

Les séries de factorielles et les opérations fondamentales.

Par

NIELS NIELSEN à Copenhague.

Dans son grand Mémoire sur les intégrales *eulériennes* Binet*) a remarqué en passant que les séries de factorielles, soumises aux opérations fondamentales du calcul aux différences finies, nous conduiront à des résultats très simples. En effet, on pourra dire, nous le verrons plus bas dans le § 5, que les séries de factorielles sont, de ce point de vue, *formellement* les séries de puissances négatives entières du calcul aux différences finies; mais cette analogie n'est pas générale, comme le montre clairement le § 6 du Mémoire que voici.

Binet fait remarquer aussi que les séries de factorielles, soumises aux deux opérations fondamentales de l'Analyse, savoir la différentiation et l'intégration, nous ne conduiront pas à des résultats simples. En effet, Binet n'a possédé aucun moyen général pour une étude approfondie de telles questions parce qu'il n'a connu aucune théorie générale des séries de factorielles.

Dans des publications récentes**) j'ai donné les fondements d'une telle théorie générale et je me suis proposé d'étudier dans le Mémoire que voici les opérations fondamentales effectuées sur une série de factorielles.

Généralement on pourra dire que les deux opérations fondamentales susdites de l'Analyse sont des opérations naturelles pour une série de puissances, ce qui n'a pas lieu pour les deux opérations fondamentales correspondantes du calcul aux différences finies. En effet, dans une Note***) récente j'ai démontré que l'intégration finie d'une série de puissances ne peut pas être effectuée généralement terme à terme dans le sens ordi-

*) Journal de l'École polytechnique, cahier 27, p. 126; 1839.

**) Comptes rendus 30 décembre 1901; 20 janvier 1902. Annales de l'École Normale (3) t. 19, p. 409—453; 1902.

***) Mathematische Annalen, t. 59, p. 103; 1904.

naire de ce mot. Voilà certainement la raison du fait que l'Analyse a dominé entièrement pendant le siècle passé, tandis que le calcul aux différences finies n'a fait aucun progrès considérable dans la même époque, ce qui est très regrettable, parce que la définition naturelle et systématique de plusieurs fonctions fondamentales est impossible sans appliquer des équations aux différences finies. Nous nous bornerons à citer ici la fonction gamma, les fonctions sphériques et cylindriques.

Inversement, les deux opérations fondamentales du calcul aux différences finies sont des opérations naturelles pour une série de factorielles tandis que les opérations correspondantes de l'Analyse sont beaucoup plus difficiles; mais ces deux dernières opérations peuvent être effectuées généralement terme à terme et les fonctions ainsi obtenues sont développables dans une série de factorielles aussi.

§ 1.

Les fonctions développables en série de factorielles.

Dans mes recherches générales sur les séries de factorielles de cette forme

$$(1) \quad \Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! b_s}{x(x+1) \cdots (x+s)},$$

où les coefficients b_s sont indépendants de x , j'ai démontré qu'une fonction, développable dans une telle série, doit satisfaire à ces conditions *nécessaires et suffisantes* à la fois:*)

1° La fonction $\Omega(x)$ doit se présenter sous forme d'une certaine intégrale définie, savoir:

$$(2) \quad \Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt,$$

où la fonction $\varphi(t)$, la *fonction génératrice* de $\Omega(x)$, est holomorphe aux environs du point $t=1$; de plus, le rayon de convergence de la série de puissances correspondante

$$(3) \quad \begin{cases} \varphi(1-t) = b_0 + b_1 t + b_2 t^2 + b_3 t^3 + \cdots \\ n! b_n = (-1)^n \varphi^{(n)}(1) \end{cases}$$

où les coefficients b_s doivent être les mêmes qui figurent dans (1), est égal à l'unité au moins.

2° Le point $t=0$ peut être point singulier de $\varphi(t)$ mais tel que $\varphi(t)$ a, pour $t=+0$, des dérivées d'un ordre quelconque, et de plus, soit

*) Annales de l'École Normale (3) t. 19, p. 419; 1902.

$\varphi^{(p)}(t)$ la première de ces dérivées, p designant un positif entier fini, qui est infinie pour $t = +0$, il doit être possible de déterminer un nombre réel λ , qui ne surpasse pas une certaine limite, tel que

$$(4) \quad \lim_{t \rightarrow +0} |t^{x+p} \cdot \varphi^{(p)}(t)| = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases},$$

selon que $\Re(x) \geq \lambda$. Nous désignons toujours ce nombre λ comme le *premier nombre caractéristique* de $\varphi(t)$.

Cela posé, on peut démontrer*) qu'il est possible de déterminer un positif entier N si grand que, dans tout l'intervalle $0 \leq t < 1$, nous aurons pour $n \geq N$

$$(5) \quad \left| \frac{t^{x+n} \cdot \varphi^{(n)}(t)}{\Gamma(x+n+1)} \right| < \varepsilon \\ > E,$$

selon que $\Re(x) \geq \lambda$, tandis que ε et E désignent deux quantités positives aussi petite respectivement aussi grande qu'on le veut.

Dans le cas particulier, où la fonction $\varphi(1-t)$ n'a pas sur la circonférence du cercle $|t| = 1$ d'autres points singuliers outre $t = 1$, les inégalités (5) sont vraies pour $t = 1$ encore.

Supposons que $t = 0$ soit point ordinaire de $\varphi(t)$, nous pouvons dans (4) et (5) admettre $\lambda = -p$, où p désigne un positif entier fini mais aussi grand qu'on le veut.

Considérons maintenant le cas général, où $\varphi(1-t)$ a d'autres points singuliers, outre $t = 1$, situés sur la circonférence susdite, il doit être possible de déterminer un autre nombre réel λ' qui ne surpasse pas une certaine limite et tel que, avec les mêmes désignations que dans (5)

$$(5^{bis}) \quad \left| \frac{\varphi^{(n)}(1)}{\Gamma(x+n+1)} \right| < \varepsilon \\ > E,$$

selon que $\Re(x) \geq \lambda'$; ce nombre λ' est désigné comme le *second nombre caractéristique* de $\varphi(t)$.

Quant à la convergence de la série de factorielles (1), elle présente des propriétés très singulières, nous le verrons plus bas. Généralement nous définissons le champ de convergence de la série (1) comme la partie du plan des x , où cette autre série infinie

$$\frac{\Omega(x)}{\Gamma(x)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! b_s}{\Gamma(x+s+1)}$$

est convergente. On voit en vérité que cette série nouvelle et la série $\Omega(x)$ elle-même seront en même temps convergentes ou divergentes à l'exception

*) Annales de l'École Normale (3) t. 19, p. 421; 1902.

dans les points isolés $0, -1, -2, -3, \dots$ situés peut-être dans le champ susdit.

