

# Zur Theorie der Abel'schen Functionen.

Von

FELIX KLEIN in Göttingen.

---

Anknüpfend an die Untersuchungen über hyperelliptische Functionen beliebig vieler Variabler, über die in Bd. 32 dieser Annalen berichtet ist, habe ich in den Specialvorlesungen der letzten drei Semester *die Theorie der Abel'schen Functionen* in Betracht gezogen und bei ihnen die vom algebraischen Gebilde ausgehende Definition der Thetafunctionen bis zu demselben Punkte zu führen gesucht, der bei den hyperelliptischen erreicht ist. Dies gelang, wenigstens in der Hauptsache, hinsichtlich aller derjenigen Fragen, bei denen die Moduln des algebraischen Gebildes als fest gegeben angesehen werden; sollen die Moduln als veränderlich gelten (eine Auffassung, die ich im Falle der hyperelliptischen Functionen in Bd. 32 auch nur erst gestreift habe), so erwies sich die Beschränkung auf den Fall  $p = 3$  einstweilen als nothwendig. Hiermit ist die Eintheilung des folgenden Berichtes in zwei Hauptabschnitte gegeben, die sich nach Inhalt und Methode unterscheiden. Ich war leider durch äussere Verhältnisse verhindert, einzelne Punkte so ausführlich zu behandeln, wie ich dies gewünscht hätte. Neben meinen Abhandlungen über hyperelliptische Sigmafunctionen in den Bänden 27 und 32 wird zum Verständnisse die Bearbeitung eines Theiles meiner hyperelliptischen Vorlesungen nützlich sein, welche Hr. Burkhardt neuerdings in Bd. 35 dieser Annalen veröffentlicht hat\*). Uebrigens wird man bemerken, dass vermöge meiner neuen Darstellung die Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen selbst an vielen Punkten eine weitere Durchbildung bez. neue Grundlegung erfährt. Ueber die Gliederung der nach-

---

\*) Grundzüge einer allgemeinen Systematik der hyperelliptischen Functionen erster Ordnung. — Uebrigens vergleiche man auch Hrn. Burkhardt's Abhandlung: Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen (Math. Ann. t. 32, 1888); der Leser wird daselbst eine Reihe von Entwicklungen finden, die ihm als Ergänzung der von mir im Texte gegebenen Darstellung willkommen sein werden.

folgenden Betrachtungen wird das folgende Verzeichniss den besten Anschluss geben:\*)

### Inhalts-Verzeichniss.

#### I. Von den Functionen auf gegebener Riemann'scher Fläche.

- § 1. Die Riemann'sche Fläche als Grundlage der Theorie. Integrale erster und dritter Gattung.
- § 2. Einführung der Formentheorie auf Grund der  $\varphi$ .
- § 3. Das Differential  $d\omega$ . Die Integrale zweiter Gattung.
- § 4. Die Primform  $\Omega(x, y)$ .
- § 5. Von den Mittelformen.
- § 6. Fälle besonders einfacher algebraischer Darstellung.
- § 7. Allgemeines über algebraische Formen auf einer Curve.
- § 8. Kanonische Curven.
- § 9. Grundformeln der kanonischen Darstellung.
- § 10. Von den Lösungen des Umkehrproblems.
- § 11. Wurzelformen bei kanonischen Curven.
- § 12. Charakteristiken von Wurzelformen, insbesondere Primcharakteristiken.
- § 13. Fundamentalformeln für die auf kanonische Curven bezogenen Thetafunctionen.
- § 14. Beweis der aufgestellten Formeln, nebst weiteren auf sie bezüglichen Bemerkungen.

#### II. Specielle Theorie des Falles $p = 3$ .

- § 15. Die ebene Curve vierter Ordnung. Algebraische Moduln der ersten Stufe und transcendente Moduln.
- § 16. Adjunction von Wurzelformen und zugehörigen Moduln der zweiten Stufe.
- § 17. Von den Berührungscurven dritter Ordnung erster Art.
- § 18. Von den Berührungscurven dritter Ordnung zweiter Art.
- § 19. Von der Discriminante der  $C_4$  und ihrer Darstellung in den Rationalitätsbereichen erster und zweiter Stufe.
- § 20. Ueber das Verhalten der Berührungscurven dritter Ordnung beim Auftreten eines Doppelpunktes.
- § 21. Neue Sätze über das Verhalten der Curvendiscriminante.
- § 22. Erneute Inbetrachtung der Thetafunctionen.
- § 23. Das Product der Nullwerthe der 36 geraden Thetafunctionen.
- § 24. Das Anfangsglied in der Reihenentwicklung des einzelnen  $\vartheta$ .
- § 25. Von den Functionen  $Th$ .
- § 26. Excurs über Integrale dritter Gattung.
- § 27. Die höheren Glieder in der Reihenentwicklung der  $\vartheta$ . Die Sigmafunctionen.

---

\*) Was die neu in denselben abzuleitenden Resultate angeht, so habe ich dieselben grossentheils schon in vorläufigen Mittheilungen bekannt gemacht; vergl. drei Noten in den Göttinger Nachrichten (Ueber irrationale Covarianten, März 1888, Zur Theorie der Abel'schen Functionen I, II, März und Mai 1889), zwei Noten in den Comptes Rendus der Pariser Academie (Formes principales sur les surfaces de Riemann, Jan. 1889, des fonctions thêta sur la surface générale de Riemann, Febr. 1889), endlich eine Note in den Proceedings der London Mathematical Society (Febr. 1889).

## Erster Abschnitt.

## Von den Functionen auf gegebener Riemann'scher Fläche.

## § 1.

## Die Riemann'sche Fläche als Grundlage der Theorie. Integrale erster und dritter Gattung.

Bei den hyperelliptischen Gebilden ist von vorneherein eine einfachste algebraische Darstellung bekannt, die man zweckmässiger Weise allen auf sie bezüglichen Untersuchungen zu Grunde legt und von der selbstverständlicher Weise auch in Bd. 32 ausgegangen wurde. Nicht so bei den allgemeinen algebraischen Gebilden\*). Von den zahlreichen bei ihnen in Vorschlag gebrachten Normalgleichungen bietet für die hier in Betracht kommenden Fragestellungen keine solch besonderen Vortheile, dass es nützlich schiene, gerade sie zum Ausgangspunkte der Entwicklung zu nehmen. Vielmehr finde ich es am zweckmässigsten, mit der Riemann'schen Auffassung zu beginnen und erst aus ihr diejenige Form der algebraischen Darstellung, welche für uns die dienlichste sein dürfte, zu entwickeln. Als Riemann'sche Auffassung schlechtweg bezeichne ich dabei diejenige, bei der das algebraische Gebilde geradezu durch eine Riemann'sche *Fläche* gegeben wird, auf der dann erst hinterher die Functionen, die uns interessiren mögen, insbesondere die algebraischen Functionen, construirt werden. Ich habe die wesentlichen Momente dieser Auffassung, so wie ich dieselben verstehe, 1881 in einer besonderen Schrift dargestellt\*\*); im folgenden Jahre gab ich in Bd. 21 dieser Annalen Erläuterungen über die dabei in Betracht kommenden Existenzbeweise\*\*\*). Nachdem inzwischen Hr. Carl Neumann eine ausführliche Darlegung der letzteren publicirt hat†), darf ich die betreffenden Anschauungen im Folgenden als bekannt voraussetzen. Es sei hier nur daran erinnert, dass vermöge derselben die Integrale erster und dritter

---

\*) Ich bediene mich dieses aus den Weierstrass'schen Vorlesungen stammenden Ausdruckes (den man ev. noch durch das Wort „eindimensional“ näher umgrenzen kann) überall da, wo die Benennungen „Riemann'sche Fläche“ oder „algebraische Curve“ störende Nebenvorstellungen mit sich führen würden; wo diese Nebenvorstellungen wesentlich sind, werden letztere Benennungen herangezogen.

\*\*\*) Ueber Riemann's Theorie der algebraischen Functionen und ihrer Integrale (Teubner). — Ich citire im Folgenden möglichst unter Beifügung der Jahreszahlen, wobei ich mich, wo es anging, an die vom Verf. selbst gegebene Datirung halte.

\*\*\*\*) Neue Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie; vergl. insbesondere daselbst p. 155 ff.

†) Vorlesungen über Riemann's Theorie der Abel'schen Integrale, Zweite Auflage (Teubner, 1884).

Gattung das prius sind, aus welchem die Integrale zweiter Gattung und insbesondere die algebraischen Functionen erst hinterher abgeleitet werden. Ich will gleich hier die Bezeichnungen zusammenstellen, die ich für die Integrale erster und dritter Gattung weiterhin gebrauche:

Irgend  $p$  linear unabhängige Integrale erster Gattung nenne ich

$$(1) \quad w_1, w_2, \dots w_p,$$

oder ausführlicher, wenn die obere Grenze  $x$  und die untere Grenze  $y$  in Betracht kommen:

$$w_1^{xy}, w_2^{xy}, \dots w_p^{xy}.$$

Die  $2p$  Perioden von  $w_\alpha$  an den Querschnitten  $A_\beta, B_\beta$  einer kanonischen Zerschneidung heissen

$$(2) \quad \omega_{\alpha,\beta} \text{ bez. } \omega_{\alpha,\beta+p}.$$

Mit Hülfe derselben setzen wir uns aus den  $w$  die „transcendent normirten“ Integrale erster Gattung

$$(3) \quad v_1, v_2, \dots v_p$$

zusammen; die Perioden derselben sind durch das Schema gegeben:

$$(4) \quad \begin{array}{c|ccc|ccc} & A_1 & \dots & A_p & B_1 & \dots & B_p \\ \hline v_1 & 1 & 0 & \dots & 0 & \tau_{11} & \dots & \tau_{1p} \\ v_2 & 0 & 1 & \dots & 0 & \tau_{21} & \dots & \tau_{2p} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ v_p & 0 & 0 & \dots & 1 & \tau_{p1} & \dots & \tau_{pp} \end{array}$$

Ein Integral dritter Gattung mit den „Grenzen“  $x, y$  und den „Parametern“  $\xi \eta$  heisst allgemein

$$(5) \quad P_{\xi\eta}^{xy}.$$

Dasselbe kann insbesondere so specialisirt werden, dass es als Function von  $x$  (oder  $y$ ) an den Querschnitten  $A, B$  die folgenden Perioden darbietet:

$$(6) \quad \frac{A_1 \dots A_p \mid B_1 \dots B_p}{0 \dots 0 \mid 2\pi i v_1^{\xi\eta} \dots 2\pi i v_p^{\xi\eta}};$$

wir bezeichnen dasselbe dann mit

$$(7) \quad \Pi_{\xi\eta}^{xy}$$

und benennen es als „transcendent normirtes“ Integral dritter Gattung. Aus dem  $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$  (oder irgend einem anderen speciell gewählten Integral dritter Gattung) ergibt sich das allgemeinste  $P_{\xi\eta}^{xy}$ , wenn man irgend eine bilineare Verbindung der  $v_\alpha^{xy}, v_\beta^{\xi\eta}$  hinzufügt:

$$(8) \quad P_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{\xi\eta}^{xy} + \sum c_{\alpha\beta} v_\alpha^{xy} v_\beta^{\xi\eta}.$$

Nimmt man hier  $c_{\alpha\beta} = c_{\beta\alpha}$ , so hat man insbesondere diejenigen Integrale dritter Gattung, welche, wie das  $\Pi$  selbst, Vertauschung von Parameter und Argument zulassen.

## § 2.

### Einführung der Formentheorie auf Grund der $\varphi$ .

Wir schreiben jetzt, indem wir die Differentiale der überall endlichen Integrale in Betracht ziehen:

$$(9) \quad d\omega_1 : d\omega_2 : \dots : d\omega_p = \varphi_1 : \varphi_2 : \dots : \varphi_p.$$

Die Herren Weber\*) und Nöther\*\*) haben bereits die so eingeführten  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  als homogene Coordinaten der Punkte eines Raumes von  $(p - 1)$  Dimensionen interpretirt, innerhalb dessen dann, unserer Riemann'schen Fläche entsprechend, eine Curve  $(2p - 2)^{\text{ter}}$  Ordnung ( $C_{2p-2}$ ), die *Normalcurve der  $\varphi$* , liegt\*\*\*). Wir adoptiren den hiermit gegebenen Gedanken, indem wir ihn weiter entwickeln. Die Functionen, welche man in der Theorie der Abel'schen Functionen bisher ausschliesslich zu betrachten pflegt, sind nur von den Verhältnissen der  $\varphi$  abhängig, sie sind *homogene Functionen nullten Grades* der  $\varphi_1 \dots \varphi_p$ . Wir werden Veranlassung nehmen überhaupt homogene Functionen der  $\varphi_1 \dots \varphi_p$  in Betracht zu ziehen. Wir bezeichnen dieselben im Gegensatze zu jenen nur von den Verhältnissen der  $\varphi$  abhängigen Functionen als *Formen*.

Der hiermit bezeichnete Schritt von den Functionen zu den Formen wird mehr oder minder bewusst immer vollzogen, wenn man irgendwelche algebraische Gebilde analytisch-geometrisch im Sinne projectiver Auffassung behandelt. Inzwischen hat sich eben hierdurch, wenn ich nicht irre, eine gewisse Unklarheit festgesetzt. Man möchte dieselbe zu dem Satze verdichten: Functionen, d. h. Formen nullter Dimension, haben an sich eine geometrische Bedeutung, Formen höherer Dimension aber nur, insofern sie gleich Null oder Unendlich gesetzt werden. Dieser Satz ist bei der gewöhnlichen Darstellung in der That völlig richtig, aber doch nur in Folge der willkürlichen Verabredung, vermöge deren man von vorneherein nur die Verhältnisse der homogenen

---

\*) Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle, Math. Ann. t. 13 (1878).

\*\*) Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen, Math. Ann. t. 17 (1880).

\*\*\*) Im hyperelliptischen Falle artet dieselbe bekanntlich in die doppeltzählende rationale  $C_{p-1}$  aus; dies hindert aber nicht, dass wir die  $C_{2p-2}$  auch im hyperelliptischen Falle in Betracht ziehen, den wir überhaupt im Folgenden immer als miteingeschlossen betrachten, sofern wir nicht, wie in § 7, ausdrücklich das Gegentheil bemerken.

Variablen geometrisch interpretirt hat. Letzteres ist ja in der That für viele Zwecke ausserordentlich nützlich, wie es denn im Folgenden durchweg in der herkömmlichen Weise geschehen soll. Aber es steht doch nichts entgegen, die homogenen Variablen in einem mit einer Dimension mehr ausgestatteten Raume als absolute Coordinaten zu interpretiren. Dann gewinnen sofort die Formen irgend welchen Grades selbst ihre geometrische Bedeutung. Man nehme das Beispiel unserer  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ . Wenn wir, in Uebereinstimmung mit dem gewöhnlichen Ansätze, wie wir es gerade sagten, die Verhältnisse  $\varphi_1 : \varphi_2 : \dots : \varphi_p$  als Coordinaten eines im Raume von  $(p - 1)$  Dimensionen gelegenen Punktes interpretiren, wo dann jeder Stelle der Riemann'schen Fläche ein solcher Punkt entspricht und der Riemann'schen Fläche selbst, als den Inbegriff ihrer Stellen, die gerade erwähnte  $C_{2p-2}$  correspondirt, dann ist es freilich unmöglich, bei einer von den  $\varphi$  nicht im nullten Grade abhängenden Form etwas Anderes als die Null- und die Unendlichkeitsstellen geometrisch aufzufassen. Aber wir können doch die  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  ebensowohl als gewöhnliche (Cartesische) Coordinaten des Raumes von  $p$  Dimensionen deuten. Dann erheben wir uns zu einem höheren Standpunkte: einer jeden Stelle der Riemann'schen Fläche entspricht dann ein ganzer, durch den Coordinatenanfangspunkt laufender *Strahl*; dieser Strahl beschreibt, wenn die Stelle die Riemann'sche Fläche überstreicht, einen *Kegel* der  $(2p - 2)^{\text{ten}}$  Ordnung, und auf diesem Kegel finden dann alle die in den nächsten Paragraphen einzuführenden Formen: das Differential  $d\omega$ , die Primform  $\Omega$ , etc. ihre vollwerthige geometrische Interpretation.

Noch ein paar Worte über den Gebrauch homogener Variabler überhaupt. Ich entschiess mich zu demselben nicht irgend welcher Tradition oder Gewöhnung zu liebe, sondern um das Wesen der Sache, so wie ich dasselbe verstehe, klarer herauszustellen. Um nur von den nächstfolgenden Paragraphen zu reden, so ist es der Zielpunkt derselben, gewisse complicirtere Functionen der bisherigen Theorie, die Integrale dritter Gattung, die Thetafunctionen etc. aus einfacheren Elementen aufzubauen; dies würde ohne homogene Variable unmöglich sein, denn diese einfacheren Elemente existiren eben nur im Bereich der homogenen Variablen. Dabei wolle man sich, was die Formulirung der Sätze angeht, immer gegenwärtig halten, dass beim Gebrauch homogener Variabler nicht nur unendlich grosse Werthe der Veränderlichen ausgeschlossen sind, sondern auch das gleichzeitige Verschwinden sämtlicher Veränderlichen. Nur hierdurch werden die im Folgenden immer wiederkehrenden Sätze möglich, dass gewisse Formen niemals unendlich werden etc.

Die Erläuterungen, welche ich hiermit über das Wesen der homogenen Variablen und ihre geometrische Interpretation insbesondere

gegeben habe, machen keinen Anspruch auf Neuheit. Trotzdem schien es im Interesse besserer Verständlichkeit der folgenden Entwicklungen nützlich, dieselben hierher zu setzen. In der That hat mich die Erfahrung belehrt, dass selbst solche Mathematiker, die an den Gebrauch homogener Variabeler im Gebiete rationaler algebraischer Operationen durchaus gewöhnt sind, einen Augenblick stutzen, wenn sie die gleiche Art des Ansatzes im transcendenten Gebiete handhaben sollen.

### § 3.

#### Das Differential $d\omega$ . Die Integrale zweiter Gattung.

Der erste Erfolg, der aus der Einführung der  $\varphi$  resultirt, ist der, dass wir in einfachster Form einen Differentialausdruck (eine *Differentialform*) construiren können, welcher nirgendwo auf dem algebraischen Gebilde (oder besser gesagt: auf der für uns in Betracht kommenden Mannigfaltigkeit der  $\varphi$ ) Null oder Unendlich wird. Derselbe lautet, unter  $\alpha$  eine beliebige der Zahlen  $1, 2, \dots p$  verstanden:

$$(10) \quad d\omega = \frac{dw_\alpha}{\varphi_\alpha}.$$

Dass hier der Werth des  $\alpha$  durchaus gleichgültig ist, ergibt sich sofort aus (9); wir könnten, unter den  $c_\alpha$  irgendwelche Constante verstanden, ebensowohl schreiben:

$$(10a) \quad d\omega = \frac{\sum c_\alpha dw_\alpha}{\sum c_\alpha \varphi_\alpha}.$$

Aber ebensowohl folgt aus (9), unter Berücksichtigung unserer Festsetzungen über den Bereich, innerhalb dessen sich die homogenen Variablen  $\varphi$  zu bewegen haben, dass  $d\omega$  keine Null- oder Unendlichkeitsstellen besitzt: in Formel (10a) kann, bei gegebenen  $c_\alpha$ , allerdings Zähler und Nenner gleichzeitig verschwinden, aber wir gehen dann jedesmal sofort zu einem bestimmten endlichen Werthe des  $d\omega$  über, indem wir die  $c_\alpha$  durch irgendwelche andere Constante ersetzen.

Das so gewonnene  $d\omega$  erweist sich nun in der Folge als ganz besonders nützlich. Ich werde dasselbe hier zunächst zur Definition der Integrale zweiter Gattung anwenden. Man führt diese Integrale in die Riemann'sche Theorie allgemein so ein, dass man ein Integral dritter Gattung nach einem seiner Parameter differentiirt. Aber was heisst nach einem Parameter (überhaupt nach einer Stelle der Riemann'schen Fläche) differentiiren? Die gewöhnliche Darstellung benutzt dazu irgend eine Function der Stelle und differentiirt nach dieser Function; sie führt damit in die Definition der Integrale zweiter Gattung eine unnöthige Particularisirung ein. Für uns ist in allen solchen Fällen unmittelbar die Benutzung des  $d\omega$  gegeben. *Eine Function*

auf der Riemann'schen Fläche differentiiren heisst, das Differential der Function durch  $d\omega$  dividiren. Ist also  $Y_{\xi}^{xy}$  ein Integral zweiter Gattung mit den Grenzen  $x, y$  und der Unstetigkeitsstelle  $\xi$ , so setzen wir:

$$(11) \quad Y_{\xi}^{xy} = \frac{\partial P_{\xi\eta}^{xy}}{\partial \omega_{\xi}}.$$

Hier ist  $d\omega_{\xi}$  von der  $(-1)^{\text{ten}}$  Dimension in den  $\varphi$  der Stelle  $\xi$ ; es ist also  $Y$  eine Form  $(1)^{\text{ter}}$  Dimension in den  $\varphi$  der Unstetigkeitsstelle. Natürlich wechselt das  $Y$  mit dem zu Grunde gelegten Integral dritter Gattung. Indem wir in (11) statt  $P$  das Normalintegral  $\Pi$  setzen, wollen wir insbesondere schreiben:

$$(12) \quad Y_{\xi}^{xy} = \frac{\partial \Pi_{\xi\eta}^{xy}}{\partial \omega_{\xi}}.$$

Formel (8) gibt dann:

$$(13) \quad Y_{\xi}^{xy} = Y_{\xi}^{xy} + \sum c_{\alpha\beta} v_{\alpha}^{xy} \psi_{\beta}^{(\xi)},$$

Andererseits ergeben sich aus (6) als Perioden des Integrals  $Y_{\xi}$ :

$$(14) \quad \begin{array}{c|cc|cccc} & A_1 & \dots & A_p & & B_1 & \dots & B_p \\ \hline Y_{\xi} & 0 & \dots & 0 & & 2\pi i \psi_1^{(\xi)} & \dots & 2\pi i \psi_p^{(\xi)} \end{array}.$$

Ich habe dabei diejenigen linearen Verbindungen der  $\varphi$ , die, vermöge (9), den Differentialen  $dv_1 \dots dv_p$  der Normalintegrale  $v$  entsprechen, mit  $\psi_1, \dots, \psi_p$  bezeichnet.

Ich schliesse einige Folgerungen an, welche man aus der so verschärften Definition der Integrale zweiter Gattung ohne Mühe ableitet.

Seien  $t', t'', \dots, t^m$  irgend  $m$  Stellen des algebraischen Gebildes. Wir haben dann in

$$(15) \quad c' Y_{t'}^{xy} + c'' Y_{t''}^{xy} + \dots + c^m Y_{t^m}^{xy} + C$$

die allgemeinste Integralfunction vor uns, welche an den Stellen  $t', t'', \dots, t^{(m)}$  je einfach algebraisch unendlich wird und dabei an den Querschnitten  $A_1 \dots A_p$  durchaus verschwindende Periodicitätsmoduln aufweist. Bestimmen wir jetzt vermöge (14) die  $c', c'', \dots, c^{(m)}$  so, dass auch noch die Perioden zweiter Art verschwinden, so haben wir die allgemeinste auf dem Gebilde eindeutige algebraische Function der Stelle  $x$  vor uns, welche für  $x = t', t'', \dots, t^{(m)}$  einfach unendlich wird. Dies gibt sofort den Riemann'-Roch'schen Satz über die Zahl der in einer solchen Function noch willkürlichen Constanten  $c', c'', \dots, c^m$ : die Zahl dieser Constanten ist

$$(16) \quad m - p + \tau,$$

wo  $\tau$  die Zahl der linear unabhängigen linearen Verbindungen der  $\varphi$  ist, die für  $t', t'', \dots t^m$  verschwinden.

Wir betrachten ferner  $(p + 1)$  Stellen des Gebildes:  $t, t', \dots t^{(p)}$  und bilden die Determinante:

$$(17) \quad \begin{vmatrix} Y_t^{xy} & Y_{t'}^{xy} & Y_{t^{(p)}}^{xy} \\ \psi_1(t) & \psi_1(t') & \psi_1(t^{(p)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \psi_p(t) & \psi_p(t') & \psi_p(t^{(p)}) \end{vmatrix}.$$

Wir schliessen sofort, dass dies eine algebraische Function der Stelle  $x$  (bez.  $y$ ) ist, welche für  $x = y$  verschwindet, dagegen einfach unendlich wird, wenn  $x$  (oder  $y$ ) mit  $t, t', \dots t^{(p)}$  zusammenfällt. Wir wollen diese Function mit dem Zeichen

$$(18) \quad \text{Alg}(x, y; t, t', \dots t^{(p)})$$

bezeichnen; in den  $\varphi(t), \varphi(t'), \dots$  ist sie beziehungsweise von der  $+1^{\text{ten}}$  Dimension. Jetzt wird (17) nach Formel (13) nicht geändert, wenn wir die  $Y$  durch beliebige  $Y$  ersetzen; sie ändert sich nur um einen constanten Factor, indem wir statt der  $\psi$  die anfänglichen  $\varphi$  einführen. Indem wir diesen constanten Factor mit in die Definition der algebraischen Function (18) aufnehmen, haben wir die Gleichung:

$$(19) \quad \begin{vmatrix} Y_t^{xy} & Y_{t'}^{xy} & Y_{t^{(p)}}^{xy} \\ \varphi_1(t) & \varphi_1(t') & \varphi_1(t^{(p)}) \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \varphi_p(t) & \varphi_p(t') & \varphi_p(t^{(p)}) \end{vmatrix} = \text{Alg}(x, y; t, t', \dots t^{(p)}).$$

Hier entwickle man jetzt linker Hand nach den Elementen der ersten Verticalreihe und dividire durch den Coefficienten von  $Y_t^{xy}$ . Indem wir dann noch der Kürze wegen für die auftretenden linearen Verbindungen der  $Y_{t'}^{xy}, \dots Y_{t^{(p)}}^{xy}$  die Zeichen  $-Y_1^{xy}, \dots -Y_p^{xy}$  einführen, erhalten wir:

$$(20) \quad Y_{(t)}^{xy} = \varphi_1(t) \cdot Y_1^{xy} + \varphi_2(t) \cdot Y_2^{xy} + \dots + \varphi_p(t) \cdot Y_p^{xy} \\ + \frac{\text{Alg}(x, y; t, t', \dots t^{(p)})}{\begin{vmatrix} \varphi_1(t') \dots \varphi_1(t^{(p)}) \\ \vdots \\ \varphi_p(t') \dots \varphi_p(t^{(p)}) \end{vmatrix}}.$$

Die hiermit erhaltene Formel ist, von unwesentlichen Aenderungen abgesehen, dieselbe, welche in den Vorlesungen von Hrn. Weierstrass eine bekannte wichtige Rolle spielt [sie wird dort nur in ganz anderer Weise gewonnen, indem die algebraische Function (18) in directer Weise hergestellt und dann in Aggregate von Integralen zweiter Gattung gespalten wird]. Man könnte die von den  $p$  Stellen  $t', t'', \dots t^{(p)}$  ab-

hängigen  $Y_1, Y_2, \dots, Y_p$  Normalcombinationen von Integralen zweiter Gattung nennen. Um ihre Perioden zu erforschen, bilden wir uns zunächst die der Determinantenform (17) entsprechenden Normalcombinationen  $\Upsilon_1 \dots \Upsilon_p$ . Für die Perioden der letzteren ergibt (14) sofort folgendes Schema:

$$(21) \quad \begin{array}{c|cc|cc} & A_1 & \dots & A_p & B_1 & \dots & B_p \\ \hline \Upsilon_1 & 0 & & 0 & 2\pi i & & 0 \\ \hline \Upsilon_p & 0 & & 0 & 0 & & 2\pi i \end{array}$$

Wir schliessen, dass die Perioden der Normalcombinationen  $Y_1, \dots, Y_p$  von der Auswahl der  $p$  Stellen  $t', \dots, t^{(p)}$  unabhängig sind, und also nur von der Wahl des Integrals dritter Gattung  $P$  (Formel (11)), beziehungsweise der  $p$  Integrale erster Gattung  $w_\alpha$ , durch welche wir die  $\varphi_\alpha$  bestimmt haben, abhängen. Diese Perioden sind es jetzt, die wir Perioden zweiter Gattung nennen werden. Der Formel (2) entsprechend bezeichnen wir die Perioden von  $Y_\alpha$  an den Querschnitten  $A_\beta, B_\beta$  mit

$$(22) \quad -\eta_{\alpha,\beta}, \text{ bez. } -\eta_{\alpha,\beta+p}.$$

Die Perioden von  $Y_t$  werden dann beziehungsweise, nach Formel (20):

$$(23) \quad -\sum^\alpha \varphi_\alpha(t) \eta_{\alpha,\beta}, \text{ und } -\sum^\alpha \varphi_\alpha(t) \eta_{\alpha,\beta+p}.*)$$

#### § 4.

##### Die Primform $\Omega(x, y)$ .

In den vorigen beiden Paragraphen war  $p > 1$  vorausgesetzt. Wir betrachten einen Augenblick die Fälle  $p = 0$  und  $p = 1$ . Es ist sehr leicht, bei ihnen Differentialausdrücke anzugeben, die insofern dem  $d\omega$  des vorigen Paragraphen entsprechen, als sie gleichfalls auf dem algebraischen Gebilde nirgendwo Null oder Unendlich werden und dabei, von einem etwaigen constanten Factor abgesehen, den wir nach Belieben zufügen mögen, völlig bestimmt sind. Bei  $p = 1$  ist dies das Differential des einen in diesem Falle überhaupt vorhandenen überall endlichen Integrals selbst:

$$(24) \quad d\omega = dw.$$

Bei  $p = 0$  werden wir uns auf dem algebraischen Gebilde zunächst eine solche algebraische Function  $x$  construiren, die jeden Werth nur

\*) Ich habe die Definition der  $\eta$  im Texte um so lieber ausführlich gegeben, als ich in Bd. 32, p. 365 ff. bei den entsprechenden Entwicklungen für den Fall der hyperelliptischen Functionen unnöthige Particularisationen einführte. Die dort benutzten  $Z_1^{(t)}, Z_2^{(t)}, \dots, Z_p^{(t)}$  sind solche Normalverbindungen von Integralen zweiter Gattung, deren sämtliche Unstetigkeitsstellen in die eine mit  $t$  benannte Stelle des hyperelliptischen Gebildes zusammengedrückt sind.

einmal annimmt, dieses  $x = \frac{x_1}{x_2}$  setzen und endlich  $d\omega$  gleich der Determinante  $(x_1 dx_2 - x_2 dx_1)$  wählen:

$$(25) \quad d\omega = (x dx).$$

Ich werde jetzt umgekehrt ein wesentliches Element der allgemeinen Theorie einführen, indem ich mit den Fällen  $p = 0$  und  $p = 1$  beginne.

