IV. *Erwiederung auf die Bemerkungen von Hrn. Clausius; von H. Helmholtz.*

Herr Clausius greift in diesen Annalen Bd. LXXXIX, S. 568 einige Stellen meiner Schrift über die Erhaltung der Kraft an. Bei dem ersten Punkte, den er behandelt, die Ableitung des Gesetzes der Wärmeentwickelung bei elektrischen Entladungen aus dem Principe von der Erhaltung der Kraft betreffend, ist seine Polemik durch ein vollständiges Mifsverständnifs dessen, was ich gemeint und ausgesprochen habe, bedingt.

Ich soll nämlich von der irrigen Ansicht ausgegangen seyn, das, was ich Potential einer Masse auf sich selbst genannt habe, sey gleich der gethanen Arbeit, während es doch in Wahrheit doppelt so grofs ist, und als Beleg dafür citirt Clausius auf S. 569 seines Aufsatzes eine Stelle aus S. 39 meiner Schrift so, als hätte ich diese Stelle allgemeingültig hingestellt, während ich ihr vielmehr besondere Annahmen vorausgeschickt habe, welche Bedingungen ihrer Gültigkeit sind. Wenn aber auch meine Worte in jener Stelle vielleicht einen Zweifel erregen konnten, so habe ich doch auf der folgenden Seite den auch von Clausius citirten mathematischen Ausdruck für die durch zwei elektrisirte Körper repräsentirte Arbeit gegeben, aus der meine Ansicht über diesen Punkt jedenfalls ganz unzweideutig zu entnehmen war. Man braucht nur den einen der beiden Körper als unendlich grofs und unendlich entfernt anzunehmen, so erhält man die Arbeit, welche der elektrischen Vertheilung in dem anderen Körper entspricht, gleich dem halben Potentiale seiner Elektricität auf sich selbst, also übereinstimmend mit Clausius gleich dem, was dieser ganzes Potential genannt hat. Ich habe diese Folgerung an jener Stelle nicht ausdrücklich ausgesprochen, weil wir es, streng genommen, nie mit einem elektrischen Körper allein zu thun haben, sondern stets mindestens mit zweien, von denen der zweite die Erde seyn kann. Doch findet sich die genannte Folgerung für ganz analoge Verhältnisse bei Magneten auf S. 63 meiner Schrift, wo ausdrücklich das halbe Potential eines Magneten auf sich selbst als Maaſs der Arbeit anerkannt wird.

Meine Beweisführung geht nicht von einer falschen Annahme über das Arbeits-Aequivalent des genannten Potentials aus, sondern hat im Gegentheile den Zweck, dieſs Arbeits-Aequivalent erst zu finden. Bei einer Bewegung zweier elektrisirten Körper ohne Aenderung der Vertheilung ist, wie ich unmittelbar vorher gezeigt habe, der Gewinn an Arbeit der Differenz des Potentials der elektrischen Massen auf einander gleich. Jetzt muſste auch der Arbeitsgewinn bei Aenderung der Vertheilung gefunden werden. Dieſs geschah durch die Betrachtung eines Falls von Entladung, wobei ich die wirkende Elektricität so in vier elektrische Massen eintheilte, daſs die Arbeit, welche bei der Entladung durch Vertheilungsänderungen dieser vier Massen entstand, gleich Null war, indem nämlich zwei von diesen vier Massen ihren Platz und ihre Vertheilung behielten, zwei andere von gleicher Gröſse und entgegengesetztem Zeichen beides vertauschten, wodurch offenbar keine Arbeit gewonnen oder verloren wird. Es wurde dadurch also ein Fall von Bewegung mit Vertheilungsänderung auf einen ohne Vertheilungsänderung zurückgeführt, und es konnte deshalb die gewonnene Arbeit gleich der Differenz der Potentialsumme gesetzt werden. Allerdings habe ich den Grund, warum letzteres geschehen konnte, dem Leser zu ergänzen überlassen. Wenn Herr Clausius meinen Beweis in diesem Sinne ansieht, wird er ihn, denke ich, richtig finden.

