^{\alpha-1}}\right] + \left[\frac{k'}{n^{\alpha-1}} + \frac{1}{n}\right] + \cdots + \left[\frac{k'}{n^{\alpha-1}} + \frac{n-1}{n}\right].$$

Die Brüche auf der rechten Seite dieser Gleichung, welche sämmtlich in der Form $\left[\frac{k'+l.n^{\alpha-2}}{n^{\alpha-1}}\right]$ enthalten sind, haben aber Zähler, welche nicht durch n theilbar sind, sie sind also bekannt und mithin auch die Brüche von der Form $\left[\frac{k'}{n^{\alpha-2}}\right]$ und ihre Ergänzungen. Aus diesen Brüchen findet man wieder auf dieselbe Weise alle Brüche der Reihe (F.), bei welchen der Zähler durch n^3 und keine höhere Potenz von n theilbar ist, und so sieht man, wie allmählich alle Brüche der Reihe (F.) vermittelst der ursprünglich als bekannt angenommenen Brüche gefunden werden. Es ist mithin für diesen Fall der *Legendre*sche Satz bewiesen.

4.

Sei nun $z = ab$, wo a und b Primzahlen sind. Man nehme zuerst an, dass man alle Brüche kennt, deren Zähler die Hauptzahlen von ab sind, deren Anzahl mithin $\frac{ab}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$ ist. Aus diesen findet man ihre Ergänzungen und kennt mithin die sämmtlichen Brüche, deren Zähler Primzahlen zu a und b sind. Man nehme ferner an, dass b nicht $= 2$ ist und bezeichne durch k eine der Hauptzahlen von b, also eine der Zahlen 1, 2, ... $\frac{1}{2}(b-1)$. Nun hat man nach (D.)

$$(H.) \qquad \left[\frac{ak}{ab}\right] = \left[\frac{k}{ab}\right] + \left[\frac{k+b}{ab}\right] + \cdots + \left[\frac{k+(a-1)b}{ab}\right].$$

Indem man für k seine verschiedenen Werthe setzt, erhält man mithin $\frac{1}{2}(b-1)$ solche Gleichungen. Die Brüche auf der rechten Seite der Gleichung sind alle in der Form $\left[\frac{k+lb}{ab}\right]$ enthalten, ihre Zähler also jedenfalls nicht durch b theilbar. Ferner sind alle in diesen $\frac{1}{2}(b-1)$ Gleichungen enthaltenen Brüche von einander verschieden. Dass nämlich diejenigen, welche zu demselben Werthe von k gehören, nicht gleich sein können, versteht sich von selbst. Wäre aber $\left[\frac{k+nb}{ab}\right]=\left[\frac{k'+n'b}{ab}\right]$, also $k-k'=b(n'-n)$, so müsste $k-k'$ durch b theilbar sein, während k und k' beide kleiner als b sind. In jeder Gleichung wird aber unter diesen Brüchen *einer* und *nur* einer vorkommen, dessen Zähler durch a theilbar ist, da man der Gleichung $k+bx=ay$, wenn x und y ganze Zahlen bedeuten, immer durch ein einziges Werthenpaar $x<a$, $y<b$ genügen kann. Ist also l der Werth, für welchen $k+lb=ma$, so bringe man den entsprechenden Bruch $\left[\frac{am}{ab}\right]$ auf die linke Seite der Gleichung und zwar nehme man, wenn $m>\frac{1}{2}b$, statt dessen seine Ergänzung mit entgegengesetztem Zeichen. Unter dieser Voraussetzung hat man also

$$(H'.)\ \left[\frac{ak}{ab}\right]-\left[\frac{am}{ab}\right]=\left[\frac{k}{ab}\right]+\cdots+\left[\frac{k+(l-1)b}{ab}\right]+\left[\frac{k+(l+1)b}{ab}\right]+\cdots+\left[\frac{k+(a-1)b}{ab}\right].$$

Auf der rechten Seite dieser Gleichung stehen nun nur Brüche, deren Zähler Primzahlen zu ab sind, deren Werthe mithin bekannt sind, ihre Anzahl ist $a-1$. Indem man dann statt k seine verschiedenen Werthe setzt, erhält man also ein System Gleichungen $(H'.)$, welche auf der rechten Seite

$$\frac{(a-1)(b-1)}{2}=\frac{ab}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$$

verschiedene Brüche enthalten, d. h. so viel als man als bekannt angenommen hat.

Die Brüche, deren Differenz auf der linken Seite steht, $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ und $\left[\frac{am}{ab}\right]$ gehören beide zu der Reihe von Brüchen, deren Zähler durch a und nicht durch b theilbar ist, und zugleich sind k und m kleiner als $\frac{1}{2}b$. Nun giebt es überhaupt nur $\frac{1}{2}(b-1)$ verschiedene Brüche dieser Art, in den $\frac{1}{2}(b-1)$ Gleichungen $(H'.)$ kommen aber $b-1$ solcher Brüche vor. Es muss daher jeder dieser Brüche *zweimal* und nicht öfter vorkommen, da die Brüche, welche sich aus $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ ergeben, wenn man für k seine verschiedenen Werthe setzt, unter einander verschieden sind, wie auch die Brüche, die sich aus $\left[\frac{am}{ab}\right]$ ergeben.