Bei  $p = 0$  und  $p = 1$  kann man nämlich einen einfachen nur von zwei Stellen des Gebildes,  $x$  und  $y$ , abhängigen Ausdruck  $\Omega(x, y)$  aufbauen, der nur verschwindet, und zwar wie  $d\omega$ , wenn die beiden Stellen  $x, y$  zusammenrücken, und der nirgends unendlich wird; mit Hilfe dieses  $\Omega$  lassen sich die zum Gebilde gehörigen Integrale in einfachster Weise darstellen.

Bei  $p = 0$  ist einfach

$$(26) \quad \Omega(x, y) = (x_1 y_2 - x_2 y_1).$$

Dabei wird die Definition des zum Gebilde  $p = 0$  gehörigen Integrals dritter Gattung:

$$(27) \quad P_{\xi\eta}^{xy} = \log \frac{(x\xi)(y\eta)}{(x\eta)(y\xi)}.$$

Bei  $p = 1$  ist die Sache ein wenig complicirter. Sei  $\vartheta_1(w)$  Jacobi's ungerade Thetafunction, gebildet für das Integral erster Gattung  $w$  und seine beiden Perioden  $\omega_1, \omega_2$ . Ich schreibe dann, unter  $c$  eine beliebige Constante verstanden:

$$(28) \quad \Theta_1(w) = e^{cw} \cdot \vartheta_1(w) : \vartheta_1'(0).$$

Unser  $\Omega$  entsteht, indem wir in die so definirte „allgemeine“ Thetafunction  $\Theta_1$  für  $w$  den Werth  $w^{xy}$  substituiren:

$$(29) \quad \Omega(x, y) = \Theta_1(w^{xy}).$$

Auch hier brauche ich die in Aussicht gestellten Eigenschaften von  $\Omega(x, y)$  nicht ausführlich darzulegen. Ich will nur daran erinnern, dass in der That

$$(30) \quad P_{\xi\eta}^{xy} = \log \frac{\Theta_1(w^{x\xi}) \cdot \Theta_1(w^{y\eta})}{\Theta_1(w^{x\eta}) \cdot \Theta_1(w^{y\xi})}$$

ein zum Gebilde  $p = 1$  gehöriges Integral dritter Gattung definiert (und zwar ein solches, welches Vertauschung von Parameter und Argument gestattet); — den unendlich vielen Formen, welche die Function  $\Theta_1$  in (28) der Willkür des  $c$  entsprechend annehmen kann, entsprechen die verschiedenen Definitionen, die bei einem solchen Integral dritter Gattung noch möglich sind. Lässt man  $x$  auf dem algebraischen Gebilde einen Periodenweg beschreiben, bei welchem  $w$  um  $\omega$ , das zu  $P$  und  $w$  gehörige Integral zweiter Gattung  $Y$  um  $-\eta$  zunimmt, so erhält  $\Omega(x, y)$ , nach (29), den Factor

$$(31) \quad - e^{\eta \left( w^{xy} + \frac{\omega}{2} \right)}.$$

Gelten hier  $\eta$  und  $\omega$  als bekannt, so giebt uns dies eine Definition der Grösse  $w^{xy}$ . Man kann also in der That sämtliche Integrale von  $\Omega$  beginnend definiren.

*Ich sage nun, dass sich diese Theorie vermöge des im vorigen Paragraphen für  $p > 1$  eingeführten Differentialausdrucks  $d\omega$  ungeändert auf den Fall eines grösseren  $p$  überträgt.*

Wir müssen zu dem Zwecke die Formelgruppen (26), (27) und (29), (30) umkehren. Dies gelingt, wie man sofort nachrechnet, durch die gemeinsame Formel:

$$(32) \quad \Omega(x, y) = \left( \sqrt{d\omega_x \cdot d\omega_y \cdot e^{-P_{x,y}^{x+dx, y+dy}}} \right)_{\lim dx=0, dy=0},$$

wo  $d\omega$  durch (25), bez. (24) defnirt ist und natürlich das Vorzeichen der Quadratwurzel durch passende Verabredung festzulegen ist.

*Eben diese Formel, in der wir  $d\omega$  durch (10) erklären, unter  $P$  aber irgend ein zum algebraischen Gebilde gehöriges Integral dritter Gattung verstehen, ist uns jetzt die Definition des  $\Omega(x, y)$  in den höheren Fällen.*

In der That verificirt man sofort, dass das durch (32) gegebene  $\Omega$  auch bei höherem  $p$  nur für  $x = y$  verschwindet, und zwar bei geeigneter Wahl der Quadratwurzel wie  $d\omega_x$  selbst, niemals aber unendlich wird. Eine Formel, ganz ähnlich gebaut wie (27) oder (30), giebt uns sodann eine Definition des  $P$  durch  $\Omega^*$ ). Um von  $\Omega$  aus die Integrale erster Gattung zu definiren, bestimmen wir wieder den Factor, um den  $\Omega$  wächst, wenn  $x$  auf dem algebraischen Gebilde einen geschlossenen Weg durchläuft, der für die  $w_\alpha$  die Perioden  $\omega_\alpha$ , für die  $Y_\alpha$  die Perioden  $-\eta_\alpha$  liefert; wir finden:

$$(33) \quad \pm e^{\sum \alpha \eta_\alpha \left( w_\alpha^{xy} + \frac{\omega_\alpha}{2} \right)};$$

hier ist das Zeichen  $\pm$  an sich unbestimmt, weil  $\Omega$  eine Form  $\left(-\frac{1}{2}\right)^{\text{ter}}$  Dimension in den  $\varphi(x)$  bez. den  $\varphi(y)$  ist. — Ich werde das  $\Omega$ , welches mit dem Integral dritter Gattung  $\Pi$  gebildet ist, im Folgenden gelegentlich  $\Omega_\Pi$  nennen; für das allgemeine  $\Omega_P$  hat man dann nach Formel (8):

$$(34) \quad \Omega(x, y)_P = \Omega(x, y)_\Pi \cdot e^{-\frac{1}{2} \sum c_{\alpha\beta} w_\alpha^{xy} w_\beta^{xy}}.$$

\*) Dabei ist vorausgesetzt, dass  $P$  Vertauschung von Parameter und Argument gestattete; ist dies nicht der Fall, so wird durch (32) nach wie vor ein brauchbares  $\Omega(x, y)$  defnirt, die Anwendung von (27), (30) führt aber nicht zu  $P_{\xi\eta}^{xy}$  sondern zu  $\frac{1}{2} (P_{\xi\eta}^{xy} + P_{xy}^{\xi\eta})$  zurück.

Das so gewonnene  $\Omega(x, y)$  ist nun diejenige *Primform*, deren allgemeine Einführung ich bereits in Bd. 32, p. 363 (Fussnote) in Aussicht nahm. Ich kann nicht zweifeln, dass dieselbe für die allgemeine Theorie der algebraischen Gebilde nach den verschiedensten Richtungen hin Bedeutung gewinnen wird. Wenn ich dieselbe im Folgenden nur erst zur Construction der Thetafunctionen benutze, so ist das eben nur eine von den verschiedenen möglichen Anwendungen. Vorbehaltlich der Ergänzungen, welche der folgende Paragraph bringt, denke ich mir den Fortschritt, der in der Einführung der von zwei Stellen des algebraischen Gebildes abhängigen Primform statt des von vier Stellen abhängenden Integrals dritter Gattung liegt, genau so, wie den Fortschritt von der projectiven Geometrie der geraden Linie, welche nur Doppelverhältnisse von vier Punkten kennt, bez. (bei der Lehre von der projectiven Massbestimmung) mit Logarithmen solcher Doppelverhältnisse operirt, zur binären Invariantentheorie, welche die Determinante  $(xy)$  als einfachstes Gebilde zu Grunde legt. Ich habe in Bd. 32 l. c. der nahen Beziehung gedacht, welche zwischen der *Primform*  $\Omega(x, y)$  und der von Weierstrass in seinen Vorlesungen benutzten *Primfunction*  $E(x, y)$  besteht: Weierstrass würde ohne Zweifel das  $\Omega(x, y)$  selbst eingeführt haben, wenn er sich hätte entschliessen können, bei Fragen dieser Art in der hier benutzten Weise mit homogenen Variablen zu operiren. Noch näher kommt dem  $\Omega(x, y)$  vermöge seines besonderen Ausgangspunktes Herr Schottky in seiner Abhandlung „Ueber eine specielle Function, welche bei einer bestimmten linearen Transformation ihres Argumentes unverändert bleibt“ (Journal für Mathematik, Bd. 101, 1887). Herr Schottky behandelt daselbst die Darstellung algebraischer Gebilde durch solche eindeutige Functionen einer Variablen  $\eta$  mit linearen Transformationen in sich, welche auf der ganzen  $\eta$ -Kugel existiren (eben die Darstellung, welche nach dem von mir in Band 19 dieser Annalen (1881) aufgestellten Satze allgemein gültig ist). Dabei erscheint ihm (pag. 242 l. c.) ein von zwei Stellen des Gebildes abhängiges unendliches Product fundamental, das er, der Weierstrass'schen Bezeichnung entsprechend, mit  $E$  benennt:

$$E(\xi, \eta) = (\xi - \eta) \cdot \prod \frac{(\xi - \eta_n)(\eta - \xi_n)}{(\xi - \xi_n)(\eta - \eta_n)};$$

mit seiner Hülfe erzeugt er alle anderen für ihn in Betracht kommenden Functionen. Hier sind  $\xi, \eta$  die transcendenten Argumente, durch welche die beiden Stellen des algebraischen Gebildes, die wir  $x, y$  nennen, gegeben werden;  $E(\xi, \eta)$  ist in Folge dessen mit unserer *Primform*  $\Omega(x, y)$  so gut wie identisch. Man hat nur, um letztere zu erhalten,  $\xi$  in geeigneter Weise gleich  $\xi_1 : \xi_2$ ,  $\eta$  gleich  $\eta_1 : \eta_2$  zu setzen, worauf

$$\Omega(x, y) = \xi_2 \eta_2 E(\xi, \eta)$$

ist, sich also durch ein unendliches Product darstellt, dessen einzelne Factoren Determinanten vom Typus  $(\xi \eta) = (\xi_1 \eta_2 - \xi_2 \eta_1)$  sind:

$$\Omega(x, y) = (\xi \eta) \cdot \prod \frac{(\xi \eta_n) (\eta \xi_n)}{(\xi \xi_n) (\eta \eta_n)}.$$

Die hiermit gegebene formal ganz unbedeutende Modification des Schottky'schen Ansatzes ist für die Auffassung von fundamentaler Bedeutung. Indem das  $E$  des Hrn. Schottky für  $\xi = \infty$  oder  $\eta = \infty$  selbst unendlich wird, verhält es sich auf dem ursprünglichen algebraischen Gebilde durchaus complicirt und lässt in keiner Weise das einfache Verhalten erkennen, welches das  $\Omega(x, y)$  thatsächlich besitzt\*.)

## § 5.

### Von den Mittelformen.

Wir betrachten jetzt auf unserem algebraischen Gebilde für einen Augenblick algebraische Functionen, die auf dem Gebilde eindeutig sind, dieselben, die wir oben (§ 3) aus Integralen zweiter Gattung zusammensetzten. Die Primform  $\Omega$  ergiebt bei beliebigem  $p$  eine Darstellung dieser Functionen, die für  $p = 0$  wie für  $p = 1$  sehr bekannt ist. In der That, seien die  $a_i$  die Nullpunkte, die  $b_i$  die Unendlichkeitspunkte einer solchen Function  $R$ , so hat man

$$(35) \quad R = \frac{\prod_i \Omega(x, a_i)}{\prod_i \Omega(x, b_i)}.$$

Wie aber steht es mit der analogen Darstellung algebraischer *Formen*? Wir müssen, ehe wir diese Frage beantworten, die Bedeutung des

---

\*) Für eine specielle Art algebraischer Gebilde, nämlich die ebenen Curven  $n^{\text{ter}}$  Ordnung, welche keine singulären Punkte besitzen, wird Herr Pick in Bd. 29 der Mathematischen Annalen in der noch wiederholt zu nennenden Arbeit „Zur Theorie der Abel'schen Functionen“ (1886) ebenfalls ganz in die Nähe der Primform  $\Omega(x, y)$  geführt. In der That ist, für den dort vorliegenden Fall, der p. 267 l. c. gegebene Ausdruck:

$$\frac{(hxy)^2}{a_h a_x^{n-1} \cdot a_h a_y^{n-1}} \cdot e^{\mathbf{H}(xy)}$$

geradezu das Quadrat unseres  $\Omega$ . Herr Pick bemerkt auch die ausgezeichnete Eigenschaft dieses Ausdrucks, nirgends unendlich zu werden und nur bei  $x = y$  zu verschwinden; er zieht daraus aber keine allgemeine Folgerung betr. die Bedeutung seines Ausdrucks, wie er denn insbesondere nicht entwickelt, dass auch noch die Quadratwurzel aus dem Ausdrucke (eben unser  $\Omega$ ) auf dem algebraischen Gebilde unverzweigt ist.

Wortes Form noch erst genauer festlegen. Im allgemeineren Sinne wird dies erst weiter unten (§ 7) geschehen. Indem wir den Fall  $p = 1$  vorläufig ausschliessen, wollen wir uns hier mit einer vorläufigen Definition für  $p = 0$  und  $p > 1$  begnügen. Im Falle  $p = 0$  verstehen wir hier unter einer algebraischen Form eine homogene rationale ganze Function der im vorigen Paragraphen eingeführten  $x_1, x_2$ . Im Falle  $p > 1$  wollen wir als algebraische Form eine homogene rationale ganze Function der  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  bezeichnen, durchaus den Erläuterungen des § 2 entsprechend. Möge nun eine solche Form  $F$  an den Stellen  $a_i$  des algebraischen Gebildes verschwinden. Wir werden dann für  $p=0$  bei geeigneter Wahl der absoluten Werthe der den  $a_i$  zugehörigen homogenen Coordinaten sofort schreiben können:

$$F = \prod_i (x a_i).$$

Ist aber  $p > 1$  und wir bilden das entsprechende Product

$$\prod_i \Omega(x, a_i),$$

so wird dasselbe, weil transcendent, keineswegs mit  $F$  übereinstimmen.

*Den Quotienten*

$$(36) \quad \frac{\prod_i \Omega(x, a_i)}{F}$$

*betrachte ich als Definition einer neuen, auf dem algebraischen Gebilde nirgendwo Null oder Unendlich werdenden Form.* Ich bezeichne alle so entstehenden Formen als *Mittelformen*, weil sie, sozusagen, zwischen den transcendenten  $\Omega$ -Producten und den algebraischen Formen in der Mitte stehen.

In der hiermit gegebenen Definition liegt noch, was man wohl beachten möge, eine gewisse Unbestimmtheit. Eine jede der im Zähler von (36) auftretenden Primformen kann nach (33), unabhängig von jeder anderen, um einen Factor

$$\pm e^{\sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^{(i)} \left( \frac{x a_i}{w_{\alpha}} + \frac{\omega_{\alpha}^{(i)}}{2} \right)}$$

modificirt werden. Ich werde einen solchen Factor, der Ausdrucksweise von Weierstrass folgend, eine *Einheit* nennen. Dann kann also unser Quotient um das folgende Product von Einheiten modificirt werden:

$$\pm e^{\sum_i \sum_{\alpha} \eta_{\alpha}^{(i)} \left( \frac{x a_i}{w_{\alpha}} + \frac{\omega_{\alpha}^{(i)}}{2} \right)}.$$

Aber unter den so entstehenden Werthen hängen angenscheinlich nur diejenigen analytisch zusammen, die sich um einen Einheitsfactor folgender Form unterscheiden:

$$e^{\sum^{\alpha} \eta_{\alpha} \left( \sum_i w_{\alpha}^{x a_i} + \frac{n \omega_{\alpha}}{2} \right)},$$

unter  $n$  die (nothwendig gerade) Zahl der Nullstellen  $a_i$  verstanden. Unser Quotient (36) schliesst also unendlich viele unter einander analytisch nicht zusammenhängende Werthereihen in sich. Wenn wir also unseren Quotienten als ein analytisch wohlbestimmtes Gebilde behandeln, so ist dabei die Voraussetzung, dass wir irgend eine dieser unendlich vielen Werthereihen fest gewählt haben. Von der einen Werthereihe können wir hernach zu jeder anderen durch Zufügung geeigneter Einheitsfactoren übergehen.

Wir überzeugen uns jetzt, dass wir, von solchen Einheitsfactoren abgesehen, alle Mittelformen (36) auf eine einzige  $m(x)$  zurückführen können. Wir definiren dieses  $m(x)$ , indem wir in (36) für  $F$  irgend eine Linearform  $C_1 \varphi_1 + C_2 \varphi_2 + \dots + C_p \varphi_p$  einführen, deren  $2p - 2$  Nullpunkte wir  $c_i$  nennen wollen:

$$(37) \quad m(x) = \frac{\prod_i \Omega(x, c_i)}{C_1 \varphi_1 + \dots + C_p \varphi_p}.$$

In der That wird (36), für irgend eine Form  $\nu^{\text{ten}}$  Grades der  $\varphi$  gebildet, von der  $\nu^{\text{ten}}$  Potenz des so gewonnenen  $m(x)$  nur um Einheitsfactoren verschieden sein können. Um dies zu sehen genügt es, den betreffenden Quotienten (36) durch  $m(x)^{\nu}$  zu dividiren und die entstehende Function von  $x$  auf der Riemann'schen Fläche, auf der sie keinerlei Null- oder Unendlichkeitsstellen hat, auf ihre Periodicitätseigenschaften zu untersuchen.

Das durch (37) eingeführte  $m(x)$  ist in dem allgemeinen Sinne des § 2 eine Form  $(-p)^{\text{ten}}$  Grades in den  $\varphi$  der Stelle  $x$ . Beschreibt  $x$  einen Periodenweg, bei welchem die  $w_{\alpha}$  um  $\omega_{\alpha}$ , die  $Y_{\alpha}$  um  $-\eta_{\alpha}$  wachsen, so erhält  $m(x)$  einen Factor, den ich folgendermassen schreiben will:

$$(38) \quad e^{\sum^{\alpha} \eta_{\alpha} (W_{\alpha}^x + (p-1)\omega_{\alpha})}.$$

Hier bedeutet  $W_{\alpha}^x$  die Integralsumme:

$$(39) \quad W_{\alpha}^x = w_{\alpha}^{x c_1} + w_{\alpha}^{x c_2} + \dots + w_{\alpha}^{x c_{2p-2}};$$

ich habe dieselbe mit einem besonderen Zeichen belegt, weil dieselbe, dem Abel'schen Theorem zufolge, von der besonderen Linearform  $C_{\varphi}$ , deren Verschwindungspunkte die  $c_i$  sind, unabhängig ist. {

Wir könnten  $m(x)$  die *fundamentale Mittelform* nennen. Inzwischen bestimmt uns die Rücksicht auf die folgenden Entwicklungen des § 6 und 9, diesen Namen lieber für die  $(2p-2)^{\text{te}}$  Wurzel aus  $m(x)$  in Anwendung zu bringen:

$$(40) \quad \mu(x) = \sqrt[2p-2]{m(x)}.$$

Hierdurch wird ja zunächst, bei der Vieldeutigkeit des Wurzelzeichens, eine neue Unbestimmtheit eingeführt. Allein diese Unbestimmtheit ist weiterhin ohne Belang, insofern in den späteren Formeln immer so viele Factoren  $\mu$  mit einander multiplicirt auftreten, dass alle Vieldeutigkeit wegfällt, sobald man an der selbstverständlichen Regel festhält, dass man für neben einander stehende Factoren  $\mu$  immer nur die gleiche Definition in Anwendung bringt. Es ist dies mit Absicht etwas ungenau ausgedrückt. In der That zeigt sich, dass in den bald zu betrachtenden speciellen Fällen statt  $\mu(x)^{2p-2}$  schon  $\mu(x)^m$ , wo  $m$  ein Theiler von  $2p - 2$  ist, durch eine Formel vom Typus (36), (37) definirt werden kann, so dass dann zur Weghebung der in Rede stehenden Unbestimmtheit nur eine kleinere Zahl von Factoren  $\mu(x)$  zusammenzutreten braucht.

Die Mittelformen sind meines Wissens bislang in der Literatur nicht aufgetreten. In Band 32 der Annalen konnte ich die Darstellung des dort zu behandelnden hyperelliptischen Falles so wenden, dass es noch nicht nöthig war, von Mittelformen zu sprechen. Anders verfuhr ich in einer vorher über denselben Gegenstand in den Göttinger Nachrichten publicirten Note (Zur Theorie der hyperelliptischen Functionen beliebig vieler Argumente, Nov. 1887). Dort benutzte ich einen Ausdruck  $X(x)$ , der dem  $\mu(x)$  sehr nahe steht. Es ist nämlich im Sinne der damals gebrauchten Bezeichnung:

$$\mu(x) = \left( \frac{X(x)}{\sqrt{f(x)}} \right)^{\frac{1}{4}}.$$

## § 6.

### Fälle besonders einfacher algebraischer Darstellung.

Die bisher gegebenen Definitionen knüpften, wie dies in § 1 in Aussicht genommen war, durchaus an die Grundvorstellungen der Riemann'schen Theorie an, sie machten keinerlei Voraussetzungen oder Angaben darüber, wie das in Betracht zu ziehende algebraische Gebilde algebraisch dargestellt sein sollte. Wir wenden uns jetzt zu der Frage, ob es nicht eine solche Darstellung giebt, die für unsere Zwecke besonders geeignet ist. Um in dieser Hinsicht bestimmte Ideen zu gewinnen, betrachten wir vorab zwei Fälle algebraischer Darstellung, die zu besonders einfachen Resultaten führen, so dass sie für die höheren Fälle einen Fingerzeig abzugeben scheinen. Das eine Mal handelt es sich um die hyperelliptischen Gebilde, betreffs deren ich zumal auf die in Bd. 32 gegebenen Formeln verweisen will, das andere

Mal um die ebenen Curven ohne Doppelpunkt, wegen deren man neben den Arbeiten von Clebsch insbesondere die bereits genannte Abhandlung von Pick im 29<sup>ten</sup> Bande der Annalen vergleichen mag.

Im hyperelliptischen Falle gestalten sich die Verhältnisse folgendermassen. Wir haben eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche, die durch die Quadratwurzel aus einer Binärform  $(2p+2)$ ten Grades

$$(41) \quad \sqrt{f_{2p+2}(z_1, z_2)}$$

definiert ist. Das zugehörige  $d\omega$  wird:

$$(42) \quad d\omega_z = \frac{(z dz)}{\sqrt{f_{2p+2}(z_1, z_2)}}.$$

In Folge dessen decken sich die  $\varphi$  mit den rationalen ganzen Formen  $(p-1)$ ten Grades der  $z_1, z_2$ ; wir können insbesondere setzen:

$$(43) \quad \varphi_1(z) = z_1^{p-1}, \varphi_2(z) = z_1^{p-2} z_2, \dots, \varphi_p(z) = z_2^{p-1},$$

woran sich die weiteren Formeln schliessen:

$$(44) \quad w_1^{xy} = \int_y^x \varphi_1(z) d\omega_z, w_2^{xy} = \int_y^x \varphi_2(z) d\omega_z, \dots, w_p^{xy} = \int_y^x \varphi_p(z) d\omega_z.$$

Aber auch die Definition der Integrale dritter Gattung wird einfach. Dieselben erscheinen als Doppelintegrale algebraischer Ausdrücke von übersichtlicher Bauart. Invariantentheoretische Betrachtungen, auf deren Einzelheiten ich hier nicht einzugehen habe, lassen dabei unter allen möglichen Integralen dritter Gattung eines,  $Q$ , als besonders bevorzugt erscheinen. Sei  $f(z)$  symbolisch gleich  $a_z^{2p+2}$  gesetzt, so ist  $Q$  durch folgende Formel gegeben

$$(45) \quad Q_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x \int_{\eta}^{\xi} d\omega_z d\omega_{\xi} \cdot \frac{\sqrt{fz} \sqrt{f\xi} + a_z^{p+1} a_{\xi}^{p+1}}{2(z\xi)^2};$$

aus ihm entsteht das allgemeine  $P_{\xi\eta}^{xy}$ , indem man eine beliebige bilineare Combination der  $w^{xy}$  und  $w^{\xi\eta}$  hinzufügt (oder, was dasselbe ist, unter dem doppelten Integralzeichen eine beliebige bilineare Combination der  $\varphi(z)$  und  $\varphi(\xi)$ ). — Des Ferneren ergibt sich eine Darstellung der Primform, bei welcher der in Formel (32) postulierte Grenzübergang vollzogen ist. Bezeichnet man nämlich mit  $\bar{x}, \bar{y}$  die Stellen, welche zu  $x, y$  conjugirt sind (d. h. sich von den Stellen  $x, y$  nur durch das Vorzeichen der zugehörigen Quadratwurzel  $\sqrt{fx}, \sqrt{fy}$  unterscheiden), so kommt:

$$(46) \quad \Omega(x, y) = \frac{(xy)}{\sqrt{fx \cdot fy}} \cdot e^{\frac{1}{2} P_{xy}^{\bar{x}\bar{y}}}.$$

Endlich wird die Definition der Mittelform  $\mu(x)$  jetzt besonders einfach,

indem wir auf dem hyperelliptischen Gebilde neben den algebraischen Formen, die wir im vorigen Paragraphen ausschliesslich betrachteten, nämlich den rationalen ganzen Formen der  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$ , die sich in den  $z_1, z_2$  vermöge (43) als rationale ganze Formen von einem durch  $(p-1)$  theilbaren Grade darstellen, überhaupt rationale ganze Formen der  $z_1, z_2$  betrachten können. Wir werden insbesondere eine lineare Form dieser Art in Betracht ziehen:  $C_1 z_1 + C_2 z_2$ ; ihre Verschwindungsstellen sollen  $c, \bar{c}$  heissen. Statt (37), (40) können wir dann schreiben

$$(47) \quad \mu(x)^2 = \frac{\Omega(x, c) \cdot \Omega(x, \bar{c})}{C_1 x_1 + C_2 x_2},$$

so dass also jetzt, entsprechend der am Schlusse des vorigen Paragraphen gemachten Andeutung, die 2<sup>te</sup> Potenz von  $\mu(x)$  ebenso definiert erscheint, wie früher, im allgemeinen Falle, die  $(2p-2)$ <sup>te</sup>.