Cela posé, nous avons démontré cette proposition intéressante concernant la convergence de $\Omega(x)$:

La série $\Omega(x)$ est divergente dans les points isolés $0, -1, -2, -3, \dots$ situés dans son champ de convergence; mais, designons par ε une quantité positive aussi petite qu'on le veut, la série $\Omega(x - \omega)$, où ω désigne un des points susdits, sera convergente, pourvu que $|x - \omega| > \varepsilon$.

C'est-à-dire que la limite du champ de convergence de $\Omega(x)$ n'est pas déterminée nécessairement par le premier point singulier de la fonction.

Il est très facile de démontrer cette autre proposition aussi:

Supposons finis tous les termes de $\Omega(x)$, la série $\Omega(x')$ sera absolument convergente, pourvu que $\Re(x' - x) > 1$.

En effet, posons

$$\Gamma_n(x) = \frac{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdots (n-1) \cdot n^x}{x(x+1) \cdots (x+n-1)}, \quad \lim_{n=\infty} \Gamma_n(x) = \Gamma(x),$$

nous aurons immédiatement, en posant $x = \xi + i\eta$, $x' = \xi' + i\eta'$,

$$(6) \quad \left| \frac{x(x+1) \cdots (x+n-1)}{x'(x'+1) \cdots (x'+n-1)} \right| = \left| \frac{\Gamma_n(x')}{\Gamma_n(x)} \right| \cdot n^{\xi - \xi'},$$

et voilà la démonstration de la proposition susdite.

Comme corollaire de notre proposition ainsi démontrée nous avons cette autre:

Supposons développable en série de la forme (1) une fonction donnée, un tel développement ne peut être effectué que d'une seule manière.

En effet, si dans l'identité

$$(a) \quad \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! b_s}{x(x+1) \cdots (x+s)} = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! b'_s}{x(x+1) \cdots (x+s)}$$

les deux séries de factorielles sont convergentes toutes les deux pour $x = \omega$, ces deux séries sont certainement absolument convergentes dans tout le demi-plan défini par l'inégalité $\Re(x) > \Re(\omega) + 1$. Cela posé, multiplions par x les deux membres de (a), puis mettons $\Re(x) = +\infty$, ce qui est permis, nous aurons $b_0 = b'_0$, et ainsi de suite.

Combinons encore les formules (1), (5^{bis}) et (6), nous trouvons cette autre proposition due à M. Pincherle:*)

La série de factorielles $\Omega(x)$ est certainement absolument convergente dans le demi-plan défini par l'inégalité $\Re(x) > \lambda' + 1$.

*) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, février 1902.

§ 2.

Champ de convergence d'une série de factorielles.

Déterminons maintenant, avec plus de détails que dans mon premier Mémoire, le champ de convergence d'une série de factorielles de la forme (1). A cet égard nous avons à prendre comme point de départ la formule (2); nous aurons en intégrant par parties

$$(7) \quad \Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=n} \frac{s! b_s}{x(x+1) \cdots (x+s)} + R_n(x),$$

où nous avons posé pour abrèger

$$(7^{bis}) \quad R_n(x) = \frac{(-1)^{n+1}}{x(x+1) \cdots (x+n)} \cdot \int_0^1 \varphi^{(n+1)}(t) t^{x+n} dt.$$

La formule (7) n'est démontrée que dans le cas, où nous avons supposé à la fois $\Re(x) > 0$ et $\Re(x) > \lambda$, il est vrai; mais, prenons comme point de départ la formule (1), nous verrons que le terme de reste $R_n(x)$ s'exprime toujours à l'aide de (7^{bis}).

Cela posé, appliquons les formules (4), (5) et (5^{bis}), nous aurons immédiatement cette valeur limite

$$(8) \quad \lim_{n=\infty} |R_n(x)| = 0,$$

pourvu que nous ayons à la fois $\Re(x) > \lambda$ et $\Re(x) > \lambda'$, ce qui donnera, en vertu de la proposition de M. Pincherle, cette inégalité

$$(9) \quad \lambda \leq \lambda' + 1,$$

tandis que nous avons démontré ce théorème général:

La limite du champ de convergence d'une série de factorielles est une ligne droite perpendiculaire à l'axe des nombres réels; c'est la même chose avec la limite du champ de convergence absolue de la série susdite.

Ce résultat a été indiqué sans démonstration par M. Jensen dans son excellent Mémoire sur la fonction gamma.*) De plus, nous aurons cette autre proposition intéressante:

La distance des deux lignes parallèles susdites ne peut jamais être plus grande que l'unité. La convergence d'une série de factorielles est toujours uniforme et la somme d'une telle série est une fonction analytique de x , même dans la bande susdite, où la convergence n'est pas absolue.

Discutons maintenant tous les cas différents dépendants de la grandeur des deux nombres caractéristiques λ et λ' :

*) Nyt Tidsskrift for Matematik t. II B; 1891.

1° Le rayon de convergence de la série de puissances obtenue pour $\varphi(1-t)$ est plus grand que l'unité, le champ de convergence de $\Omega(x)$ est tout le plan des x .

Considérons par exemple la fonction

$$\beta(x) = -\frac{1}{2} D_x B\left(\frac{x}{2}, \frac{1}{2}\right) = \frac{1}{x} - \frac{1}{x+1} + \frac{1}{x+2} - \dots,$$

nous aurons cette expression intégrale

$$(10) \quad \beta(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t} dt,$$

ce qui donnera la série de factorielles:

$$(10^{\text{bis}}) \quad \beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1)\dots(x+s)} \cdot \frac{1}{2^{s+1}},$$

résultat qui peut être démontré aisément d'un point de vue élémentaire*) aussi.

2° $\lambda' \geq \lambda$; la série $\Omega(x)$ est convergente, pourvu que $\Re(x) > \lambda'$ et non absolument convergente dans la bande $\lambda' < \Re(x) < \lambda' + 1$.