Es sind nun folgende Fälle möglich:

1) Für einen bestimmten Werth von k ist $\left[\frac{ak}{ab}\right]=-\left[\frac{am}{ab}\right]$. Dann findet man aus der entsprechenden Gleichung $(H'.)$ unmittelbar den Werth von $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ und dieser Bruch kommt nun in keiner einem anderen Werthe von k entsprechenden Gleichung $(H'.)$ weiter vor.

Dieser Fall wird immer und nur dann eintreten, wenn $a+1$ durch b theilbar ist. Ist nämlich $\left[\frac{ak}{ab}\right]=-\left[\frac{am}{ab}\right]$, so ist $ak=ab-am$, nun sei $am=k+lb$, also $k(a+1)=(a-l)b$, da nun k nicht durch b theilbar ist, so muss mithin b ein Factor von $a+1$ sein. Ist umgekehrt $a+1$ durch b theilbar, so hat man

$$ak = ab-\left[k+b\left(a-\frac{(a+1)k}{b}\right)\right].$$

Nun ist $k<\frac{1}{2}b$, also $\frac{(a+1)k}{b}<\frac{a+1}{2}$, mithin $a-\frac{(a+1)k}{b}$ eine ganze positive Zahl, die kleiner als a ist; setzt man sie $=l$, so kommt der Zähler $k+lb$ auf der rechten Seite der Gleichung $(H'.)$ vor und da mithin

$$ak = ab-(k+lb),$$

so ist $k+lb=am$ und $\left[\frac{ak}{ab}\right]=-\left[\frac{am}{ab}\right]$.

Ist z. B. $z=45$, $a=9$, $b=5$, so findet man

$$\left[\frac{1.9}{45}\right] = \left[\frac{1}{45}\right]+\left[\frac{6}{45}\right]+\left[\frac{11}{45}\right]+\left[\frac{16}{45}\right]+\left[\frac{21}{45}\right]+\left[\frac{26}{45}\right]+\left[\frac{31}{45}\right]+\left[\frac{36}{45}\right]+\left[\frac{41}{45}\right],$$

$$\left[\frac{2.9}{45}\right] = \left[\frac{2}{45}\right]+\left[\frac{7}{45}\right]+\left[\frac{12}{45}\right]+\left[\frac{17}{45}\right]+\left[\frac{22}{45}\right]+\left[\frac{27}{45}\right]+\left[\frac{32}{45}\right]+\left[\frac{37}{45}\right]+\left[\frac{42}{45}\right],$$

es ist aber $\left[\frac{36}{45}\right]=-\left[\frac{9}{45}\right]$, $\left[\frac{27}{45}\right]=-\left[\frac{18}{45}\right]$.

Wie in diesem Beispiele, so ergiebt sich aus dem Vorhergehenden, dass überhaupt, sobald die Gleichung $\left[\frac{ak}{ab}\right]=-\left[\frac{am}{ab}\right]$ für irgend einen Werth von k Statt findet, dies bei allen Werthen von k der Fall ist, d. h. man findet in diesem Falle für jedes gegebene k unmittelbar den entsprechenden Werth von $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ aus der Gleichung $(H'.)$, in welcher dieser Bruch vorkommt.

2) Für einen bestimmten Werth von k ist $\left[\frac{ak}{ab}\right]=\left[\frac{am}{ab}\right]$. Die entsprechende Gleichung $(H'.)$ geht also in

$$0 = \left[\frac{k}{ab}\right]+\cdots+\left[\frac{k+(a-1)b}{ab}\right]$$

über, d. h. der Bruch $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ lässt sich nun nicht mehr aus dieser Gleichung bestimmen, er kommt aber auch in keiner anderen weiter vor. Statt dessen hat man aber nun eine Bedingungsgleichung zwischen den Brüchen, welche man als ursprünglich gegebene und von einander unabhängige angenommen hat. Man streiche also einen dieser Brüche aus der Reihe der gegebenen und nehme dafür den Bruch $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ als gegeben an, so dass man im Ganzen wieder dieselbe Zahl gegebener Brüche hat.