Bei den ebenen Curven  $m^{\text{ter}}$  Ordnung, welche keinen Doppelpunkt (d. h. überhaupt keinen singulären Punkt) besitzen und also dem Geschlecht

$$(48) \quad p = \frac{m-1 \cdot m-2}{2}$$

angehören, kommen Formeln ganz ähnlicher Art vor. Um diesen Formeln volle Symmetrie zu ertheilen, muss man in dieselben bekanntlich, da es sich um ternäre Bildungen handelt, Reihen willkürlicher Grössen einführen. Herr Pick benutzt zu dem Zwecke, wie es zumeist üblich ist, die Coordinaten eines Hülfspunktes  $h$ . Inzwischen ist es im Interesse der späteren Verallgemeinerung zweckmässig, statt des Punktes  $h$  die Coordinaten zweier sich in ihm kreuzender gerader Linien  $\alpha, \beta$  einzuführen. Sei jetzt

$$(49) \quad f(z_1 z_2 z_3) = 0$$

die Gleichung der Curve,  $\alpha_z = 0, \beta_z = 0$  sind die beiden willkürlichen Geraden,  $(f \alpha \beta)$  die Functionaldeterminante von  $f(z), \alpha_z, \beta_z$ . Dann hat man vor allen Dingen die folgende Darstellung des zur Curve gehörigen Differentials  $d\omega$ :

$$(50) \quad d\omega_z = \frac{(\alpha_z \beta_{dz} - \beta_z \alpha_{dz})}{(f \alpha \beta)}.$$

Es ergeben sich sodann die  $\varphi$  als identisch mit den rationalen ganzen Formen  $(m-3)^{\text{ten}}$  Grades der  $z_1, z_2, z_3$ , also etwa:

$$(51) \quad \varphi_1(z) = z_1^{m-3}, \varphi_2(z) = z_1^{m-4} z_2, \dots, \varphi_p(z) = z_3^{m-3},$$

womit die zugehörigen Integrale erster Gattung  $w_1, w_2, \dots, w_p$  definiert sind. Die Integrale dritter Gattung wird man wieder als Doppelintegrale darzustellen suchen. Abermals sind es invariantentheoretische Ueberlegungen, die in dieser Hinsicht zu einer bestimmten einfachsten Normalform  $Q$  führen. Sei  $f(z)$  symbolisch gleich  $\alpha_z^m$ ;  $\alpha_z, \beta_z$  seien

wieder zwei willkürliche Linearformen (die übrigens von den in (50) benutzten ganz unabhängig zu denken sind). Dann lautet das von Herrn Pick aufgestellte  $Q$  folgendermassen\*):

$$(52) \quad Q_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x \int_{\eta}^{\xi} d\omega_x d\omega_\zeta \cdot \frac{\sum_1^m ((\alpha\alpha\beta)a_z^{\nu-1} a_\zeta^{m-\nu} \cdot (\alpha\alpha\beta)a_z^{m-\nu} a_\zeta^{\nu-1}) - \sum_1^{m-1} ((\alpha\alpha\beta)^2 a_z^{\nu-1} a_\zeta^{m-\nu-1} \cdot a_z^{m-\nu} a_\zeta^\nu)}{m(\alpha_z \beta_\zeta - \beta_z \alpha_\zeta)^2};$$

aus ihm ergibt sich wieder das allgemeine  $P_{\xi\eta}^{xy}$  durch Hinzufügung einer bilinearen Verbindung der  $w^{xy}$ ,  $w^{\xi\eta}$ . Wir haben ferner eine explicite Darstellung der Primform. Zu dem Zwecke muss man die  $(m-1)$  von der Stelle  $x$  verschiedenen Stellen

$$x', x'', \dots, x^{(m-1)}$$

der Curve  $f=0$  einführen, für welche (ebenso wie für  $x$  selbst)

$$\alpha_x \beta_x - \beta_x \alpha_x = 0,$$

desgleichen die  $(m-1)$  Stellen

$$y', y'', \dots, y^{(m-1)},$$

die sich in entsprechender Weise aus  $y$  ableiten lassen. Man hat dann\*\*):

$$(53) \quad \Omega(x, y) = \frac{\alpha_x \beta_y - \beta_x \alpha_y}{\sqrt{(\alpha\alpha\beta)a_x^{m-1} \cdot (\alpha\alpha\beta)a_y^{m-1}}} \cdot e^{\frac{1}{2} \sum_1^{m-1} P_{xy}^{x^i y^i}}.$$

Für die Mittelform  $\mu(x)$  ergibt sich dem allgemeinen Ansatz des vorigen Paragraphen gegenüber wieder eine Vereinfachung. In der That können wir jetzt alle homogenen rationalen ganzen Verbindungen der  $x_1 x_2 x_3$  als Formen auf der Curve betrachten. Sei nun  $C_x$  eine Linearform dieser Art; ihre Nullstellen heissen  $c', c'', \dots, c^{(m)}$ . Wir setzen dann einfach:

$$(54) \quad \mu(x)^m = \frac{\prod_1^m \Omega(x, c^{(i)})}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + C_3 x_3}.$$

Ich will noch ausdrücklich darauf aufmerksam machen, dass die Formeln dieses Paragraphen ungeändert in Geltung bleiben auch wenn

\*) Man kann dasselbe für  $f(z) = a_z^m = b_z^m = c_z^m$  in die folgende Gestalt symbolisch umrechnen;

$$Q_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x \int_{\eta}^{\xi} d\omega_x d\omega_\zeta \cdot \frac{(abc)^2 \sum_{x+\lambda+\mu=m-2} a_z^\lambda b_z^\mu c_z^{m-\lambda-\mu} a_\zeta^{\lambda+\mu} b_\zeta^{\mu+x} c_\zeta^{x+\mu}}{6m a_\zeta^{m-1} a^x},$$

wo im Zähler eine aus der Theorie der Doppeltangenten bekannte Covariante steht.

\*\*\*) Vergl. die Fussnote auf pag. 14.

$p = 0$  oder  $p = 1$  ist. Damit sind also, der Beschränkung des vorigen Paragraphen entgegen, Mittelformen auch im Falle  $p = 1$  definiert. Nur haben dieselben keine absolute Bedeutung, sondern hängen von der besonderen Gleichungsform ab, in der wir das elliptische Gebilde als gegeben voraussetzen.

## § 7.

### Allgemeines über algebraische Formen auf einer Curve.

Ehe wir weiter gehen, müssen wir den Begriff der *algebraischen Form* auf einer algebraischen Curve noch in allgemeinerem Sinne festlegen, als dies im vorigen Paragraphen geschehen ist, wobei wir gleich Gelegenheit nehmen den wichtigen Begriff des *vollen Formensystems* einzuführen.

Von den beiden im vorigen Paragraphen betrachteten Fällen betrifft der eine (der hyperelliptische) eine solche Curve, die den ein-dimensionalen Raum der  $z_1 : z_2$  doppelt überdeckt, der andere eine Curve des zweidimensionalen Raumes der  $z_1 : z_2 : z_3$ , welche nur der einen Beschränkung unterliegt, keine singulären Punkte zu besitzen.

Indem wir diese beiden Fälle umfassen, denken wir uns jetzt im  $(n - 1)$ -fach ausgedehnten Raume der  $z_1 : z_2 : \dots : z_n$  eine Curve  $m^{\text{ter}}$  Ordnung gegeben, welche keinerlei singuläre Punkte (Doppelpunkte, Spitzen etc.) besitzen soll, die aber gerne in eine mehrfache Ueberdeckung einer Curve niedriger Ordnung ausgeartet sein kann (wo wir uns dann diese verschiedenen Ueberdeckungen durch Verzweigungspunkte in irgendwelcher Weise verbunden denken mögen).

Was wollen wir im allgemeinsten Sinne unter einer *algebraischen Form*  $\delta^{\text{ten}}$  Grades auf dieser Curve verstehen? Sicher wird uns eine rationale ganze homogene Function  $\delta^{\text{ten}}$  Grades der  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ,  $G_\delta$ , ein Beispiel hierfür sein. Wir haben uns im vorigen Paragraphen auf dieses Beispiel beschränkt. Wir knüpfen jetzt an den allgemeinen Begriff der auf der Curve eindeutigen algebraischen *Function* an. Wir werden verabreden, dass wir jede solche homogene, ganze, algebraische Verbindung  $\delta^{\text{ten}}$  Grades der  $z_1, z_2, \dots, z_n$ ,  $\Gamma_\delta$ , eine *algebraische Form*  $\delta^{\text{ten}}$  Grades nennen wollen, die durch eine Form  $G_\delta$  dividirt eine auf der Curve eindeutige algebraische Function ergibt. Die  $m\delta$  Nullstellen einer Form  $\Gamma_\delta$  sind also schlechtweg solche Punkte der Curve, welche zu irgend  $m\delta$  Punkten  $G_\delta = 0$  äquivalent sind\*).

---

\*) Nach der Ausdrucksweise von Dedekind und Weber im 92<sup>ten</sup> Bande des Journals für Mathematik (Theorie der algebraischen Functionen einer Veränderlichen, 1880); Brill und Nöther gebrauchen für denselben Begriff das Wort „corresidual“, welches aber im Zusammenhange des Textes weniger zweckmässig scheint.

Die so gegebene allgemeine Definition ist mit den Entwicklungen des vorigen Paragraphen nicht im Widerspruche, aber sie erweitert dieselbe für den Fall des hyperelliptischen Gebildes. Sie lässt uns nämlich die Quadratwurzel  $\sqrt{f_{2p+2}(z_1, z_2)}$  als eine zum Gebilde gehörige algebraische Form  $(p+1)^{\text{ten}}$  Grades erscheinen. Bei der ebenen Curve  $f=0$  tritt eine solche Erweiterung nicht ein: die zu  $f=0$  gehörigen  $\Gamma$  decken sich einfach, auf Grund bekannter Sätze der analytischen Geometrie, mit den rationalen ganzen Formen der  $z_1, z_2, z_3$ . Bei dem hyperelliptischen Gebilde setzt sich die Gesammtheit der  $\Gamma$  erst aus  $z_1, z_2, \sqrt{f_{2p+2}}$  zusammengenommen rational und ganz zusammen.

Wir haben mit diesen letzten Bemerkungen thatsächlich bereits den Begriff des vollen Formensystems berührt. *Allgemein werde ich als ein zu unserer Curve gehöriges volles Formensystem jede solche Zusammenstellung zugehöriger algebraischer Formen  $\Gamma', \Gamma'', \dots$  bezeichnen, durch deren Formen sich alle anderen zur Curve gehörigen algebraischen Formen rational und ganz darstellen.*

Die hiermit besprochenen Ideenbildungen finden sich in der Literatur von zwei Seiten her bearbeitet, von geometrischer und von arithmetischer Seite.

In ersterer Hinsicht will ich insbesondere auf die bereits oben genannte Arbeit von Herrn Nöther verweisen, in welcher derselbe die Normalcurve der  $\varphi$  untersucht (Math. Ann. Bd. 17: Ueber die invariante Darstellung algebraischer Functionen, 1880). Herr Nöther entwickelt daselbst ein Resultat, welches für uns besonders wichtig ist. In unsere Ausdrucksweise übersetzt besagt dasselbe, *dass für die Normalcurve der  $\varphi$  (sofern wir den hyperelliptischen Fall ausnehmen, der hier in der That eine Sonderstellung einnimmt) die  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  selbst ein volles Formensystem bilden.*

In letzterer Hinsicht habe ich auf die gerade genannte Arbeit der Herren Dedekind und Weber, sowie auf die im 91<sup>ten</sup> Bande des Journ. für Mathematik veröffentlichte Abhandlung von Hrn. Kronecker zu verweisen (Ueber die Discriminante algebraischer Functionen einer Variablen, 1881). Es seien  $\alpha_z, \beta_z$  zwei lineare Formen der  $z$ , welche für keinen Punkt unserer Curve gemeinsam verschwinden. Wir setzen:

$$\alpha_z : \beta_z = x = x_1 : x_2$$

(projiciren also unsere Curve  $m^{\text{ter}}$  Ordnung durch das Büschel linearer Mannigfaltigkeiten

$$\alpha_z - x \cdot \beta_z = 0$$

auf die  $x$ -Axe, wodurch letztere  $m$ -fach überdeckt wird). Ist nun eine Form  $\Gamma_\delta$  vorgelegt, so wird  $\frac{\Gamma_\delta}{x_2^\delta}$  eine auf unserem Gebilde eindeutige algebraische Function sein, welche nur bei  $x = \infty$  unendlich wird.

Dies ist aber gerade, was die genannten Herren schlechtweg als eine zum Gebilde gehörige *ganze* algebraische Function bezeichnen. Ist umgekehrt eine solche ganze algebraische Function gegeben, die bei  $x = \infty$  höchstens  $\delta$ -fach unendlich wird, so wird ihr Product mit  $x_2^\delta$  eine Form  $\Gamma_\delta$  vorstellen. „Ganze algebraische Functionen“ und „algebraische Formen“ stehen einander also sehr nahe; der Unterschied liegt in der Hauptsache darin, dass wir homogene Veränderliche einführen und uns dadurch von der dem Wesen der Sache fremden Bevorzugung des Werthes  $x = \infty$  freimachen. In der That können wir denn auch den genannten Arbeiten ein für uns wichtiges Resultat entnehmen. Es wird dort nämlich gezeigt, dass man allemal ein System von  $(m-1)$  ganzen Functionen

$$F_1, F_2, \dots, F_{m-1}$$

so aussuchen kann, dass jede andere ganze Function sich in der Form darstellen lässt:

$$g + g_1 F_1 + g_2 F_2 + \dots + g_{m-1} F_{m-1},$$

unter den  $g$  rationale ganze Functionen von  $x$  verstanden. Das heisst, in unsere Sprache übertragen, dass allemal  $(m-1)$  algebraische Formen

$$\Gamma_1, \Gamma_2, \dots, \Gamma_{m-1}$$

mit  $x_1, x_2$  zusammen ein volles Formensystem bilden, durch welches sich alle anderen algebraischen Formen besonders einfach ausdrücken lassen. Im hyperelliptischen Falle ist dieses Formensystem von dem bei uns benutzten nicht verschieden, im Falle der ebenen Curve aber, wie in dem der Normalcurve der  $\varphi$ , dürfte es für die Anwendung complicirter sein als das von uns angegebene System der  $x_1, x_2, x_3$ , beziehungsweise der  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$ .

Ich gebe diese Erläuterungen über volle Formensysteme übrigens wesentlich nur zur allgemeinen Orientirung. Ich werde die folgende Darstellung so wählen, dass ich betreffs derselben keinerlei allgemeine Kenntniss voraussetze; vielmehr dienen mir die vollen Systeme nur zur Exemplicificirung in einzelnen Fällen.

## § 8.

### Kanonische Curven.

Die Entwicklungen des vorigen Paragraphen und die anderen, von denen wir in §§ 2, 5 ausgingen, widersprechen einander gewissermassen: damals definirten wir Formen auf dem algebraischen Gebilde ganz allgemein von den  $\varphi$  aus, jetzt knüpfen wir zu demselben Zwecke an eine bestimmte Art algebraischer Darstellung des Gebildes an, indem wir uns dasselbe als Curve  $m^{\text{ter}}$  Ordnung im Raume von  $(n-1)$  Dimensionen gelegen denken. Die zweierlei Festsetzungen stimmen

nur in einem einzigen Falle überein, wenn nämlich die  $C_m$  mit der Normalcurve der  $\varphi$  identisch ist (wobei wir dann noch, um den Nöther'schen Satz anwenden zu können, den hyperelliptischen Fall bei Seite lassen müssen). Inzwischen zeigen die beiden Beispiele des § 6, dass doch auch noch auf andere Weise eine Verträglichkeit der zweierlei Auffassungen herbeigeführt werden kann. Beim hyperelliptischen Gebilde sind die linearen Verbindungen der  $\varphi$  mit den Verbindungen  $(p-1)$ ten Grades der  $z_1, z_2$ , bei den ebenen Curven  $m$ ter Ordnung, die wir betrachteten, mit den Verbindungen  $(m-3)$ ten Grades der  $z_1, z_2, z_3$  identisch; *dadurch wird erreicht, dass alle rationalen ganzen homogenen Verbindungen der  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  in den beiden Fällen algebraische Formen auch im Sinne des § 7 sind.* Ich werde alle Curven, bei denen etwas Aehnliches Statt hat, *kanonische Curven* nennen.

*Kanonische Curven sind also unter den in § 7 betrachteten Curven solche, bei denen die  $\varphi_1, \varphi_2, \dots, \varphi_p$  algebraische Formen, sagen wir vom  $d$ ten Grade, der  $z_1, z_2, \dots, z_n$  sind.* Es ist dies auf Grund bekannter Aequivalenzbetrachtungen dasselbe, als wenn wir sagten, dass die Gesammtheit der linearen Verbindungen der  $\varphi$  mit der Gesammtheit der algebraischen Formen  $d$ ten Grades der  $z$  identisch ist.

Auf Grund dieser Definition ergeben sich sofort zwei Eigenschaften, welche für die kanonischen Curven charakteristisch sind.

Erstlich beachte man, dass eine  $\varphi$  in  $2p-2$  Punkten verschwindet; es ist daher

$$(55) \quad 2p - 2 = md;$$

die Ordnung  $m$  der kanonischen Curve ist ein Theiler von  $2p-2$ .

Zweitens seien  $\alpha_z, \beta_z$  irgend zwei lineare Formen der  $z_1, \dots, z_n$ , welche für keinen Punkt der kanonischen Curve gemeinsam verschwinden. Der Differentialausdruck

$$(56) \quad \alpha_z \beta_{dz} - \beta_z \alpha_{dz}$$

verschwindet dann in

$$2m + 2p - 2 = m(d+2)$$

Punkten der Curve. *Ich sage, dass diese  $m(d+2)$  Punkte die Nullstellen einer algebraischen Form  $\Gamma_{d+2}$  sind.* In der That, sei vorübergehend  $dW$  dasjenige überall endliche Differential, welches durch die Gleichung:

$$dW = \beta_z^d \cdot d\omega$$

definirt ist. Der Differentialquotient

$$-d\left(\frac{\alpha_z}{\beta_z}\right) : dW$$

ist dann eine auf der Curve eindeutige algebraische Function, welche

in den genannten  $m(d+2)$  Punkten verschwindet. Aber die Unendlichkeitspunkte dieser Function liegen  $(d+2)$ -fach zählend in den Punkten  $\beta_z = 0$ ; sie sind also die Nullstellen einer  $G_{d+2}(z)$  [um diese im vorigen Paragraphen gelegentlich gebrauchte Bezeichnung wieder aufzunehmen]. Daher sind die Nullstellen der Function nach der Definition der  $\Gamma$  durch das Verschwinden einer  $\Gamma_{d+2}$  gegeben. Wir könnten geradezu schreiben:

$$(57) \quad \Gamma_{d+2}(z_1 \cdots z_n) = \frac{-d \left( \frac{\alpha_z}{\beta_z} \right)}{dW} \cdot \beta_z^{d+2}.$$

Für  $d\omega$  ergibt sich dann der Ausdruck

$$(58) \quad d\omega = \frac{(\alpha_z \beta_{dz} - \beta_z \alpha_{dz})}{\Gamma_{d+2}(z_1 \cdots z_n)} \cdot -$$

Die beiden hiermit genannten Eigenschaften der kanonischen Curven, die in der Formel (58) zusammengefasst erscheinen, sind, wie gesagt, für die kanonischen Curven charakteristisch. Denn sobald man für  $d\omega$  die Formel (58) hat, werden die Integrale

$$(59) \quad \int \Gamma_d(z_1 \cdots z_n) \cdot d\omega$$

überall endliche Integrale vorstellen, die Formen  $\Gamma_d$  sind also lineare Verbindungen der  $\varphi$  und die Gesamtheit der  $\Gamma_d$  deckt sich, wieder vermöge der bekannten Aequivalenzbetrachtungen, mit der Gesamtheit der linearen Verbindungen der  $\varphi$  —

Wir haben bei den letzten Erläuterungen (indem wir von den  $\varphi$  handelten)  $p$  selbstverständlich  $> 1$  genommen. Unser letzter Satz gestattet uns, die Definition der kanonischen Curven auch auf die Fälle  $p = 0$  und  $p = 1$  auszudehnen. *Wir werden, bei beliebigem  $p$ , eine Curve kanonisch nennen, wenn das zugehörige  $d\omega$  durch eine Formel vom Typus (58) gegeben ist.*

Dies giebt für  $p = 1$  ein besonders einfaches Resultat. In der That können wir die Formeln (57), (58) sofort für  $p = 1$  gelten lassen, indem wir in denselben  $d = 0$  nehmen und  $dW$  mit dem einen in diesem Falle vorhandenen Differential erster Gattung identificiren. Wir haben also: *Sämmtliche Curven des § 7, die  $p = 1$  aufweisen, sind kanonische Curven.*

Für  $p = 0$  ergeben sich als kanonische Curven: die einfach überdeckte Gerade  $z_1 : z_2$ , die  $m$ -fach überdeckte Gerade, welche durch das Wurzelzeichen

$$\sqrt[m]{a_z \cdot b_z}$$

definiert wird, der einfache Kegelschnitt der Ebene.

*Jedenfalls lässt sich also jedes algebraische Gebilde in kanonische Form setzen. Für  $p > 1$  ist ja in allen Fällen die Normalcurve der  $\varphi$*

eine kanonische Curve (auch im hyperelliptischen Falle, trotzdem dort der Satz vom vollen Formensystem der  $\varphi$  nicht gilt). Um zu untersuchen, ob neben ihr gegebenen Falles noch niedere kanonische Curven existiren, hat man nur nachzusehen, ob für irgend einen Theiler  $d$  der Zahl  $2p - 2$  eine Schaar überall  $(d-1)$ -fach berührender linearer Verbindungen der  $\varphi$  existirt:

$$(c_1 \sqrt[d]{\varphi_1} + c_2 \sqrt[d]{\varphi_2} + \dots + c_n \sqrt[d]{\varphi_n})^d;$$

ist dies der Fall — und es muss sich jeweils mit algebraischen Mitteln entscheiden lassen — so hat man vermöge der Formeln:

$$z_1 = \sqrt[d]{\varphi_1}, z_2 = \sqrt[d]{\varphi_2}, \dots, z_n = \sqrt[d]{\varphi_n}$$

eine kanonische Darstellung des algebraischen Gebildes im Raume der  $z$ . Es müsste interessant sein, für beliebige Werthe des  $p$  alle Möglichkeiten aufzuzählen, welche in dieser Hinsicht existiren.

Die kanonischen Curven sind nun diejenige Darstellung der algebraischen Gebilde, die wir im Folgenden ausschliesslich zu Grunde legen\*). In der That zeigt sich, dass sich für sie die Verhältnisse immer am einfachsten gestalten. Ich werde in dieser Hinsicht jetzt zunächst entwickeln, dass sich die Formeln des § 6 fast ohne Aenderung auf beliebige kanonische Curven übertragen.

## § 9.

### Grundformeln der kanonischen Darstellung.

Ich werde die in Betracht kommenden Formeln in derselben Reihenfolge geben, wie in § 6, so dass fortwährender Vergleich möglich ist.

Zunächst noch eine genauere Festlegung der unter (58) gegebenen Formel für  $d\omega$ . Indem wir die in (58) vorkommenden willkürlichen Constanten  $\alpha, \beta$  in geeigneter Weise particularisiren, erhalten wir specielle Formeln:

$$d\omega = \frac{z_i dz_k - z_k dz_i}{\Gamma_{d+2}^{(ik)}(z_1 \dots z_n)},$$

wo  $i, k$  irgend zwei verschiedene der Indices  $1 \dots n$  sind; indem wir

\*) Entsprechend dem Umstande, dass wir mit der Riemann'schen Theorie beginnen, gelten im Texte die  $\varphi$  und die aus ihnen herzustellenden Ausdrücke von vornherein als bekannt; es bleibt also die Frage durchaus unberührt, wie wir dieselben herzustellen haben, wenn uns das algebraische Gebilde irgendwie durch Gleichungen definirt vorliegt. Ich will aber doch ausdrücklich darauf hinweisen, dass diese Frage längst von anderer Seite erledigt ist (so dass also, theoretisch zu reden, wirklich die Möglichkeit vorliegt, von dem irgendwie algebraisch gegebenen Gebilde bis zu jeder zulässigen kanonischen Darstellung desselben vorzudringen). Man vergl. z. B. Nöther in Bd. 23 der Annalen (Rationale Ausführung der Operationen in der Theorie der algebraischen Functionen, 1883).

sodann die einzelnen der so gewonnenen Formeln im Zähler und Nenner mit  $(\alpha_i \beta_k - \beta_i \alpha_k) = (\alpha \beta)_{ik}$  multipliciren und die sämtlichen so entstehenden Ausdrücke vereinigen, kommt:

$$d\omega = \frac{(\alpha_z \beta_{dz} - \beta_z \alpha_{dz})}{\sum (\alpha \beta)_{ik} \Gamma_{d+2}^{ik}(z_1 \dots z_n)},$$

womit die Abhängigkeit des in (58) auftretenden Nenners  $\Gamma_{d+2}$  von den Constanten  $\alpha, \beta$  klargelegt ist. Wir wollen diese Formel abkürzender Weise so schreiben:

$$(60) \quad d\omega = \frac{(\alpha_z \beta_{dz} - \beta_z \alpha_{dz})}{\Gamma_{d+2}(z_1 \dots z_n; \alpha \beta)}.$$

Wir wenden uns zur Definition der  $\varphi$  und der Integrale erster Gattung. Dieselbe ist bereits in (59) enthalten: *die linearen Verbindungen der  $\varphi$  decken sich mit den algebraischen Formen  $\Gamma_d(z_1 \dots z_n)$ ; unter den Formen  $\Gamma_d$  giebt es genau  $p$  linear unabhängige.*

Sei ferner  $P_{\xi\eta}^{xy}$  ein Integral dritter Gattung. Wir bilden uns

$$\frac{\partial^2 P}{\partial \omega_x \partial \omega_\xi},$$

multipliciren mit  $(\alpha_x \beta_\xi - \beta_x \alpha_\xi)^2$ , wo die  $\alpha, \beta$  willkürliche Grössen sind, die übrigens mit den unter (60) benutzten durchaus nicht identisch zu sein brauchen, und erhalten einen Ausdruck

$$\Psi(x, \xi; \alpha \beta),$$

der sich linear aus den Verbindungen zweiten Grades der Determinanten  $(\alpha \beta)_{ik}$  zusammensetzt. Dieser Ausdruck erweist sich in den  $x_1 \dots x_n$ , wie in den  $\xi_1 \dots \xi_n$ , als algebraische Form  $(d+2)$ ten Grades, verschwindet doppelt, wenn  $\alpha_x \beta_\xi - \beta_x \alpha_\xi = 0$  ist ohne dass  $x$  mit  $\xi$  zusammenfällt, und geht für  $\xi = x$  in das Quadrat von  $\Gamma_{d+2}(x_1 \dots x_n, \alpha \beta)$  über. Wir schliessen, dass es jedenfalls möglich sein muss, bei der vorgelegten  $C_m$  Formen  $\Psi$  dieser Art zu bilden. Das Integral  $P$  erscheint dann in der Form

$$(61) \quad P_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x \int_\eta^\xi d\omega_x d\omega_\xi \cdot \frac{\Psi(x, \xi; \alpha \beta)}{(\alpha_x \beta_\xi - \beta_x \alpha_\xi)^2}.$$

Umgekehrt wird jedes  $\Psi$ , welches die angegebenen Eigenschaften besitzt, in (61) eingesetzt ein Integral dritter Gattung definiren. Wir schliessen, dass der Ausdruck  $\Psi$  durch die von uns angegebenen Eigenschaften soweit definirt ist, wie das Integral dritter Gattung selbst: *aus einem speciellen Werthe des  $\Psi$  werden wir den allgemeinen erhalten, indem wir den mit willkürlichen  $c_{ik}$  ausgestatteten Ausdruck*

$$(62) \quad (\alpha_x \beta_\xi - \beta_x \alpha_\xi)^2 \cdot \sum c_{ik} \varphi_i(x) \varphi_k(\xi)$$

hinzuaddiren.

Wir ziehen jetzt die Definition (32) der Primform in Betracht. Wieder können wir den daselbst angedeuteten Grenzübergang mit Hilfe des Abel'schen Theorems ausführen, indem wir diejenigen Stellen

$$x', x'', \dots, x^{m-1}$$

beziehungsweise

$$y', y'', \dots, y^{m-1}$$

unserer kanonischen Curve einführen, welche die Gleichungen

$$\alpha_x \beta_z - \beta_x \alpha_z = 0, \quad \text{bez.} \quad \alpha_y \beta_z - \beta_y \alpha_z = 0$$

befriedigen, ohne doch mit  $x$ , bez.  $y$  identisch zu sein. Wir erhalten:

$$(63) \quad \Omega(x, y) = \frac{\alpha_x \beta_y - \beta_x \alpha_y}{\sqrt{\Gamma_{d+2}(x, \alpha\beta) \cdot \Gamma_{d+2}(y, \alpha\beta)}} \cdot e^{\frac{1}{2} \sum P_{xy}^{x^i y^i}}.$$

Uebrigens bemerken wir:  $\Omega(x, y)$  ist in den Coordinaten des Punktes  $x$ , bez.  $y$  vom Grade  $-\frac{d}{2}$ .

Wir beschäftigen uns endlich mit der Mittelform  $\mu(x)$ . Zu ihrer Definition werden wir selbstverständlich nicht eine lineare Verbindung der  $\varphi$ , sondern eine solche der  $x$  heranziehen. Wir gewinnen dadurch die  $m^{\text{te}}$  Potenz von  $\mu(x)$  in der Form:

$$(64) \quad \mu(x)^m = \frac{\prod_1^m \Omega(x, c^{(i)})}{C_1 x_1 + C_2 x_2 + \dots + C_n x_n}.$$

Wir sehen:  $\mu(x)$  ist in den Coordinaten  $x$  vom Grade  $-\frac{p}{m}$ .

Hiermit sind in der That die Formeln des § 6 auf den Fall einer beliebigen kanonischen Curve übertragen, abgesehen allerdings von einem einzigen Punkte: wir haben in (61), (62) die zur kanonischen Curve gehörigen Integrale dritter Gattung nur im Allgemeinen definiert, während wir in § 6 für jeden der beiden dort in Betracht kommenden Fälle ein ganz bestimmtes Integral dritter Gattung, das wir  $Q$  nannten, als das einfachste von allen festgelegt hatten. Ich bin einstweilen nicht in der Lage, die Theorie dieses  $Q$  auf beliebige kanonische Curven zu übertragen. In § 26 unten wird für ebene Curven ohne Doppelpunkt die Eigenart des  $Q$  noch näher erläutert; es handelt sich dabei aber um solche Betrachtungen, bei denen die *Constanten* der Riemann'schen Fläche (die *Moduln* derselben) als veränderlich gelten, und diese Betrachtungen entziehen sich zur Zeit, wie schön in der Einleitung angedeutet, der Verallgemeinerung.