Zweitens nimmt Clausius Anstoſs daran, daſs ich eine von Vorsselman de Heer aus den Versuchen von Rieſs gezogene Folgerung aufgenommen habe, welche eine unerlaubte Verallgemeinerung der durch die Versuche gewonnenen Resultate enthalte. Er hat nicht bemerkt, daſs ich dabei selbst auf den Aufsatz von Rieſs verwiesen habe, welcher die Bedenken gegen eine solche Verallgemeinerung enthält. Ich habe also nichts Unsicheres als sicher, und nichts Lückenhaftes als vollständig ausgeben wollen. In seiner eigenen Untersuchung der Sache gelangt Clausius zu dem Ergebnisse, dafs die Schlufsweise von Vorsselman de Heer, die ich, indem ich sie citirte, mindestens als berücksichtigenswerth bezeichnet hatte, für den vorliegenden Zweck vorläufig ganz unbrauchbar sey. Es könnte also scheinen, als sey ich ganz unberechtigt gewesen, auf jene Folgerungen hinzuweisen. Indessen bitte ich zu bemerken, dafs Clausius zu dieser vollständigen Verwerfung nur dadurch kommt, dafs er schliefslich auch das von Riefs aus seinen Versuchen abgeleitete Gesetz als unsicher verwirft. Hebt man die thatsächliche Grundlage auf, so fallen natürlich auch alle Folgerungen daraus zusammen. Wir wollen zunächst also festzustellen suchen, was von den Schlüssen von Vorsselman de Heer stehen bleibe und für unseren Zweck brauchbar sey, wenn wir die Gesetze von Riefs so weit als gültig betrachten, wie dieser es selbst als erlaubt ansieht, und aufserdem nur dieselbe Annahme als wahrscheinlich beibehalten, welche Clausius selbst anwendet, wo er aus dem theoretischen Principe zu folgern sucht, dafs die Wärmeentwickelung in den einzelnen Theilen des Schliefsungsdrahtes dem Producte aus Quantität und Dichtigkeit der Elektricität in der Batterie proportional seyn müsse, die Annahme nämlich, dafs bei Schliefsungsbögen von grofser reducirter Länge gegen die in den continuirlichen Theilen des Schliefsungsbogens entwickelte Wärmemenge die Arbeits-Aequivalente der übrigen Entladungsvorgänge verschwinden. Diese Annahme ist in der That deshalb höchst wahrscheinlich richtig, weil die im ganzen continuirlichen Theile des Schliefsungsbogens entwickelte Wärme bei wachsender Länge desselben nach den Gesetzen von Riefs fortdauernd wächst, und alle übrigen bekannten Entladungswirkungen dagegen fortdauernd abzunehmen scheinen. Unter diesen Umständen können wir folgern, dafs mindestens bei Schliefsungsbögen von sehr grofser reducirter Länge und einer beschränkten Anzahl von Verbindungsstellen verschiedener Metalle, die bei der Entladung entwickelte Wärme bis auf verschwindend kleine Theile von der Länge, Verzweigung und Zusammensetzung des Bogens unabhängig sey. Ist w die reducirte Länge des continuirlichen Theils des verzweigten oder unverzweigten Leitungsdrahtes, ϑ die in diesem Theile entwickelte Wärme, q die Quantität der Elektricität in der Batterie, und s die Zahl der gleich construirten Leydener Flaschen, so ist nach Riefs

$$\vartheta = \frac{aw}{b+w} \cdot \frac{q^2}{s}$$

wo a und b Constanten sind. Wird nun bei wachsender Gröfse von w nicht gleichzeitig die Zahl der Verbindungsstellen verschiedener Metalle vermehrt, so wird sich nach den obigen Voraussetzungen eine Gröfse von w erreichen lassen, wo die Wärmeentwickelung in den Verbindungsstellen, im Funken, in den Belegen der Flaschen und andere Arbeits-Aequivalente gegen ϑ verschwindet, ϑ also bis auf unmerklich kleine Quantitäten die ganze entwickelte Wärme repräsentirt. Ferner wird sich w auch so grofs machen lassen, dafs b dagegen verschwindet, dann wird

$$\vartheta = a\frac{q^2}{s}$$

wie es das theoretische Gesetz verlangt.

Dagegen will ich Clausius gern zugeben, dafs wir nicht durch thatsächliche Beweise entscheiden können, ob bei den Versuchen von Riefs die gemachten Voraussezzungen erfüllt waren, weder ob die Theile der Arbeit verschwanden, welche nicht dem Gesetze der Wärmeentwickelung in linearen Leitern von constantem Widerstande folgen, noch auch ob die Gröfse b wirklich, wenn von ihr die reducirten Längen der constanten Theile des Schliefsungsbogens ab und zu w hinzugerechnet wurden, gegen w verschwindend klein war. Setzen wir das theoretische Gesetz, das aus der Aquivalenz von Wärme und mechanischer Kraft hergeleitet ist, als richtig voraus, so folgt daraus allerdings, dafs, so weit die Versuche von Riefs sich der von ihm daraus abgeleiteten Formel fügen, die gesammte Arbeitsleistung in den nicht untersuchten Theilen der Leitung aequivalent seyn mufste der Wärme, welche durch die Entladung in der reducirten Länge b zu entwickeln war. Denn die ganze zu leistende Arbeit ist

$$a \cdot \frac{q^2}{s},$$

die in den linearen Leitungen vom Widerstande w entwickelte

$$\frac{aw}{b + w} \cdot \frac{q^2}{s},$$

also die Differenz beider

$$\frac{ab}{b + w} \cdot \frac{q^2}{s},$$

d. h. gleich der Wärme, welche in der reducirten Länge b zu entwickeln wäre. Während also durch das aus den Versuchen hergeleitete Gesetz, wenigstens theilweise, für grofse Werthe von w, wo die etwa vorhandenen störenden Umstände verschwinden mufsten, das allgemeine Princip bestätigt wird, macht letzteres wieder wahrscheinlich, dafs unter den Bedingungen, wo jene Versuche angestellt sind, entweder keine unbekannten Umstände einen merklichen Einflufs hatten, oder dafs sie, wenn sie wirksam waren, auch mit unter jenes empirische Gesetz fielen.