Prenons comme premier exemple la fonction

$$(11) \quad \beta_1(x) = \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{2-t} dt = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{x} + \frac{1}{2^2} \cdot \frac{1}{x+1} + \frac{1}{2^3} \cdot \frac{1}{x+2} + \dots,$$

nous aurons

$$(11^{\text{bis}}) \quad \beta_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(-1)^s s!}{x(x+1)\dots(x+s)}, \quad \Re(x) > 0.$$

Comme second exemple considérons la fonction

$$\beta\left(\frac{x}{3}\right) = \int_0^1 \frac{t^{\frac{x}{3}-1}}{1+t} dt = 3 \cdot \int_0^1 \frac{t^{x-1}}{1+t^3} dt,$$

nous aurons cette série de factorielles

$$(12) \quad \beta\left(\frac{x}{3}\right) - \beta(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! \sin \frac{2s+1}{6} \pi}{x(x+1)\dots(x+s)}, \quad \Re(x) > 0.$$

3° $\lambda' = \lambda - \kappa$, où $0 < \kappa < 1$; $\Omega(x)$ est convergente, pourvu que $\Re(x) > \lambda$, et non absolument convergente dans la bande $\lambda < \Re(x) < \lambda + 1 - \kappa$.

*) Rivista trimestrale di Matematica (sous presse).

4° $\lambda = \lambda - 1$; $\Omega(x)$ est toujours absolument convergente, pourvu que $\Re(x) > \lambda$.

Posons comme premier exemple $\varphi(t) = t^{-\omega}$, nous aurons cette formule élémentaire, due à Stirling:

$$(13) \quad \frac{1}{x-\omega} = \frac{1}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\omega(\omega+1)\cdots(\omega+s-1)}{x(x+1)\cdots(x+s)}, \quad \Re(x) > \Re(\omega).$$

Pour obtenir un exemple plus général désignons par $\psi(t)$ une fonction génératrice qui satisfait aux conditions énumérées dans le § 1 et qui est de plus holomorphe aux environs du point $t=0$, puis mettons

$$(14) \quad \Omega(x) = \int_0^1 \psi(t) t^{-\omega} \cdot t^{x-1} dt,$$

nous aurons

$$\Omega(x) - \frac{\psi(0)}{x-\omega} = \int_0^1 (\psi(t) - \varphi(0)) t^{-\omega} \cdot t^{x-1} dt,$$

ce qui donnera pour la nouvelle fonction génératrice

$$\varphi(t) = (\psi(t) - \varphi(0)) t^{-\omega}$$

le premier nombre caractéristique égal à $\Re(\omega) - 1$; c'est-à-dire que la série de factorielles obtenue pour la fonction (14) est convergente et cela toujours absolument, pourvu que $\Re(x-\omega) > 0$.

En nous appuyant sur nos résultats précédents, nous déduirons immédiatement une proposition intéressante concernant la série de Taylor.

Supposons en effet que dans cette série de puissances, dont le rayon de convergence est égal à $r \geq 1$,

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 + \dots$$

les coefficients a_n satisfassent à cette condition

$$|n^{-\alpha} \cdot a_n| < \varepsilon, \quad \text{pour } n \geq N,$$

selon que $\alpha \geq \lambda'$. De plus, supposons que $f(x)$ ait sur la circonférence du cercle $|x| = r$ des points singuliers

$$x_1 = r e^{i\theta_1}, \quad x_2 = r e^{i\theta_2}, \quad x_3 = r e^{i\theta_3}, \quad \dots$$

tels que dans ces points les dérivées $f^{(1)}(x), f^{(2)}(x), \dots, f^{(p_n)}(x)$ prises au rayon passant par le point x_n existent et supposons que parmi ces dérivées $f^{(p_n)}(x)$ soit la première qui deviendra infinie mais de sorte que

$$\lim_{\varrho \rightarrow +0} |\varrho^{\alpha+p_n} f^{(p_n)}((r-\varrho)e^{i\theta_n})| = \begin{cases} 0 \\ \infty \end{cases},$$

selon que $\alpha \geq \lambda_n$, nous aurons cette proposition:

Les nombres λ_n et λ' ainsi définies satisfont tous à la condition

$$\lambda_n \leq \lambda' + 1.$$

§ 3.

Addition et multiplication de deux séries de factorielles.

Considérons maintenant ces deux séries de factorielles

$$(15) \quad \begin{cases} \Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! b_s}{x(x+1) \cdots (x+s)}, & \Re(x) > \Lambda, \\ \Omega_1(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! c_s}{x(x+1) \cdots (x+s)}, & \Re(x) > \Lambda', \end{cases}$$

ou bien, comme intégrales définies,

$$(15^{bis}) \quad \Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt, \quad \Omega_1(x) = \int_0^1 \psi(t) t^{x-1} dt,$$

tandis que nous désignons par λ et λ' respectivement par λ_1 et λ'_1 les deux classes de nombres caractéristiques des fonctions génératrices $\varphi(t)$ et $\psi(t)$.

Cela posé, on effectuera immédiatement l'addition et la soustraction des deux séries de factorielles $\Omega(x)$ et $\Omega_1(x)$, tandis que la multiplication de ces deux séries est beaucoup plus difficile. Or, en m'appuyant sur les résultats précédents, j'ai démontré récemment ce théorème général:*)

Le produit $\Omega(x) \cdot \Omega_1(x)$ est toujours développable en série de factorielles qui est convergente, pourvu que nous ayons à la fois

$$\Re(x) > 0, \quad \Re(x) > \Lambda, \quad \Re(x) > \Lambda',$$

conditions qui sont toujours suffisantes et généralement nécessaires aussi.

Mais naturellement l'expression générale des coefficients de la série de factorielles ainsi obtenue, à l'aide des coefficients donnés b_s et c_s , deviendra très compliquée. Posons

$$(16) \quad \Omega(x) \cdot \Omega_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s! A_s}{x(x+1) \cdots (x+s)}.$$

nous aurons généralement

*) Rendiconti della Reale Accademia dei Lincei, 17 janvier 1904

$$(16^{bis}) \quad A_n = \sum_{s=0}^{s=n} (n-s)! s! c_{n-s} \cdot B_{n-s,s},$$

où nous avons posé pour abréger

$$B_{r,s} = \sum_{p=0}^{p=r} \binom{r+p}{p} b_{r-p}.$$

Quant à la fonction génératrice du produit $\Omega(x) \cdot \Omega_1(x)$, nous aurons cette expression élégante

$$(17) \quad \Omega(x) \cdot \Omega_1(x) = \int_0^1 X(t) t^{x-1} dt,$$

où nous avons posé pour abréger

$$(17^{bis}) \quad X(t) = \int_t^1 \psi\left(\frac{t}{\alpha}\right) \cdot \frac{\varphi(\alpha)}{\alpha} d\alpha = \int_t^1 \varphi\left(\frac{t}{\alpha}\right) \cdot \frac{\psi(\alpha)}{\alpha} d\alpha,$$

formule qui nous fournit un moyen pratique pour former la série de factorielles (16), dont nous avons déterminé en avant le champ de convergence.