## § 10.

## Von den Lösungen des Umkehrproblems.

Wir werden jetzt das Umkehrproblem der Integrale erster Gattung einführen, bez. diejenigen auf seine Lösungen bezüglichen Sätze kurz zusammenstellen, die sogleich gebraucht werden. Die allgemeinste Formulirung des Umkehrproblems ist jedenfalls die, dass wir für  $\alpha = 1, 2, \dots, p$  die Gleichungen anschreiben

$$(65) \quad w_{\alpha}^{x'y} + w_{\alpha}^{x''y''} + \dots + w_{\alpha}^{x^{\nu}y^{\nu}} = W_{\alpha},$$

wo  $\nu$  irgend welche Zahl, und nun verlangen, den aus den Werthen der  $W_{\alpha}$  folgenden algebraischen Zusammenhang zwischen den  $x', \dots, x^{\nu}$ ,  $y', \dots, y^{\nu}$  anzugeben. Inzwischen wollen wir diese Fragestellung hier gleich so particularisiren, dass wir die  $y$  als gegebene Grössen und nur die  $x$  als veränderlich, bez. als unbekannt betrachten. Wir haben dann jedenfalls den Satz:

*Ist  $x', x'', \dots, x^{\nu}$  irgend eine Lösung der Gleichungen (65), so ist auch jedes zu den  $x', x'', \dots, x^{\nu}$  im Sinne des § 7 äquivalente Punktsystem eine Lösung.*

Aber diesen Satz können wir unmittelbar umkehren. Sind  $x', \dots, x^{\nu}$  und  $\bar{x}', \dots, \bar{x}^{\nu}$  zwei Lösungssysteme derselben Gleichungen (65), so erweist sich der Primformenquotient:

$$\frac{\Omega(xx') \dots \Omega(xx^{\nu})}{\Omega(x\bar{x}') \dots \Omega(x\bar{x}^{\nu})}$$

als algebraische, auf unserer Curve eindeutige Function von  $x$ . Wir schliessen:

*Je zwei Lösungssysteme  $x', \dots, x^{\nu}$  und  $\bar{x}', \dots, \bar{x}^{\nu}$  von (65) sind äquivalent.*

Hiernach gestattet der Riemann-Roch'sche Satz, unter der Voraussetzung, dass überhaupt ein Lösungssystem der Gleichungen (65) existire, die Zahl dieser Lösungen anzugeben. Wir formuliren das Resultat mit den Worten:

*Ist  $\tau$  die Zahl der linear unabhängigen  $\varphi$ , die in den Punkten  $x', \dots, x^{\nu}$  irgend eines Lösungssystems der Gleichungen (65) verschwinden, so ist die Zahl der überhaupt vorhandenen Lösungen  $\infty^{\nu-r+\tau}$ .*

Wir sind so zu der fundamentalen Frage geführt, ob das Gleichungssystem (65) überhaupt Lösungen hat. Für  $\nu < p$  verlangt dies jedenfalls Bedingungen zwischen den  $W_{\alpha}$  und diesen können wir hier nicht nachgehen, da sie sich erst mit Hülfe der hier noch als unbekannt geltenden Thetafunctionen formuliren lassen. Dagegen haben wir ohne Weiteres:

*Für  $\nu \geq p$  hat die Problemstellung (65) sicher Lösungen.*

Allerdings leitet man auch diesen Satz, nach dem Vorgange von Riemann, vielfach erst aus der Theorie der Thetafunctionen ab. Dem gegenüber ist es mit Rücksicht auf den Inhalt der folgenden Paragraphen wesentlich, hier ausdrücklich zu constatiren, dass man zu diesem Zwecke der Theorie der Thetafunctionen keineswegs bedarf. Hr. Weierstrass hat in der That seit lange einen ganz elementaren Beweis des in Rede stehenden Satzes gegeben. Derselbe lässt sich mit wenigen Worten skizziren. Man beginnt damit, für die  $W$  hinreichend kleine Grössen zu setzen, welche  $(W)$  heissen sollen. Lässt man dann  $v - p$  der zugehörigen Punkte  $x$  mit den correspondirenden Punkten  $y$  zusammenfallen, so kann man die symmetrischen Functionen der Coordinaten der übrigen  $x$  nach Potenzen der  $(W)$  in convergente Reihen entwickeln. Damit ist für die  $(W)$  die Existenz eines ersten Lösungssystems sicher gestellt. Hierauf gestattet das Abel'sche Theorem, für Grössen  $W = n(W)$ , wo  $n$  irgend eine ganze Zahl, ein Lösungssystem aus dem für die  $(W)$  gefundenen algebraisch zu construiren. Aber die so definirten  $W$  sind an sich die allgemeinsten, die es giebt. In der That, wenn irgend welche  $W$  vorgelegt sind, so kann man  $n$  immer so gross nehmen, dass die Grössen  $\frac{W}{n}$  zu den bereits behandelten  $(W)$  gehören. Daher u. s. w.

Dies ist Alles, was wir von der Theorie des Umkehrproblems in den folgenden Paragraphen brauchen werden.

## § 11.

### Wurzelformen bei kanonischen Curven.

Wir denken uns jetzt wieder eine kanonische Curve  $m^{\text{ter}}$  Ordnung des Raumes der  $z_1 : z_2 : \dots : z_n$  gegeben.

Eine zu derselben gehörige algebraische Form irgend welchen Grades  $\Gamma_\delta$  kann so beschaffen sein, dass ihre  $m\delta$  Nullpunkte, unter  $\mu$  einen Theiler von  $m\delta$  verstanden, zu je  $\mu$  zusammenfallen. Wir nennen sie dann eine *Berührungsform*  $\mu^{\text{ter}}$  Stufe, die  $\mu^{\text{te}}$  Wurzel aber

$$\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$$

eine *Wurzelform* der  $\mu^{\text{ten}}$  Stufe.

Ueber die Mannigfaltigkeit solcher zu einer gegebenen  $C_m$  gehöriger Wurzelformen geben die Entwicklungen des vorigen Paragraphen eine Reihe von übrigens wohlbekannten Sätzen, von denen hier einige in knapper Form zusammengestellt werden sollen.

Mit  $a', a'', \dots, a^m$  seien vorübergehend die  $m$  auf unserer Curve gelegenen Verschwindungspunkte einer Linearform  $a_z$ , mit  $c$  ein festgewählter, willkürlicher Punkt der Curve bezeichnet. Wir setzen, für  $\alpha = 1, 2, \dots, p$ :

$$(66) \quad w_{\alpha}^{x'c} + w_{\alpha}^{x''c} + \dots + w_{\alpha}^{x^m c} = C_{\alpha}.$$

Es seien ferner  $x', x'', \dots, x^v$  die Verschwindungspunkte einer Wurzelform  $\sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta}}$ , also  $\mu v = m \delta$ . Dann hat man, wie auch die Integrationswege gewählt werden mögen, modulo der Perioden erster Gattung folgende Congruenzen:

$$\mu (w_{\alpha}^{x'c} + w_{\alpha}^{x''c} + \dots + w_{\alpha}^{x^v c}) \equiv \delta C_{\alpha}.$$

Wir schliessen hieraus in bekannter Weise:

$$(67) \quad w_{\alpha}^{x'c} + w_{\alpha}^{x''c} + \dots + w_{\alpha}^{x^v c} = \frac{\delta}{\mu} \cdot C_{\alpha} + \left( \frac{\omega_{\alpha}}{\mu} \right),$$

wo  $\left( \frac{\omega_{\alpha}}{\mu} \right)$  irgend einen der  $\mu^{2p}$  Theilwerthe

$$(68) \quad \frac{h_1 \omega_{\alpha,1} + h_2 \omega_{\alpha,2} + \dots + h_{2p} \omega_{\alpha,2p}}{\mu}$$

bedeuten soll, die man erhält, indem man  $h_1, h_2, \dots, h_{2p}$  unabhängig von einander die Werthe  $0, 1, \dots, (\mu - 1)$  durchlaufen lässt. Wir haben also zur Bestimmung der Nullstellen  $x', x'', \dots, x^v$  die  $\mu^{2p}$  Umkehrprobleme (67) zu behandeln.

Indem wir jetzt den Inhalt des vorigen Paragraphen von rückwärts durchlaufen, haben wir zunächst:

*Ob es bei gegebener Curve  $C_m$  für  $v < p$  bei irgendwelcher Annahme der  $h_1, h_2, \dots, h_{2p}$  Lösungen  $x$  der Gleichungen (67) giebt, steht dahin; sicher aber giebt es solche Lösungen, und zwar bei beliebig angenommenen Werthen der  $h_1, h_2, \dots, h_{2p}$ , für  $v \geq p$ .*

Für  $v \geq p$  erhalten wir also  $\mu^{2p}$  getrennte Systeme von Wurzelformen  $\delta^{\text{ter}}$  Ordnung  $\mu^{\text{ter}}$  Stufe; ob es für  $v < p$  derartige Systeme giebt und wie gross eventuel deren Zahl ist, bleibt unbestimmt.

Indem wir jetzt unter den Gleichungen (67) eine bestimmte ins Auge fassen, sei  $\tau$  die Anzahl der linear unabhängigen  $\varphi$ , welche für die Punkte  $x', x'', \dots, x^v$  irgend eines zugehörigen Lösungssystems verschwinden. Wir haben dann:

*Die Zahl der Lösungssysteme unserer Gleichung ist  $\infty^{v-p+\tau}$ ; die Punkte jedes einzelnen Lösungssystems sind mit  $x', x'', \dots, x^v$  äquivalent.*

Und hieraus:

*Unter den der einzelnen Gleichung (67) zugehörigen Wurzelformen  $\sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta}}$  giebt es  $(v - p + \tau + 1)$  linear unabhängige; alle anderen Wurzelformen des Systems setzen sich aus diesen mit Hilfe beliebig zu wählender constanter Multiplikatoren linear zusammen.*

Sind also

$$\sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta'}}, \sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta''}}, \dots, \sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta^{v-p+\tau+1}}}$$

unter den Wurzelformen des Systems geschickt ausgewählt, so ist

$$(69) \quad \sqrt[\mu]{\Gamma_\delta} = c' \sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta'}} + c'' \sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta''}} + \dots + c^{\nu-p+\tau+1} \sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta^{\nu-p+\tau+1}}},$$

unter den  $c$  unabhängige Constante verstanden, die allgemeinste Wurzelform desselben.

Wir betrachten jetzt Wurzelformen  $\mu^{\text{ter}}$  Stufe von den Ordnungen  $\delta$  und  $\delta'$  neben einander. Es entstehen dann gewisse Gruppierungssätze, von denen wir nur zwei herausgreifen:

1) Ist  $\delta \equiv \delta' \pmod{\mu}$  und  $\delta' > \delta$ , so gehört zu jedem existirenden Systeme von Wurzelformen  $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$  ein bestimmtes System von Wurzelformen  $\sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta'}}$ .

Man erhält nämlich Wurzelformen  $\sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta'}}$ , indem man die  $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$  des gegebenen Systems mit beliebigen zur  $C_m$  gehörigen algebraischen Formen vom Grade  $\frac{\delta' - \delta}{\mu}$  multiplicirt: durch die so gewonnenen  $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$  ist dann ein ganzes System von Wurzelformen  $\delta'^{\text{ter}}$  Ordnung rational festgelegt.

2) Haben  $\delta$  und  $\delta'$  mit  $\mu$  verschiedene Factoren gemein, so haben die Systeme von Formen  $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ , die es giebt, unter sich eine ganz andere Gruppierung, als die Systeme von Formen  $\sqrt[\mu]{\Gamma_{\delta'}}$ .

Ist beispielsweise  $\delta$  durch  $\mu$  theilbar, so findet sich unter den zugehörigen Systemen des  $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$  ein besonders ausgezeichnetes: das ist der Inbegriff der algebraischen Formen des Grades  $\frac{\delta}{\mu}$ . Oder ist  $\mu = \mu' \mu''$  und  $\delta$  durch  $\mu'$  theilbar, so finden sich unter den Systemen der  $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$  als ausgezeichnete Systeme die Wurzelformen  $\sqrt[\mu']{\Gamma_{\frac{\delta}{\mu'}}}$ .

Es ist hier nicht der Ort, diese Gruppierungssätze weiter zu verfolgen. Auf den besonderen Fall derselben, welcher der Annahme  $m = 2p - 2$ ,  $\mu = 2$  entspricht, ist insbesondere Herr Nöther wiederholt eingegangen (in der schon öfter genannten Arbeit in Bd. 17 der Annalen, in Bd. 28 daselbst [Zum Umkehrproblem in der Theorie der Abel'schen Functionen, 1886], etc.); der Fall  $m = 2$ ,  $p = 2$  ( $\mu$  beliebig) findet seine Erledigung in der in der Einleitung genannten Abhandlung von Herrn Burkhardt (Systematik der hyperelliptischen Functionen).

## § 12.

**Charakteristiken von Wurzelformen, insbesondere Primcharakteristiken.**

Die  $\mu^{2p}$  verschiedenen Systeme von Wurzelformen  $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ , die es für  $\nu \geq p$  giebt, erscheinen vermöge (67), (68) je durch ein bestimmtes

System der Zahlen  $h_1, h_2, \dots, h_{2p}$  festgelegt. Aber diese Zahlen haben an sich keine absolute Bedeutung, insofern man der in derselben Formel vorkommenden Grösse  $\frac{\delta C_\alpha}{\mu}$  nach Belieben die  $\mu^{2p}$  verschiedenen Werthe ertheilen kann, welche sich aus einem einzelnen dieser Werthe durch Hinzufügen eines beliebigen  $\mu$ -Theiles der Perioden ergeben. Ich werde das so ausdrücken:

*Durch die Formeln (67), (68) werden für die Wurzelformen  $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$  keine absoluten Charakteristiken ( $h_1, h_2, \dots, h_{2p}$ ) sondern nur relative Charakteristiken festgelegt.*

Unter der relativen Charakteristik zweier Systeme von Wurzelformen  $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$  und  $(\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta})$  verstehe ich nämlich den Inbegriff der Differenzen der diesen Systemen in (67), (68) entsprechenden Zahlen  $h, (h)$ , also den Zahlencomplex:

$$| h_1 - (h_1), h_2 - (h_2), \dots, h_{2p} - (h_{2p}) |$$

(sämmliche Zahlen immer nur modulo  $\mu$  genommen). Wir können für denselben eine selbständige Definition aufstellen, indem wir den Quotienten

$$\frac{\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}}{(\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta})}$$

in Betracht ziehen. Seien  $x', x'', \dots, x^v$  diejenigen Punkte unserer Curve, für welche der Zähler,  $(x'), (x''), \dots, (x^v)$  diejenigen Punkte, für welche der Nenner verschwindet. Dann ist unser Quotient gleich dem Producte von Primformen:

$$\frac{\Omega(x x') \cdot \Omega(x x'') \cdot \dots \cdot \Omega(x x^v)}{\Omega(x(x')) \cdot \Omega(x(x'')) \cdot \dots \cdot \Omega(x(x^v))}$$

Von hier aus berechnet man jetzt vermöge (33) die Factoren, welche unser Quotient erhält, sobald der Punkt  $x$  auf der zerschnitten gedachten Riemann'schen Fläche beziehungsweise die Querschnitte

$$A_1, \dots, A_p; \quad B_1, \dots, B_p$$

überschreitet. Wir finden, vermöge der zwischen den  $\omega, \eta$  herrschenden Bilinearrelationen,

$$(70) \quad \varepsilon^{\frac{2i\pi}{\mu}} \varepsilon^{h_{p+1} - (h_{p+1})}, \dots, \varepsilon^{h_{2p} - (h_{2p})}; \quad \varepsilon^{-h_1 + (h_1)}, \dots, \varepsilon^{-h_p + (h_p)},$$

wo  $\varepsilon = e^{\frac{2i\pi}{\mu}}$ . In diesen Factoren liegt die in Aussicht genommene Definition der relativen Charakteristik zweier Systeme von Wurzelformen.

Es giebt nun zwei besondere Fälle, in denen man, unter Aufrechterhaltung der so formulirten Sätze, dem einzelnen Systeme der  $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$  in zwangloser Weise eine absolute Charakteristik

$$| h_1, h_2, \dots, h_{2p} |$$

beilegen kann.

Der erste dieser Fälle tritt ein, wenn  $\delta$  durch  $\mu$  theilbar ist. Es giebt dann, wie schon bemerkt, ein ausgezeichnetes System von Wurzelformen  $\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}$ , dasjenige, welches aus den algebraischen Formen vom Grade  $\frac{\delta}{\mu}$  besteht. Es ist natürlich, diesem System die Charakteristik  $\{0\ 0 \dots 0\}$  zu ertheilen. Dann sind die Charakteristiken aller anderen Systeme damit festgelegt; wenn wir wollen, durch die Factoren

$$(71) \quad \varepsilon^{h_1 p+1}, \dots, \varepsilon^{h_2 p}, \quad \varepsilon^{-h_1}, \dots, \varepsilon^{-h_p},$$

welche der Quotient

$$\frac{\sqrt[\mu]{\Gamma_\delta}}{\Gamma_\delta} \frac{1}{\mu}$$

an den Querschnitten  $A, B$  erhält. Wir werden die so gewonnenen „absoluten“ Charakteristiken als *Elementarcharakteristiken* bezeichnen.

Den Elementarcharakteristiken treten die *Primcharakteristiken* gegenüber. Ich wähle diesen Namen, weil bei ihrer Definition die Primform  $\Omega$  zu benutzen ist. Der Einfachheit wegen will ich fortan  $\mu = 2$  setzen. Dann ist der Grad  $\delta$  derjenigen Wurzelformen, für welche es Primcharakteristiken giebt,  $2\varrho + d$ , unter  $\varrho$  eine beliebige ganze Zahl verstanden, während  $d = \frac{2p-2}{m}$  ist. Ist nämlich eine Wurzelform  $(2\varrho + d)$ ter Ordnung zweiter Stufe

$$\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$$

vorgelegt, so können wir aus ihr eine *Function* der Stelle  $x$  bilden, indem wir ihr den Factor  $\Omega(x, y)$  hinzufügen (wo  $y$  ein beliebiger Hilfspunkt) und dann durch eine beliebige algebraische Form  $\Gamma_{\varrho+d}$  dividiren. Um die Primcharakteristik von  $\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$  zu finden, bestimmen wir die Factoren, welche die in Rede stehende Function

$$\frac{\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}} \cdot \Omega(x, y)}{\Gamma_{\varrho+d}}$$

an den  $2p$  Querschnitten der Riemann'schen Fläche annimmt. Indem wir mit  $h_1, h_2, \dots, h_{2p}$  geeignete ganze Zahlen bezeichnen, lauten diese Factoren:

$$(72) \quad \left\{ \begin{array}{l} \text{bei } A_1: (-1)^{h_1 p+1} \cdot e^{\sum \eta_{\alpha 1} \left( w_\alpha^{xy} + \frac{w_{\alpha 1}}{2} \right)}, \\ \text{bei } A_2: (-1)^{h_2 p+2} \cdot e^{\sum \eta_{\alpha 2} \left( w_\alpha^{xy} + \frac{w_{\alpha 2}}{2} \right)}, \\ \vdots \\ \text{bei } B_p: (-1)^{h_p} \cdot e^{\sum \eta_{\alpha, 2p} \left( w_\alpha^{xy} + \frac{w_{\alpha, 2p}}{2} \right)}, \end{array} \right.$$

wo die  $h$  natürlich nur modulo 2 bestimmt sind. Die so definirten

$$h_1, h_2, \dots, h_{2p}$$

sind die Primcharakteristik der Wurzelform  $\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$ . In der That ist sofort zu sehen, dass die so gegebene Definition der Charakteristiken mit der aus (67), (68) fliessenden verträglich ist. Bilden wir nämlich für zwei Wurzelformen  $\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$  aus verschiedenen Systemen — sie mögen  $\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}$ ,  $(\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}})$  heissen — nach der neuen Regel die Primcharakteristiken  $h$  und  $(h)$ , so wird deren Quotient

$$\frac{\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}}}{(\sqrt{\Gamma_{2\varrho+d}})}$$

an den  $A$ ,  $B$  die Factoren annehmen:

$$(-1)^{h_{p+1} - (h_{p+1})}, \quad (-1)^{h_{p+2} - (h_{p+2})}, \dots, (-1)^{h_p - (h_p)},$$

was mit Formel (70) genau übereinstimmt.

Uebrigens werden wir, um uns der gewöhnlichen Bezeichnung anzuschliessen, für

$$h_1, h_2, \dots, h_p, \quad h_{p+1}, \dots, h_{2p}$$

in der Folge vielfach

$$(73) \quad h_1, h_2, \dots, h_p, \quad g_1, \dots, g_p$$

schreiben. In der That gehen die Charakteristiken, welche wir definirten, in dem besonderen Falle  $\mu = 2$ ,  $d = 1$ , d. h. im Falle der Wurzelformen zweiter Stufe bei zu Grunde gelegter Normalcurve der  $\varphi$ , in die sonst gebrauchten Charakteristiken über; die Primcharakteristiken beziehen sich dann auf die Wurzelformen ungerader Ordnung, die Elementarcharakteristiken auf die Formen gerader Ordnung. Die Primcharakteristiken werden also das, was man *eigentliche Charakteristiken*, die Elementarcharakteristiken das, was man *Gruppencharakteristiken* zu benennen pflegt. Ich habe mich diesen letzteren Benennungen schon darum nicht anschliessen mögen, weil ich für das Wort „Gruppe“ durchweg die specifische, auf Galois zurückgehende Bedeutung aufrecht erhalten will.

Uebrigens möchte ich vorgreifend hier folgende Bemerkung einschalten. Die Primcharakteristiken wurden, wo sie bislang in der Literatur auftraten, nur indirect, von der Theorie der Thetafunctionen aus, eingeführt. Aber hierbei blieb eine Unbestimmtheit bestehen. Man wusste sehr wohl, dass den  $2^{2p}$  unterschiedenen Thetafunctionen an der Normalcurve der  $\varphi$  die  $2^{2p}$  zu unterscheidenden Systeme von Wurzelformen ungerader Ordnung entsprechen, aber man war nicht in der Lage, die betreffende Zuordnung in's Einzelne durchzuführen. Nun wir die Primcharakteristiken direct definiren, ist diese Unbestimm-

heit beseitigt. An der kanonischen  $C_m$  wird jeder Thetafunction dasjenige System von Wurzelformen  $\sqrt{\Gamma_{2g+a}}$  entsprechen, deren Primcharakteristik mit der Charakteristik der Thetafunction (deren Definition durch die Thetareihe selbst gegeben ist) übereinstimmt.

Hr. Nöther hat in Bd. 28 der Annalen (l. c.) auf das verschiedene Verhalten aufmerksam gemacht, welches die an der Normalcurve der  $\varphi$  für  $\mu = 2$  definirten Charakteristiken der beiden Arten gegenüber linearer Periodentransformation zeigen. Dieses Verhalten ist von der Auswahl der zu Grunde zu legenden kanonischen Curve selbstverständlich unabhängig. Zugleich ergibt sich dasselbe hier, ohne irgendwelche Bezugnahme auf die lineare Transformation der Thetafunctionen, aus der Betrachtung der Factoren (71), (72) direct. Die Formeln selbst sind folgende. Sei die lineare Transformation der Perioden (ich will mich der Kürze halber auf  $p = 3$  beschränken) durch die Formeln gegeben:

$$(74) \quad \begin{cases} \omega'_1 = a_1 \omega_1 + b_1 \omega_2 + c_1 \omega_3 + d_1 \omega_4 + e_1 \omega_5 + f_1 \omega_6, \\ \omega'_2 = a_2 \omega_1 + b_2 \omega_2 + \dots \dots \dots, \\ \omega'_3 = \dots \dots \dots, \\ \dots \dots \dots \end{cases}$$

Man hat dann als Umsetzung der Elementarcharakteristiken

$$(75) \quad \left. \begin{cases} h_1 = a_1 h'_1 + a_2 h'_2 + a_3 h'_3 + a_4 h'_4 + a_5 h'_5 + a_6 h'_6 \\ h_2 = b_1 h'_1 + b_2 h'_2 + \dots \dots \dots \\ h_3 = \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases} \right\} \pmod{2},$$

dagegen für die Primcharakteristiken:

$$(76) \quad \left. \begin{cases} h_1 = a_1 h'_1 + a_2 h'_2 + a_3 h'_3 + a_4 h'_4 + a_5 h'_5 + a_6 h'_6 + (a_1 a_4 + a_2 a_5 + a_3 a_6) \\ h_2 = b_1 h'_1 + b_2 h'_2 + \dots \dots \dots + (b_1 b_4 + b_2 b_5 + b_3 b_6) \\ h_3 = \dots \dots \dots \\ \dots \dots \dots \end{cases} \right\} \pmod{2},$$

Die Folge ist, dass unter allen Elementarcharakteristiken die eine  $(0 \ 0 \ \dots \ 0)$  eine Sonderstellung den anderen gegenüber einnimmt, während sich die Primcharakteristiken in gerade und ungerade zerlegen, jenachdem

$$h_1 h_4 + h_2 h_5 + h_3 h_6$$

gerade oder ungerade ist.

Diese tiefgehende Unterscheidung von Elementarcharakteristiken und Primcharakteristiken schliesst nicht aus, dass sich beide, sobald das  $d$  der kanonischen Curve eine gerade Zahl ist, auf dieselben Wurzelformen beziehen können. Es ist dies z. B. bei den hyperelliptischen Gebilden eines ungeraden  $p$  der Fall.

## § 13.

Fundamentalformeln für die auf kanonische Curven bezogenen  
Thetafunctionen.

Wir haben jetzt alle Vorbereitungen, um uns wenigstens dem ersten Theile desjenigen wichtigen Problems zuwenden zu können, dessen Erledigung in der Einleitung als der allgemeine Zielpunkt der gegenwärtigen Abhandlung bezeichnet wurde.

Es handelt sich um eine Fragestellung, welche von derjenigen, die Riemann in Nr. 25 seiner Abel'schen Functionen gibt, nur wenig verschieden ist.

Wir denken uns nämlich die  $2^{2p}$  Thetareihen, deren einzelne durch ihre Charakteristik  $\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  festgelegt ist:

$$(77) \quad \vartheta_{\left| \begin{smallmatrix} g_1 \dots g_p \\ h_1 \dots h_p \end{smallmatrix} \right|} (v_1 \dots v_p; \tau_{11} \dots \tau_{pp}) = \sum_{-\infty}^{+\infty} n_1 \dots \sum_{-\infty}^{+\infty} n_p E,$$

wo

$$E = e^{\pi \left( \sum_1^p \sum_1^p \left( n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2} \right) \left( n_\beta + \frac{g_\beta}{2} \right) \tau_{\alpha\beta} + 2 \sum_1^p n_\alpha \left( n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2} \right) \left( v_\alpha + \frac{h_\alpha}{2} \right) \right)},$$

in Functionen auf der uns gegebenen kanonischen Curve  $m^{\text{ter}}$  Ordnung des Raumes von  $(n - 1)$  Dimensionen verwandelt, indem wir die  $\tau_{\alpha\beta}$  mit den gleichbenannten Perioden der zugehörigen Normalintegrale erster Gattung zusammenfallen lassen, für die  $v_\alpha$  aber, unter  $v$  eine beliebige Zahl verstanden, die folgenden Integralsummen einführen:

$$(78) \quad v_\alpha = v_\alpha^{x'y'} + v_\alpha^{x''y''} + \dots + v_\alpha^{x^v y^v}.$$

Die einfachen und fundamentalen Eigenschaften der so definirten Functionen der Stellen  $x', \dots, x^v, y', \dots, y^v$  sollen als bekannt gelten. Unsere Aufgabe ist, diese neuen Functionen, sofern es möglich ist, durch die in dem früheren Paragraphen bereits eingeführten Functionen und Formen explicit darzustellen, was darauf hinauskommen wird, sie aus algebraischen Ausdrücken, Primformen und Mittelformen zusammensetzen.

Von dieser allgemeinen Frage lassen wir hier, im ersten Abschnitte der gegenwärtigen Abhandlung, unserem anfänglichen Plane entsprechend, so viel nach, dass wir auf eine Festlegung der sogenannten constanten Factoren der Thetareihen, d. h. derjenigen Factoren, welche nicht mehr von den  $x', \dots, x^v, y', \dots, y^v$ , sondern nur noch von den Moduln des algebraischen Gebildes abhängen, verzichten; wir werden also mit Formeln zufrieden sein, die noch eine unbestimmte

multiplicative Constante enthalten. Die Auswerthung dieser constanten Factoren wird dann die Hauptaufgabe unseres zweiten Abschnittes sein, wobei wir uns aber, wie ebenfalls schon in der Einleitung bemerkt, auf  $p = 3$  beschränken müssen.

Leider aber sind wir nun genöthigt, auch hierüber hinaus noch eine Reduction unseres Problems eintreten zu lassen. Es hat mir nämlich nicht gelingen wollen, für die allgemeinen Integralsummen (78) zweckmässige Lösungen desselben zu finden. Ich sehe mich also genöthigt, statt der Summen (78) speciellere Integralsummen einzuführen, die freilich noch so allgemein sind, dass man alle anderen Fälle nach dem Abel'schen Theoreme auf sie zurückführen kann. Ich habe in dieser Hinsicht zwei verschiedene Ansätze gemacht, die ich hier gleich nennen will.

1) Um die Integralsummen (78) der ersten Art zu definiren, haben wir vorab jedem Punkte  $y$  unserer kanonischen Curve bezüglich der Primcharakteristik  $\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  (Formel (73)) bestimmte  $p$  Punkte  $c_y', c_y'', \dots c_y^p$  zuzuordnen. Zu dem Zwecke betrachten wir dasjenige System von Wurzelformen  $(d + 2)^{\text{ter}}$  Ordnung zweiter Stufe, welches die Primcharakteristik  $\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  besitzt. Wir wählen ferner irgend eine Linearform  $\alpha_z$ , welche in  $z = y$  verschwindet; ihre  $(m - 1)$  sonstigen Nullpunkte sollen  $y', \dots y^{(m-1)}$  heissen. Dann gibt es den Umkehrtheoremen zufolge eine Wurzelform der gerade bezeichneten Art, welche in  $y', \dots y^{(m-1)}$  verschwindet. Ihre weiteren  $p$  Verschwindungspunkte sind die hier gesuchten  $c_y', c_y'', \dots c_y^p$ . In der That hängen die so definirten  $c$ , wie man nach dem Abel'schen Theoreme zeigt, nur vom  $y$  und der gewählten Primcharakteristik ab, nicht aber von der speciellen, bei ihrer Construction benutzten Linearform  $\alpha_z^*$ .