Clausius deutet in seinem Aufsatze an, dafs eine solche Schlufsfolgerung, wie ich sie eben gezogen habe, möglich sey; doch läfst er sich nicht darauf ein, sie zu ziehen, weil ihm die Richtigkeit der empirischen Formel von Riefs zweifelhaft erscheint. Er macht darauf aufmerksam, dafs die allerdings kleinen Abweichungen zwischen der Formel und den Beobachtungen ein constantes Gesetz zu befolgen scheinen. Indessen ist diefs fast allgemein bei den Beobachtungsreihen von Riefs mit dem elektrischen Thermometer der Fall. Die stärkeren Erwärmungen sind fast immer kleiner gefunden, als sie nach der Rechnung seyn sollten, was davon herrühren mag, dafs der Wärmeverlust im Thermometer bei höheren Temperaturunterschieden verhältnifsmäfsig stärker war. Indessen sind die Abweichungen überall so gering, dafs wir bei der grofsen Schwierigkeit dieser Versuche deshalb wohl noch keinen Verdacht gegen die Gesetze zu schöpfen brauchen. Mindestens sehe ich keinen Grund, den einen Factor der Formel, welcher vom Widerstande abhängig ist, mehr zu bezweifeln, als den von der Ladung abhängigen, welchen Clausius für seine Folgerungen benutzt. Indessen wenn er *geneigt ist*, die Uebereinstimmung der Versuche mit jenem ersten Theile des Gesetzes für einen blofsen Zufall zu halten, so läfst sich darüber natürlich nicht weiter mit ihm rechten. Ich bin gern geneigt, jeden Zweifel, der uns stets dazu führen kann, die Thatsachen genauer festzustellen, zu ehren; aber wir müssen uns dadurch nicht verhindern lassen, uns die Consequenzen solcher Gesetze klar zu machen, die durch eine lange Reihe von Thatsachen so weit erwiesen sind, als es zur Zeit möglich erscheint

Clausius neigt sich in dieser Sache zu der Annahme, dafs die bisher nicht untersuchten Theile der Arbeit einen beträchtlichen Theil der Gesammtwirkung bilden. Mir schien aus der Uebereinstimmung des theoretischen und empirischen Gesetzes das Gegentheil wahrscheinlicher. Indessen da es an factischen Entscheidungsmitteln ganz fehlt, ist es unnütz über die gröfsere oder geringere Wahrscheinlichkeit der einen oder der anderen Annahme zu streiten. Ich kann es deshalb wohl unterlassen, gegen die Wahrscheinlichkeitsgründe, welche Clausius vorgebracht hat, Einwendungen zu machen und andere dagegen zu stellen, besonders da eine Entscheidung der Hauptpunkte durch Versuche nicht eben allzu schwer erscheint.

Der dritte Punkt, den Clausius angegriffen hat, betrifft den Beweis des folgenden allgemeinen Satzes: *das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft gilt nur da, wo die wirkenden Kräfte sich auflösen lassen in Kräfte materieller Punkte, welche in der Richtung der Verbindungslinie wirken, und deren Intensität nur von der Entfernung* *abhängt.* Wir wollen auf solche Kräfte allein den besonderen Namen Centralkräfte anwenden, wie es in meiner Schrift schon geschehen ist.

Ich gebe in meiner Schrift zuerst die bekannte analytische Folgerung, *dafs in einem solchen Falle* Richtung und Gröfse der auf einen der materiellen Punkte wirkenden Gesammtkraft nur Function von Raumgröfsen (Coordinaten) nicht von Zeit, Geschwindigkeit u. s. w. seyn können. Dieser Theil des Beweises läfst sich ausführen, ohne die auf den betrachteten Punkt wirkende Gesammtkraft in ihre einzelnen Theile aufzulösen, die den einzelnen wirkenden Punkten angehören. Der Grund, warum es nicht ganz unwichtig erscheint, die Theile der Folgerungen besonders hinzustellen, welche eine solche Auflösung nicht erfordern, wird weiter unten erhellen.

Um die Kräfte zu finden, mit denen zwei einzelne materielle Punkte gegen einander wirken, mufs ich natürlich das System aufgelöst denken, und zwei solche Punkte allein betrachten. Dieser Theil des Beweises kann übrigens von dem ersten ganz unabhängig gemacht werden, und auf ihn beziehen sich die Einwürfe von Clausius. Er behauptet nämlich, ich hätte aufser der Annahme, dafs die Erhaltung der lebendigen Kraft stattfinde, noch eine zweite Annahme gemacht, die nämlich, dafs die Gröfse der Kraft Function der Entfernung sey, und daraus erst geschlossen, dafs die Richtung der Kraft die der Verbindungslinie sey. Ich habe aber in der betreffenden Stelle die Behauptung über die Gröfse der Kraft nicht als Annahme, sondern als Folgerung aus dem vorhergehenden Theile des Beweises hingestellt, und wenn ich ein neues Princip angewendet habe, so war es nur das Princip, wenn man es so nennen will, dafs Stärke und Richtung reell vorhandener Naturkräfte nicht von der Lage blofs vorgestellter Coordinatsysteme, sondern nur von der Lage reell vorhandener physischer Objecte abhängig gemacht werden könnten.

Da dieser Theil des Beweises übrigens in meiner Schrift durch die Verbindung mit dem ersten Theile schwerfälliger geworden ist als nöthig war, und wie ich sehe auch in Beziehung der Gedankenverbindung schärfer seyn könnte, so möge es mir wegen der Wichtigkeit des bestrittenen Punktes erlaubt seyn, ihn hier abgetrennt von dem ersten Theile und mit specieller Angabe aller seiner Vordersätze wieder anzuführen, damit man die Grundlagen auf denen er ruht, klar übersehe. Das Princip von der Erhaltung der lebendigen Kraft ist gemäfs der Formulirung auf S. 9 meiner Schrift, wenn wir es nur auf bewegliche Massenpunkte beziehen, folgendes: »*Wenn in beliebiger Zahl bewegliche Massenpunkte sich nur unter dem Einflusse solcher Kräfte bewegen, die sie selbst gegen einander ausüben, so ist die Summe der lebendigen Kräfte aller zusammengenommen zu allen Zeitpunkten dieselbe, in welchen alle Punkte dieselben relativen Lagen gegen einander einnehmen, wie auch ihre Bahnen und Geschwindigkeiten in der Zwischenzeit gewesen seyn mögen.*« Ich mufs hier besonders auf den Begriff der relativen Lage aufmerksam machen, der vielleicht nicht von allen Mechanikern in diesem Principe angewendet worden ist, der aber offenbar für die physikalische Anwendung des Princips durchaus wesentlich ist. Ich denke, es wird gegen folgende Definition dieses Begriffs nichts einzuwenden seyn: »*Gleiche relative Lage zu einander haben bewegliche Punkte, so oft ein Coordinatensystem zu construiren ist, in welchem alle ihre Coordinaten beziehungsweise dieselben Werthe wiederbekommen.*«