Dieser Fall wird immer und nur dann eintreten, wenn b ein Factor $a-1$ ist. Soll er nämlich eintreten, so muss $ka = k + lb$ sein, da nun k nicht durch b theilbar ist, so muss b ein Factor von $a-1$ sein. Ist umgekehrt $k(a-1) = lb$ also $ka = k + lb$ so ist $l < a$ und mithin kommt in der Gleichung $(H'.)$, der Bruch $\left[\frac{k+lb}{ab}\right]$ nothwendig auf der rechten Seite vor. Es findet dies aber offenbar in jeder der $\frac{1}{2}(b-1)$ Gleichungen statt, die sich aus (H') ergeben, indem man für k seine verschiedenen Werthe setzt, d. h. man muss alsdann $\frac{1}{2}(b-1)$ der ursprünglich als gegeben angenommenen Brüche streichen und dafür die Brüche $\left[\frac{a}{ab}\right] \cdots\cdots \left[\frac{\frac{1}{2}(b-1)a}{ab}\right]$ als gegeben voraussetzen, und zwar so, dass man in jeder Gleichung $(H'.)$ *einen* der darin vorkommenden ursprünglich als bekannt angenommenen Brüche aus der Reihe der gegebenen streicht und dafür den in derselben Gleichung vorkommenden Bruch $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ als bekannt annimmt.

Wäre z. B. $z = 21$, $a = 7$, $b = 3$, so müsste man, nach der früheren Vorschrift zunächst die Brüche $[\frac{1}{21}]$, $[\frac{2}{21}]$, $[\frac{4}{21}]$, $[\frac{5}{21}]$, $[\frac{8}{21}]$, $[\frac{10}{21}]$ als bekannt annehmen, aus welchen sich dann ihre Ergänzungen ergäben. Man hätte aber

$$[\tfrac{7}{21}] = [\tfrac{1}{21}] + [\tfrac{4}{21}] + [\tfrac{7}{21}] + [\tfrac{10}{21}] + [\tfrac{13}{21}] + [\tfrac{16}{21}] + [\tfrac{19}{21}]$$

mithin

$$0 = [\tfrac{1}{21}] + [\tfrac{4}{21}] + [\tfrac{10}{21}] + [\tfrac{13}{21}] + [\tfrac{16}{21}] + [\tfrac{19}{21}].$$

Man nimmt daher $[\frac{7}{21}]$ als gegeben an, während man etwa $[\frac{1}{21}]$ aus der Reihe der gegebenen Brüche streicht und seinen Werth aus der letzten Gleichung findet.

3) Findet keiner dieser zwei Fälle statt, so kommt in den Gleichungen $(H'.)$ jeder der auf der linken Seite stehenden Brüche $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ in zwei verschiedenen Gleichungen vor und zwar jedesmal mit einem von ihm verschiedenen verbunden. Er kann aber nicht beidemal mit demselben Bruche und *demselben Zeichen* verbunden sein. Käme nämlich auf der linken Seite in der einen Gleichung die Differenz $\left[\frac{ak}{ab}\right] - \left[\frac{am}{ab}\right]$ und in der anderen die Differenz $\left[\frac{ak'}{ab}\right] - \left[\frac{am'}{ab}\right]$ vor und wäre $\left[\frac{ak}{ab}\right] = -\left[\frac{am'}{ab}\right]$, ferner $\left[\frac{ak'}{ab}\right] = -\left[\frac{am}{ab}\right]$, so dass man zweimal die Differenz $\left[\frac{ak}{ab}\right] - \left[\frac{am}{ab}\right]$ hätte, so sei $am = k + lb$,

$am' = k' + l'b$, man hätte also

$$ak = ab - (k' + l'b),$$
$$ak' = ab - (k + lb),$$

mithin

$$(a-1)(k-k') = (l-l')b,$$

es müsste also $a-1$ durch b theilbar sein und mithin, wie oben bewiesen wurde, $m = k$ und $m' = k'$, also $ak = ab - ak'$ und $k + k' = b$, was nicht sein kann, da k und k' beide kleiner als $\frac{1}{2}b$ sind.

Dagegen kann es vorkommen, dass drei der Gleichungen $(H'.)$ die Form haben

$$\left[\frac{ak}{ab}\right] - \left[\frac{am}{ab}\right] = \cdots$$
$$\left[\frac{ak'}{ab}\right] + \left[\frac{am'}{ab}\right] = \cdots$$
$$\left[\frac{ak''}{ab}\right] + \left[\frac{am''}{ab}\right] = \cdots$$

und zugleich $k = m''$, $k' = m$, $k'' = m'$ ist. Dann ist die Summe der auf der linken Seite der zwei ersten Gleichungen stehenden Ausdrücke, dem auf der linken Seite der dritten Gleichung stehenden Ausdrucke gleich. Man hat mithin wieder eine Bedingungsgleichung zwischen den als bekannt angenommenen Brüchen, man streicht daher einen dieser Brüche aus der Reihe der gegebenen und nimmt statt dessen einen der drei Brüche $\left[\frac{ak}{ab}\right]$, $\left[\frac{ak'}{ab}\right]$, $\left[\frac{ak''}{ab}\right]$ als bekannt an, aus welchem sich dann die zwei anderen vermittelst der erwähnten Gleichungen ergeben.