Jetzt sind die Integralsummen  $v_\alpha$ , die wir beim einzelnen  $\mathfrak{D} \left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  in erster Linie in Betracht ziehen wollen:

$$(79) \quad v_\alpha = v_\alpha^{xy} - v_\alpha^{x'y'} - v_\alpha^{x''y''} - \dots - v_\alpha^{x^p c_y^p};$$

die  $x, y, x', x'', \dots x^p$  werden hier willkürliche Punkte unserer Curve vorstellen.

\*) Die Theorie dieser Punkte  $c_y', \dots c_y^p$  geht bekanntlich auf Clebsch und Gordan zurück (Theorie der Abel'schen Functionen, Leipzig 1866); der dort gegebenen Darstellung gegenüber bietet die des Textes zumal den Vortheil, dass sie vermöge des Begriffs der Primcharakteristik unter den  $2^{2p}$  überhaupt vorhandenen Systemen von Punkten  $c$  das jedesmal in Betracht kommende einzeln herauslöst.

2) Wir nehmen zweitens an, die Zahl  $v$  der in (78) vorkommenden Einzelintegrale sei durch  $m$  theilbar, also  $v = m\rho$ , es seien ferner die unteren Grenzpunkte  $y$  als die Nullstellen irgend einer algebraischen Form  $\rho^{\text{ten}}$  Grades  $\Gamma_\rho$ , gewählt. Wir wollen dies andeuten, indem wir schreiben:

$$(80) \quad v_\alpha = \underbrace{\int_{x'}^{x''} dv_\alpha + \int_{x''}^{x'''} dv_\alpha + \dots + \int_{x^{m\rho}}^{x'} dv_\alpha}_{(\Gamma_\rho = 0)}$$

Die so bestimmten  $v_\alpha$  wollen wir dann in ein beliebiges  $\vartheta \left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  als Argumente substituieren.

In den beiden hiermit bezeichneten Fällen lässt sich nun in der That der Werth der Thetafunction vorbehaltlich einer unbestimmt bleibenden multiplicativen Constanten in einfachster Weise durch geschlossene Formeln der von uns gewollten Art darstellen. Ich gebe hier diese Formeln vorweg ohne Beweis an. In denselben bedeuten  $\Omega, \mu$  diejenigen Primformen, bez. Mittelformen, die man erhält, indem man das bei ihrer Definition zu benutzende Integral dritter Gattung mit dem transcendent normirten Integral  $\Pi_{\xi, \eta}^x$  zusammenfallen lässt. Die verschiedenen neben einander stehenden Factoren  $\Omega$  und  $\mu$  sind natürlich in ihrer Vieldeutigkeit an einander gebunden, widrigenfalls man ein falsches Resultat erhalten würde; da ich auf die Einzelheiten der diesbezüglichen Verhältnisse hier unmöglich eingehen kann, will ich vorweg bemerken, dass die analogen Fragen des hyperelliptischen Falles mit aller Ausführlichkeit in Bd. 32 der Annalen von Hrn. Burkhardt in seiner bereits in der Einleitung genannten Arbeit zur Discussion gebracht worden sind\*).

Im ersten Falle (Formel (79)) seien  $\varphi_1', \dots, \varphi_p'$  die Werthe, welche die Formen  $\varphi_1, \dots, \varphi_p$  an den Stellen  $x', \dots, x^p$  annehmen. Man hat dann folgende Formel:

$$(81) \quad \vartheta \left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right| (v, \tau) = C \cdot \frac{\Omega(x x') \dots \Omega(x x^p)}{\mu(x)^{p-1}} \cdot \frac{\left| \begin{smallmatrix} \varphi_1' \dots \varphi_1^p \\ \varphi_p' \dots \varphi_p^p \end{smallmatrix} \right| \cdot \prod_1^p \mu(x^i)^{p-1}}{\prod_1^p \prod_{i+1}^p \Omega(x^i x^k)}$$

Im zweiten Falle haben wir das zur Primcharacteristik  $\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  gehörige System von Wurzelformen zweiter Stufe  $(2\rho + d)^{\text{ter}}$  Ordnung

\*) Beiträge zur Theorie der hyperelliptischen Sigmafunctionen. — Ich hätte den § 22 dieser Arbeit schon oben citiren sollen, als von Weierstrass' Beweis für die Lösbarkeit des Umkehrproblems bei  $v \geq p$  die Rede war.

in Betracht zu ziehen. Es sind hier zwei Möglichkeiten auseinander zu halten. Es kann sein — und es ist für alle  $\varrho > \frac{d}{2}$  nothwendig der Fall — dass in den Nullpunkten einer solchen Wurzelform keine einzige Linearverbindung der  $\varphi$  verschwindet. Dann setzen sich nach dem Riemann-Roch'schen Satze die sämtlichen Wurzelformen des Systems aus  $m\varrho$  linear unabhängigen zusammen, die ich

$$\sqrt{\Phi_1}, \sqrt{\Phi_2}, \dots, \sqrt{\Phi_{m\varrho}}$$

nennen will. Es kann aber auch sein, dass in den Nullpunkten der einzelnen Wurzelform  $\tau$  linear unabhängige Linearverbindungen der  $\varphi$  verschwinden. Dann ist die Zahl der linear unabhängigen  $\sqrt{\Phi}$  um  $\tau$  grösser. Bei ersterer Voraussetzung wird das der Formel (80) entsprechende  $\mathfrak{D}_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|} (v, \tau)$  folgenden Werth haben:

$$(82) \quad \mathfrak{D}_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|} (v, \tau) = C \cdot \frac{\left| \begin{array}{c} \sqrt{\Phi_1'} \dots \sqrt{\Phi_1^{m\varrho}} \\ \sqrt{\Phi_{m\varrho}'} \dots \sqrt{\Phi_{m\varrho}^{m\varrho}} \end{array} \right| \cdot \prod_1^{m\varrho} \int_1^{m\varrho} \mu (x^i)^{m\varrho}}{\prod_1^{m\varrho} \int_1^{m\varrho} \Omega (x^i x^k)},$$

bei letzterer Voraussetzung wird es identisch verschwinden und zwar  $\tau$ -fach verschwinden, d. h. mit seinen ersten, zweiten, ...  $(\tau - 1)$ ten nach den  $v_1, v_2, \dots, v_p$  genommenen Differentialquotienten.

Dabei bedenten in Formel (82) die  $\sqrt{\Phi_1'}, \dots, \sqrt{\Phi_{m\varrho}^{m\varrho}}$  die Werthe, welche die Wurzelformen  $\sqrt{\Phi_1}, \dots, \sqrt{\Phi_{m\varrho}}$  an den Stellen  $x', \dots, x^{m\varrho}$  annehmen.

Man sieht: die beiden Formeln (81), (82) stehen in einem gewissen Gegensatze: bei (81) sind die Argumente  $v$  in geeigneter Weise (durch Vermittelung der Punkte  $c_y', \dots, c_y^{\varphi}$ ) von der Charakteristik  $\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  abhängig gemacht, dafür ist die rechte Seite von (81) von der Charakteristik unabhängig; bei (82) ist es genau umgekehrt.

#### § 14.

Beweis der aufgestellten Formeln nebst weiteren auf sie bezüglichen Bemerkungen.

Ueber den Beweis der Formeln (81), (82) werde ich hier nur solche Andeutungen machen, welche geeignet sind, das Bildungsgesetz der rechter Hand stehenden Ausdrücke verständlich zu machen. Dabei sei es der Kürze halber gestattet, die Argumente der  $v$  als Summen von Integralzeichen einzuführen.

Formel (81) ruht durchaus auf dem bekannten Satze, dass

$$\vartheta \Big|_{\frac{y}{h}} \left( \int_y^x - \int_{c'_y}^{x'} - \dots - \int_{c''_y}^{x''} \right)$$

nur dann verschwindet, wenn entweder  $x$  mit einem der Punkte  $x', \dots, x^p$  zusammenfällt oder die  $x', \dots, x^p$  Nullpunkte einer und derselben Linearverbindung der  $\varphi$  sind. Indem die rechte Seite von (81) einerseits die Primfactoren  $\Omega(xx'), \dots, \Omega(xx^p)$ , andererseits die Determinante  $\Sigma \pm \varphi_1' \dots \varphi_p^p$  enthält, verschwindet sie in den angegebenen Fällen jedenfalls auch. Aber die genannte Determinante ist auch Null, wenn es die Thetafunction keineswegs ist, wenn nämlich irgend zwei der Punkte  $x', x'', \dots, x^p$  zusammenfallen. *Dies nun wird gerade durch das der Determinante als Nenner beigefügte Product von Primformen  $\Omega(x^i x^k)$  compensirt.* Man beachte sodann, dass die Thetareihe eine Function der Stellen  $x, x', \dots, x^p$  ist, d. h. von den homogenen Coordinaten dieser Stellen im nullten Grade abhängt. Um das Gleiche auf der rechten Seite unserer Gleichung zu erzielen, eben dazu dienen die verschiedenen daselbst im Zähler und Nenner als Factoren beigetzten Mittelformen.

In ganz ähnlicher Weise können wir uns jetzt von dem Aufbau der Formel (82) und den zugehörigen Bemerkungen über den Fall  $\tau > 0$  Rechenschaft geben. Soll die in (82) betrachtete Thetafunction verschwinden, so wird man nach dem gerade benutzten Satze schreiben dürfen, unter  $z', \dots, z^{p-1}$  irgendwelche  $(p - 1)$  Punkte unserer Curve verstanden:

$$\underbrace{\int^{x'} + \int^{x''} + \dots + \int^{x^{m\varrho}}}_{\Gamma_\varrho = 0} = - \int_{c'_y}^{z'} - \int_{c''_y}^{z''} - \dots - \int_{c^{p-1}_y}^{z^{p-1}} - \int_{c^p_y}^{z^p}$$

Wir führen jetzt solche  $(m - 1)$  Punkte  $y', \dots, y^{(m-1)}$  in die Betrachtung ein, welche mit  $y$  durch eine lineare Gleichung  $\alpha_z = 0$  verbunden sind, und die also mit den  $c'_y, \dots, c^p_y$  zusammen die Verschwindungspunkte einer Wurzelform zweiter Stufe der Ordnung  $(2 + d)$  sind. Indem wir dann vorstehende Gleichung so schreiben:

$$\underbrace{\int^{x'} + \dots + \int^{x^{m\varrho}}}_{\Gamma_\varrho = 0} + \int_{c'_y}^{z'} + \dots + \int_{c^{p-1}_y}^{z^{p-1}} + \int_{c^p_y}^{z^p} + \int_{y'}^{y'} + \dots + \int_{y^{(m-1)}}^{y^{(m-1)}} = 0,$$

bemerken wir, dass unsere Thetafunction (82) dann und nur dann verschwindet, wenn die Punkte  $x', \dots, x^{m\varrho}$  zusammen mit irgend  $(p - 1)$  beliebig anzunehmenden Punkten  $z', \dots, z^{p-1}$  die Nullstellen einer zur

Primcharakteristik  $\left| \frac{g}{h} \right|$  gehörigen Wurzelform zweiter Stufe der  $(2g + d)^{\text{ten}}$  Ordnung sind. Dies ist aber, wenn  $\tau > 0$ , immer der Fall, daher unser Satz von dem identischen Verschwinden. Andererseits wird im Falle  $\tau = 0$  die rechte Seite von (82) dem so formulirten Satze genau entsprechen. Denn wenn die Determinante  $\sum \pm \sqrt{\Phi_1'} \dots \sqrt{\Phi_{m_0}^{m_0}}$  überflüssiger Weise auch dann verschwindet, wenn irgend zwei der Stellen  $x', \dots, x^{m_0}$  zusammenfallen, so wird dies wieder durch das dem Nenner zugefügte Primformproduct compensirt. Die Mittelformen aber, welche als Factoren beigesetzt sind, haben wieder den Zweck, den Grad des auf der rechten Seite stehenden Ausdrucks in den homogenen Coordinaten der einzelnen Stelle  $x', \dots, x^{m_0}$  auf Null herabzudrücken. —

Ich füge nun noch einige Bemerkungen hinzu, welche bestimmt sind, die Formeln (81), (82) mit anderweitig bekannten Resultaten in Verbindung zu setzen.

Die in (81), (82) auftretenden Formen  $\Omega$  und  $\mu$  waren, wie wir ausdrücklich hervorhoben, unter Zugrundelegung des Integrales dritter Gattung  $\Pi_{\xi\eta}^{xy}$  gebildet. Setzen wir an seine Stelle nach (8) irgend ein  $P$ :

$$P_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{\xi\eta}^{xy} + \sum c_{\alpha\beta} v_{\alpha}^{xy} v_{\beta}^{\xi\eta},$$

so wird sich die linke Seite (81), (82) in die allgemeine Thetafunction

$$e^{-\frac{1}{2} \sum c_{\alpha\beta} v_{\alpha} v_{\beta}} \cdot \vartheta \left| \frac{g}{h} \right| (v, \tau)$$

verwandeln, die wir natürlich, der in unseren Formeln vorkommenden unbestimmten Constanten  $C$  entsprechend, auch noch mit irgend einem constanten Factor multiplicirt denken können. Nun sind die *Sigmafunctionen* des hyperelliptischen Gebildes, die ich in den Bänden 27, 32 dieser Annalen behandelte, in die hiermit bezeichneten Functionen mit eingeschlossen; bei ihnen ist das Integral dritter Gattung  $P$  durch das unter (45) genannte Normalintegral  $Q$  ersetzt. In der That wird für  $m = 2$  nach Einführung des  $Q$  unsere Formel (82) mit der in Bd. 32 pag. 368 unter (53) gegebenen Definition der hyperelliptischen Sigmafunction ohne Weiteres identisch. Man hat sich nur vor Augen zu halten, dass die dort betrachteten Integralsummen

$$\int_{y'}^z + \dots + \int_{y''}^{z''}$$

vermöge der Eigenart der hyperelliptischen Gebilde auch so geschrieben werden können:

$$\underbrace{\int^x + \dots + \int^{x^v} + \int^{\bar{y}} + \dots + \int^{\bar{y}^v}}_{\Gamma_v = 0},$$

dass beim hyperelliptischen Gebilde die Mittelform  $\mu(x)$  der einfachen Definition (47) unterliegt, und dass man beim hyperelliptischen Gebilde die sämmtlichen Wurzelformen zweiter Stufe  $(2\nu + d)^{\text{ter}}$  Ordnung kennt, sobald man die sämmtlichen Zerlegungen des fundamentalen  $f_{2p+2}$  in zwei Factoren  $\varphi_{p+1-2\mu} \cdot \psi_{p+1+2\mu}$  beherrscht; diese Wurzelformen sind dann nämlich durch

$$(83) \quad \gamma_{\nu-1+\mu}(x_1, x_2) \cdot \sqrt{\varphi_{p+1-2\mu}} + \gamma_{\nu-1-\mu}(x_1, x_2) \cdot \sqrt{\psi_{p+1+2\mu}}$$

gegeben, unter  $\gamma_\lambda(x_1, x_2)$  eine beliebige rationale ganze Form  $\lambda^{\text{ten}}$  Grades der  $x_1, x_2$  verstanden. Zugleich subsumirt sich das, was l. c. in § 10 über das identische Verschwinden der hyperelliptischen Sigma gesagt wurde, unter die allgemeine für das identische Verschwinden der Theta im vorigen Paragraphen aufgestellte Regel.

Wir wollen ferner jenes bekannte Umkehrtheorem zu Hülfe nehmen, welches sich über die Sätze des § 10 hinaus in bekannter Weise aus dem Verschwinden der ungeraden Thetafunctionen für die Nullwerthe der Argumente ergibt. Dasselbe besagt, dass jeder ungeraden Charakteristik

$\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  entsprechend mindestens eine in den  $\varphi$  lineare Berührungsforn zweiter Stufe  $\varphi_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|}$  existirt; eventuel kann es deren eine ganze

Schaar geben\*), was wir aber der Kürze halber hier ausschliessen wollen. Von den  $p$  einem Punkte  $y$  vermöge der Charakteristik

$\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  zugeordneten Punkten  $c'_y, \dots, c''_y$ , fällt dementsprechend einer, etwa  $c''_y$ ,

in den Punkt  $y$  zurück, während die übrigen  $p - 1$  in die Berührungspunkte der zugehörigen  $\varphi_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|}$  rücken. Wir wollen jetzt Formel (81)

heranziehen, indem wir unter Voraussetzung eines ungeraden  $\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  die  $x', \dots, x^p$  mit den so bestimmten  $c'_y, \dots, c''_y$  zusammenfallen lassen. Wir erhalten dann nach leichter Umformung:

$$(84) \quad \vartheta_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|} \left( \int^x \right) = C \cdot \sqrt{\varphi_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|}(x) \cdot \varphi_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|}(y)} \cdot \Omega(xy).$$

Es ist dies dieselbe Formel, welche für den Fall ebener Curven ohne Doppelpunkt Hr. Pick in Bd. 29 der Annalen aufgestellt hat (wobei

\*) Weber, Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle, Math. Ann. t. 13 (1878)

er sich nur das  $\Omega$  nicht mit dem Integral  $\Pi$ , sondern mit dem unter (52) angegebenen  $Q$  gebildet denkt, wesshalb er auch den Buchstaben  $\vartheta$  durch den Buchstaben  $\sigma$  ersetzt\*). Dass sich die ungeraden

$\vartheta_{\left| \frac{g}{h} \right|} \left( \int_y^x \right)$  wie die mit geeigneten Constanten multiplicirten Quadratwurzeln aus  $\varphi_{\left| \frac{g}{h} \right|}(x) \cdot \varphi_{\left| \frac{g}{h} \right|}(y)$  verhalten, ist ein bekannter Satz von Riemann (Ueber das Verschwinden der Thetafunctionen, 1865). Uebrigens kann man, wenn man mit der Definition der Thetafunctionen beginnen will, (84) als *Definition der Primform*  $\Omega(xy)$  ansehen. Man wird mit Hülfe derselben  $\Omega$  in viele Untersuchungen einführen können, in denen man sich bisher mehr oder minder elegant mit Hülfe der Thetafunctionen zurecht gefunden hat.

Ueberhaupt werden wir die mannigfachen Formeln, die man für die Darstellung der Quotienten verschiedener  $\vartheta$  am algebraischen Gebilde aufgestellt hat, mit Leichtigkeit aus (81), (82) ableiten.

Aus Formel (81) schliessen wir z. B. [ich unterdrücke dabei der Kürze halber linker Hand die Charakteristikenbezeichnung]:

$$\begin{aligned} & \log \cdot \frac{\vartheta \left( \int_y^x - \int_{c_y}^{x'} - \dots - \int_{c_y^{p'}}^{x^p} \right) \cdot \vartheta \left( \int_{\eta}^{\xi} - \int_{c_{\eta}}^{\xi'} - \dots - \int_{c_{\eta}^{p'}}^{\xi^p} \right)}{\vartheta \left( \int_y^{\xi} - \int_{c_y}^{x'} - \dots - \int_{c_y^{p'}}^{x^p} \right) \cdot \vartheta \left( \int_{\eta}^x - \int_{c_{\eta}}^{\xi'} - \dots - \int_{c_{\eta}^{p'}}^{\xi^p} \right)} \\ &= \log \frac{\Omega(xx') \cdot \Omega(\xi\xi')}{\Omega(x\xi) \cdot \Omega(\xi x')} + \dots + \log \frac{\Omega(xx^p) \cdot \Omega(\xi\xi^p)}{\Omega(x\xi^p) \cdot \Omega(\xi x^p)}. \end{aligned}$$

Hier ist nun jeder der rechter Hand stehenden Logarithmen nach (27) (30) ein Integral dritter Gattung  $\Pi_{x^v \xi^v}^{x\xi}$ . Wir haben also die wohlbekannte und vielfach benutzte Formel vor uns:

---

\*) Die sämtlichen Entwicklungen des Hrn. Pick finden durch die Formeln (81), (82) ihre naturgemässe Erweiterung. Es ist besonders interessant, dabei den Sätzen über das identische Verschwinden der Theta nachzugehen. Wir haben bei der singularitätenfreien ebenen Curve das  $d$  der Formel (82) gleich  $m-3$  zu nehmen. Daher wird (worauf mich Hr. Pick gelegentlich aufmerksam machte) bei ungeradem  $m$  von den dort in Betracht kommenden Wurzelformen  $(2g+d)$ ter Ordnung ein System rational; dasselbe besteht aus der Gesamtheit der rationalen Formen  $\left( e + \frac{m-3}{2} \right)$ ter Ordnung. Die zugehörige ausgezeichnete Thetafunction verschwindet für  $e \leq \frac{m-3}{2} \frac{(m-2g)^2-1}{8}$  -fach.

$$(85) \quad \log \cdot \frac{\vartheta \left( \int_y^x - \int_{c_y}^{x'} - \dots - \int_{c_y^p}^{x^p} \right) \cdot \vartheta \left( \int_\eta^{\xi} - \int_{c_\eta}^{\xi'} - \dots - \int_{c_\eta^p}^{\xi^p} \right)}{\vartheta \left( \int_y^{\xi} - \int_{c_y}^{x'} - \dots - \int_{c_y^p}^{x^p} \right) \cdot \vartheta \left( \int_\eta^x - \int_{c_\eta}^{x'} - \dots - \int_{c_\eta^p}^{\xi^p} \right)}$$

$$= \Pi_{x \xi}^{x' \xi'} + \dots + \Pi_{x \xi}^{x^p \xi^p}.$$

Wir wollen ferner in (82)  $d = 1$ , also  $m = 2p - 2$  setzen und  $\varrho = 1$  nehmen. Indem wir die Quotienten der den verschiedenen Charakteristiken  $\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  entsprechenden Ausdrücke bilden, sehen wir, dass sich an der Normalcurve der  $\varphi$  die  $\vartheta$  mit den Argumenten

$$\underbrace{\int^{x'} + \int^{x''} + \dots + \int^{x^{2p-2}}}_{\Gamma_1 = 0}$$

wie  $(2p - 2)$ -gliedrige Determinanten aus Wurzelformen zweiter Stufe der dritten Ordnung verhalten. Dieses Resultat ist für  $p = 3$  von Hrn. Weber\*), für beliebiges  $p$  von Hrn. Nöther\*\*) abgeleitet worden.

## Zweiter Abschnitt.

### Specielle Theorie des Falles $p = 3$ .

#### § 15.

#### Die ebene Curve vierter Ordnung. Algebraische Moduln der ersten Stufe und transcendente Moduln.

Wir wenden uns jetzt zu neuen Fragestellungen, auf deren allgemeinen Charakter bereits in der Einleitung verwiesen wurde. Es soll sich nicht mehr darum handeln, nach functionentheoretischen Grundsätzen auf *gegebener Riemann'scher Fläche* zu operiren, vielmehr sollen fortan die Constanten der Riemann'schen Fläche (ihre Moduln) als Veränderliche gelten und als solche der functionentheoretischen Betrachtung unterworfen werden. Hier lassen wir nun von vorneherein die bereits in Aussicht genommene Beschränkung auf den Fall  $p = 3$  eintreten. Dass  $p = 3$  einfacher ist, als der Fall der höheren  $p$ , kann von vorneherein vorausgesetzt werden, überdies aber ist es sehr

\*) Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3. Berlin 1876.

\*\*) In der wiederholt genannten Arbeit in Bd. 28 der mathemat. Annalen.

viel zugänglicher, weil wir gerade bei  $p = 3$  noch eine grössere Zahl von Untersuchungen anderer Mathematiker als Vorarbeiten werden benutzen können. Die Weiterführung unserer Untersuchungen für höhere  $p$  bleibt anzustreben; vielleicht dass dabei neue Hilfsmittel werden herangezogen werden müssen.

Die Normalcurve der  $\varphi$  ist für  $p = 3$  (vom hyperelliptischen Falle abgesehen, den wir um so lieber bei Seite lassen können, als er mit Rücksicht auf die hier vorliegende Fragestellung bereits erledigt ist) eine ebene Curve vierter Ordnung allgemeiner Art:

$$(86) \quad f(x_1 x_2 x_3) = 0.$$

Eine solche soll der Untersuchung fortan zu Grunde gelegt sein. Als fundamentale Moduln des algebraischen Gebildes betrachten wir consequenterweise die Coefficienten von  $f$ , sie sind uns, im Gegensatz zu anderen bald einzuführenden Modulsystemen, die „algebraischen Moduln erster Stufe“<sup>\*)</sup>. Eine geometrische Deutung finden vermöge unserer  $C_4$  natürlich nur die Verhältnisse dieser Coefficienten. Die geometrische Auffassung, mit der wir arbeiten, wird also wieder nur solchen homogenen Functionen der Veränderlichen gerecht, die homogen nullter Dimension sind (vergl. oben § 2); dies hindert uns aber nicht, allgemein homogene Verbindungen derselben, d. h. Formen, in die analytische Untersuchung einzuführen. Daneben haben wir uns fortgesetzt vor Augen zu halten, dass es sich bei unseren Untersuchungen nur um solche Eigenschaften der  $C_4$  oder Constructionen an der  $C_4$  handeln kann, welche gegenüber projectiven Umformungen invariant sind. Es kommt dies darauf hinaus, dass wir fortgesetzt mit Invarianten, bez. Covarianten von  $f$  zu thun haben.

Neben die hiermit festgelegten fundamentalen Moduln treten nun vor allen Dingen die „transcendenten“ Moduln. Es sind dies zunächst die 3 . 6 Perioden

$$(87) \quad \begin{cases} \omega_{11}, \omega_{12}, \dots \omega_{16}, \\ \omega_{21}, \omega_{22}, \dots \omega_{26}, \\ \omega_{31}, \omega_{32}, \dots \omega_{36}, \end{cases}$$

welche die überall endlichen Integrale

$$w_1 = \int x_1 d\omega, \quad w_2 = \int x_2 d\omega, \quad w_3 = \int x_3 d\omega$$

an den Querschnitten  $A, B$  der von uns gewählten kanonischen Zerschneidung besitzen\*\*), es sind dann insbesondere die invarianten

\*) Vergl. hier und in der Folge überall die allerdings auf  $p = 2$  bezüglichen Erläuterungen in den von Hrn. Burkhardt publicirten „Grundzügen einer allgemeinen Systematik etc.“ in Bd. 35 dieser Annalen.

\*\*) Zwischen den 18 Grössen  $\omega_{ik}$  bestehen bekanntlich drei linear unabhängige Bilinearrelationen, so dass wir 15 unabhängige Grössen behalten, was mit der Zahl der Coefficienten von  $f$  genau übereinstimmt.

Verbindungen derselben, d. h. die aus den  $\omega_{ik}$  gebildeten dreigliedrigen Determinanten. Unter den letzteren greifen wir insbesondere die folgende heraus

$$(88) \quad p_{123} = \begin{vmatrix} \omega_{11} & \omega_{12} & \omega_{13} \\ \omega_{21} & \omega_{22} & \omega_{23} \\ \omega_{31} & \omega_{32} & \omega_{33} \end{vmatrix},$$

mit ihrer Hülfe lassen sich die übrigen aus den sechs Thetamoduln

$$(89) \quad \tau_{11}, \tau_{12}, \tau_{22}, \tau_{13}, \tau_{23}, \tau_{33}$$

zusammensetzen. Hier ist  $p_{123}$  eine Invariante vom Grade  $(-3)$  in den Coefficienten von  $f$ , die  $\tau_{ik}$  aber sind absolute Invarianten. Jede Invariante von  $f$  verwandelt sich dementsprechend durch Multiplication mit einer geeigneten Potenz von  $p_{123}$  in eine Function der  $\tau_{ik}$ .

Indem bei gegebener  $C_4$  auf der zu ihr gehörigen Riemann'schen Fläche unendlich viele kanonische Querschnittssysteme zur Definition der Perioden construiert werden können, treten neben die von uns zuerst gewählten  $\omega_{ik}$  (87) unendlich viele andere Periodensysteme  $\omega'_{ik}$ , welche mit den  $\omega_{ik}$  durch die schon oben, unter (74), angegebenen Formeln der linearen Transformation zusammenhängen:

$$\begin{aligned} \omega'_1 &= a_1 \omega_1 + b_1 \omega_2 + c_1 \omega_3 + d_1 \omega_4 + e_1 \omega_5 + f_1 \omega_6, \\ \omega'_2 &= a_2 \omega_1 + b_2 \omega_2 + \dots \dots \dots, \\ \omega'_3 &= \dots \dots \dots, \\ &\dots \dots \dots \end{aligned}$$

Umgekehrt ist bekannt, dass jeder linearen Transformation der Perioden der Uebergang von dem ursprünglich gewählten Querschnittssystem zu irgend einem anderen Systeme kanonischer Querschnitte entspricht\*). Sind alle so entstehenden Periodensysteme gegenüber der  $C_4$  gleichberechtigt oder zerfallen dieselben in verschiedenwerthige Kategorien? Das ist die fundamentale Frage, über die wir uns vor allen Dingen klar werden müssen. Ich sage, dass die sämtlichen Periodensysteme in der That gleichberechtigt sind. Man kann nämlich die Coefficienten von  $f$  von irgend welchen Anfangswerthen beginnend durch stetige Aenderung so zu ihren Anfangswerthen zurückführen, dass dabei das irgend einer ursprünglichen Zerschneidung der zugehörigen Riemann'schen Fläche entsprechende Periodensystem der  $\omega$  in das irgend einer anderen Zerschneidung der Fläche entsprechende Periodensystem der  $\omega'$  übergeht.