Aus dieser Definition folgt unmittelbar für zwei Punkte, dafs sie dieselbe relative Lage zu einander haben, so oft sie sich in gleicher Entfernung von einander befinden; denn so oft diefs der Fall ist, läfst sich nicht blofs ein, sondern es lassen sich durch Drehung dieses einen um die Verbindungslinie der Punkte unzählig viele Coordinatsysteme finden, in denen die Coordinaten beider Punkte beziehungsweise dieselben Werthe annehmen. Die Summe der lebendigen Kräfte soll nach der Annahme gleich seyn bei gleicher relativer Lage der Punkte. Die relative Lage ist gleich bei gleicher Entfernung, folglich wird durch unsere

Annahme auch bedingt, daſs für zwei Punkte die lebendige Kraft gleich sey bei gleicher Entfernung, also ihrer Gröſse nach abhängig sey nur von der Entfernung. Hiervon geht *der zweite Theil meines Beweises aus, der sich auf zwei* einzelne Punkte bezieht. Nennen wir die ganze lebendige Kraft des Systems L, welche Gröſse also nach dem eben Gesagten Function der Entfernung r ist. Die Coordinaten der beiden beweglichen Punkte seyen beziehlich x_1, y_1, z_1 und x_2, y_2, z_2, die Componenten der Kraft, welche auf den ersten Punkt ausgeübt wird, X, Y, Z, und ihre Resultante R, so ist nach bekannten analytischen Sätzen

$$X = \frac{dL}{dx_2} \text{ oder}$$

$$= \frac{dL}{dr}\frac{dr}{dx_2} \text{ oder}$$

$$1)\quad X = \frac{dL}{dr}\frac{x_2 - x_1}{r} \text{ und ebenso}$$

$$2)\quad Y = \frac{dL}{dr}\frac{y_2 - y_1}{r}$$

$$3)\quad Z = \frac{dL}{dr}\frac{z_2 - z_1}{r}$$

$$4)\quad R = \sqrt{X^2 + Y^2 + Z^2} = \frac{dL}{dr}.$$

Die Gleichungen 1, 2 und 3 sagen aus, daſs die Kraft nach der Richtung der Verbindungslinie wirke, die Gleichung 4, daſs ihre Gröſse Function der Entfernung r sey; *q.e.d.*

Clausius stellt meinen Sätzen die Möglichkeit entgegen, daſs bei den Bewegungen eines beweglichen Punktes b um einen festen a die lebendige Kraft eine beliebige Function der Coordinaten sey. Eine solche Annahme würde zunächst der oben gegebenen Formulirung des Princips von der Erhaltung der Kraft nicht gemäſs seyn; sie würde also rein logisch genommen kein Gewicht gegen die Folgerungen enthalten, die ich daraus gezogen habe. Aber es ist dagegen auch zu erinnern, daſs wenn diese Annahme auch zuweilen bei mathematischen Untersuchungen auf dem

Papiere, wo man sich die Coordinataxen hinzeichnen kann, eine erlaubte und nützliche Vereinfachung der Vorstellung seyn kann, sie sich doch nicht auf die physikalische Wirklichkeit übertragen läfst, so lange wir dem Grundsatze treu bleiben wollen, für reelle Wirkungen den vollständigen Grund auch nur in den Beziehungen reeller Dinge zu einander zu suchen. Denn wenn der feste Punkt *a* irgendwo im Raume gegeben wäre, müfsten doch auch unmittelbar dadurch, dafs er gegeben ist, diejenigen Richtungen gegeben seyn, in denen die lebendige Kraft um ihn herum die gröfste oder die kleinste ist, und diese Richtungen können ersichtlich durch die blofse Lage des Punktes nicht gegeben seyn. Wir müssen hier scharf zwischen einem Punkte und einem körperlichen Elemente unterscheiden. Ein körperliches Element hat drei Dimensionen und durch seine Lage sind deshalb auch Richtungen bestimmt. Sobald uns z. B. die Lage eines körperlichen Elements eines Krystalls vollständig gegeben ist, sind uns auch die Richtungen der Krystallaxen gegeben. Demgemäfs liegt auch kein Widerspruch darin, dafs ein solches Element nach verschiedenen Richtungen verschiedene Kräfte ausübe, wie es z. B. die Elemente eines magnetisirten Körpers thun. Aber innerhalb eines solchen Elements können wir uns auch eine unendliche Verschiedenheit von wirkenden Punkten denken. Körperliche Elemente sind deshalb noch nicht das letzte gleichartigste, bei dem unsere Analyse der Kräfte aufhören müfste.

Wenn also die Mechaniker in einem beweglichen Systeme von Massenpunkten die lebendige Kraft als Function der Coordinaten der Punkte betrachten, so dürfen sie hier statt der Punkte nicht körperliche Elemente substituiren, denn dann würde die lebendige Kraft auch noch von den Richtungen dreier fester Axen in jedem Elemente abhängen. Dem entsprechend müssen wir auch in dem Beispiele von Clausius statt des festen Punkts *a* ein körperliches Element setzen. Wenn nun die lebendige Kraft des bewegten Punktes *b* eine beliebige Function der Coordinaten φ ist, so kann gefragt werden, ob in jedem Falle eine Anordnung von wirkenden Punkten mit Centralkräften innerhalb des Volumelements a möglich sey, welche die lebendige Kraft φ hervorbringen könnte.