Es können auch complicirtere Beziehungen zwischen den Brüchen von der Form $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ statt finden, welche zu Bedingungsgleichungen zwischen den ursprünglich als bekannt angenommenen Grössen führen. Man kann z. B. das System von fünf Gleichungen haben

$$\left[\frac{ak}{ab}\right] + \left[\frac{am}{ab}\right] = \cdots$$
$$\left[\frac{ak'}{ab}\right] + \left[\frac{am'}{ab}\right] = \cdots$$
$$\left[\frac{ak''}{ab}\right] - \left[\frac{am''}{ab}\right] = \cdots$$
$$\left[\frac{ak'''}{ab}\right] - \left[\frac{am'''}{ab}\right] = \cdots$$
$$\left[\frac{ak^{\mathrm{IV}}}{ab}\right] - \left[\frac{am^{\mathrm{IV}}}{ab}\right] = \cdots$$

wo zugleich $k = m^{\mathrm{IV}}$, $k' = m$, $k'' = m'''$, $k''' = m'$, $k^{\mathrm{IV}} = m''$.

Zieht man die erste Gleichung von der zweiten ab, so erhält man die Differenz $\left[\frac{ak'''}{ab}\right]-\left[\frac{ak}{ab}\right]$ und dasselbe erhält man, wenn man die drei übrigen Gleichungen zusammen addirt; man hat also wieder eine Bedingungsgleichung zwischen den als gegeben angenommenen Grössen. Man muss daher einen der fünf Brüche $\left[\frac{ak}{ab}\right] \ldots \left[\frac{ak^{\mathrm{IV}}}{ab}\right]$ als bekannt annehmen, und dafür einen der in der entsprechenden Gleichung (H'.) auf der rechten Seite vorkommenden Brüche aus der Reihe der gegebenen streichen, dessen Werth man alsdann aus der Bedingungsgleichung kennen lernt.

Dies wäre z. B. der Fall, wenn $z=55$, $a=5$, $b=11$. Hier hätte man

$$\left[\frac{1.5}{55}\right] = \left[\frac{1}{55}\right]+\left[\frac{12}{55}\right]+\left[\frac{23}{55}\right]+\left[\frac{34}{55}\right]+\left[\frac{45}{55}\right],$$
$$\left[\frac{2.5}{55}\right] = \left[\frac{2}{55}\right]+\left[\frac{13}{55}\right]+\left[\frac{24}{55}\right]+\left[\frac{35}{55}\right]+\left[\frac{46}{55}\right],$$
$$\left[\frac{3.5}{55}\right] = \left[\frac{3}{55}\right]+\left[\frac{14}{55}\right]+\left[\frac{25}{55}\right]+\left[\frac{36}{55}\right]+\left[\frac{47}{55}\right],$$
$$\left[\frac{4.5}{55}\right] = \left[\frac{4}{55}\right]+\left[\frac{15}{55}\right]+\left[\frac{26}{55}\right]+\left[\frac{37}{55}\right]+\left[\frac{48}{55}\right],$$
$$\left[\frac{5.5}{55}\right] = \left[\frac{5}{55}\right]+\left[\frac{16}{55}\right]+\left[\frac{27}{55}\right]+\left[\frac{38}{55}\right]+\left[\frac{49}{55}\right],$$

und demnach

$$\left[\frac{5}{55}\right]+\left[\frac{10}{55}\right] = \left[\frac{1}{55}\right]+\cdots$$
$$\left[\frac{10}{55}\right]+\left[\frac{20}{55}\right] = \left[\frac{2}{55}\right]+\cdots$$
$$\left[\frac{15}{55}\right]-\left[\frac{25}{55}\right] = \left[\frac{3}{55}\right]+\cdots$$
$$\left[\frac{20}{55}\right]-\left[\frac{15}{55}\right] = \left[\frac{4}{55}\right]+\cdots$$
$$\left[\frac{25}{55}\right]-\left[\frac{5}{55}\right] = \left[\frac{16}{55}\right]+\cdots.$$

Die Differenz der zweiten und der ersten Gleichung giebt $\left[\frac{20}{55}\right]-\left[\frac{5}{55}\right]$ und dasselbe erhält man, wenn man die drei letzten Gleichungen addirt. Man streicht also z. B. $\left[\frac{1}{55}\right]$ aus der Reihe der gegebenen Grössen und nimmt $\left[\frac{5}{55}\right]$ als bekannt an, dann findet man den Werth von $\left[\frac{1}{55}\right]$ aus der Bedingungsgleichung und ferner aus den vorstehenden Gleichungen die Werthe von $\left[\frac{10}{55}\right]$, $\left[\frac{15}{55}\right]$ u. s. w.

Jedenfalls wird man, indem man die Werthe der Grössen $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ aus den Gleichungen (H'.) zu bestimmen sucht, entweder auf solche Bedingungsgleichungen zwischen den ursprünglich als gegeben angenommenen Grössen geführt, oder man findet die Grössen $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ wirklich durch Elimination. Demnach ergiebt sich, dass man alle Brüche, deren Zähler weder durch a noch durch b theilbar sind, sowie alle Brüche, deren Zähler durch a und nicht durch b theilbar sind, kennen lernt, indem man nur dieselbe Anzahl Brüche, wie anfänglich, als bekannt voraussetzt, und sieht zugleich, dass man diese Anzahl nothwendig kennen muss. Auf dieselbe Weise behandelt man die Brüche, deren Zähler durch b und nicht durch a theilbar sind. Es ist also auch in diesem Falle der *Legendre*sche Satz bewiesen.