Was den Beweis der so formulirten Behauptung angeht, so erbringt man denselben wohl am einfachsten, indem man eine Ueber-

---

\*) Dies ist zuerst von Hrn. Thomae gezeigt worden, vergl. dessen „Beitrag zur Theorie der Abel'schen Functionen“ in Bd. 75 des Journals für Math. (1872).

legung zu Hülfe nimmt, welche Riemann in Nr. 12 seiner Abel'schen Functionen entwickelt. Man interpretire die complexen Werthe irgend eines an der  $C_4$  hinerstreckten überall endlichen Integrals, etwa des  $w_1$ , in einer Ebene. Sodann bilde man die zur  $C_4$  gehörige Riemann'sche Fläche vermöge  $w_1$  zweimal auf diese Ebene ab, das eine Mal, nachdem wir sie vermöge des ersten Querschnittsystems, das andere Mal, nachdem wir sie vermöge des zweiten Querschnittsystems zerschnitten haben. Wir erhalten dann in der Ebene  $w_1$  zwei Figuren, welche je aus drei übereinander geschichteten Parallelogrammen bestehen, die durch vier Verzweigungspunkte an einander geheftet sind. Und nun ruht der ganze hier zu erbringende Beweis darauf, dass man jede solche Figur in jede andere derselben Art solcherweise überführen kann, dass alle Zwischenlagen von Figuren der gleichen Art gebildet werden, d. h. selbst aus Tripeln übereinandergelegter und durch vier Verzweigungspunkte verbundener Parallelogramme bestehen. Einer jeden solchen Figur entspricht nämlich rückwärts\*) ein algebraisches Gebilde  $p = 3$ , d. h. eine  $C_4$ ; wir können also der continuirlichen Reihenfolge der Figuren eine continuirliche Aufeinanderfolge von Curven vierter Ordnung entsprechend setzen: vermöge dieser Reihenfolge wird also gleichzeitig das Periodensystem der  $\omega$  in das der  $\omega'$  und die ursprüngliche  $C_4$  in sich selbst übergeführt, was zu beweisen war.

Es ist interessant, und ich ergreife gern die Gelegenheit, hierüber einige Angaben zu machen, dass der in Rede stehende Satz keineswegs mehr richtig bleibt, wenn man sich durchweg auf hyperelliptische Gebilde  $p = 3$  beschränkt: lässt man die acht Verzweigungspunkte einer zweiblättrigen Fläche des Geschlechtes 3 (also die Moduln eines *hyperelliptischen* Gebildes  $p = 3$ ) irgendwelche Wege beschreiben, durch die sie, einzeln oder in ihrer Gesammtheit, zu ihren Anfangslagen zurückgeführt werden, während sie eine ein für alle mal auf der Fläche angebrachte Zerschneidung vor sich her schieben, so kann man dadurch keineswegs jede lineare Transformation der Perioden erzielen\*\*). Vielmehr gelingt dies nur hinsichtlich derjenigen linearen Transformationen, die in bestimmter Weise modulo 2 zu kennzeichnen sind. Hierdurch zerfallen die linearen Transformationen, die es überhaupt gibt, in 36 modulo 2 unterschiedene Kategorien. Wir schliessen daraus, dass es auf der hyperelliptischen Fläche des Geschlechtes 3 36 verschiedene (hinsichtlich des hyperelliptischen Gebildes nicht gleichberechtigte) Arten kanonischer Querschnittsysteme giebt. Auf meinen Wunsch hat sich Hr. H. D. Thompson im Frühjahr 1888

\*) Vergl. hierzu auch p. 149—150 meiner Arbeit in Bd. 21 der math. Annalen: „Nene Beiträge zur Riemann'schen Functionentheorie“ (1882).

\*\*\*) Dies bemerkt bereits Hr. Camille Jordan auf p. 364—65 seines *Traité des substitutions* (1870).

damit beschäftigt, bei gegebener hyperelliptischer Fläche auf der von derselben doppelt überdeckten Ebene Zeichnungen für zweckmässig gewählte Repräsentanten eines jeden dieser 36 Fälle herzustellen. Diese Zeichnungen werden ganz übersichtlich; man hat in der Hauptsache nur zu unterscheiden, ob in der Ebene der Zeichnung durch den einzelnen Querschnitt die 8 Verzweigungspunkte des hyperelliptischen Gebildes in  $2 + 6$  oder in  $4 + 4$  zerlegt werden. Analytisch ist jede der hier unterschiedenen 36 Arten von Querschnittssystemen durch die Charakteristik gekennzeichnet, welche, bei Zugrundelegung derselben, der im vorliegenden Falle vorhandenen ausgezeichneten geraden Thetafunction, deren Nullwerth verschwindet, zu Theil wird: je nach der Wahl des Querschnittsystems kann nämlich diese Thetafunction jede beliebige der 36 überhaupt vorhandenen geraden Charakteristiken erhalten.

### § 16.

#### Adjunction von Wurzelformen und zugehörigen Moduln der zweiten Stufe.

Wir führen jetzt neben die algebraischen Moduln erster Stufe (die Coefficienten von  $f$  schlechthin) algebraische Moduln zweiter Stufe ein, indem wir gewisse auf der  $C_4$  existirende Wurzelformen und die Relationen, durch welche dieselben mit einander verknüpft sind, in Betracht ziehen.

Die allgemeine Theorie der auf einer kanonischen Curve existirenden Wurzelformen wurde bereits in § 11 skizzirt. Wir haben derselben zufolge bei Wurzelformen zweiter Stufe zwischen solchen von gerader und ungerader Ordnung zu unterscheiden. Von jeder Art gibt es  $2^{2p}$ , bei der  $C_4$  also 64 Systeme. Die 64 Systeme gerader Ordnung sind durch Elementarcharakteristiken, die Systeme ungerader Ordnung durch Primcharakteristiken festzulegen (§ 12). Entsprechend dem verschiedenartigen Verhalten dieser Charakteristiken gegenüber linearer Transformation (ebenda) spalten sich die 64 Systeme gerader Ordnung in  $1 + 63$ , die 64 Systeme ungerader Ordnung in  $28 + 36$ . Wir lesen ferner aus dem soeben (§ 15) entwickelten Satze von der Gleichberechtigung aller kanonischen Querschnittsysteme ab, dass die 63 Systeme, wie die 28, und die 36, je unter sich der  $C_4$  gegenüber gleichberechtigt sind\*). Wenn wir also in der Folge irgend eines der 63 Systeme, oder eines der 28, bez. der 36, adjungiren, so brauchen wir nicht zu unterscheiden, welches wir gewählt haben.

\*) Mit dem algebraischen Nachweise dieser Gleichberechtigung beschäftigt sich neuerdings Hr. Nöther in den Abhandlungen der Münchener Academie (Bd. XVII, 1889: Zur Theorie der Berührungscurven der ebenen Curve vierter Ordnung).

Ich werde den hiermit in abstracter Gestalt mitgetheilten Sätzen weiterhin, wo es ohne Missverständnisse geschehen kann, die übliche geometrische Form geben. Ich werde also nicht von *Berührungsformen* sprechen (durch die die Wurzelformen definirt sind) sondern von *Berührungscurven*. Dabei sollen die typischen Repräsentanten der Berührungscurven gerader Ordnung die *Berührungskegelschnitte* sein. In Uebereinstimmung mit den allgemeinen Sätzen des § 11 besteht das eine System derselben aus den doppelt zählenden geraden Linien der Ebene, ist also zweifach unendlich; die anderen 63, unter sich gleichberechtigten Systeme sind je einfach unendlich. Als Repräsentanten der Berührungscurven ungerader Ordnung werden zumeist die *Berührungscurven dritter Ordnung* dienen. Ihre sämtlichen 64 Systeme sind dreifach unendlich. Ich nenne die 28 Systeme mit ungerader Charakteristik *Systeme der ersten Art*, die 36 Systeme gerader Charakteristik *Systeme der zweiten Art*. Berührungscurven erster Ordnung, d. h. *Doppeltangenten*, giebt es auf Grund des in § 14 berührten speciellen Umkehrtheorems nur im Falle ungerader Charakteristik. Die 28 dementsprechend zu unterscheidenden Doppeltangenten sind den 28 Systemen von Berührungscurven dritter Ordnung erster Art in der Weise einzeln zugeordnet, dass jedesmal die Doppeltangente zusammen mit einer beliebigen doppeltzählenden Geraden der Ebene eine Curve dritter Ordnung des zugehörigen Systems bildet.

Zwecks Definition geeigneter Moduln zweiter Stufe werden wir ausschliesslich Berührungscurven ungerader Ordnung betrachten. Wir denken uns zu dem Zwecke eines ihrer 28 oder 36 Systeme adjungirt und die Gleichung der Curve vierter Ordnung dementsprechend in die eine oder andere charakteristische Form gesetzt. *Die Moduln zweiter Stufe, welche wir weiterhin gebrauchen, sind nichts Anderes als die in diesen Gleichungsformen vorkommenden Constanten.* Dabei ist es vielfach nützlich, das geometrische Bild zu wechseln. Den dreifach unendlich vielen Curven entsprechend, welche in dem einzelnen Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung enthalten sind, giebt es unter den zugehörigen Wurzelformen zweiter Stufe vier linear unabhängige. Als solche wähle ich

$$\sqrt{\Phi_1}, \sqrt{\Phi_2}, \sqrt{\Phi_3}, \sqrt{\Phi_4}$$

und setze nun

$$(90) \quad z_1 : z_2 : z_3 : z_4 = \sqrt{\Phi_1} : \sqrt{\Phi_2} : \sqrt{\Phi_3} : \sqrt{\Phi_4}.$$

Wir beziehen dadurch unsere  $C_4$  auf eine *Raumcurve sechster Ordnung*. Je nach der Art des benutzten Systems unterscheiden wir Raumcurven sechster Ordnung der ersten oder der zweiten Art. An dieser Curve sechster Ordnung werden sich dann die zuerst in der Ebene zu betrachtenden Constructionen in räumliche Constructionen umsetzen.

Algebraisch entspricht dem, dass wir von ternären Invarianten zu quaternären schreiten.

Ich werde jetzt in dem hiermit bezeichneten Sinne die zweierlei Arten von Berührungscurven dritter Ordnung einzeln in Betracht ziehen.

### § 17.

#### Von den Berührungscurven dritter Ordnung erster Art.

Sei  $D = 0$  eine Doppeltangente unserer  $C_4$ . Indem wir durch ihre Berührungspunkte einen Kegelschnitt  $\Omega = 0$  legen, können wir die Gleichung der  $C_4$  in folgende Gestalt setzen:

$$(91) \quad D\Phi - \Omega^2 = 0;$$

$\Phi = 0$  ist dabei, wie man sofort erkennt, eine Berührungscurve dritter Ordnung des zu  $D$  gehörigen Systems. Wir erhalten die sämtlichen Berührungscurven des Systems, indem wir schreiben:

$$(92) \quad \Phi + 2u_x\Omega + u_x^2D = 0,$$

wo  $u_x = u_1x_1 + u_2x_2 + u_3x_3$  und die  $u$  beliebig. Zum Beweise genügt es, (91) in die Gestalt zu setzen:

$$(93) \quad D(\Phi + 2u_x\Omega + u_x^2D) - (\Omega + u_xD)^2 = 0.$$

Vermöge (91) ist also das ganze zu  $D$  gehörige System von Berührungscurven dritter Ordnung rational. Daher ist (91) eine der beiden charakteristischen Gleichungsformen der  $C_4$ , die fortan festzuhalten sind: *Die Coefficienten von  $D$ ,  $\Omega$ ,  $\Phi$  sind die Moduln zweiter Stufe, welche, dieser Gleichungsform entsprechend, als adjungirt gelten sollen.*

Die Zahl der so eingeführten Moduln ist 19, entgegen der Zahl 15 der Coefficienten von  $f$ . Die erste Frage, über die wir uns bei Benutzung der neuen Moduln klar zu werden haben, ist daher die, welche Functionen derselben überhaupt als Functionen der Coefficienten von  $f$  anzusehen sind. Es sind dies offenbar diejenigen, welche bei allen continuirlichen Aenderungen der  $D$ ,  $\Omega$ ,  $\Phi$ , die  $f$  ungeändert lassen, selber ungeändert bleiben. Nun sind diese Abänderungen in Uebereinstimmung mit (92), (93) durch folgende Formeln gegeben:

$$(94) \quad \begin{cases} D' = \lambda D, \\ \Omega' = \Omega + u_x D, \\ \Phi' = \frac{\Phi + 2u_x\Omega + u_x^2D}{\lambda}, \end{cases}$$

wo  $\lambda$ ,  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  beliebig. Wir mögen hier insbesondere  $\lambda$  unendlich wenig verschieden von 1 und  $u_1$ ,  $u_2$ ,  $u_3$  unendlich wenig verschieden von Null nehmen. Indem wir ausdrücken, dass eine Function der Coefficienten von  $D$ ,  $\Omega$ ,  $\Phi$  bei den solchergestalt gewonnenen unendlich

kleinen Transformationen ungeändert bleibt, erhalten wir ein System von vier linearen partiellen Differentialgleichungen, durch welches die von uns gesuchten Functionen charakterisirt sind. Unter diesen Functionen werden uns insbesondere solche interessiren, welche gegenüber linearen Transformationen der  $x_1 x_2 x_3$  Invarianteneigenschaft besitzen. Ich bezeichne dieselben als *die, der Gleichungsform (91) entsprechenden, irrationalen Invarianten, bez. Covarianten von f.*

Von (92) ausgehend haben wir jetzt folgende vier linear unabhängige Wurzelformen unseres Systems

$$(95) \quad \sqrt{\Phi_1} = x_1 \sqrt{D}, \quad \sqrt{\Phi_2} = x_2 \sqrt{D}, \quad \sqrt{\Phi_3} = x_3 \sqrt{D}, \quad \sqrt{\Phi_4} = \sqrt{\Phi}.$$

Indem wir dieselben der Formel (90) entsprechend mit  $z_1 z_2 z_3 z_4$  proportional setzen, erhalten wir im Raume der  $z$  eine Curve sechster Ordnung, für welche die Gleichungen bestehen:

$$(96) \quad D(z_1 z_2 z_3) \cdot \Phi(z_1 z_2 z_3) - \Omega(z_1 z_2 z_3)^2 = 0,$$

$$(97) \quad \Phi(z_1 z_2 z_3) - 2\Omega(z_1 z_2 z_3) \cdot z_4 + D(z_1 z_2 z_3) \cdot z_4^2 = 0.$$

Hier stellt (97) eine Fläche dritter Ordnung vor, welche nur insofern particularisirt ist, als sie durch die vierte Ecke des Coordinatentetraeders der  $z$  hindurchläuft; (96) ist der Umhüllungskegel vierter Ordnung, welcher sich von besagter Ecke an die Fläche legen lässt. Indem wir das hierin liegende Resultat von dem speciellen bei uns benutzten Coordinatensystem ablösen, haben wir: *Unsere Raumcurve sechster Ordnung kann defmirt werden als die Berührungscurve, welche eine beliebige  $F_3$  mit dem an sie von einem beliebigen ihrer Punkte auslaufenden Umhüllungskegel vierter Ordnung gemein hat.\**

Wir fragen, wie bei der so gewonnenen Raumfigur die 28 Doppeltangenten der  $C_4$  zur Geltung kommen. Eben diese Frage hat Herr Geiser in Bd. I der Mathematischen Annalen untersucht (Ueber die Doppeltangenten einer ebenen Curve vierten Grades, 1868). Es handelt sich um die 28 Doppeltangentialebenen des Kegels vierter Ordnung (96). Eine derselben ist von vornherein bekannt, das ist  $D(z_1 z_2 z_3) = 0$ , die *Tangentialebene der Fläche dritter Ordnung in der Kegelspitze*. Die anderen werden nach Geiser durch die 27 Geraden der Fläche dritter Ordnung gegeben: *sie fallen mit denjenigen Ebenen zusammen, welche die Kegelspitze beziehungsweise mit den 27 Geraden der  $F_3$  verbinden*. Von hieraus ergeben sich Vergleichspunkte zwischen der Theorie der 28 Doppeltangenten und derjenigen der 27 Geraden, auf die wir zum Theil noch weiter unten zurückkommen.

---

\*) Diese Berührungscurve liegt natürlich auf einer Fläche zweiten Grades; aus (96), (97) findet sich für dieselbe  $\Omega(z_1 z_2 z_3) - D(z_1 z_2 z_3) \cdot z_4 = 0$ .

Wir führen jetzt die  $z$  in die Formeln (94) ein und erhalten:

$$\begin{aligned} z_1' &= \lambda z_1, & z_2' &= \lambda z_2, & z_3' &= \lambda z_3, \\ z_4' &= \frac{z_4 + u_1 z_1 + u_2 z_2 + u_3 z_3}{\lambda}. \end{aligned}$$

Combinirt man diese Formeln mit einer beliebigen linearen Transformation der  $z_1 z_2 z_3$ , so hat man die allgemeinste quaternäre lineare Transformation der  $z_1 z_2 z_3 z_4$ . Wir schliessen daraus, dass wir die erwähnten irrationalen Invarianten, bez. Covarianten der  $C_4$  schlechtweg definiren können als *Invarianten, bez. Covarianten des von der Fläche dritter Ordnung und dem auf ihr gegebenen Projectionspunkte gebildeten quaternären Systems.* —

Dies sind, was die Berührungscurven dritter Ordnung erster Art angeht, die Elemente, mit denen wir später zu arbeiten haben werden.

## § 18.

### Von den Berührungscurven dritter Ordnung zweiter Art.

Unsere Kenntniss der Berührungscurven dritter Ordnung zweiter Art geht bekanntlich auf Hesse zurück (Ueber Determinanten und ihre Anwendung in der Geometrie, insbesondere auf Curven 4<sup>ter</sup> Ordnung, Journal für Mathematik Bd. 49, 1855; Ueber Doppeltangenten der ebenen Curven 4<sup>ter</sup> Ordnung, ebenda). Ich reproducire sein Hauptresultat zunächst folgendermassen (indem ich durchaus in der Ebene operire):

Seien

$$\sqrt{\Phi_1}, \sqrt{\Phi_2}, \sqrt{\Phi_3}, \sqrt{\Phi_4}$$

vier linearunabhängige Wurzelformen eines Systems zweiter Art. Es ergibt sich dann der Satz, dass auch die Quadrate und Producte dieser Formen, die wir, vermöge  $f = 0$ , rationalen Formen dritten Grades gleich setzen können:

$$(\sqrt{\Phi_1})^2 = \Psi_{11}, \sqrt{\Phi_1} \sqrt{\Phi_2} = \Psi_{12}, \dots$$

linear unabhängig sind. Daher ist es möglich, die drei Polaren

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3}$$

aus den  $\Psi$  linear zusammensetzen, was durch folgende Formeln geschehen mag:

$$(98) \quad \frac{\partial f}{\partial x_1} = \sum \alpha_{ik} \Psi_{ik}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = \sum \beta_{ik} \Psi_{ik}, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = \sum \gamma_{ik} \Psi_{ik}.$$

Mit den solchergestalt gewonnenen Constanten  $\alpha_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$ ,  $\gamma_{ik}$  bilde man jetzt die Linearformen

$$(99) \quad \pi_{ik} = \alpha_{ik} x_1 + \beta_{ik} x_2 + \gamma_{ik} x_3.$$

Dann lässt sich die Gleichung der  $C_4$  in Gestalt folgender symmetrischer Determinante schreiben:

$$(100) \quad \begin{vmatrix} \pi_{11} & \cdot & \cdot & \pi_{14} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \pi_{41} & \cdot & \cdot & \pi_{44} \end{vmatrix} = 0;$$

die  $\Psi_{ik}$  aber werden den dreigliedrigen Unterdeterminanten dieser Determinante proportional, so dass das zugehörige System von Berührungscuren dritter Ordnung, unter  $c_1, c_2, c_3, c_4$  willkürliche Constante verstanden, durch die rationale Gleichung gegeben ist:

$$(101) \quad \begin{vmatrix} \pi_{11} & \cdot & \cdot & \pi_{14} & c_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & c_3 \\ \pi_{41} & \cdot & \cdot & \pi_{44} & c_4 \\ c_1 & c_2 & c_3 & c_4 & 0 \end{vmatrix} = 0. *)$$

Hier sind nun die 30 durch (98) eingeführten Grössen  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$  die von uns in Betracht zu ziehenden Moduln der zweiten Stufe. Wir fragen uns wieder vor allen Dingen, welchen Bedingungen eine Function der neuen Moduln genügen muss, um eine Function der Coefficienten von  $f$  zu sein. Diese Bedingungen ergeben sich fast unmittelbar aus (100) und lassen sich in folgender Weise formuliren: Man denke sich die ursprünglich gewählten vier Wurzelformen  $\sqrt{\Phi_1}, \dots, \sqrt{\Phi_4}$  irgendwie durch vier ihrer linearen Verbindungen, deren Determinante gleich Eins sein soll, ersetzt. Dann erleiden ebenfalls die zehn Grössen  $\Psi_{ik}$  und also, nach (98), die  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$  (jede dieser drei Grössenreihen für sich genommen) eine bestimmte lineare Substitution. Nur diejenigen

\*) Ich schliesse hier, weil sich in gegenwärtiger Abhandlung keine andere passende Stelle findet, eine Formel für die auf die Curve vierter Ordnung bezogene unserem Berührungssysteme entsprechende gerade Thetafunction  $\vartheta_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|} \left( \int_y^x \right)$

an, — eine Formel, welches das Seitenstück zu der unter (84) gegebenen für ungerade Thetafunctionen geltenden ist, sofern man letztere auf den Fall der ebenen Curve vierter Ordnung einschränken will. Die neue Formel lautet:

$$\vartheta_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|} \left( \int_y^x \right) = \frac{h_1 \sum \alpha_{ik} \sqrt{\Phi_i(x)} \sqrt{\Phi_k(y)} + h_2 \sum \beta_{ik} \sqrt{\Phi_i(x)} \sqrt{\Phi_k(y)} + \dots}{\sqrt{(h_1 \sum \alpha_{ik} \Psi_{ik}(x) + \dots) (h_1 \sum \alpha_{ik} \Psi_{ik}(y) + \dots)}} \cdot e^{\frac{1}{2} \sum \pi_{xy}^{xi} y^i}$$

Hier bedeutet  $h_1, h_2, h_3$  irgend welchen Hilfspunkt der Ebene und die Summation im Exponenten ist über diejenigen Punkte  $x', x'', x'''$ , bez.  $y', y'', y'''$  der Curve zu erstrecken, welche, von  $x$  und  $y$  verschieden, der Verbindungslinie des  $h$  mit  $x$ , bez.  $y$  angehören.

Functionen der  $\alpha_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$ ,  $\gamma_{ik}$  sind Functionen der Coefficienten von  $f$ , welche bei den sämmtlichen solcherweise entstehenden linearen Substitutionen ungeändert bleiben. Hiernach kann man ein System von 15 linearen partiellen Differentialgleichungen aufstellen, durch welches sich unsere Functionen charakterisiren lassen. — Wieder mögen wir unter den so definirten Functionen solche herausuchen, welche gegenüber linearen Transformationen der  $x_1, x_2, x_3$  Invarianteneigenschaft besitzen. Wir werden dieselben als die zur Gleichungsform (100) gehörenden irrationalen Invarianten, bez Covarianten von  $f$  bezeichnen.

Alle diese Beziehungen werden nun um Vieles durchsichtiger, wenn wir der Formel (90) entsprechend, wie dies im vorliegenden Falle Hesse selbst bereits that, raumgeometrische Vorstellungen einführen. Statt (90) können wir hier schreiben:

$$z_1^2 : z_1 z_2 : \dots : z_4^2 = \Psi_{11} : \Psi_{12} : \dots : \Psi_{44}.$$

Die Gleichungen (98) also ergeben die drei Flächen zweiten Grades:

$$(102) \quad \sum \alpha_{ik} z_i z_k = 0, \quad \sum \beta_{ik} z_i z_k = 0, \quad \sum \gamma_{ik} z_i z_k = 0;$$

das Flächennetz, welches sich aus denselben zusammensetzen lässt, entspricht dem Netz der aus den Ausdrücken (98) zusammensetzenden Polaren der Curve vierter Ordnung. Daher entspricht der Curve vierter Ordnung im Raume die Kegelspitzencurve sechster Ordnung des durch (102) gegebenen Flächennetzes. Besonders einfach wird, was wir über die zu (100) gehörigen irrationalen Invarianten und Covarianten der  $C_4$  gesagt haben. Man betrachte die gemischt ternär-quaternäre Form:

$$(103) \quad x_1 \sum \alpha_{ik} z_i z_k + x_2 \sum \beta_{ik} z_i z_k + x_3 \sum \gamma_{ik} z_i z_k.$$

Es wird sich bei unseren Invarianten und Covarianten um solche von (103) abhängige Ausdrücke handeln, welche bei beliebigen linearen Substitutionen der  $x$  wie der  $z$  Invarianteneigenschaft besitzen, d. h. um Combinanten des Flächennetzes im allgemeinsten Sinne. Beschränken wir uns dabei auf gewöhnliche Invarianten oder Covarianten von  $f$ , so müssen wir natürlich hinzufügen, dass in den betreffenden Ausdrücken keine  $z$  mehr vorkommen sollen.

Es erübrigt, dass wir zur Sprache bringen, wie sich die 28 Doppeltangenten unserer  $C_4$  an der  $C_6$  darstellen. Zu dem Zwecke müssen wir, mit Hesse, die acht Punkte, in denen sich die Flächen (102) schneiden, einzeln einführen. Die 28 Verbindungslinien dieser 8 Punkte sind in gewissem Sinne das Bild der 28 Doppeltangenten. Jede dieser Verbindungslinien erweist sich nämlich als eine Sekante der  $C_6$ , welche die  $C_6$  in solchen zwei Punkten trifft, die vermöge (90) den Berührungspunkten der ebenen  $C_4$  mit einer ihrer Doppeltangenten entsprechen.

## § 19.

Von der Discriminante der  $C_4$  und ihrer Darstellung in den Rationalitätsbereichen erster und zweiter Stufe.

Eine ganz besondere Rolle spielt im Folgenden die *Discriminante* der  $C_4$ , d. h. diejenige Function ihrer Coefficienten, deren Verschwinden das Auftreten eines Doppelpunktes der Curve vierter Ordnung anzeigt. Wir müssen uns hier mit den Darstellungen beschäftigen, welche dieselbe in den von uns unterschiedenen Rationalitätsbereichen erster und zweiter Stufe findet.

Im Bereiche erster Stufe ist die Discriminante defnirt als diejenige rationale, ganze, homogene Function 27<sup>ten</sup> Grades der Coefficienten von  $f$ , die sich als Resultante der drei Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

bei Elimination der  $x_1 x_2 x_3$  ergibt. Dieselbe ist eine Invariante vom Gewichte 36. Ich führe dabei gern an, dass es Herrn Gordan, einer brieflichen Mittheilung zufolge, neuerdings gelungen ist, die hier geforderte Elimination wirklich durchzuführen, Sei  $f$  vorübergehend symbolisch  $= a_x^4 = b_x^4 = c_x^4$ . So geht Hr. Gordan von der Bemerkung aus, dass die folgende, von uns schon oben (in der Anmerkung zu Formel (52)) benutzte Covariante:

$$(abc)^2 \sum_{x+\lambda+\mu=2} a_x^{\lambda+\mu} b_x^{\mu+x} c_x^{x+\lambda} a_y^x b_y^\lambda c_y^\mu,$$

unter  $x$  die Coordinaten eines Doppelpunktes der  $C_4$  verstanden, für sämtliche Werthe der  $y$  verschwindet. Dies giebt, indem wir die Coefficienten  $y_1^2, y_1 y_2, \dots$  einzeln gleich Null setzen, sechs Gleichungen vierten Grades für die  $x_1, x_2, x_3$ , d. h. sechs lineare Gleichungen für die 15 Glieder 4<sup>ter</sup> Dimension  $x_1^4, x_1^3 x_2, \dots$ . Weitere 9 Gleichungen derselben Art erhält man aber, wenn man eine jede der drei bereits bekannten Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_2} = 0, \quad \frac{\partial f}{\partial x_3} = 0$$

der Reihe nach mit  $x_1, x_2, x_3$  multiplicirt. Aus den so gewonnenen 15 Gleichungen können wir jetzt die  $x_1^4, x_1^3 x_2, \dots$  als linear vorkommende Grössen in elementarer Weise eliminiren. Das Resultat ist eine fünfzehneihige Determinante, deren erste 6 Zeilen je dritten Grades in den Coefficienten von  $f$  sind, während die neun folgenden in den Coefficienten linear sind. Die Determinante ist also im Ganzen 27<sup>ten</sup> Grades in den Coefficienten von  $f$ : sie ist mit der gesuchten Discriminante ohne weiteres identisch, oder weicht doch nur, wenn

wir letztere ihrem absoluten Werthe nach bereits auf andere Weise definirt haben, von ihr um einen Zahlenfactor ab, der uns hier gleichgültig ist. —

Wir wenden uns jetzt zu den beiden Rationalitätsbereichen der §§ 17 und 18.