Considérons comme premier exemple la fonction $\beta(x)$ introduite dans la formule (10), nous aurons, en vertu de (17^{bis}), cette formule particulière

$$(18) \quad (\beta(x))^2 = \int_0^1 \frac{2 \log(1+t) - 2 \log 2 - \log t}{1-t} \cdot t^{x-1} dt,$$

que j'ai démontrée récemment par un calcul direct*) aussi; nous trouvons ici cette série de factorielles:

$$(19) \quad (\beta(x))^2 = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1) \cdots (x+s)} \cdot \frac{2^s - 1}{(s+1)2^s}, \quad \Re(x) > 0,$$

qui est toujours *absolument* convergente.

Considérons encore la fonction $\beta_1(x)$ introduite dans (11), nous aurons

$$(20) \quad (\beta_1(x))^2 = \int_0^1 \frac{\log(2-t) - \log t}{4-t} \cdot t^{x-1} dt,$$

ce qui donnera cette série de factorielles

$$(21) \quad (\beta_1(x))^2 = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! b_s}{x(x+1) \cdots (x+s)}, \quad \Re(x) > 0,$$

*) *Annali di Matematica* (3), t. 9, p. 203; 1903.

où nous avons posé pour abrégé

$$(21^{\text{bis}}) \quad b_n = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^s - 1}{s \cdot 3^{n-s+1}}.$$

Or, nous avons évidemment

$$|b_n| < 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{s \cdot 3^{n-s+1}} < 2 \cdot \sum_{s=1}^{s=r} \frac{1}{3^{n-r+1}} + \frac{2}{r+1} \cdot \sum_{s=r+1}^{s=n} \frac{1}{3^{n-s+1}},$$

ce qui donnera cette valeur majorante

$$|b_n| < \frac{1}{3^{n-r}} + \frac{1}{r+1};$$

choisissons maintenant $r = \frac{n}{2}$, $r = \frac{n-1}{2}$, selon que n est pair ou impair, nous aurons ces deux nombres caractéristiques de la fonction génératrice correspondante: $\lambda = 0$, $\lambda' = -1$; c'est-à-dire que la série de factorielles (21) est toujours *absolument* convergente dans son champ de convergence.

Nous aurons enfin cette autre formule

$$(22) \quad \beta(x) \beta_1(x) = \int_0^1 \frac{\log(2-t) + \log(1+t) - \log 2 - \log t}{2+t} \cdot t^{x-1} dt,$$

ce qui donnera ce développement en série de factorielles

$$(23) \quad \beta(x) \beta_1(x) = \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s! b_s}{x(x+1) \cdots (x+s)}, \quad \Re(x) > 0,$$

où nous avons posé pour abrégé

$$(23^{\text{bis}}) \quad b_n = \sum_{s=1}^{s=n} \frac{1}{s \cdot 3^{n-s+1}} \left(1 - (-1)^s - \frac{1}{2^s} \right);$$

c'est-à-dire que la série de factorielles (23) est toujours *absolument* convergente dans son champ de convergence.

Comme une autre application de notre théorie de la multiplication de deux séries de factorielles, posons dans (16) $c_0 = 1$, $c_s = 0$ pour $s \geq 1$, nous aurons particulièrement

$$\Omega_1(x) = \frac{1}{x},$$

d'où, en vertu de (16), cette formule remarquable

$$(24) \quad \Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! (b_0 + b_1 + b_2 + \cdots + b_s)}{(x+1)(x+2) \cdots (x+s+1)},$$

qui est certainement valable, pourvu que nous ayons à la fois

$$(24^{\text{bis}}) \quad \Re(x) > 0, \quad \Re(x) > \Lambda.$$

Nous aurons par exemple

$$(25) \quad \left\{ \begin{aligned} \beta\left(\frac{x}{3}\right) - \beta(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s! \, 2 \sin^2 \frac{s+1}{6} \pi}{(x+1)(x+2) \cdots (x+s+1)}, \\ \beta(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s!}{(x+1)(x+2) \cdots (x+s+1)} \cdot \frac{2^{s+1} - 1}{2^{s+1}}, \\ \beta_1(x) &= \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(2s)!}{(x+1)(x+2) \cdots (x+2s+1)}, \end{aligned} \right.$$

séries particulières qui sont *absolument* convergentes toutes les trois, pourvu que $\Re(x) > 0$.

La série nouvelle ainsi obtenue pour $\beta(x)$ est une conséquence de cette équation aux différences finies

$$\beta(x) = \frac{1}{x} - \beta(x+1);$$

en effet, mettons dans (10^{bis}) $x+1$ au lieu de x , puis dans (13) $\omega=1$ et $x+1$ au lieu de x , nous retrouvons la série susdite; de plus, la série obtenue pour $\beta_1(x)$ est une conséquence immédiate de (11^{bis}).

Considérons encore, à cause du résultat remarquable, cette autre série déduite directement de (11^{bis})

$$(26) \quad 1 - (x-1)\beta_1(x-1) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{(-1)^s (s+1)!}{x(x+1) \cdots (x+s)}, \quad \Re(x) > 1,$$

nous aurons immédiatement

$$(26^{\text{bis}}) \quad 1 - (x-1)\beta_1(x-1) = \sum_{s=0}^{\infty} \frac{s! (1 - 2 + 3 - \cdots + (-1)^s (s+1))}{(x+1)(x+2) \cdots (x+s+1)},$$

$$\Re(x) > 0;$$

c'est-à-dire que la série nouvelle (26^{bis}) est *convergente* encore dans la bande $0 < \Re(x) < 1$, où la série (26) elle-même est *divergente*.

Cela posé, les exemples que nous venons de traiter montrent clairement la vérité de cette proposition, très singulière, ce me semble:

Il peut arriver que la série de factorielles obtenue pour le produit $\Omega(x) \cdot \Omega_1(x)$ deviendra absolument convergente dans la bande du plan des x , où un ou deux des facteurs susdits ne sont représentés que par une série non absolument convergente. De plus, il peut arriver que la série susdite deviendra convergente hors du champ commun de convergence des deux facteurs.

§ 4.

Différentiation et intégration d'une série de factorielles.