Zur Ergänzung ist nur noch der früher ausgeschlossene Fall zu betrachten, wenn $b = 2$. In diesem Falle giebt es nur einen Bruch von der Form $\left[\frac{ak}{ab}\right]$ nämlich $\left[\frac{a}{2a}\right]$ oder $[\frac{1}{2}]$ dessen Werth sich, wie bekannt, unmittelbar aus (A.) ergiebt, wenn man dort $x = \frac{1}{2}$ setzt, es bleibt also Alles wie früher.

5.

Um das Vorhergehende an einem Beispiele zu erläutern, sei $z = 77$. Man nimmt also zuerst die 30 Brüche als bekannt an, deren Zähler die Hauptzahlen von 77 sind. Schreibt man statt $[\frac{1}{77}]$ zur Abkürzung nur einfach die Ziffer 1 und so in allen übrigen Fällen, so sind diese Brüche: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 8, 9, 10, 12, 13, 15, 16, 17, 18, 19, 20, 23, 24, 25, 26, 27, 29, 30, 31, 32, 34, 36, 37, 38.

Aus diesen findet man zunächst ihre Ergänzungen. Dann hat man nach (D.)

$$\left[\frac{1.7}{77}\right] = 1+12+23+34+45+56+67,$$

$$\left[\frac{2.7}{77}\right] = 2+13+24+35+46+57+68,$$

$$\left[\frac{3.7}{77}\right] = 3+14+25+36+47+58+69,$$

$$\left[\frac{4.7}{77}\right] = 4+15+26+37+48+59+70,$$

$$\left[\frac{5.7}{77}\right] = 5+16+27+38+49+60+71.$$

Hieraus folgt

$$\begin{aligned}
7+21 &= 1+12+23+34+45+67,\\
14-35 &= 2+13+24+46+57+68,\\
21-14 &= 3+25+36+47+58+69,\\
28+\ 7 &= 4+15+26+37+48+59,\\
35+28 &= 5+16+27+38+60+71,
\end{aligned}$$

aus welchen Gleichungen man durch Elimination alle auf der linken Seite stehenden Brüche und dann ihre Ergänzungen findet, so dass man nun alle Brüche kennt, deren Zähler durch 7 theilbar sind.

Ferner hat man

$$\begin{aligned}
\left[\frac{1.11}{77}\right] &= 1+\ \ 8+15+22+29+36+43+50+57+64+71,\\
\left[\frac{2.11}{77}\right] &= 2+\ \ 9+16+23+30+37+44+51+58+65+72,\\
\left[\frac{3.11}{77}\right] &= 3+10+17+24+31+38+45+52+59+66+73,
\end{aligned}$$

also

$$\begin{aligned}
11-22 &= 1+\ \ 8+15+29+36+43+50+57+64+71,\\
22+33 &= 2+\ \ 9+16+23+30+37+51+58+65+72,\\
33+11 &= 3+10+17+24+31+38+45+52+59+73,
\end{aligned}$$

die zwei ersten dieser Gleichungen geben den Werth von $11+33$ wie auch die dritte. Hier erhält man also eine Bedingungsgleichung zwischen den Brüchen die man als bekannt angenommen hat. Man streicht daher einen dieser Brüche aus der Reihe der gegebenen und nimmt statt dessen einen der Brüche 11, 22, 33 als bekannt an, wodurch man die Werthe aller Brüche findet, deren Zähler durch 11 theilbar sind.

6.

Es ist nun leicht auf den allgemeinen Fall überzugehen. Sei $z = a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots$ und $a, b, c \ldots$ verschiedene Primzahlen. Man berücksichtige nur, dass, sobald man alle Brüche von der Form $\left[\frac{k a^{\alpha_1} b^{\beta_1} c^{\gamma_1}\ldots}{a^\alpha b^\beta c^\gamma \ldots}\right] = \left[\frac{k}{a^{\alpha-\alpha_1} b^{\beta-\beta_1} c^{\gamma-\gamma_1}\ldots}\right]$ kennt, wo $\alpha_1 < \alpha$, $\beta_1 < \beta$, $\gamma_1 < \gamma$ u. s. w. und k eine der Hauptzahlen von

$$a^{\alpha-\alpha_1} b^{\beta-\beta_1} c^{\gamma-\gamma_1}\ldots$$

ist, man auch deren Ergänzungen, mithin alle Brüche kennt, deren Zähler zu $a^{\alpha-\alpha_1} b^{\beta-\beta_1} c^{\gamma-\gamma_1}\ldots$ Primzahlen und kleiner als diese Zahl sind.