Es läfst sich nun einsehen, dafs diefs für Entfernungen, gegen welche die Gröfse des Elements verschwindet, stets möglich sey, und auch, dafs sogar jedesmal unendlich viele verschiedene Anordnungen dieser Art existiren werden. Unter ihnen ist für den zu führenden Beweis diejenige die bequemste, wo wir uns die wirkenden Punkte auf der Oberfläche einer unendlich kleinen Kugel vom Radius ϱ vertheilt denken. Die Function φ sey nach den Kugelfunctionen von Laplace entwickelt. Wenn φ, wie wir hier annehmen müssen, continuirlich ist, so giebt diese Entwickelung bekanntlich stets eine convergirende Reihe, und indem wir eine gewisse endliche Anzahl ihrer Glieder benutzen, können wir dadurch die Function φ mit jedem beliebigen Grade von Genauigkeit darstellen. Der Mittelpunkt des Coordinatensystems sey im Mittelpunkte der Kugel. Die Coordinaten eines äufseren Punktes seyen

$$x = r\cos\omega,$$
$$y = r\sin\omega\sin\vartheta,$$
$$z = r\sin\omega\cos\vartheta.$$

Die eines Punktes auf der Kugel seyen

$$a = \varrho\cos\alpha,$$
$$b = \varrho\sin\alpha\sin\beta,$$
$$c = \varrho\sin\alpha\cos\beta.$$

Wir betrachten ϱ als verschwindend klein gegen r, und nennen den reciproken Werth der letztern Gröfse e, den der Entfernung der beiden Punkte xyz und abc dagegen ε, so dafs also

$$e = \frac{1}{r}$$

$$\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2 + (z-c)^2}}$$

Wir setzen ferner

$$\varepsilon - e = \Delta e.$$

Bekannt ist die Entwickelung von ε nach Kugelfunctionen, deren Glieder die Form haben

$$b_{(n,\,m)}\varrho^n e^{n+1}\frac{d^m P_n(\omega)}{d(\cos\omega)^m}\,\frac{d^m P_n(\alpha)}{d(\cos\alpha)^m}\sin^m\omega\sin^m\alpha\cos[m(\vartheta-\beta)],$$

wo $b_{(n,m)}$ ein Zahlencoëfficient und $P_n(\omega)$ eine ganze Function des $n$ten Grades von $\cos\omega$ ist, welche entweder nur gerade oder nur ungerade Potenzen dieser Gröfse enthält. Die Entwickelung von Δe ergiebt sich daraus sogleich, wenn man das erste Glied der Reihe für ε, welches e ist, wegnimmt. Die Entwickelung der Function φ liefert dagegen eine Summe von Gliedern der Form

$$\psi_{(e)}\frac{d^m P_n(\omega)}{d(\cos\omega)^m}\sin^m\omega\cos(m\vartheta)\ \text{oder}$$

$$\psi_{(e)}\frac{d^m P_n(\omega)}{d(\cos\omega)^m}\sin^m\omega\sin(m\vartheta)$$

wo ψ eine Function von e ist, die jede mögliche Form haben kann. Wir wollen die Reihe abschliefsen mit den Gliedern für welche $n=\nu$ ist.

Die Aufgabe ist also: für die Punkte der Kugeloberfläche eine Function U von ε, α und β so zu bestimmen, dafs wir haben:

$$\varphi=\int_0^\pi\!\!\int_0^{2\pi} U\varrho^2\sin\alpha\,d\alpha\,d\beta.$$

Wir können nun U in eine Summe von Theilen zerlegen, welche einzelnen Gliedern oder Gliedergruppen der Reihe für φ entsprechen. Nehmen wir aus dieser Reihe alle Glieder heraus, für welche m einen constanten Werth μ, n dagegen die Werthe ν, $\nu-2$, $\nu-4$ u. s. w. bis μ oder $\mu+1$ hin hat, und welche $\cos(m\vartheta)$ als Factor enthalten, und bezeichnen wir die Summe dieser Glieder mit $\varphi_{\nu\mu}$, den dazu gehörigen Theil von U mit $U_{\nu\mu}$, so läfst sich zeigen, dafs der Gleichung

$$\varphi_{\nu\mu}=\int_0^\pi\!\!\int_0^{2\pi} U_{\nu\mu}\varrho^2\sin\alpha\,d\alpha\,d\beta \qquad 1)$$

Genüge geschieht, wenn wir für $U_{\nu\mu}$ eine ähnliche Summe setzen, wie $\varphi_{\nu\mu}$ ist, deren Glieder die Form haben

$$u_{n\mu} \frac{d^{\mu} P_n(\alpha)}{d(\cos\alpha)^{\mu}} \sin^{\mu}\alpha \cos(\mu\beta),$$

wo ebenfalls n die Werthe ν, $\nu - 2$, $\nu - 4$ u. s. w. bis μ oder $\mu + 1$ annimmt, und u eine Function von ε allein ist.