Une série de factorielles peut être différenciée et intégrée terme à terme dans tout son champ de convergence, parce qu'elle est toujours uniformément convergente, ce qui a lieu aussi pour les deux nouvelles séries ainsi obtenues. Ici nous avons à chercher les développements en séries de factorielles de $\Omega^{(1)}(x)$ et de $\int \Omega(x) dx$.

Considérons d'abord la dérivée $\Omega^{(1)}(x)$, nous aurons, en vertu de (2),

$$(27) \quad \Omega^{(1)}(x) = \int_0^1 \psi(t) t^{x-1} dt, \quad \psi(t) = \varphi(t) \log t,$$

de sorte que la nouvelle fonction génératrice $\psi(t)$ a généralement dans $t=0$ un point critique; le nombre caractéristique correspondant λ_1 deviendra égal au plus grand des deux nombres 0 et λ .

Quant au second nombre caractéristique λ_1' de $\psi(t)$, nous aurons d'abord

$$(-1)^n \psi^{(n)}(1) = -n! \left(\frac{b_{n-1}}{1} + \frac{b_{n-2}}{2} + \dots + \frac{b_0}{n} \right), \quad n \geq 1;$$

car nous avons généralement $b_s = (-1)^s \varphi^{(s)}(1)$. Désignons maintenant par r un positif entier qui deviendra infiniment grand avec n mais tel que

$$\lim_{n=\infty} \left(\frac{r}{n^\varepsilon} \right) = 0,$$

où ε désigne une quantité positive aussi petite qu'on le veut, nous aurons une identité de cette forme

$$\frac{1}{n!} |\psi^{(n)}(1)| < \frac{K n^{\lambda'+\varepsilon}}{n-r-1} + K' \left(\frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n-r} \right) n^{\lambda'+\varepsilon},$$

où K et K' désignent deux quantités positives finies; c'est-à-dire que λ_1' doit être égal au plus grand des deux nombres -1 et λ' , de sorte que nous avons démontré ce théorème général:

La dérivée d'une série de factorielles $\Omega(x)$ est développable en série de factorielles comme suit:

$$(28) \quad \Omega^{(1)}(x) = - \sum_{s=1}^{s=\infty} s! \left(\frac{b_{s-1}}{1} + \frac{b_{s-2}}{2} + \dots + \frac{b_0}{s} \right) \frac{1}{x(x+1) \dots (x+s)},$$

série qui est convergente dans la partie du champ de convergence de $\Omega(x)$ qui est située à droite de l'axe des nombres purement imaginaires.

Les coefficients de la série (28) deviendront assez compliqués même pour les simples fonctions que nous avons introduites dans les deux paragraphes précédents.

Quant à l'intégrale indéfinie de $\Omega(x)$, nous avons immédiatement

$$(29) \quad \int \Omega(x) dx - b_0 \log x + K = \int_0^1 \chi(t) t^{x-1} dt,$$

où K désigne une constante arbitraire, tandis que nous avons posé pour abréger

$$(29^{bis}) \quad \chi(t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{\log t} = \frac{\varphi(t) - \varphi(1)}{1-t} \cdot \frac{1-t}{\log t},$$

ce qui montre que $\chi(t)$ a dans $t=0$ un point singulier, dont le nombre caractéristique λ'' est généralement égal au plus grand des deux nombres 0 et λ .

Pour déterminer le second nombre caractéristique λ_1'' de $\chi(t)$ nous aurons évidemment

$$(-1)^n \chi^{(n)}(1) = (D_t^n \chi(1-t))_{t=0} = n! \sum_{s=0}^{s=n} \frac{b_{n-s+1}}{s!} \left(D_t^s \left(\frac{t}{\log(1-t)} \right) \right)_{t=0}.$$

Cela posé, une formule bien connue*) donnera

$$(\alpha) \quad D_t^n \left(\frac{t}{\log(1-t)} \right)_{t=0} = \frac{n+1}{n!} \cdot \sum_{s=1}^{s=n} \frac{(-1)^s \binom{n}{s}}{\binom{n+s}{s}} \cdot \frac{C_{n+s}^n}{s+1},$$

où les coefficients C_p^r sont les nombres de Stirling, savoir les nombres positifs entiers définis à l'aide de cette identité

$$(30) \quad x(x+1) \cdots (x+p-1) = C_p^0 x^p + C_p^1 x^{p-1} + \cdots + C_p^r x^{p-r} + \cdots + C_p^{p-1} x.$$

Désignons maintenant par P_n l'expression figurant au second membre de (α) , nous verrons qu'il est possible de déterminer un nombre positif fini K tel que

$$|P_n| < (n-1)! K,$$

ce qui donnera immédiatement cette autre inégalité

$$|\chi^{(n)}(1)| < K' n! \sum_{s=0}^{s=n-1} \frac{b_{n-s-1}}{s+1},$$

où K' désigne un nouveau nombre positif fini, de sorte que le second nombre caractéristique λ_1'' est généralement égal au plus grand des deux nombres -1 et λ' ; c'est-à-dire que nous avons démontré cet autre théorème général:

*) Voir par exemple Schlömilch: Compendium, t. II, p. 15; 1879.

La fonction $\int \Omega(x) dx - b_0 \log x$ est développable en série de factorielles comme suit

$$(31) \quad \int \Omega(x) dx - b_0 \log x = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! (b_1 P_s + b_2 P_{s-1} + \dots + b_{s+1} P_0)}{x(x+1) \dots (x+s)},$$

série qui est convergente dans la partie du champ de convergence de la série $\Omega(x)$ qui est située à droite de l'axe des nombres purement imaginaires.

On voit que les expressions générales des coefficients de la série (31) sont très compliquées; mais, après avoir démontré la possibilité du développement en série de factorielles de la fonction susdite, nous avons à étudier dans le § 7 ce problème d'un autre point de vue.

§ 5.

Différentiation et intégration finie de $\Omega(x)$.

Remarquons que $\Omega(x+1)$ est absolument convergente dans tout le champ de convergence de $\Omega(x)$, nous aurons immédiatement ce théorème général:

La différence $\Delta \Omega(x) = \Omega(x+1) - \Omega(x)$ d'une série de factorielles est développable en série de factorielles comme suit:

$$(32) \quad \Delta \Omega(x) = - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{(s+1)! b_s}{x(x+1) \dots (x+s+1)},$$

série qui a le même champ de convergence que $\Omega(x)$.