Man geht auch hier wieder zunächst von der Voraussetzung aus, dass die Brüche bekannt sind, deren Zähler die Hauptzahlen von z sind, deren Anzahl also $\frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}\ldots}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots$ ist, und aus welchen man ihre Ergänzungen findet, so dass alle Brüche bekannt sind, deren Zähler Primzahlen zu z sind.

Man berechnet nun die Brüche, deren Zähler durch a, a^2 ... aber nicht durch b, c... theilbar sind, auf folgende Weise. Versteht man unter k die Hauptzahlen von $a^{\alpha-1} b^{\beta} c^{\gamma}$ ..., so hat man

$$\left[\frac{ka}{z}\right] = \left[\frac{k}{z}\right] + \left[\frac{k + a^{\alpha-1} b^{\beta} c^{\gamma}\ldots}{z}\right] + \cdots + \left[\frac{k+(a-1)\, a^{\alpha-1} b^{\beta} c^{\gamma}\ldots}{z}\right].$$

Man setze zunächst voraus, dass $\alpha > 1$. Alsdann sind die Zähler aller auf der rechten Seite dieser Gleichung stehenden Brüche weder durch a noch durch b, c u. s. w. theilbar; diese Brüche sind mithin bekannt und man findet aus denselben alle Brüche von der Form $\left[\frac{ka}{z}\right]$. Setzt man für k seine verschiedenen Werthe, deren Anzahl $\frac{a^{\alpha-1} b^{\beta} c^{\gamma}\ldots}{z}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$ ... ist, so erhält man ein System Gleichungen, welche auf der rechten Seite im Ganzen $\frac{a^{\alpha} b^{\beta} c^{\gamma}\ldots}{2}\left(1-\frac{1}{a}\right)\left(1-\frac{1}{b}\right)$ ... Brüche enthalten, und man zeigt wieder leicht, dass keine zwei dieser Brüche identisch sind. Dass nämlich die in derselben Gleichung vorkommenden nicht gleich sein können, versteht sich von selbst. Wären aber zwei Brüche aus verschiedenen Gleichungen einander gleich, so würde aus $k + l a^{\alpha-1} b^{\beta} c^{\gamma}\ldots = k' + l' a^{\alpha-1} b^{\beta} c^{\gamma}\ldots$ folgen, dass $k-k'$ durch $a^{\alpha-1} b^{\beta} c^{\gamma}\ldots$ theilbar ist, während k und k' kleiner als $a^{\alpha-1} b^{\beta} c^{\gamma}\ldots$ sind. Es finden sich also auf der rechten Seite gerade so viel verschiedene Brüche, als man als bekannt angenommen hat. Weniger als diese Anzahl darf daher nicht als bekannt angenommen werden, wenn alle Brüche von der Form $\left[\frac{ka}{z}\right]$ und mithin alle Brüche, deren Zähler durch die erste und keine höhere Potenz von a (und nicht durch b, c u. s. w.) theilbar sind, gefunden werden sollen.

Aus diesen letzteren Brüchen findet man nun ebenso die Brüche von der Form $\left[\frac{ka^2}{z}\right]$, indem man jetzt für k die Hauptzahlen von $a^{\alpha-2} b^{\beta} c^{\gamma}$ ... nimmt, denn man hat

$$\left[\frac{ka^2}{z}\right] = \left[\frac{ka}{z}\right] + \left[\frac{ka + a^{\alpha-1} b^{\beta} c^{\gamma}\ldots}{z}\right] + \cdots + \left[\frac{ka+(a-1)\, a^{\alpha-1} b^{\beta} c^{\gamma}\ldots}{z}\right].$$

Nun sind hier die Zähler aller auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Brüche durch a und keine höhere Potenz von a, auch nicht durch $b, c \dots$ theilbar, also bekannt und daher auch $\left[\frac{ka^2}{z}\right]$. Auf diese Weise fährt man fort, bis man zuletzt noch die Brüche von der Form $\left[\frac{ka^\alpha}{z}\right]$ zu berechnen hat, wo nun k die Hauptzahlen von $b^\beta c^\gamma \dots$ bedeutet, während man die Werthe der Brüche, deren Zähler durch $a^{\alpha-1}$ (und nicht durch a^α, b, $c \dots$) theilbar sind, schon als bekannt voraussetzt. Hier bedarf die Rechnung einer Modification. Man hat nämlich nun

$$\left[\frac{ka^\alpha}{z}\right] = \left[\frac{ka^{\alpha-1}}{z}\right] + \left[\frac{ka^{\alpha-1}+a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \dots}{z}\right] + \dots + \left[\frac{ka^{\alpha-1}+(a-1)a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \dots}{z}\right].$$

