

Zur Theorie der Bernoulli'schen Zahlen.

Von

K. SCHWERING in Trier.

Man überzeugt sich leicht von der Richtigkeit folgender Gleichung, in welcher wir $x > 0$ voraussetzen:

$$(1) \quad \frac{1}{(x+1)^2} = \frac{1}{(x+1)(x+2)} + \frac{1}{(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots$$

$$\dots + \frac{1 \cdot 2 \dots h}{(x+1)(x+2) \dots (x+h+2)} + \dots$$

Nun setzen wir:

$$(2) \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{x^2} = a_0 + \frac{a_1}{x+1} + \frac{a_2}{(x+1)(x+2)} + \dots$$

$$\dots + \frac{a_h}{(x+1)(x+2) \dots (x+h)} + \dots$$

Verwandeln wir x in $x+1$ und subtrahiren, so erhalten wir links $\frac{1}{(x+1)^2}$ und rechts einen Ausdruck, der mit (1) in der Form übereinstimmt. Soweit die Gültigkeit der Entwicklung reicht, ist eine Coefficientenvergleichung gestattet. Denn man braucht nur der Reihe nach mit den Nennern zu multipliciren und dann $x = \infty$ zu setzen, um sich von der Richtigkeit dieser Behauptung zu überzeugen. Man findet so leicht:

$$a_1 = -1, \quad a_2 = -\frac{1}{2}, \quad a_3 = -\frac{2}{3}, \quad \dots, \quad a_h = -\frac{1 \cdot 2 \dots (h-1)}{h}.$$

Man gelangt so zu der Gleichung:

$$(3) \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x+1} - \frac{1}{2} \frac{1}{(x+1)(x+2)}$$

$$- \frac{1 \cdot 2}{3(x+1)(x+2)(x+3)} - \dots - \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \dots (h-1)}{h(x+1)(x+2) \dots (x+h)} - \dots$$

Die Constante $\frac{\pi^2}{6}$ folgt durch die Annahme $x = \infty$. Die Richtigkeit der Entwicklung (3) für $x > 0$ lässt sich leicht in anderer Weise bestätigen, worauf wir einzugehen unterlassen.

Nach bekannter Entwicklung erhält man andererseits:

$$(4) \quad \frac{1}{1^2} + \frac{1}{2^2} + \dots + \frac{1}{x^2} = \frac{\pi^2}{6} - \frac{1}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} - \frac{1}{6} \cdot \frac{1}{x^3} + \frac{1}{30} \cdot \frac{1}{x^5} \\ - \frac{1}{42} \cdot \frac{1}{x^7} + \dots$$

Die Coefficienten dieser Reihe sind die Bernoulli'schen Zahlen mit abwechselnden Vorzeichen. Daher ergibt sich die Identität:

$$(5) \quad \frac{1}{x} - \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x^2} + B_3 \cdot \frac{1}{x^3} - B_5 \cdot \frac{1}{x^5} + B_7 \cdot \frac{1}{x^7} - B_9 \cdot \frac{1}{x^9} + \dots \\ = \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2(x+1)(x+2)} + \frac{2}{3(x+1)(x+2)(x+3)} + \dots \\ \dots + \frac{2 \cdot 3 \dots (h-1)}{h(x+1)(x+2) \dots (x+h)} + \dots$$

Denken wir uns nun die rechte Seite nach Potenzen von $\frac{1}{x}$ entwickelt, so ist die so entstehende Reihe semiconvergent. Demnach ist eine Coefficientenvergleichung unter entsprechenden Vorsichtsmassregeln, die hier in Wegfall kommen, gestattet. Sehen wir uns nun die *Nenner* an, die rechts auftreten. Ist h keine Primzahl, so ist $(h-1)!$ durch h theilbar, also tritt ein solcher Nenner gar nicht auf. Ist $h=4$, so könnte dies als einzige Ausnahme erscheinen. Aber das entsprechende Glied:

$$\frac{2 \cdot 3}{4(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)}$$

liefert nur den Nenner 2. Ist dagegen h eine Primzahl, so haben wir die Congruenz:

$$(x+1)(x+2) \dots (x+h) \equiv x(x^{h-1}-1) \pmod{h},$$

also ist das allgemeine Glied, wenn ganzzahlige Bestandtheile wegbleiben, nach dem Wilson'schen Satze durch

$$\frac{-1}{h(x^h-x)}$$

zu ersetzen. Folglich tritt h im Nenner der Bernoulli'schen Zahlen B_m auf, wenn:

$$m = h, \quad h + (h-1), \quad h + 2(h-1), \dots$$

Es ist also $m-1 = (h-1)g$, wo g eine ganze Zahl. Wenn wir nun die ganzzahligen Bestandtheile in (5) unterdrücken und auf die übrigen Theile Vergleichung durch das Congruenzzeichen anwenden, so folgt nach leichter Umformung:

$$\begin{aligned}
& -\frac{B_3}{x^3} + \frac{B_5}{x^5} - \frac{B_7}{x^7} + \frac{B_9}{x^9} - \frac{B_{11}}{x^{11}} + \dots \\
& \equiv \frac{1}{2} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^7} + \dots \right) \\
& + \frac{1}{3} \left(\frac{1}{x^3} + \frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^7} + \dots \right) \\
& + \frac{1}{5} \left(\frac{1}{x^5} + \frac{1}{x^9} + \frac{1}{x^{13}} + \dots \right) \\
& + \frac{1}{7} \left(\frac{1}{x^7} + \frac{1}{x^{13}} + \frac{1}{x^{19}} + \dots \right) \\
& + \frac{1}{11} \left(\frac{1}{x^{11}} + \frac{1}{x^{21}} + \frac{1}{x^{31}} + \dots \right)
\end{aligned}$$

Hieraus liest man sofort den v. Staudt-Clausius'schen Satz ab. Es ist bei wirklicher Ausrechnung:

$$\begin{aligned}
B_3 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 1, & B_5 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 1, \\
B_7 &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{7} + 1, & B_9 &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - 1, \\
B_{11} &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} - \frac{1}{11} + 1, & B_{13} &= \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \frac{1}{13} - 1, \\
B_{15} &= -\frac{1}{2} - \frac{1}{3} + 2 \text{ u. s. w.}
\end{aligned}$$