Um mit dem ersten derselben zu beginnen, wollen wir unsere Untersuchung in der Weise geometrisch einleiten, dass wir fragen, wie man das von der Fläche dritter Ordnung und dem auf ihr liegenden Projectionspunkte gebildete System particularisiren muss, damit der von dem Projectionspunkte an die Fläche gehende Umhüllungskegel vierter Ordnung eine Doppelkante erhält. Die Geiser'schen Betrachtungen, auf welche wir bereits verwiesen, ergeben in dieser Hinsicht zwei und nur zwei Möglichkeiten: *Entweder muss die Fläche dritter Ordnung von der wir ausgehen, selbst einen Doppelpunkt bekommen, oder es muss der Projectionspunkt, den wir benutzen, auf eine der 27 Geraden der Fläche rücken.* Im ersteren Falle verschwindet ein Ausdruck  $\Sigma$ , den wir als „Discriminante der  $F_3$ “ benennen können. Im anderen Falle wird Null erhalten, wenn wir in diejenige Covariante neunter Ordnung der  $F_3$ , deren Verschwinden auf der  $F_3$  die 27 Geraden festlegt, die Coordinaten des Projectionspunktes eintragen. Ich will den so bestimmten Ausdruck mit  $T$  bezeichnen. Wir haben also für die Discriminante der Curve vierter Ordnung nothwendig eine Darstellung folgender Form:

$$(104) \quad \text{Discr.} = \Sigma^\alpha T^\beta,$$

unter  $\alpha, \beta$  noch zu bestimmende Multiplicitäten verstanden\*).

Um  $\alpha, \beta$  festzulegen, müssen wir jetzt genauer darauf eingehen, wie sich die Ausdrücke  $\Sigma$  und  $T$  aus den Coefficienten von  $D, \Omega, \Phi$  aufbauen. Ich will dabei jeden einzelnen Ausdruck als eine Summe von Gliedern anschreiben, deren einzelnes in den Coefficienten von  $D, \Omega, \Phi$  bez. homogen ist:

$$= S(\overset{l}{D}, \overset{m}{\Omega}, \overset{n}{\Phi}),$$

wo  $l, m, n$  resp. den Grad des einzelnen Gliedes in den Coefficienten von  $D, \Omega, \Phi$  angeben sollen. Wir haben in dieser Hinsicht\*\*):

1)  $\Sigma$  ist in den Coefficienten unserer  $F_3$  (97), deren Gleichung wir noch einmal hersetzen:

$$\Phi - 2\Omega z_4 + D z_4^2 = 0,$$

\*) Ich werde, um alle Missverständnisse auszuschliessen, die Discriminante der  $C_4$  in den Formeln immer ausführlich mit „Discr.“ bezeichnen.

\*\*) Vergl. die Angaben in Salmon's *Analytic Geometry of three dimensions*, p. 503 ff. [ich citire auch weiterhin auf die vierte Auflage des Originals (vom Jahre 1882), die ich gerade zur Hand habe].

von der 32<sup>ten</sup> Ordnung. Daher hat man für jedes einzelne Glied der  $\Sigma$  entsprechenden Summe  $S$ :

$$l + m + n = 32.$$

Ferner hat  $\Sigma$  das Gewicht  $\frac{32 \cdot 3}{4} = 24$ . Setzt man jetzt in die Gleichung der  $F_3$  für  $z_4$   $\lambda z_4$ , während  $z_1 z_2 z_3$  ungeändert bleiben, so kommt dies darauf für  $\Phi, \Omega, D$  beziehungsweise  $\Phi, \lambda \Omega, \lambda^2 D$  zu schreiben. Hierbei soll  $\Sigma$  seinem Gewicht entsprechend den Factor  $\lambda^{24}$  erhalten. Dies giebt für jedes Glied unseres  $S$ :

$$2l + m = 24.$$

Wir erhalten also für  $\Sigma$  folgende Darstellung:

$$(105) \quad \Sigma = S(D, \Omega, \Phi).$$

2)  $T$  ist der leitende Coefficient einer Covariante unserer  $F_3$ , d. h. der Coefficient der höchsten in dieser Covariante auftretenden Potenz von  $z_4$ . Diese Covariante hat in den Variablen den Grad 9, in den Coefficienten den Grad 11. Hiernach erhält man für die in der Entwicklung von  $T$  auftretenden Glieder:

$$l + m + n = 11, \quad 2l + m = \frac{33 - 9}{4} + 9 = 15.$$

Daher ist:

$$(106) \quad T = S(D, \Omega, \Phi).$$

3) Die Discriminante von  $f = D\Phi - \Omega^2$  ergibt als Function 27<sup>ten</sup> Grades der Coefficienten von  $f$  eine Darstellung der folgenden Form:

$$(107) \quad \text{Discr.} = S(D, \Omega, \Phi).$$

Der Vergleich der Formeln (105)–(107) mit (104) ergibt jetzt mit Nothwendigkeit für die in (104) noch unbestimmten Constanten  $\alpha = 1, \beta = 2$ . Wir haben also:

*Im Rationalitätsbereiche zweiter Stufe der ersten Art setzt sich die Discriminante der  $C_4$  aus den in (105), (106) näher definirten Bestandtheilen  $\Sigma, T$  vermöge der Formel zusammen:*

$$(108) \quad \text{Discr.} = \Sigma T^2.$$

Hierbei sind, wie man beachten mag,  $\Sigma$  und  $T$  allein genommen keineswegs Functionen der Coefficienten von  $f$ . Sie bleiben allerdings, vermöge ihrer quaternären Invarianteneigenschaft, bei denjenigen Operationen (94) ungeändert, welche  $\lambda = 1$  entsprechen; setzt man aber, um zu den allgemeinen Operationen (94) aufzusteigen, hinterher  $D' = \lambda D, \Omega' = \Omega, \Phi' = \frac{\Phi}{\lambda}$ , so wird  $\Sigma$  den Factor  $\lambda^{-8}$ ,  $T$  den Factor  $\lambda^{+4}$  erhalten; erst das Product  $\Sigma \cdot T^2$  ist eine Function der Coefficienten von  $f$ . —

Wir betrachten ferner die Raumcurven sechster Ordnung zweiter Art. Dabei können wir uns etwas kürzer fassen, weil das Resultat, um welches es sich handelt, schon anderweitig bekannt ist. \*) Soll unsere Curve vierter Ordnung einen Doppelpunkt erhalten, so zeigt sich, dass die 8 Grundpunkte des die Raumcurve sechster Ordnung definirenden Netzes von Flächen zweiter Ordnung eine von zwei besonderen Lagen annehmen müssen: *es müssen entweder zwei der acht Punkte zusammenfallen* (worauf die  $C_6$  selbst einen Doppelpunkt erhält), *oder es müssen sich die Punkte zu vier und vier auf zwei Ebenen vertheilen* (es muss im Flächennetz ein Ebenenpaar vorhanden sein, worauf die  $C_6$  in die Durchschnittskante der beiden Ebenen und eine  $C_5$  zerfällt). Beide Vorkommnisse werden durch das Verschwinden von Invarianten der ternär-quaternären Form (103) (von Combinanten des Flächennetzes) ausgedrückt. Im ersteren Falle ist die betreffende Combinante nichts anderes als die sogenannte Tactinvariante des Netzes; sie ist als solche in den  $\alpha_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$ ,  $\gamma_{ik}$  je vom 16<sup>ten</sup> Grade; wir wollen sie hier mit  $S$  bezeichnen. Im zweiten Falle haben wir eine Combinante 10<sup>ten</sup> Grades in den  $\alpha_{ik}$ , wie in den  $\beta_{ik}$  und den  $\gamma_{ik}$ ; sie soll  $T$  genannt werden. Nun ist die Discriminante unserer  $C_4$ , mit Rücksicht auf die unter (100) gegebene Gleichungsform derselben, in den  $\alpha_{ik}$ ,  $\beta_{ik}$ ,  $\gamma_{ik}$  zusammengenommen vom 108<sup>ten</sup> Grade, also in den  $\alpha_{ik}$ , wie in den  $\beta_{ik}$  oder in den  $\gamma_{ik}$  einzeln genommen vom Grade 36. Wir sprechen sofort das Resultat aus:

*Im Rationalitätsbereiche zweiter Stufe der zweiten Art hat man eine ganz ähnliche Zerlegung der Discriminante der  $C_4$ , wie oben unter (108); es ist:*

$$(109) \quad \text{Discr.} = ST^2.$$

Nur sind jetzt hier die beiden Factoren  $S$  und  $T$  einzeln genommen bereits als Functionen der Coefficienten von  $f$  anzusehen. Denn hierzu ist es nach § 18 nicht nur erforderlich sondern auch hinreichend, dass man es mit Combinanten des Flächennetzes zu thun hat. Als Function der Coefficienten von  $f$  hat  $S$  den Grad 12,  $T$  den Grad  $7\frac{1}{2}$ .

## § 20.

### Ueber das Verhalten der Berührungscurven dritter Ordnung beim Auftreten eines Doppelpunktes. \*)

Wir bestätigen die Formeln (108), (109) und gewinnen zugleich die Grundlage für spätere Folgerungen, indem wir zusehen, wie sich

\*) Vergl. Salmon l. c. p. 208 ff., insbesondere p. 213.

\*\*) Vergl. bei diesem und den beiden folgenden Paragraphen die demnächst in diesen Annalen erscheinenden „Untersuchungen aus dem Gebiete der hyper-

die einzelnen Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung der  $C_4$  verhalten, wenn die  $C_4$  einen Doppelpunkt bekommt. Zu dem Zwecke werden wir zunächst untersuchen, welchen Einfluss die Entstehung des Doppelpunktes auf die Thetamoduln  $\tau_{\alpha\beta}$  hat, wobei uns aber gestattet sein wird, zwecks Definition der  $\tau_{\alpha\beta}$  auf der zur  $C_4$  gehörigen Riemann'schen Fläche ein möglichst einfach gewähltes Schnittsystem zu Grunde zu legen. In der That gewinnen wir auf dem hiermit angedeuteten Wege in einfachster Weise nicht nur die in Betracht kommenden Sätze über das Verhalten der Berührungscurven sondern zugleich die Grundlage für unsere späteren die Thetafunctionen betreffenden Entwicklungen.

Um jetzt zunächst das in Rede stehende Schnittsystem zu definiren, denken wir uns die Riemann'sche Fläche aus der Curve vierter Ordnung durch Projection von irgend einem der Curve selbst nicht angehörig Punkte der Ebene aus abgeleitet, so dass wir eine vierblättrige Fläche mit 12 Verzweigungspunkten vor uns haben. Da sieht man denn ohne Weiteres, wie das Entstehen eines Doppelpunktes der  $C_4$  auf die Riemann'sche Fläche wirkt. Der Erfolg ist der, dass zwei auf der Riemann'schen Fläche durch einen Verzweigungsschnitt verbundene Verzweigungspunkte zusammenrücken und sich dadurch compensiren. Ich will die Stelle, an der sich die beiden Verzweigungspunkte vereinigen, insofern sie dem einen der beiden ursprünglich verbundenen Blätter angehört, mit  $\xi$ , insofern sie dem anderen der beiden Blätter angehört, mit  $\eta$  bezeichnen. Durch das Zusammenrücken der beiden Verzweigungspunkte ist das  $p$  unserer Fläche auf Zwei herabgesunken. Wir werden jetzt die so erhaltene Fläche kanonisch zerschneiden, indem wir auf ihr nach den bekannten Regeln zwei Paare von Querschnitten:  $A_1, B_1$  und  $A_2, B_2$  herstellen, von denen indess keiner durch  $\xi$  oder  $\eta$  hindurchlaufen soll. Ist dies geschehen, so führen wir noch zwei Schnitte  $A_3, B_3$ , die folgendermassen definirt sein sollen:  $A_3$  führt vom Punkte  $\eta$ , ohne den  $A_1, B_1, A_2, B_2$  irgendwie zu begegnen, zum Punkte  $\xi$ ,  $B_3$  umgiebt den Punkt  $\xi$  (oder auch  $\eta$ , wenn wir es vorziehen sollten) in kleinem Kreise. Wir betrachten jetzt, was offenbar gestattet ist, dieses Schnittnetz  $A_1, B_1, A_2, B_2, A_3, B_3$  als Grenzlage einer eben hierdurch definirten kanonischen Zerschneidung der ursprünglichen Fläche  $p = 3$ . Hinsichtlich der so gefundenen Zerschneidung führen wir dann auf der Fläche  $p = 3$  Normalintegrale erster Gattung ein, die uns bestimmte Thetamoduln  $\tau_{\alpha\beta}$  liefern. Dann gehen wir wieder zur Fläche  $p = 2$  zurück und sehen, was dabei aus den Integralen erster Gattung und den  $\tau_{\alpha\beta}$  wird.

elliptischen Modulfunctionen“ von Hrn. Burkhardt. Es sind dort Ueberlegungen ähnlicher Art, wie die im Texte für  $p = 3$  gegebenen, für den Fall  $p = 2$  mit grosser Sorgfalt durchgeführt.

Ich setze das allgemeine Schema der Formel (4) noch einmal her:

	$A_1$	$A_2$	$A_3$	$B_1$	$B_2$	$B_3$
$v_1$	1	0	0	$\tau_{11}$	$\tau_{12}$	$\tau_{13}$
$v_2$	0	1	0	$\tau_{21}$	$\tau_{22}$	$\tau_{23}$
$v_3$	0	0	1	$\tau_{31}$	$\tau_{32}$	$\tau_{33}$

Hier ändert sich nun, was die Integrale  $v$  angeht, beim Grenzübergang zur Fläche  $p = 2$  nur das, dass  $v_3$  in  $\xi$  und  $\eta$  logarithmische Unstetigkeitsstellen erhält und also in ein Integral dritter Gattung übergegangen ist. In der That liefert die Ueberschreitung von  $A_3$ , d. h. die Umkreisung von  $\xi$ , für  $v_3$  dem Schema entsprechend den Betrag 1; wir haben also  $\frac{1}{2i\pi}$  als das zum Punkte  $\xi$  gehörige logarithmische Residuum von  $v_3$  anzusehen. Aber unser Schema schreibt gleichzeitig als Perioden von  $v_3$  an  $A_1, A_2, 0, 0$  vor. Nehmen wir Beides zusammen, so werden wir, in der Grenze,

$$v_3 = \frac{1}{2i\pi} (\Pi_{\xi\eta}),$$

setzen dürfen, unter  $(\Pi)$  ein zur Fläche  $p = 2$  gehöriges im gewöhnlichen Sinne transcendent normirtes Integral dritter Gattung verstanden\*). Dabei gehen nun, in Uebereinstimmung mit Formel (6),  $\tau_{13} = \tau_{31}$  und  $\tau_{23} = \tau_{32}$  beziehungsweise in die wohlbestimmten Grössen  $v_1^{\xi\eta}$  und  $v_2^{\xi\eta}$  über. Anders aber das  $\tau_{33}$ . *Es ergibt sich, dass  $\tau_{33} = i\infty$  wird.* Wir wollen in der Folge schreiben:

$$(110) \quad q_{33} = e^{i\pi\tau_{33}}.$$

Wir haben dann:

*Erhält die Curve vierter Ordnung einen Doppelpunkt, so wird für das von uns gewählte Schnittsystem  $q_{33}$  zu Null.*

Wir fragen jetzt nach dem zugehörigen Verhalten der Berührungscurven, gerader und ungerader Ordnung, die wir hier beide brauchen\*\*). Wir wollen dabei, um möglichst einfache Sätze zu erhalten, dem gewöhnlichen Sprachgebrauche entgegen nur solche Curven zur Curve vierter Ordnung *adjungirt* nennen, welche eine *ungerade* Anzahl von

\*) Ich habe dies zum ersten Male vorgetragen, als ich im Sommer 1874 über Abel'sche Functionen las.

\*\*\*) Vergl. insbesondere Brill „Ueber die Anwendung der hyperelliptischen Functionen in der Geometrie“, Journal für Mathematik Bd. 65 (1864), sodann die Erläuterungen, welche Herr Lindemann in Clebsch's Vorlesungen über Geometrie auf pag. 879, 880 des Bd. I giebt. Die im Texte gegebenen Theoreme scheinen in ihrer vollständigen Form neu zu sein.

Malen durch den Doppelpunkt der letzteren hindurchlaufen; alle anderen Curven heissen nicht-adjungirt.

Um mit den Berührungskegelschnitten zu beginnen, so ist deren Theorie besonders zugänglich, weil wir das einzelne System derselben durch eine *Elementarcharakteristik*  $\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  festlegen können (§ 12). Seien  $a_1 a_2 a_3 a_4$  die vier Schnittpunkte der  $C_4$  mit einer geraden Linie,  $b_1 b_2 b_3 b_4$  die Berührungspunkte eines dem System angehörigen Kegelschnittes,  $\omega_1 \omega_2 \dots \omega_6$  die Perioden eines beliebigen Integrals erster Gattung, so ist die betr. Charakteristik  $\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  durch folgende Gleichung gegeben:

$$\int_{a_1}^{b_1} + \int_{a_2}^{b_2} + \int_{a_3}^{b_3} + \int_{a_4}^{b_4} = \frac{h_1 \omega_1 + h_2 \omega_2 + h_3 \omega_3 + g_1 \omega_4 + g_2 \omega_5 + g_3 \omega_6}{2}.$$

Dabei kommen von den möglichen Werthsystemen  $\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  allein die 63 in Betracht, welche von  $\left| \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{smallmatrix} \right|$  verschieden sind. — Wir schliessen jetzt, mit Rücksicht auf den angegebenen Werth von  $\tau_{33}$ :

*Von den 63 Systemen von Berührungskegelschnitten, die bei der allgemeinen  $C_4$  zu unterscheiden sind, erweisen sich, sobald die  $C_4$  einen Doppelpunkt erhält, diejenigen 32, deren  $g_3 = 1$  ist, als adjungirt, die anderen 31 (mit  $g_3 = 0$ ) als nicht adjungirt.*

Die nähere Untersuchung zeigt ferner, dass von den Kegelschnittsystemen der ersten Art immer diejenigen zwei identisch werden, deren Charakteristiken sich nur durch das  $h_3$  unterscheiden; es giebt also bei der  $C_4$  mit Doppelpunkt nur 16 getrennte Systeme adjungirter Berührungskegelschnitte.

Die Kegelschnittsysteme der anderen Art bleiben getrennt. Aber unter ihnen ist eines, welches unsere ganz besondere Aufmerksamkeit auf sich zieht. Es ist dies das System mit der Charakteristik

$$\left| \begin{smallmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{smallmatrix} \right|.$$

*Während nämlich die 30 übrigen nicht adjungirten Kegelschnittsysteme allgemein zu reden aus eigentlichen Kegelschnitten bestehen (unter denen sich nur einzelne Linienpaare finden), so ist dieses System in das Büschel der doppeltzählenden durch den Doppelpunkt laufenden Geraden ausgeartet. Insbesondere vertreten bei ihm die sechs vom Doppelpunkt an die Curve auslaufenden Tangenten, jede dieser sechs Tangenten doppeltgezählt, die sechs Doppeltangentenpaare, welche der allgemeinen*

Theorie zufolge unter den Kegelschnitten jedes Berührungssystems vorhanden sein sollen.

Wir beschäftigen uns jetzt des Näheren mit den 28 Doppeltangenten. Jede einzelne derselben wird uns im allgemeinen Falle durch eine Primcharakteristik  $\left| \begin{matrix} g \\ h \end{matrix} \right|$  festgelegt, die ungerade ist, d. h. für die  $g_1 h_1 + g_2 h_2 + g_3 h_3 \equiv 1 \pmod{2}$ . Erhält jetzt die  $C_4$  einen Doppelpunkt, so müssen wir diejenigen 12 Doppeltangenten, für welche  $g_3 = 0$  ist, von den anderen 16, für die  $g_3 = 1$  ist, abtrennen. Wir finden:

*Von den 12 Doppeltangenten mit  $g_3 = 0$  fallen jedesmal diejenigen zwei, deren Charakteristiken sich nur durch das  $h_3$  unterscheiden, mit einander zusammen und gehen dabei, indem sie adjungirt werden, in die 6 soeben genannten vom Doppelpunkte auslaufenden Tangenten über. — Die 16 Doppeltangenten mit  $g_3 = 1$  verlaufen getrennt und nicht adjungirt.*

Man beweist diese Sätze, indem man bemerkt, dass die Primcharakteristiken irgend zweier Doppeltangenten zusammenaddirt die Elementarcharakteristik gerade desjenigen Kegelschnittsystems ergeben müssen, unter dessen Kegelschnitten das von den beiden Doppeltangenten gebildete Linienpaar als specieller Fall enthalten ist.

Auf dieselbe Weise weiter schliessend, sieht man, dass man allgemein bei den Berührungscurven ungerader Ordnung die Fälle  $g_3 = 0$  und  $g_3 = 1$  auseinanderzuhalten hat:

*Von den Systemen mit  $g_3 = 0$  fallen immer diejenigen zwei, die sich nur durch das  $h_3$  unterscheiden, zusammen; die Systeme mit  $g_3 = 1$  verlaufen getrennt.*

*Die sämtlichen Curven der Systeme mit  $g_3 = 0$  sind adjungirt, diejenigen der Systeme mit  $g_3 = 1$  sind nicht adjungirt\*).*

Betrachten wir insbesondere Berührungscurven dritter Ordnung, so haben wir 32 Systeme mit  $g_3 = 0$  und ebensoviele mit  $g_3 = 1$ . Wir unterschieden oben die Systeme mit ungerader und gerader Charakteristik als solche der ersten und der zweiten Art. Von den Systemen erster Art finden sich unter den 32 mit  $g_3 = 0$  12, unter den 32 mit  $g_3 = 1$  16. Die entsprechenden Zahlen für Systeme zweiter Art sind 20 und 16. Unter den Systemen mit  $g_3 = 0$  fallen selbstverständlich immer nur solche zwei zusammen, die derselben Art angehören. —

---

\*) Das ist also genau umgekehrt wie bei den durch Elementarcharakteristiken festgelegten Systemen von Berührungskegelschnitten (oder von Berührungscurven gerader Ordnung, generell).

## § 21.

## Neue Sätze über das Verhalten der Curvendiscriminante.

Die im vorigen Paragraphen erhaltenen Sätze gestatten uns vor allen Dingen, die Theoreme über Discriminantenzerlegung, die wir in § 19 erhielten, wesentlich zu vervollständigen:

Wir bemerken zunächst, dass jedesmal, wenn bei einer  $C_4$  ein Doppelpunkt entsteht, eines der 63 Systeme zugehöriger Kegelschnitte ausgezeichnet ist. Nun sind, wie wir wissen, alle 63 Systeme an sich gleichberechtigt (§ 16). Daher schliessen wir:

*Adjungirt man\*) sämtliche Systeme von Berührungskegelschnitten, so zerfällt die Discriminante der  $C_4$  in 63 gleichberechtigte Factoren.*

Wir könnten diesem Satze weiter nachgehen, indem wir bemerken, dass sämtliche Berührungskegelschnitte rational bekannt sind, wenn man die 28 Doppeltangenten einzeln kennt, dass man aber letzteres im Anschlusse an bekannte Untersuchungen von Aronhold erreichen kann, indem man von 7 Doppeltangenten als willkürlich gegeben ausgeht, etc. Inzwischen würde uns dies zu sehr von dem speciellen Gegenstande unserer Untersuchung abführen. Vielmehr wende ich mich zu den Entwicklungen des § 19 zurück.\*\*)

Wir sind in § 19 von den Raumfiguren der § 17, 18 ausgegangen. Ich sage jetzt, dass in jeder dieser beiden Raumfiguren die 63 Factoren der Discriminante, von denen wir gerade sprechen, mit Leichtigkeit zu erkennen sind.

Um mit der Curve sechster Ordnung erster Art zu beginnen, so ist von vornherein klar, dass der Factor  $T$  der Zerlegung (108) 27 der 63 Factoren in sich begreift: besagt doch  $T = 0$ , dass der auf der Fläche dritter Ordnung bewegliche Projectionspunkt auf eine der 27 Geraden der Fläche gerückt ist. Aber ebenso lassen die bereits citirten Geiser'schen Entwicklungen erkennen, dass der andere Factor der Zerlegung (108), also  $\Sigma$ , 36 von den 63 Möglichkeiten umfasst. Denn wenn, dem Verschwinden von  $\Sigma$  entsprechend, die

\*) Im Galois'schen Sinne.

\*\*\*) Ich muss hier speciell auf die Arbeiten der Herren Schottky und Frobenius über die Theorie der Curven vierter Ordnung verweisen (Schottky: Abriss einer Theorie der Abel'schen Functionen von 3 Variablen (Leipzig 1880), Frobenius in den Bänden 98, 99, 103, 105 des Journals für Mathematik (1885–89)). Es ist nicht zu zweifeln, dass in diesen Arbeiten (wie schon vorher in Herrn Weber's Schrift über die Theorie der Abel'schen Functionen vom Geschlecht 3 (Berlin 1876)) zahlreiche Formeln auftreten, welche mit den von mir im Texte gegebenen Entwicklungen, insbesondere auch denjenigen, die weiter unten über die Thetanullwerthe mitgetheilt werden sollen, auf das Innigste zusammenhängen. Inzwischen scheint es, dass die expliciten Theoreme, zu denen ich in einfachster Weise komme, als solche bisher nicht bekannt gewesen sind.

Fläche dritter Ordnung, mit der wir operiren, selbst einen Doppelpunkt bekommt, so wird dabei von den 36 Schläfli'schen Doppelsechsen, welche die Fläche trägt, immer eine ausgezeichnet, und jede dieser Doppelsechsen steht zu einer der Steiner'schen „Gruppen“ von 12 Doppeltangenten der  $C_4$ , d. h. zu einem der 63 Systeme von Berührungskegelschnitten der  $C_4$ , in ausschliesslicher Beziehung. Zusammenfassend wollen wir schreiben:

$$(111) \quad 63 = (27)_T + (36)_\Sigma.$$

In demselben Sinne werden wir jetzt für die Curve sechster Ordnung zweiter Art erhalten:

$$(112) \quad 63 = (35)_T + (28)_S.$$

Es ist nämlich klar, dass die Bedingung  $T = 0$  (d. h. die Bedingung, unter der sich die acht Grundpunkte des Netzes von Flächen zweiter Ordnung zu vier und vier auf zwei Ebenen vertheilen), sofern man die Doppeltangenten der  $C_4$  und also die Grundpunkte des Netzes als einzeln bekannt ansieht, auf 35 verschiedene Weisen zu befriedigen ist ( $35 = \frac{1}{2} \cdot \frac{8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4}$ ), während die Forderung  $S = 0$  (dass zwei von den acht Grundpunkten zusammenfallen) genau entsprechend auf 28 Möglichkeiten führt ( $28 = \frac{8 \cdot 7}{1 \cdot 2}$ ).

Wir verbinden diese Resultate jetzt mit den am Schluss des vorigen Paragraphen erhaltenen Sätzen.

Den letzteren zufolge zerfallen die 28 Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung erster Art, die es giebt, sobald ein Doppelpunkt auftritt, in 12, welche adjungirt, und in 16, welche nicht adjungirt werden. Man halte jetzt ein einzelnes der 28 Systeme fest, lasse dafür aber den Doppelpunkt der Reihe nach entsprechend jeder einzelnen der 63 hierfür unterschiedenen Möglichkeiten auftreten. Dann wird  $\frac{12 \cdot 63}{28} = 27$  mal der Fall vorliegen, dass das gegebene System von Berührungscurven adjungirt verläuft,  $\frac{16 \cdot 63}{28} = 36$  mal wird es nicht adjungirt sein. Hiermit vergleiche man jetzt (111). Wir schliessen:

*Im ersteren Falle verschwindet das zum System der Berührungscurven gehörige  $T$ , im zweiten Falle  $\Sigma$ .*

Wir machen jetzt die entsprechende Abzählung für die 36 Systeme von Berührungscurven dritter Ordnung zweiter Art. Von den 63 hinsichtlich der Entstehung des Doppelpunktes zu unterscheidenden Möglichkeiten müssen für das einzelne der 36 Systeme  $\frac{20 \cdot 63}{36} = 35$  zur Folge haben, dass das System adjungirt wird,  $\frac{16 \cdot 63}{36} = 28$ , dass es nicht adjungirt wird. Der Vergleich mit (112) ergibt also:

*Das eine Mal verschwindet das zum Systeme der Berührungscurven gehörige  $T$ , das andere Mal das  $S$ .*

Wir werden diese beiden Ergebnisse jetzt so zu einem Satze zusammenfassen, dass wir die specielle Zerschneidung der Riemann'schen Fläche heranziehen, die im vorigen Paragraphen benutzt wurde. Wir haben dann:

*Erhält die Curve vierter Ordnung einen Doppelpunkt, so verschwindet für diejenigen ihr zugehörigen Raumcurven sechster Ordnung, deren im Sinne von § 20 bestimmte Charakteristik  $g_3 = 0$  aufweist,  $T$  beziehungsweise  $T$ ; für die anderen Raumcurven, deren Charakteristiken  $g_3 = 1$  enthalten, verschwindet  $\Sigma$  beziehungsweise  $S$ .*

Noch wollen wir genauer angeben, wie stark in jedem Falle der einzelne Discriminantenfactor, beziehungsweise die Discriminante selbst verschwindet. Wir wollen uns dabei auf die bekannten Verhältnisse des elliptischen Falles beziehen. Ich will letzteren in gewöhnlicher Weise durch eine zweiblättrige Riemann'sche Fläche mit vier Verzweigungspunkten vorgestellt sein lassen, von denen jetzt, dem Ansätze des § 20 entsprechend, zwei zusammenrücken mögen. Wir denken uns auf dieser Fläche das den Vorschriften des § 20 entsprechende kanonische Querschnittsystem construiert. Wir finden dann, dass in der Grenze das zugehörige  $\tau$  gleich  $i\infty$  wird, so dass  $q = e^{i\pi\tau}$  verschwindet. Nun kennen wir aber von anderer Seite (aus der Theorie der elliptischen Functionen) für das aus den Argumenten der vier Verzweigungspunkte zu bildende Differenzenproduct eine nach Potenzen von  $q$  fortschreitende Reihe, aus der wir erfahren, dass besagtes Differenzenproduct im Grenzfalle ebenso stark wie  $q$  selbst verschwindet. Wir übertragen jetzt dieses Resultat auf die vierblättrige, mit 12 Verzweigungspunkten ausgestattete Riemann'sche Fläche des § 20. Dann tritt an Stelle des  $q$  das  $q_{33}$  (110), und wir finden, dass das Differenzenproduct der Argumente der 12 Verzweigungspunkte, sobald die Curve vierter Ordnung einen Doppelpunkt erhält, wie  $q_{33}$  selber verschwindet. Jetzt erheben wir unser Differenzenproduct in's Quadrat und erhalten so einen Ausdruck, dessen wesentlicher, hier allein in Betracht zu ziehender Factor die Discriminante der Curve vierter Ordnung ist. Daher haben wir den wichtigen Satz:

*Erhält die Curve vierter Ordnung einen Doppelpunkt, so verschwindet die zugehörige Discriminante bei Zugrundelegung des in § 20 definirten Schnittsystems wie  $q_{33}^2$ .*

Dieses Resultat überträgt sich dann sofort, vermöge (108), (109) auf die einzelnen Discriminantenfactoren  $\Sigma$ ,  $T$ , bez.  $S$ ,  $T$ . Insbesondere werden  $\Sigma$  und  $S$ , wenn sie verschwinden (d. h. wenn das  $g_3$  der im Sinne von § 20 in Betracht kommenden Charakteristik gleich 1 ist) immer auch verschwinden wie  $q_{33}^2$ .