Die Zähler aller auf der rechten Seite stehenden Glieder sind jedenfalls durch $a^{\alpha-1}$ und nicht durch $b, c \dots$ theilbar. Setzt man nun für k einen seiner Werthe, welcher nicht durch a theilbar ist, so findet sich unter diesen Gliedern eines, und nur eines, dessen Zähler $ka^{\alpha-1}+la^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \dots = a^{\alpha-1}(k+lb^\beta c^\gamma \dots)$ so beschaffen ist, dass $k+lb^\beta c^\gamma \dots$ durch a theilbar ist, da man der Gleichung $ax - b^\beta c^\gamma \dots y = k$ immer und nur durch einen einzigen Werth von y, der kleiner als a ist, Genüge leisten kann. Mithin findet sich auf der rechten Seite *ein* und *nur* ein Bruch, dessen Zähler durch a^α theilbar ist. Setzt man dagegen für k einen der Werthe, welche durch a theilbar sind, so ist $ka^{\alpha-1}$ durch a^α theilbar, es findet sich also auch in diesem Falle ein einziger Bruch auf der rechten Seite, dessen Zähler durch a^α theilbar ist, nämlich der erste $\left[\frac{ka^{\alpha-1}}{z}\right]$, während offenbar die Zähler der übrigen auf dieser Seite stehenden Brüche nur durch $a^{\alpha-1}$ theilbar sind. Jedenfalls findet sich also auf der rechten Seite *ein* und *nur* ein Glied, welches durch a^α theilbar ist. Dieses Glied bringe man auf die linke Seite der Gleichung. Sei $ka^{\alpha-1}+la^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma \dots = ma^\alpha$ (wo auch $l=0$ sein kann), so hat man nun

$$\left[\frac{ka^\alpha}{z}\right] - \left[\frac{ma^\alpha}{z}\right] = \cdots,$$

sollte aber $m > \frac{b^\beta c^\gamma \dots}{2}$ sein, so nimmt man wieder statt $\left[\frac{ma^\alpha}{z}\right]$ seine Ergänzung mit entgegengesetztem Zeichen. Indem man nun für k seine verschiedenen Werthe setzt, erhält man also ein System von

$$\frac{b^\beta c^\gamma \dots}{2}\left(1-\frac{1}{b}\right)\left(1-\frac{1}{c}\right)\cdots$$

Gleichungen. Man kann nun wieder leicht zeigen, dass alle auf der rechten

Seite dieser Gleichungen stehenden Brüche von einander verschieden sind und diese Brüche sind alle bekannt, da ihre Zähler durch keine höhere Potenz von a als die $\alpha-1^{\text{te}}$ theilbar sind. Auch ist klar, dass unter den Brüchen $\left[\frac{ma^\alpha}{z}\right]$ keine zwei gleichen vorkommen können und da dies auch bei den Brüchen $\left[\frac{ka^\alpha}{z}\right]$ der Fall ist, so folgt, dass jeder dieser Brüche zweimal vorkommt. Es treten daher hier wieder dieselben Fälle ein, wie sie schon in §. 4 besprochen worden sind. Ist für einen Werth von k der Werth von $\left[\frac{ka^\alpha}{z}\right]$ und des correspondirenden $\left[\frac{ma^\alpha}{z}\right]$ derselbe, so giebt dies eine Bedingungsgleichung zwischen den auf der rechten Seite der Gleichung stehenden Ausdrücken. Diese sind aber alle von der Form $\left[\frac{ha^{\alpha-1}}{z}\right]$ wo h gegen z Primzahl, und man kann sie auf die ursprünglich als bekannt angenommenen, d. h. auf diejenigen zurückführen, deren Zähler Primzahlen gegen z sind. Denn man hat

$$\left[\frac{ha^{\alpha-1}}{z}\right] = \left[\frac{h}{z}\right]+\left[\frac{h+ab^\beta c^\gamma\ldots}{z}\right]+\left[\frac{h+2ab^\beta c^\gamma\ldots}{z}\right]+\cdots,$$

wo die Zähler aller auf der rechten Seite stehenden Ausdrücke offenbar Primzahlen zu z sind. Eine Bedingungsgleichung zwischen den Grössen $\left[\frac{ha^{\alpha-1}}{z}\right]$ heisst also soviel als eine Bedingungsgleichung zwischen den ursprünglich gegebenen Grössen. Man streicht daher eine dieser letzteren aus der Reihe der als bekannt angenommenen Grössen und nimmt dagegen das entsprechende $\left[\frac{ka^\alpha}{z}\right]$ als bekannt an. Man beweist auch hier, ähnlich wie in dem einfacheren früher betrachteten Falle (§. 4), dass dies immer und nur dann eintreten wird, wenn $a-1$ durch $b^\beta c^\gamma\ldots$ theilbar ist.

Auch in allen übrigen Fällen, wo sich eine Bedingungsgleichung zwischen den ursprünglich gegebenen Grössen herausstellt, verfährt man in ähnlicher Weise, wie dies schon bei dem erwähnten einfacheren Falle erörtert worden ist.