Setzt man nun für $U_{\nu\mu}$ in die Gleichung 1) diese Summe, entwickelt jedes u nach dem Taylorschen Satze

$$u_{\varepsilon} = u_e + \frac{d_e u}{de} \Delta e + \frac{1}{1.2} \cdot \frac{d_e^2 u}{de^2} \Delta e^2 + \text{etc.},$$

setzt auch für Δe seine Entwickelung nach Kugelfunctionen, so kann man schliefslich alle vorhandenen Gröfsen als constante Factoren vor das Integralzeichen setzen, mit Ausnahme der Kugelfunctionen und trigonometrischen Functionen von α und β, und die Integration dann ausführen. Wenn man weiter berücksichtigt, dafs

$$\int_0^{2\pi} \cos(p\beta) \cos[q(\vartheta - \beta)]\, d\beta = 0$$

so oft nicht p gleich q ist, dafs ferner

$$\int_0^{\pi} \frac{d^m P_n(\alpha)}{d(\cos\alpha)^m} \cos^p\alpha \sin^{2m+1}\alpha\, d\alpha = 0$$

so oft p kleiner als $n - m$ ist, und behält man ferner von den Gliedern, welche als Factor dieselbe Function $u_{n\mu}$ oder einen ihrer Differentialquotienten enthalten, nur diejenigen bei, welche mit den niedrigsten Potenzen von ϱ multiplicirt sind, da ϱ so klein gemacht werden kann als man will, so reducirt sich schliefslich die Gleichung 1) auf ein System linearer, partieller Differentialgleichungen

$$\frac{1}{\varrho^\nu}\psi_{\nu\mu}=a_1 e^{\nu+1}\frac{du_{\nu\mu}}{de}+a_2 e^{\nu+2}\frac{d^2u_{\nu\mu}}{de^2}+\text{etc.}$$
$$+a_{(\nu-\mu)}e^{2\nu-\mu}\frac{d^{\nu-\mu}u_{\nu\mu}}{de^{\nu-\mu}}$$
$$\frac{1}{\varrho^{\nu-2}}\psi_{(\nu-2)\mu}=b_1 e^{\nu-1}\frac{du_{\nu-2,\mu}}{de}+b_2 e^\nu\frac{d^2u_{\nu-2,\mu}}{de^2}+\text{etc.}$$
$$+b_{\nu-2-\mu}e^{2\nu-4-\mu}\frac{d^{\nu-2-\mu}u_{\nu-2,\mu}}{de^{\nu-2-\mu}}+\varrho^2 c_2 e^{\nu+2}\frac{d^2u_{\nu\mu}}{de^2}+\text{etc.}$$
$$+\varrho^2 c_{(\nu-\mu)}e^{2\nu-\mu}\frac{d^{\nu-\mu}u_{\nu\mu}}{de^{\nu-\mu}}.$$

u. s. w.

Die Gröfsen a, b, c u. s. w. sind Zahlencoëfficienten. Aus der ersten dieser Gleichungen kann man nach bekannten Integrationsregeln $u_{(\nu,\mu)}$, aus der zweiten dann $u_{(\nu-2,\mu)}$ finden u. s. w. Aus dem Verfahren, welches man bei der Integration zu befolgen hat, geht auch hervor, dafs wenn die Functionen ψ für endliche Werthe von e endlich sind, auch die Gröfsen $\varrho^\nu u_{\nu\mu}$ und deren Ableitungen nach e, so weit sie in unseren Reihenentwickelungen vorkommen, für endliche Werthe von e und r stets endlich sind. Sowie somit die Theile von $U_{\nu\mu}$ gefunden sind, lassen sich die für jedes andere ähnliche Aggregat von Gliedern von φ finden, und somit läfst sich die gestellte Aufgabe jedenfalls bis zu jedem beliebigen Grade von Genauigkeit lösen.

Von einer anderen Seite hätte ich vielleicht Einwendungen gegen meinen Satz erwarten können. Ich habe nämlich ein Princip angewendet, welches allerdings in der mathematischen Mechanik ganz allgemein gebraucht wird, nach dessen Berechtigung aber vielleicht gefragt werden könnte. Ich habe nämlich vorausgesetzt, dafs die Kraft, welche ein Punkt a auf einen anderen b ausübt, unabhängig von der Anwesenheit jedes dritten Punktes c sey, so dafs also die Kraft welche a und c gleichzeitig auf b ausüben, die Summe derjenigen ist, welche sie einzeln genommen ausüben würden. Nur unter dieser Voraussetzung bin ich berechtigt anzunehmen, wie es in dem vorausgegangenen Beweise geschehen mufste, dafs das, was für die Kräfte der beiden bewegten Punkte a und b, wenn sie sich allein befinden gilt, auch noch gelte, wenn sie sich verbunden mit einem gröfseren Systeme materieller Punkte bewegen. Wenn wir die Richtigkeit dieses Princips anerkennen, wie es bisher in der Mechanik immer geschehen ist, so folgt daraus, dafs die lebendige Kraft nicht eine ganz beliebige Function der Coordinaten des Systems seyn könne, sondern eine Function, welche gewisse particuläre Differentialgleichungen erfüllen müsse. Nennen wir L die lebendige Kraft, a, b, c, d u. s. w. die einzelnen materiellen Punkte, x_a, y_a, z_a, x_b, y_b, z_b u. s. w. ihre Coordinaten, X_{ab} die der x Axe parallele Componente der Kraft, welche der Punkt b auf den Punkt a ausübt, so ist nach bekannten Sätzen

$$\frac{dL}{dx_a} = X_{ab} + X_{ac} + X_{ad} + \text{etc.}$$

Die Kraft X_{ab} würde nach dem eben ausgesprochenen Principe unabhängig seyn von der Anwesenheit oder Lage sämmtlicher anderen materiellen Punkte, mit Ausnahme von a und b, würde also auch nur Function von den Coordinaten dieser Punkte seyn können, ebenso X_{ac} nur Function der Coordinaten von a und von c. Daraus folgt, wenn wir nach y_b differenziren, dafs

$$\frac{d^2 L}{dx_a, dy_b} = \frac{dX_{ab}}{dy_b}.$$

Da der Ausdruck der rechten Seite nur noch Function der Coordinaten von a und b ist, kann auch der der linken nur eine eben solche Function seyn. Es müssen also alle Differenzialquotienten von der Form

$$\frac{d^3 L}{dx_a, dy_b, dz_c} \text{ oder } \frac{d^2 L}{dx_a, dx_b, dy_c} \text{ oder } \frac{d^2 L}{dx_a, dx_b, dx_c}$$

gleich Null seyn.