Supposons ensuite

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt,$$

nous aurons immédiatement

$$(32^{bis}) \quad \Delta \Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t) (t-1) t^{x-1} dt$$

Quant à l'opération inverse $\Delta^{-1} \Omega(x)$, nous aurons immédiatement, en vertu de (32), cette formule

$$\Delta^{-1} \left(\Omega(x) - \frac{b_0}{x} \right) = - \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! b_{s+1}}{x(x+1) \dots (x+s)},$$

où la nouvelle série de factorielles est convergente dans tout le champ de convergence de $\Omega(x)$.

Or, l'opération Δ^{-1} effectuée sur une somme *finie* étant *distributive*, nous aurons

$$\Delta^{-1} \left(\Omega(x) - \frac{b_0}{x} \right) = \Delta^{-1} \Omega(x) - b_0 \Delta \frac{1}{x},$$

où la dernière intégration finie nous conduira à la fonction $\Psi(x)$ de Gauss, savoir la fonction

$$(33) \quad \Psi(x) = D_x \log \Gamma(x) = -C + \sum_{s=0}^{s=\infty} \left(\frac{1}{s+1} - \frac{1}{x+s} \right),$$

où C désigne la constante d'Euler.

Cela posé, nous avons démontré cet autre théorème général:

Pour l'intégrale finie de $\Omega(x)$, nous obtenons cette expression

$$(34) \quad \Delta^{-1} \Omega(x) = b_0 \Psi(x) + \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! b_{s+1}}{x(x+1) \cdots (x+s)} + J(x),$$

où la nouvelle série de factorielles a le même champ de convergence que $\Omega(x)$, tandis que $J(x)$ désigne une fonction arbitraire de x assujettie seulement à satisfaire à cette condition de périodicité $J(x+1) = J(x)$.

Quant à la représentation intégrale de $\Delta^{-1} \Omega(x)$, nous aurons tout d'abord

$$\Omega(x) - \frac{\varphi(1)}{x} = \int_0^1 (\varphi(t) - \varphi(1)) t^{x-1} dt,$$

ce qui donnera, en vertu de (32^{bis}) et (34),

$$\Delta^{-1} \Omega(x) = \varphi(1) \Psi(x) + \int_0^1 \frac{\varphi(1) - \varphi(t)}{1-t} t^{x-1} dt + J(x);$$

de plus, nous aurons évidemment

$$\Psi(x) + C = \int_0^1 \frac{1-t^{x-1}}{1-t} dt,$$

d'où finalement

$$(34^{\text{bis}}) \quad \Delta^{-1} \Omega(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(1) - \varphi(t) t^{x-1}}{1-t} dt + J_1(x),$$

où $J_1(x)$ désigne une nouvelle fonction arbitraire périodique de x .

On voit que l'analogie entre les formules (32) et (34) et les résultats analogues obtenus en différentiant ou en intégrant une série de puissances négatives entières est parfaite. Dans ces circonstances il est digne d'être remarqué que j'ai démontré récemment*) qu'une série de factorielles

*) Annales de l'École Normal (3), t. 21, p. 453; 1904.

peut être transformée à une série de puissances négatives entières, série qui est ou convergente ou asymptotique d'après la définition de M. Poincaré*) dans tous les points très éloignés du demi-plan situé à droite de l'axe des nombres purement imaginaires.

§ 6.

Sur les équations linéaires aux différences finies.

Comme application de nos formules générales nous avons à considérer cette équation linéaire aux différences finies:

$$(35) \quad \sum_{s=0}^{s=n} a_s(x) f(x+n-s) = g(x),$$

où la fonction $g(x)$ au second membre et les coefficients $a_s(x)$ désignent des fonctions données développables en séries de factorielles; nous cherchons une intégrale particulière de (35) développable en série de factorielles aussi.

A cet égard mettons

$$(36) \quad \begin{cases} g(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! b_s}{x(x+1) \cdots (x+s)} \\ a_s(x) = \int_0^1 \psi_s(t) t^{x-1} dt, \quad s = 0, 1, 2, 3, \dots, n, \end{cases}$$

nous avons à chercher la fonction génératrice inconnue $\Phi(t)$, telle que

$$(36^{bis}) \quad f(x) = \int_0^1 \Phi(t) t^{x-1} dt$$

est intégrale particulière de (35).

Cela posé, nous aurons, en vertu des formules générales (14),

$$a_s(x) f(x+n-s) = \int_0^1 X_s(t) t^{x-1} dt,$$

où nous avons posé pour abréger

$$X_s(t) = \int_t^1 \psi_s\left(\frac{t}{\alpha}\right) \Phi(\alpha) \alpha^{n-s-1} d\alpha,$$

*) Acta mathematica, t. 8, p. 297; 1886.

ce qui montrera, en vertu de (35), qu'il s'agit de déterminer $\Phi(t)$ à l'aide de cette identité intégrale:

$$(37) \quad \int_t^1 \Psi(t, \alpha) \Phi(\alpha) d\alpha = \varphi(t),$$

où nous avons posé pour abréger

$$(37^{bis}) \quad \Psi(t, \alpha) = \sum_{s=0}^{s=n} \psi_s \left(\frac{t}{\alpha} \right) \alpha^{n-s-1}.$$

On voit que la détermination générale de $\Phi(t)$ est en tous cas très difficile; certainement une telle détermination n'est pas toujours possible. De plus, supposons déterminée la fonction $\Phi(t)$, il faut qu'elle satisfasse encore aux conditions énumérées dans le commencement du § 1. C'est-à-dire que les séries de factorielles sont de ce point de vue beaucoup plus compliquées que les séries convergentes de puissances négatives entières.

Considérons particulièrement le cas plus simple, où les coefficients de notre équation linéaire sont des constantes, savoir l'équation

$$(38) \quad \sum_{s=0}^{s=n} a_s \cdot f(x+n-s) = g(x),$$

où $g(x)$ est une fonction donnée définie à l'aide des expressions (36), nous aurons ici pour la fonction génératrice $\Phi(t)$ cette expression

$$(39) \quad \Phi(t) = \frac{\varphi(t)}{F(t)},$$

où nous avons posé pour abréger

$$(39^{bis}) \quad F(t) = a_0 t^n + a_1 t^{n-1} + \dots + a_p t^{n-p} + \dots + a_{n-1} t + a_n.$$

Cela posé, il est évident que la fonction $\Phi(t)$ figurant au premier membre de (39) peut être transformée à une somme de termes de cette forme

$$(40) \quad \xi(t) = \frac{k \varphi(t)}{(t-\alpha)^r},$$

où k désigne une constante finie, tandis que r est un positif entier égal à n au plus, ce qui donnera immédiatement

$$(40^{bis}) \quad (-1)^p \xi^{(p)}(1) = \frac{p!}{(1-\alpha)^r} \cdot \sum_{s=0}^{s=p} \binom{r+s-1}{s} \cdot \frac{b_{p-s}}{(1-\alpha)^s}.$$

Supposons maintenant $|1-\alpha| \geq 1$, nous verrons que la fonction $\xi(1-t)$, déduite de (40), est holomorphe à l'intérieur du cercle $|t|=1$; c'est-à-dire que nous avons démontré ce théorème nouveau, je le crois:

La condition nécessaire et suffisante pour que l'équation (38) a une intégrale particulière développable en série de factorielles est que l'équation algébrique- (39^{bis}) n'a aucune de ses racines situées à l'intérieur du cercle $x^2 + y^2 = 2x$.