Man sieht hieraus, dass man nun schliesslich die Werthe sämmtlicher Brüche kennt, deren Zähler entweder durch keine der Zahlen $a, b, c, \ldots$ oder durch die verschiedenen Potenzen von a und nicht durch $b, c, \ldots$ theilbar sind, während die Zahl der ursprünglich als bekannt angenommenen Brüche immer dieselbe geblieben ist.

Im Vorhergehenden wurde $\alpha > 1$ angenommen. Ist $\alpha=1$, so hat man gleich von Anfang $\left[\frac{ka^\alpha}{z}\right]$ zu berechnen und führt dies nach dem so eben besprochenen Verfahren aus.

Dasselbe Verfahren zeigt nun auch, wie man die Werthe der Brüche finden kann, deren Zähler *nur* durch die verschiedenen Potenzen von b oder *nur* durch die verschiedenen Potenzen von c u. s. w. theilbar sind, während die *Anzahl* der als bekannt angenommenen Brüche immer dieselbe bleibt.

Um nun die Brüche zu finden, welche in der Form $\left[\frac{kab}{z}\right]$ enthalten sind, wo k eine der Hauptzahlen von $a^{\alpha-1}b^{\beta-1}c^\gamma\ldots$ bedeutet, geht man von der Gleichung aus

$$\left[\frac{kab}{z}\right]=\left[\frac{kb}{z}\right]+\left[\frac{kb+a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma\ldots}{z}\right]+\cdots+\left[\frac{kb+(a-1)a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma\ldots}{z}\right].$$

Die Brüche auf der rechten Seite dieser Gleichung haben Zähler, welche nur durch die erste Potenz von b und nicht durch $a, c, \ldots$ u. s. w. theilbar und mithin bekannt sind. Aus den Brüchen mit dem Zähler kab findet man dann wieder auf dieselbe Weise die Brüche mit dem Zähler ka^2b, wo nun k die Hauptzahlen von $a^{\alpha-2}b^{\beta-1}c^\gamma\ldots$ sind u. s. w. Schliesslich sind noch die Brüche mit den Zählern $ka^\alpha b$ zu finden. Hier bezeichnet k die Hauptzahlen von $b^{\beta-1}c^\gamma\ldots$ und man hat

$$\left[\frac{ka^\alpha b}{z}\right]=\left[\frac{ka^{\alpha-1}b}{z}\right]+\left[\frac{ka^{\alpha-1}b+a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma\ldots}{z}\right]+\cdots+\left[\frac{ka^{\alpha-1}b+(a-1)a^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma\ldots}{z}\right].$$

Man beweist nun wieder, wie früher, dass auf der rechten Seite dieser Gleichung ein und nur ein Glied vorkommt, welches durch a^α theilbar ist, und dass in jeder Gleichung, die man durch Specialisirung des Werthes von k erhält, ein anderes Glied dieser Art erscheint. Bringt man daher wieder alle diese Glieder, oder, falls sie grösser als $\frac{1}{2}$ sind, ihre Ergänzungen mit entgegengesetztem Zeichen, auf die andere Seite der Gleichung, so zeigt man nun auch wieder, wie in den ähnlichen früheren Fällen, dass jedes dieser Glieder zweimal vorkommt, und dass man daher entweder ihre Werthe durch Elimination findet, oder hierdurch zu einer Bedingungsgleichung zwischen den auf der rechten Seite gebliebenen Gliedern geführt wird. Im letzteren Falle hat man wieder eine Bedingungsgleichung zwischen den ursprünglich als bekannt angenommenen Grössen, da jedes Glied von der Form $\left[\frac{ka^{\alpha-1}b+la^{\alpha-1}b^\beta c^\gamma\ldots}{z}\right]$ in die Reihe $\left[\frac{k+lb^{\beta-1}c^\gamma\ldots}{z}\right]+\left[\frac{k+lb^{\beta-1}c^\gamma\ldots+ab^{\beta-1}c^\gamma\ldots}{z}\right]+\cdots$ verwandelt werden kann, deren Glieder nur Zähler enthalten, die Primzahlen zu z sind. Man streicht daher wieder eine dieser Grössen aus der Reihe der bekannten und nimmt einen der Brüche $\left[\frac{ka^\alpha}{z}\right]$ als bekannt an.

Aus den bekannten Brüchen von der Form $\left[\frac{kab}{z}\right]$ findet man dann wieder die Brüche von der Form $\left[\frac{kab^2}{z}\right]$ und überhaupt sieht man nun, wie man, immer in derselben Weise fortschreitend, allgemein die Brüche finden kann, deren Zähler in der Form $ka^{\alpha_1}b^{\beta_1}c^{\gamma_1}\ldots$ enthalten sind, wo k die Hauptzahlen von $a^{\alpha-\alpha_1}b^{\beta-\beta_1}c^{\gamma-\gamma_1}\ldots$ bezeichnet, während die Anzahl der als bekannt anzunehmenden Brüche immer die ursprünglich vorausgesetzte bleibt, wodurch der *Legendre*sche Satz in seiner ganzen Allgemeinheit bewiesen ist.

Göttingen, 1. August 1866.