Verbinden wir hiermit, was ich eben aus dem Begriffe der relativen Lage für die physikalische Anwendbarkeit hergeleitet habe, so folgt, dafs die Function L eine Summe von Functionen seyn mufs, deren jede nur abhängig von der Entfernung zweier einzelnen Punkte ist, so wie ich sie in meiner Abhandlung hingestellt habe.

Was endlich den vierten Punkt betrifft, der glücklicherweise nicht in wesentlicher Verbindung mit dem Hauptthema meines Buches steht, nämlich das, was ich über die Schrift von Holtzmann gesagt habe, so mufs ich hier allerdings einen Irrthum eingestehen. Holtzmann spricht im Anfange sein Princip so aus, dafs es wie eine Anerkennung der Aequivalenz von Wärme und Arbeit klingt, und der bei weitem gröfste Theil der mathematischen Folgerungen, die er zieht, so weit sie ohne Integration zu erhalten sind, entsprechen dem auch. Die Integration ist aber, wie Clausius nachgewiesen hat, nicht in der Weise auszuführen, wie es Holtzmann gethan hat, wenn das Princip der Aequivalenz festgehalten werden soll.

In der Theorie des Galvanismus mufs ich die Einwürfe von Clausius erwarten. Das Kapitel der Elektrodynamik dagegen ist in meiner Schrift nur unter einer sehr beschränkenden Voraussetzung durchgeführt, weil ich damals von aller mathematisch physikalischen Literatur entblöfst, fast auf das beschränkt war, was ich selbst zu erfinden wufste. Ich habe deshalb den Magnetismus des Eisens nur unter der Voraussetzung behandeln können, dafs dasselbe vollkommen weich sey, d. h. der magnetischen Vertheilung gar kein Hindernifs entgegensetze, so dafs diese Vertheilung genau dieselbe würde, wie die der Elektricität an elektrisirten Leitern. Unter der allgemeineren Voraussetzung jedoch, welche Poisson seinen Theoremen zu Grunde gelegt hat, dafs die Stärke der Magnetisirung der magnetisirenden Kraft proportional sey, was für geringe Stärke der Magnetisirung jedenfalls mit der Erfahrung stimmt, mit Benutzung ferner der seit jener Zeit in Deutschland bekannt gewordenen Theoremen von Green, und meiner eigenen Untersuchungen über den Verlauf der durch Stromesschwankungen inducirten Ströme, läfst sich das genannte Kapitel jetzt vollständiger und genügender als irgend ein anderes behandeln, und namentlich läfst sich

das

das allgemeine Gesetz von Neumann für die inducirten Ströme jetzt viel vollständiger aus dem Principe von der Erhaltung der Kraft herleiten.

Da Clausius eine Arbeit über diefs Kapitel ankündigt, will ich ihm nicht vorgreifen, durch eine Veröffentlichung meiner eigenen weiteren Arbeiten hierüber. Ich kann es nur für einen Gewinn halten, wenn die Ideenverbindungen, welche ich in meiner Schrift damals zu einer Zeit, wo sie noch wenig Anklang unter den Physikern fanden, darzulegen suchte, jetzt von einem Andern in anderer Form wieder aufgenommen, und in so vollständiger und kritischer Weise durchgearbeitet werden, wie es bisher bei anderen Kapiteln der Theorie von der Erhaltung der Kraft durch Herrn Clausius geschehen ist. Nur sey es mir vergönnt, die Resultate, wie ich sie mit erweiterten Hülfsmitteln später gewonnen habe, hier kurz zusammenzustellen, damit ich mit meiner älteren Darstellung nicht in zu ungünstigem Lichte neben Herrn Clausius stehen bleibe.

Die Voraussetzung ist demnach, dafs das magnetische Moment eines jeden körperlichen Elements innerhalb eines durch Vertheilung magnetisirten Körpers A der magnetischen Richtkraft an dieser Stelle proportional sey und dieselbe Richtung habe. Das Potential des vertheilten Körpers A gegen den vertheilenden Magneten B sey V, das von A auf sich selbst (nach Clausius Definition) sei W, so lassen sich folgende Sätze ableiten.

1) Wenn der vertheilende Magnet aus unendlicher Entfernung dem vertheilten Körper A genähert wird, so wird dabei mechanische Arbeit gewonnen gleich dem Werthe von $\frac{1}{2}V$ am Ende des Weges. Diefs ist ein, so viel ich weifs, neuer Satz in der mathematischen Theorie des Magnetismus. Wird der in A erzeugte Magnetismus nun fixirt und der Magnet in unendliche Entfernung gebracht, so wird dabei die mechanische Arbeit V aufgebraucht. Die erzeugte Magnetisirung von A hat also die mechanische Arbeit $\frac{1}{2}V$

erfordert. Nur wenn die magnetische Vertheilung im Eisen ganz unbehindert ist, wird entsprechend den elektrisirten Körpern, wie ich es in meiner Schrift angenommen habe, die durch die Magnetisirung repräsentirte Arbeit gleich $-W$, d. h. gleich der Arbeit, welche durch die Anziehungskräfte der frei gewordenen magnetischen Fluida verrichtet werden kann. Der Unterschied $\frac{1}{2}V-(-W)$ repräsentirt also die Gröſse der Moleculararbeit innerhalb des magnetisirten Körpers.