De plus, la formule (40^{bis}) donnera immédiatement:

Si toutes les racines de (39^{bis}) sont situées hors du cercle susdit, la série de factorielles obtenues pour $f(x)$ a le même champ de convergence que $g(x)$, sinon, il faut admettre encore $\Re(x) > r - 1$, où r désigne le plus grand ordre de multiplicité des racines de (39^{bis}).

Les coefficients, très compliqués du reste, de la série de factorielles obtenue pour $f(x)$ se déterminent à l'aide de (40^{bis}) et des formules analogues. De plus, nous savons à intégrer, à l'aide des fonctions exponentielles, l'équation homogène obtenue de (38) en y mettant $g(x) = 0$; c'est-à-dire que nous connaissons, sous les conditions susdites, l'intégrale complète de notre équation non homogène.

Supposons généralement que $F(t)$ n'ait aucune racine située entre 0 et 1 outre les zéros de $\varphi(t)$, il est évident qu'une intégrale particulière de (38) se présente sous cette forme

$$f(x) = \int_0^1 \frac{\varphi(t)}{F(t)} \cdot t^{x-1} dt;$$

il est digne d'être remarqué aussi que les intégrales particulières de l'équation homogène qui correspond à (38) ne sont jamais développables en séries de factorielles.

Considérons par exemple cette équation du premier ordre

$$(41) \quad f(x+1) = g(x) + \frac{1}{\omega} f(x),$$

où ω est une constante par rapport à x , nous aurons

$$\Phi(t) = \frac{\omega}{\omega t - 1} \cdot \varphi(t),$$

ce qui exige pour ω cette condition

$$(41^{\text{bis}}) \quad \left| \frac{\omega}{\omega - 1} \right| \leq 1, \quad \Re(\omega) \leq \frac{1}{2};$$

cette condition remplie, nous trouvons cette série de factorielles

$$(42) \quad f(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1) \cdots (x+s)} \left(\frac{\omega}{\omega-1} b_s + \left(\frac{\omega}{\omega-1} \right)^2 b_{s-1} + \cdots + \left(\frac{\omega}{\omega-1} \right)^{s+1} b_0 \right)$$

et cette représentation intégrale

$$(42^{\text{bis}}) \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\omega}{\omega t - 1} \cdot \varphi(t) \cdot t^{x-1} dt,$$

intégrale qui satisfait toujours à (41), pourvu qu'elle ait un sens.

Dans le cas beaucoup plus particulier encore, où $g(x) = \frac{1}{x}$, nous aurons pour l'équation correspondante

$$(43) \quad f(x+1) = \frac{1}{x} + \frac{1}{\omega} \cdot f(x)$$

une intégrale particulière de cette forme

$$(43^{\text{bis}}) \quad f(x) = \int_0^1 \frac{\omega}{\omega t - 1} \cdot t^{x-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s!}{x(x+1) \cdots (x+s)} \cdot \left(\frac{\omega}{\omega-1}\right)^{s+1}.$$

Supposons particulièrement $\omega = -1$, $\omega = \frac{1}{2}$, nous retrouvons les séries de factorielles développées dans le § 2, formules (10^{bis}) et (11^{bis}), pour les fonctions $\beta(x)$ et $\beta_1(x)$.

Enfin, remarquons en passant que le résultat (42) peut être obtenu directement de (41) sans introduire des intégrales définies, mais en appliquant simplement la formule générale (24) pour le développement de $f(x)$ et $g(x)$ en séries de factorielles de l'argument $x+1$.

§ 7.

Recherches nouvelles sur les fonctions $\frac{1}{x} \cdot \Omega(x)$, $\Omega^{(1)}(x)$ et $\int \Omega(x) dx$.

Pour simplifier la formule (31) concernant l'intégration indéfinie d'une série de factorielles nous avons à étudier d'un autre point de vue la fonction

$$\Omega(x) = \int_0^1 \varphi(t) t^{x-1} dt = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{s! b_s}{x(x+1) \cdots (x+s)},$$

ce qui nous conduira à des résultats nouveaux très singuliers.

A cet égard mettons dans l'intégrale susdite $t = e^{-z}$, nous aurons

$$(44) \quad \Omega(x) = \int_0^{\infty} f(z) e^{-zx} dz, \quad f(z) = \varphi(e^{-z}),$$

ou, ce qui revient au même:

$$(44^{\text{bis}}) \quad \varphi(t) = f(-\log t),$$

d'où, en vertu d'une formule bien connue*),

$$(\alpha) \quad (-1)^n \varphi^{(n)}(1) = \sum_{s=0}^{s=n-1} C_n^s \cdot (f^{(n-s)}(t))_{t=0},$$

où les coefficients C_n^s désignent les nombres de Stirling définis à l'aide de l'identité (30).

On voit que $f(z)$ doit être holomorphe aux environs du point $z=0$, posons

$$(\beta) \quad f(z) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s}{s!} \cdot z^s,$$

nous aurons $b_0 = a_0$ et généralement, en vertu de (α) ,

$$(45) \quad n! b_n = \sum_{s=0}^{s=n-1} C_n^s \cdot a_{n-s},$$

ce qui donnera pour la série de factorielles obtenue pour $\Omega(x)$ cette nouvelle expression

$$(45^{bis}) \quad \Omega(x) = \frac{a_0}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{a_s C_s^0 + a_{s-1} C_s^1 + \dots + a_1 C_s^{s-1}}{x(x+1) \dots (x+s)}.$$

Substituons maintenant dans l'intégrale définie figurant au second membre de (44) la série de puissances (β) , puis, supposons convergente la série ainsi obtenue en intégrant terme à terme, nous aurons pour $\Omega(x)$ ce développement en série de puissances négatives entières

$$(46) \quad \Omega(x) = \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \frac{a_2}{x^3} + \frac{a_3}{x^4} + \dots$$

Si, au contraire, la série figurant au second membre de (46) est divergente, nous aurons cette série asymptotique

$$(46^{bis}) \quad \Omega(x) \sim \frac{a_0}{x} + \frac{a_1}{x^2} + \dots + \frac{a_{n-1}}{x^n},$$

valable, comme je l'ai fait voir récemment**) dans tous les points très éloignés du demi-plan situé à droite de l'axe des nombres purement imaginaires; la signe \sim désigne une égalité asymptotique d'après la définition de M. Poincaré***).

Revenons maintenant à la formule élémentaire (13), différencions

*) Voir par exemple Schlömilch: Compendium, t. II, p. 12; 1879.

**) Annales de l'École Normale (3), t. 21, p. 453; 1904.

***) Acta Mathematica, t. 8, p. 297; 1886.

$n + 1$ fois par rapport à α , puis mettons $\alpha = 0$, nous aurons ce développement en série de factorielles:

$$(47) \quad \frac{1}{x^n} = \sum_{s=n}^{s=\infty} \frac{C_s^{s-n}}{x(x+1) \cdots (x+s-1)}, \quad \Re(x) > 0.$$

Cela posé, supposons *convergente* la série de puissances négatives entières (46), pourvu que $|x| > \Lambda$, puis développons, à l'aide de (47), tous les termes de cette série, nous aurons une série à double entrée, dont toutes les séries horizontales et verticales sont absolument convergentes, pourvu que $\Re(x) > \Lambda$, ce qui donnera, en vertu de (45^{bis}), précisément la série de factorielles données pour $\Omega(x)$. De plus, supposons *divergente* la série asymptotique (46^{bis}), puis appliquons sur les termes de cette série *formellement* la même méthode, nous retrouvons encore la série de factorielles connue pour $\Omega(x)$; c'est-à-dire que nous avons démontré la légitimité de cette opération avec une série *divergente*:

Supposons développable en série de factorielles la fonction $\Omega(x)$ et formons la série de puissances négatives (46), puis appliquons à tous les termes de cette série l'opération (47), nous obtenons la série de factorielles de $\Omega(x)$, soit que la série (46) est convergente, soit qu'elle est divergente.

Appliquons maintenant cette méthode aux trois fonctions

$$\frac{1}{x} \cdot \Omega(x), \quad \Omega^{(1)}(x), \quad \int \Omega(x) dx,$$

pour lesquelles nous avons démontré l'existence de la série de factorielles susdite dont nous avons déterminé le champ de convergence aussi.

En premier lieu mettons dans (47) $n + 1$ au lieu de n , puis multiplions par x la formule nouvelle, nous aurons

$$\frac{1}{x^n} = \sum_{s=n+1}^{s=\infty} \frac{C_s^{s-n-1}}{(x+1)(x+2) \cdots (x+s-1)}, \quad \Re(x) > 0,$$

puis appliquons cette formule de la même manière que (46), nous aurons cette autre forme de la série (24)

$$(48) \quad \Omega(x) = \sum_{s=0}^{s=\infty} \frac{a_s C_{s+1}^0 + a_{s-1} C_{s+1}^1 + \cdots + a_0 C_{s+1}^s}{(x+1)(x+2) \cdots (x+s+1)},$$

formule qui est très remarquable en comparaison avec (45^{bis}).

Dans son grand Mémoire sur les intégrales *eulériennes* Binet*) a développé ou indiqué au moins les deux systèmes des séries de factorielles qui correspondent à (45^{bis}) et (48) pour ces deux fonctions

*) Journal de l'École polytechnique, cahier 27, pp. 231, 234, 258, 339; 1839.

$$\omega_1(x) = \log x - \Psi(x),$$

$$\omega(x) = \log \Gamma(x) - \left(x - \frac{1}{2}\right) \log x + x - \log \sqrt{2\pi},$$

où $\Psi(x)$ désigne la fonction de Gauss définie par la formule (33). Dans son excellent Mémoire sur la fonction gamma M. Jensen*) a développé les quatre séries susdites en appliquant la méthode que nous venons d'indiquer, tandis que j'ai déduit récemment**) les mêmes formules à l'aide de la série élémentaire (13) de Stirling, méthode qui détermine complètement les champs de convergence des séries susdites, ce qui est impossible par la méthode précédente.

Quant à la dérivée $\Omega^{(1)}(x)$, nous aurons la série de factorielles correspondante en mettant simplement dans (45^{bis}) $-na_{n-1}$ au lieu de a_n , ce qui donnera généralement

$$(49) \quad \Omega^{(1)}(x) = - \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{s a_{s-1} C_s^0 + (s-1) a_{s-2} C_s^1 + \dots + 1 \cdot a_0 C_s^{s-1}}{x(x+1)(x+2) \dots (x+s)}.$$

De la même manière nous obtenons la série de factorielles de $\int \Omega(x) dx - a_0 \log x$ en mettant dans (45^{bis}) $-\frac{a_{n+1}}{n+1}$ au lieu de a_n , ce qui donnera

$$(50) \quad a_0 \log x - \int \Omega(x) dx = \frac{a_1}{x} + \sum_{s=1}^{s=\infty} \frac{\frac{a_{s+1}}{s+1} \cdot C_s^0 + \frac{a_s}{s} \cdot C_s^1 + \dots + \frac{a_2}{2} \cdot C_s^{s-1}}{x(x+1)(x+2) \dots (x+s)}.$$

L'analogie entre les quatre formules (45^{bis}), (48), (49) et (50) est frappante; mais il doit être remarqué expressément que la méthode nouvelle que nous venons d'appliquer est *impossible* comme méthode *indépendante*, car:

1° La méthode n'est applicable qu'aux fonctions développables en série de puissances négatives de la forme (46), propriété qui n'est point de tout *nécessaire*; par exemple la fonction $\beta(x)$ figurant dans la formule (10^{bis}) est développable en série de factorielles convergente dans toute l'étendue du plan des x ; mais cette fonction n'est pas développable en série convergente de la forme (46).

2° Dans le cas particulier, où $\Omega(x)$ est développable en série de puissances de la forme (46), la méthode susdite ne détermine pas généralement le champ complet de convergence de la série de factorielles ainsi obtenue.

Copenhague, le 27 janvier 1904.

*) Nyt Tidsskrift for Mathematikk, t. II B; 1891.

**) Archiv der Math. u. Ph. (3) t. 6, p. 223—231; Annali di Matematica (3) t. 9, p. 237—245; 1903.