2) Aus meinen Untersuchungen über die durch Stromesschwankungen inducirten Ströme [1]) ergiebt sich, daſs die Ansteigung eines galvanischen Stromes gegeben wird durch eine Gleichung von folgender Form

$$i=\frac{A}{w}\left(1-e^{-\frac{w}{p}t}\right)$$

wo A die elektromotorische Kraft, w der Widerstand, t die Zeit und p eine Constante ist, welche nur von der Form der Leitung abhängt (nach Neumann, das doppelte Potential der Leitung auf sich selbst bei der Stromeseinheit, dividirt durch die Inductionsconstante). Der durch das Ansteigen des Stromes inducirte Integralstrom ist dann

$$\frac{p}{w}J,$$

wo J den gröſsten Werth, welchen i erreicht, bezeichnet. Dabei wird durch den inducirten Strom die Wärmemenge

$$\frac{1}{2}pJ^2$$

vernichtet, wenn die Einheit von w diejenige ist, in der die willkührliche Einheit der Stromintensität in der Zeiteinheit die Wärmeeinheit entwickelt. Wird der Strom so unterbrochen, daſs der dabei inducirte Extracurrent eine Leitung findet, so wird dieselbe Wärmemenge wiedererzeugt, ohne daſs dafür ein anderer Arbeitsverbrauch stattfände. Der galvanische Strom J repräsentirt uns also, so

1) Diese Annalen Bd. LXXXIII, S. 505.

lange er besteht, eine geleistete Arbeit, aequivalent der Wärmemenge

$$\frac{1}{2} p J^2.$$

3) Wenn demnach ein Stromleiter von unveränderlicher Form mit unveränderlichen Stahlmagneten und Eisenmassen in Wechselwirkung tritt, welche letzteren theils durch ihn selbst, theils durch die Magnete magnetisirt werden, so mufs in jedem Augenblicke durch den inducirten Strom so viel Wärme in der Stromleitung entwickelt oder vernichtet werden, als an Arbeit bei den stattfindenden Bewegungen, bei der Magnetisirung der Eisenmassen und Veränderung der Stromintensität verloren oder gewonnen wird. Daraus läfst sich jetzt für die Induction durch Magnete ganz allgemein das Gesetz von Neumann ableiten, dafs die inducirte elektromotorische Kraft gleich ist den Veränderungen des Potentials der vorhandenen Magnete auf die von der Stromeinheit durchflossene Stromleitung, multiplicirt mit einer Constanten, und ferner, dafs diese Constante bei der angegebenen Einheit des Widerstandes gleich dem reciproken Werthe des mechanischen Aequivalents der Wärmeeinheit ist. Diese Ableitung konnte ich in meiner früheren Schrift vollständig nur durchführen für die Induction durch Bewegung eines unveränderlichen Magneten.

4) W. Weber [1]) hat die Induction bei Bewegung eines Stromleiters gegen einen anderen experimentell verglichen mit der bei Bewegung des Stromleiters gegen einen Magneten, und gefunden, dafs beide gleich sind, unter Umständen wo die Veränderungen des Potentials auf den von der Stromeinheit durchflossenen Leiter gleich sind. Wenn also das Inductionsgesetz von Neumann fü Magnetinduction vollständig gilt, erscheint es gerechtfertigt, dasselbe auch auf Induction durch Bewegung von Stromleitern zu übertragen. Dann läfst sich weiter aus dem Principe von der Erhaltung der Kraft folgern, dafs auch die in dem einen Leiter durch Stromesschwankungen des

1) Elektrodynamische Maafsbestimmungen. Leipzig 1846, S. 71.

andern inducirten Ströme demselben Gesetze folgen. Für einen einzelnen Stromeskreis ist es mir noch nicht gelungen zu beweisen, dafs die oben mit p bezeichnete Constante gleich dem doppelten Potentiale seyn müsse, so wahrscheinlich diefs auch nach der Analogie der übrigen Fälle seyn mag.

Die in meiner früheren Schrift gegebene Gleichung für die Induction zweier bewegten Stromleiter auf einander, ist nur für den Fall richtig, wo der eine Strom gegen den andern verschwindend klein ist, weil ich damals noch nicht den Einflufs der Induction bei Unterbrechung der Stromleitungen zu berücksichtigen wufste.

V. *Die mechanische Arbeit, welche zur Erhaltung eines elektrischen Stromes erforderlich ist; von C. Holtzmann.*

1. Bewegt man den Magnetismus μ um einen Leiter der Elektricität, welcher aufser der Bahn von μ geschlossen ist, so entsteht in diesem Leiter ein elektrischer Strom. Dieser übt rückwärts auf den Magnetismus eine Kraft aus, welche der Bewegung des Magnetismus entgegenwirkt. Man bedarf deshalb zur Bewegung des Magnetismus einer Kraft, welche den Magnetismus durch seine Bahn führt, eine mechanische Arbeit als deren Aequivalent der erregte Strom erscheint. Die oben angegebene Art einen elektrischen Strom hervorzubringen, ist in dem von Plücker angegebenen Apparat von Fessel in Cöln verwirklicht, und dieser Apparat ist es auch in der That, welcher mir diesen Weg, das mechanische Aequivalent des elektrischen Stromes festzustellen, zeigte.

2. Das lineare Element Sds eines elektrischen Stromes S übt nach dem bekannten Biot'schen Satze auf ein