## § 22.

## Erneute Inbetrachtung der Thetafunctionen.

Wir haben jetzt alle Hülfsmittel, um bei der Curve vierter Ordnung die in § 13 aufgestellten Formeln wesentlich zu vervollständigen. Bei der Werthbestimmung der Theta sind damals die multiplicativen Constanten durchaus unbestimmt geblieben. Wir nehmen uns jetzt vor, dieselben bei der Curve vierter Ordnung jedenfalls so weit festzulegen, als sie von den Coefficienten der Curve abhängen: der numerische Bestandtheil, der dann noch zu bestimmen bleibt, wird durch Grenzübergang zu niederen Fällen zu eruiren sein. Und zwar werden wir die Frage in der Weise anfassen, dass wir geradezu das Glied niederster Dimension in der nach Potenzen der  $v_1 v_2 v_3$  (oder, was dasselbe ist, in der nach Potenzen der  $w_1 w_2 w_3$ ) fortschreitenden Reihenentwicklung der Thetafunctionen zu bestimmen suchen. Hieran reiht sich dann naturgemäss als letzte von uns zu behandelnde Aufgabe die Frage nach den Gliedern höherer Dimension dieser Entwicklung. Und hier, zum Schluss der gegenwärtigen Abhandlung, wird es von Vorthail, für den allgemeinen Fall  $p = 3$  diejenigen Functionen in die Betrachtung einzuführen, die man nach Analogie des elliptischen und des hyperelliptischen Falles als *Sigmafunctionen* bezeichnen wird.

Es handelt sich, wie man sieht, in den folgenden Paragraphen um dieselben Fragestellungen, die ich für hyperelliptische Functionen in den §§ 11 — 14 meiner Arbeit in Bd. 32 behandelt habe. Inzwischen ist der Ausgangspunkt hier und dort ein wesentlich verschiedener. Ich hatte mir damals die Aufgabe gestellt, vom algebraischen Gebilde beginnend auf synthetischem Wege zu den Sigmafunctionen und deren Reihenentwicklung zu gelangen; der Uebergang zu den  $\vartheta$  geschah erst hinterher und mehr beiläufig. Hier dagegen erscheinen die  $\vartheta$  als das von vorneherein Gegebene; es sind ganz wesentlich ihre Eigenschaften, die uns interessiren; die  $\sigma$  erscheinen nur zum Schlusse bei der Durchführung der Potenzentwicklung. Hiermit hängt zusammen, dass ich damals den Werth der bei den  $\vartheta$  auftretenden multiplicativen Constanten  $C$  kurzweg ohne Beweis angab (l. c. pag. 376, 377), während die Festlegung dieser Constanten jetzt als ein Hauptpunkt der Entwicklung erscheint, dem wir die nächsten beiden Paragraphen ausschliesslich widmen.

Was Untersuchungen anderer Mathematiker angeht, die hier in Betracht kommen, so hat Riemann bekanntlich in der schon oben genannten Nr. 25 seiner Abel'schen Functionen darauf hingewiesen, dass die Bestimmung der fraglichen Constanten auf rechnerischem Wege durch Umformung derjenigen Differentialgleichungen muss gefunden werden können, denen die  $\vartheta$  bezüglich der  $v$  und der  $\tau$  ge-

nügen. Dieser Weg ist dann für den Fall der hyperelliptischen Functionen von Hrn. Thomae wenigstens betreffs der einfachsten bei denselben in Betracht kommenden Thetafunctionen durchgeführt worden\*), und ich füge gern an, dass in seiner demnächst erscheinenden Göttinger Dissertation Hr. Schröder die analogen Betrachtungen für die höheren hyperelliptischen Theta zum Abschluss bringt. Es haben sich ferner die Herren Thomae\*\*) und Fuchs\*\*\*) mit der Aufgabe beschäftigt, bei allgemeineren algebraischen Gebilden den von Riemann geforderten Ausdruck für  $d \log \vartheta(0 \ 0 \dots 0)$  zu berechnen. Hr. Thomae hat später auch die Integration dieses Ausdrucks in Betracht gezogen†), wobei er sich eines functionentheoretischen Ansatzes bedient, der, allgemein gesagt, darauf hinauskommt, die Constanten der Riemann'schen Fläche als veränderliche Grössen zu betrachten. Letzteres ist, wie man bemerkt, derselbe Gedanke, der dem ganzen zweiten Abschnitte der gegenwärtigen Abhandlung zu Grunde liegt und der uns nun in der That bei der hier vorliegenden Frage, was den allgemeinen Fall  $p = 3$  angeht, zu einfachen Schlussresultaten leiten soll. Mein Ansatz ist dabei insofern einfacher als der von Hrn. Thomae, als ich mich überhaupt nicht mit der Differentialformel für  $d \log \vartheta(0 \ 0 \ 0)$  beschäftige, sondern die Werthbestimmung des  $\vartheta(0 \ 0 \ 0)$ , bez. der anderen, neben  $\vartheta(0 \ 0 \ 0)$  in Betracht kommenden Constanten direct in Angriff nehme (so dass also mit meinen Entwicklungen zugleich eine vereinfachte Bestimmung der betreffenden Constanten der hyperelliptischen und elliptischen Theorie gegeben ist). Aber der wesentliche Unterschied liegt in der Wahl der veränderlichen Grössen, durch die wir die einzelne Riemann'sche Fläche festlegen. Während ich nämlich als solche durchweg die Coefficienten der  $C_4$ , beziehungsweise die in § 17, 18 definirten Moduln zweiter Stufe verwende, benutzt Hr. Thomae die complexen Argumente der Verzweigungspunkte, die bei der von ihm zu Grunde gelegten Riemann'schen Fläche auftreten. An dieser Wahl geeigneter Variablen, die sich genau dem jeweils in Betracht kommenden Rationalitätsbereiche anpassen, hängt der ganze Erfolg der weiterhin zu gebenden Entwicklungen. Dabei bewährt sich wieder das Princip der homogenen Veränderlichen. Denn die Schlussformeln, um die es sich handelt, würden sich unnöthig complicirt darstellen,

\*) Journal für Mathematik, Bd. 71 (1870): Beitrag zur Bestimmung von  $\vartheta(0 \ 0 \dots 0)$  durch die Classenmoduln algebraischer Functionen.

\*\*) Journal für Math. Bd. 66 (1866): Bestimmung von  $d \log \vartheta(0, 0, \dots 0)$  durch die Classenmoduln.

\*\*\*) Journ. für Math. Bd. 73 (1871): Ueber die Form der Argumente der Thetafunctionen und über die Bestimmung von  $d \log \vartheta(0, 0, \dots 0)$  als Function der Classenmoduln.

†) Journ. für Math. Bd. 75 (1873): Beitrag zur Theorie der Abel'schen Functionen.

wenn man nicht die bei uns vorkommenden Coefficienten selbst, sondern irgendwelche aus ihnen zu bildende Quotienten als Variable zu Grunde gelegt hätte\*).

Ich will doch, ehe ich weiter gehe, das Princip der in Rede stehenden functionentheoretischen Schlussweise klar formuliren, und dies um so mehr, als ich mich weiterhin, bei den einzelnen Anwendungen, der Kürze halber gezwungen sehe, immer nur die Prämissen der einzelnen Schlüsse und dann gleich die Resultate zu geben. Man denke sich die Gesammtheit der von den 15 Coefficienten der  $C_4$  anzunehmenden Werthsysteme unter dem Bilde eines fünfzehnfach ausgedehnten Raumes. Innerhalb desselben werden die Coefficienten solcher Curven vierter Ordnung, welche einen gewöhnlichen Doppelpunkt besitzen, durch eine 14-fach ausgedehnte algebraische Mannigfaltigkeit vertreten sein: denjenigen  $C_4$  dagegen, welche höhere Singularitäten oder singuläre Punkte in höherer Zahl besitzen, werden algebraische Mannigfaltigkeiten von höchstens 13 Dimensionen entsprechen; die Zahl der verschiedenen derart in Betracht zu ziehenden Mannigfaltigkeiten ist nothwendig endlich. Alle Schlüsse über die Natur der darzustellenden Functionen werden nun gemacht, indem wir diese sämtlichen höchstens 13-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten schlechtweg bei Seite lassen, in der Weise, dass wir jedesmal solche zwei Functionen identisch setzen, von denen wir wissen, dass sie sich an sämtlichen Stellen, die jenen höchstens 13-fach ausgedehnten Mannigfaltigkeiten *nicht* angehören, gleichartig verhalten.

Es erübrigt, dass ich die speciellen Grundlagen des angewandten Verfahrens angebe. Dieselben werden zunächst von den Sätzen gebildet, die Riemann in seiner Abhandlung über das Verschwinden der Theta gab, beziehungsweise von den Folgerungen, welche Hr. Weber aus diesen Sätzen gezogen hat (in der schon oben genannten Abhandlung in Bd. 13 der mathematischen Annalen (1878): Ueber gewisse in der Theorie der Abel'schen Functionen auftretende Ausnahmefälle). Aus denselben folgt nämlich, was die Voraussetzung aller weiteren Schlüsse ist, dass bei keiner der 64 zu einer singularitätenfreien  $C_4$  gehörigen Thetafunctionen das erste Glied der nach Potenzen der  $v_1 v_2 v_3$  fortschreitenden Entwicklung identisch verschwinden kann. Hierüber hinaus aber benutzen wir *das Verhalten der  $\vartheta$  gegenüber linearer Periodentransformation*. Ich will hier die Fundamentalformel für die lineare Transformation der  $\vartheta$  in einer Form hersetzen, in der Hr. Thomae dieselbe im 75. Bande des Journals für Mathematik (l. c.)

---

\*) Hr. Thomae ist seinerseits neuerdings auf den Fall  $p = 3$  zurückgekommen (in den Sächsischen Berichten von 1887: Bemerkungen über Thetafunctionen vom Geschlecht 3).

entwickelt hat. Es sei  $p_{123}$  die unter (88) eingeführte Periodendeterminante;  $v', \tau', p'_{123}, g', h'$  seien die transformirten Werthe der  $v, \tau, p_{123}, g, h$ ;  $M$  bezeichne den Quotienten:

$$(113) \quad M = \frac{p'_{123}}{p_{123}}.$$

Dann hat man

$$(114) \quad \frac{\vartheta_{\left| \frac{g'}{h'} \right|} (v', \tau')}{\sqrt{p'_{123}}} = j_{\left| \frac{g}{h} \right|} \cdot \frac{\vartheta_{\left| \frac{g}{h} \right|} (v, \tau)}{\sqrt{p_{123}}} \cdot e^{-i\pi \left( \frac{\partial \log M}{\partial \tau_{11}} v_1^2 + \frac{\partial \log M}{\partial \tau_{12}} v_1 v_2 + \dots \right)},$$

unter  $j_{\left| \frac{g}{h} \right|}$  eine von der Charakteristik abhängige achte Einheitswurzel verstanden, deren besonderer Werth für uns nicht in Betracht kommt.

### § 23.

Das Product der Nullwerthe der 36 geraden Thetafunctionen.

Wir betrachten jetzt zunächst, wieder im Anschlusse an Thomae, Bd. 75, das durch  $p_{123}^{18}$  dividirte Product der Nullwerthe der 36 geraden Thetafunctionen, oder vielmehr, um Formel (114) bequem anwenden zu können, die achte Potenz des so definirten Ausdrucks, d. h.

$$(115) \quad \frac{\prod_1^{36} \vartheta_{\left| \frac{g}{h} \right|} (0 \ 0 \ 0)^8}{p_{123}^{144}}.$$

Nach Formel (114) ändert sich dieser Ausdruck bei linearer Transformation der Perioden überhaupt nicht, ist also eine eindeutige Function der Coefficienten von  $f$ . Die  $\vartheta(0 \ 0 \ 0)$  sind in diesen Coefficienten homogen vom nullten Grade,  $p_{123}$  ist vom Grade  $-3$ . Der Grad unseres Ausdrucks ist also  $+432$ .

Es handelt sich jetzt darum, diesen Ausdruck, wenn möglich, als rationale Function der Coefficienten von  $f$  darzustellen.

Zu dem Zwecke müssen wir uns zunächst damit beschäftigen, zu untersuchen, wie sich die 36 zu  $f$  gehörigen geraden Thetafunctionen beim Entstehen eines Doppelpunktes verhalten. Wir dehnen diese Untersuchung, da es ohne Mühe geschieht und wir das Resultat später doch brauchen, gleich mit auf die 28 ungeraden Thetafunctionen aus. Indem wir über die Formeln der linearen Periodentransformation verfügen, durch welche wir von jedem beliebigen kanonischen Querschnittsystem zu jedem anderen übergehen können, so dürfen wir bei dieser Untersuchung irgend welche bequem gewählte Zerschneidung der Riemann'schen Fläche zu Grunde legen. Als solche benutzen wir jetzt die in § 20 gegebene, vermöge deren die Argumente  $v, \tau$  der Theta-

functionen beim Eintreten des Doppelpunktes keine andere Aenderung erlitten, als dass  $\tau_{33}$  gleich  $i\infty$  wurde, so dass  $q_{33} = e^{i\pi\tau_{33}}$  verschwand. Wir verfahren hiernach einfach so, dass wir  $q_{33} = 0$  in die 64 Theta-reihen eintragen. So ergibt sich ein Resultat, dessen Uebereinstimmung mit dem in § 20 (gegen Ende des Paragraphen) für die Berührungscurven dritter Ordnung abgeleiteten auf der Hand liegt. Wir finden:

Diejenigen 32 Theta, deren  $g_3 = 0$  ist (die also adjungirten Berührungscurven dritter Ordnung entsprechen), fallen paarweise zusammen, indem sie in die 16 Thetareihen des Falles  $p = 2$  übergehen, die anderen 32 (welche den nicht adjungirten Berührungscurven dritter Ordnung correspondiren) verschwinden identisch.

Wir werden bei den 32  $\vartheta$  der letzteren Kategorie unter den Gliedern der Reihenentwicklung jetzt diejenigen herausuchen, die am schwächsten verschwinden. Es ergibt sich, dass dieselben alle den Factor  $q_{33}^{1/4}$  besitzen. Betrachten wir  $q_{33}$  als unendlich kleine Grösse, so werden wir dementsprechend in erster Annäherung setzen dürfen:

$$(116) \quad \vartheta_{\left| \begin{smallmatrix} g_1 & g_2 & 1 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{smallmatrix} \right|} (v, \tau) = q_{33}^{1/4} \cdot \bar{\vartheta}_{\left| \begin{smallmatrix} g_1 & g_2 & 1 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{smallmatrix} \right|} (v, \tau).$$

Hier ist  $\bar{\vartheta}_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|}$  ein solches Grenztheta, wie es schon in den Untersuchungen von Rosenhain auftritt und später von Clebsch und Gordan vielfach bei der Behandlung ebener Curven mit Doppelpunkt gebraucht wurde\*). Die Definition dieser  $\bar{\vartheta}_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|}$  wird durch die Reihe gegeben:

$$(117) \quad \bar{\vartheta}_{\left| \begin{smallmatrix} g_1 & g_2 & 1 \\ h_1 & h_2 & h_3 \end{smallmatrix} \right|} (v, \tau) = \sum_{-\infty}^{+\infty} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left( e^{i\pi \left( v_3 + \frac{h_2}{2} \right)} \cdot E_1 + e^{-i\pi \left( v_3 + \frac{h_2}{2} \right)} \cdot E_2 \right),$$

wo:

$$E_1 = e^{i\pi \left( \sum_1^2 \alpha \sum_1^2 \beta \left( n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2} \right) \left( n_\beta + \frac{g_\beta}{2} \right) \tau_{\alpha\beta} + \sum_1^2 \alpha \left( n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2} \right) \tau_{\alpha 3} + 2 \sum_1^2 \alpha \left( n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2} \right) \left( v_\alpha + \frac{h_\alpha}{2} \right) \right)},$$

$$E_2 = e^{i\pi \left( \sum_1^2 \alpha \sum_1^2 \beta \left( n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2} \right) \left( n_\beta + \frac{g_\beta}{2} \right) \tau_{\alpha\beta} - \sum_1^2 \alpha \left( n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2} \right) \tau_{\alpha 3} + 2 \sum_1^2 \alpha \left( n_\alpha + \frac{g_\alpha}{2} \right) \left( v_\alpha + \frac{h_\alpha}{2} \right) \right)};$$

ich theile dieselbe hier mit, damit man sich überzeugt, was wir später brauchen werden, dass die  $\bar{\vartheta}$  ebenso wie die  $\vartheta$  ganze Functionen der  $v_1 v_2 v_3$  sind.

Wir kehren jetzt zu den Nullwerthen der geraden Theta zurück. Bezüglich derselben werden wir sofort sagen:

\*) Abel'sche Functionen, p. 270 ff. (das Capitel vom „erweiterten“ Umkehrproblem), Clebsch-Lindemann, Vorlesungen über Geometrie, Bd. I, pag. 867 ff.

Sobald die  $C_4$  einen Doppelpunkt erhält, werden von den 36 geraden Thetanullwerthen 16 Null wie  $q_{33}^{1/2}$ , die übrigen 20 bleiben von Null verschieden.

Nun wird, sofern wir an dem besonderen in § 20 eingeführten Querschnittsystem festhalten, die Periodendeterminante  $p_{123}$  von dem Entstehen eines Doppelpunktes überhaupt nicht in Mitleidenschaft gezogen. Wir haben daher:

*Unser Product (115) verschwindet beim Entstehen eines Doppelpunktes wie  $q_{33}^{32}$ .*

Jetzt ziehen wir den Satz heran, den wir gegen Schluss des § 22 der Riemann'schen Abhandlung über das Verschwinden der Thetafunctionen entnahmen. Derselbe besagt für die hier in Betracht kommenden Thetanullwerthe, dass keiner derselben verschwinden kann, so lange die Curve vierter Ordnung keinen Doppelpunkt (oder höheren singulären Punkt) bekommt. Das Gleiche wird also auch für unser Product (115) gelten.

Hiermit haben wir aber, bei unserem Producte, lauter Eigenschaften, welche gleicherweise der 16<sup>ten</sup> Potenz der Curvendiscriminante zukommen. In der That, die 16<sup>te</sup> Potenz der Discriminante ist in den Coefficienten von  $f$  vom Grade 432, sie verschwindet (nach § 21) beim Entstehen eines Doppelpunktes wie  $q_{33}^{32}$ , sie wird gewiss nicht Null, so lange kein Doppelpunkt vorliegt. Und nun tritt die Schlussweise, von der wir im vorigen Paragraphen handelten, in ihr Recht.

Wir schliessen, dass unser Product bis auf einen constanten Factor mit der 16<sup>ten</sup> Potenz der Discriminante übereinstimmt. Wir wollen hier noch beiderseits die achte Wurzel ziehen. Dann haben wir, unter  $c$  eine numerische Constante verstanden:

$$(118) \quad \prod_1^{36} \vartheta_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|} (0 \ 0 \ 0) : p_{123}^{18} = c \cdot \text{Discr.}^2$$

Die Fragestellung, von der wir zu Anfang dieses Paragraphen ausgingen, ist damit vollständig beantwortet. Nebenbei folgt, dass das Product der 36 in (114) definirten, auf gerade Charakteristiken  $\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  bezüglichen achten Einheitswurzeln  $j_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|}$  allemal der Einheit gleich ist\*).

\*) Formel (118) dehnt sich mit Leichtigkeit auf  $p = 4$  aus. Die Normalcurve der  $\varphi$  ist bei  $p = 4$  im dreidimensionalen Raume als Durchschnitt einer  $F_2$  und einer  $F_3$  gegeben. Nun sei  $\Delta$  die Determinante der  $F_2$ ,  $T$  die Tactinvariante von  $F_2$  und  $F_3$ . Dann kommt für das Product der Nullwerthe der zugehörigen 136 geraden Thetafunctionen:

$$\prod_1^{136} \vartheta_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|} (0 \ 0 \ 0 \ 0) : p_{1234}^{68} = c \cdot \Delta^2 \cdot T^8.$$

## § 24.

Das Anfangsglied in der Reihenentwicklung des einzelnen  $\vartheta$ .

Wir haben das Product des vorigen Paragraphen vorab betrachtet, weil bei ihm die Schlussweise, auf die es ankommt, innerhalb des Rationalitätsbereiches erster Stufe zur Geltung gelangt. Indem wir uns jetzt dazu wenden, durch entsprechende Betrachtungen das Anfangsglied in der Reihenentwicklung der einzelnen  $\vartheta$ . festzulegen, haben wir uns je in einem derjenigen Rationalitätsbereiche zweiter Stufe zu bewegen, die in § 17, 18 eingeführt wurden. Uebrigens sind die hier zu ziehenden Schlüsse durch die Entwicklungen des § 21 auf das Beste vorbereitet.

Beginnen wir mit dem geraden Theta. Bei ihnen wird es sich um die algebraische Bestimmung des einzelnen

$$\vartheta_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|} (0 \ 0 \ 0) : \sqrt[3]{p_{123}}$$

handeln. Nach Formel (114) ist die achte Potenz dieser Grösse innerhalb desjenigen Rationalitätsbereiches zweiter Stufe, der die gerade

Charakteristik  $\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  trägt, eindeutig. Dabei ist sie (wegen des  $p_{123}$ )

von der 12<sup>ten</sup> Dimension in den Coefficienten von  $f$ . Und wie ist es mit ihrem Verschwinden? Sie verschwindet, dem Riemann'schen Satze zufolge, gewiss nicht, so lange die Curve vierter Ordnung keinen Doppelpunkt besitzt; erhält aber die  $C_4$  einen solchen, so verschwindet sie dann und nur dann, wenn ihre auf das Querschnittssystem des § 20 bezogene Charakteristik  $g_3 = 1$  aufweist; sie verschwindet in einem solchen Falle wie das Quadrat des zugehörigen  $q_{33}$ . Alle diese Eigenschaften kommen aber genau so dem in Formel (109) auftretenden

Discriminantenfactor  $S_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|}$  zu [wir setzen demselben hier, um uns

völlig genau ausdrücken zu können, die Charakteristik  $\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|$  als Index

hinzu]. Wir schliessen also, dass, unter  $c'$  eine geeignete numerische Constante verstanden, die folgende Formel statt hat:

$$(119) \quad \vartheta_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|} (0 \ 0 \ 0) : \sqrt[3]{p_{123}} = c' \sqrt[3]{S_{\left| \begin{smallmatrix} g \\ h \end{smallmatrix} \right|}}.$$

Hiermit ist der Fall der geraden  $\vartheta$  erledigt.

Wenden wir uns jetzt zu den ungeraden  $\vartheta$ . Um keine Lücke zu lassen, will ich zunächst aus (84) die allgemeine Form des ersten Gliedes ihrer Reihenentwicklung ableiten. Wir wollen dabei zwecks

besseren Anschlusses an die jetzt gebrauchte Bezeichnung das dort vorkommende  $\varphi_{\left|\frac{g}{h}\right|}$  durch  $D_{\left|\frac{g}{h}\right|}$  ersetzen, sodass wir die Formel haben:

$$\vartheta_{\left|\frac{g}{h}\right|} \left( \int_y^x \right) = C \cdot \sqrt{D_{\left|\frac{g}{h}\right|}(x) \cdot D_{\left|\frac{g}{h}\right|}(y)} \cdot \Omega(x, y).$$

Hier schreibe man jetzt  $x = y + dy$ . Dann entsteht rechter Seite, indem wir die unendlich kleinen Glieder höherer Ordnung weglassen:

$$C \cdot D_{\left|\frac{g}{h}\right|}(y) \cdot d\omega_y.$$

Aber die Integrale  $w_1, w_2, w_3$  sind unter gleicher Voraussetzung:

$$w_1 = y_1 d\omega_y, \quad w_2 = y_2 d\omega_y, \quad w_3 = y_3 d\omega_y.$$

Der Anfangsterm in der Reihenentwicklung des  $\vartheta$  nach Potenzen der  $w$  wird also, wie anderweitig bekannt (ich lasse jetzt der Kürze halber die Charakteristik  $\left|\frac{g}{h}\right|$  in den Formeln weg):

$$C \cdot D(w) = C(D_1 w_1 + D_2 w_2 + D_3 w_3).$$

Dies ist die gesuchte allgemeine Form. Unsere Aufgabe ist damit darauf zurückgeführt, die hier vorkommende Constante  $C$  festzulegen. Wir erhalten eine explicite Definition derselben, indem wir die Taylor'sche Entwicklung unserer Thetafunction heranziehen. In der That wird vermöge derselben:

$$(120) \quad C = \frac{\left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v_1}\right)_{000} \cdot v_1 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v_2}\right)_{000} \cdot v_2 + \left(\frac{\partial \vartheta}{\partial v_3}\right)_{000} \cdot v_3}{D_1 w_1 + D_2 w_2 + D_3 w_3}.$$

Dieses  $C$  unterwerfen wir nun einer ganz ähnlichen Betrachtung, wie vorhin den Nullwerth des geraden  $\vartheta$ . Wir bilden uns (ich füge jetzt die Charakteristik  $\left|\frac{g}{h}\right|$  wieder zu) den Quotienten

$$C_{\left|\frac{g}{h}\right|} : \sqrt{p_{123}}$$

und bemerken, dass dessen achte Potenz vermöge (114) in dem zur ungeraden Charakteristik  $\left|\frac{g}{h}\right|$  gehörigen Rationalitätsbereiche des § 17 eindeutig ist. Wir untersuchen seine Dimension in den Coefficienten der zugehörigen  $D, \Phi, \Omega$  und betrachten die Fälle, in denen er verschwindet. Solcher Weise kommt dann als Gegenstück zu Formel (119):

$$(121) \quad C_{\left|\frac{g}{h}\right|} : \sqrt{p_{123}} = c'' \sqrt[3]{\Sigma_{\left|\frac{g}{h}\right|}},$$

unter  $c''$  eine geeignete numerische Constante, unter  $\Sigma$  den in (105), (108) betrachteten Discriminantenfactor verstanden.

## § 25.

## Von den Functionen Th.

Ehe wir jetzt die höheren Glieder der uns interessirenden Reihenentwickelungen der  $\vartheta$  aufsuchen, werden wir statt der  $\vartheta$ , indem wir dieselben mit einem geeigneten Exponentialfactor versehen, andere Functionen einführen, die von den Coefficienten der  $C_4$  in einfacherer Weise abhängen. Es sind dies dieselben Functionen, welche Hr. Wiltheiss mit dem Buchstaben Th zu bezeichnen pflegt\*), Functionen, welche zwischen den  $\vartheta$  und den weiter unten einzuführenden  $\sigma$  in der Mitte stehen. Wir schreiben:

$$(122) \quad \text{Th}_{\left| \frac{g}{h} \right|} (w_1 w_2 w_3, \omega_{ik}) = \frac{\vartheta_{\left| \frac{g}{h} \right|} (v, \tau)}{\sqrt{p_{123}}} \cdot e^{\sum \alpha_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta}$$

und legen den hier rechter Seite auftretenden Exponentialfactor durch dieselbe Forderung fest, von welcher ich im Falle  $p = 2$  in meiner ersten Arbeit über hyperelliptische Sigmafunctionen (Math. Ann. Bd. 27, 1886) ausgegangen bin. Wir verlangen nämlich, dass in der Reihenentwickelung des Productes der geraden Th nach Potenzen der  $w_1 w_2 w_3$ , bez. der  $v_1 v_2 v_3$ , das Glied zweiter Dimension identisch ausfallen soll. Dies bewirkt dann (vergl. § 2 der genannten Arbeit), dass sich die Th bei linearer Periodentransformation von etwa zutretenden achten Einheitswurzeln abgesehen glatt permutiren, so dass an Stelle von (114) die einfache Formel tritt:

$$(123) \quad \text{Th}_{\left| \frac{g'}{h'} \right|} (w_1 w_2 w_3, \omega'_{ik}) = j_{\left| \frac{g'}{h'} \right|} \cdot \text{Th}_{\left| \frac{g}{h} \right|} (w_1 w_2 w_3, \omega_{ik}).$$

Für den in (122) auftretenden Exponentialfactor finden wir vermöge des Taylor'schen Theorems:

$$(124) \quad \sum \alpha_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta = -\frac{1}{72} \left( \sum_1^{36} \frac{\vartheta_{11}}{\vartheta} \cdot v_1^2 + 2 \sum_1^{36} \frac{\vartheta_{12}}{\vartheta} \cdot v_1 v_2 + \dots \right).$$

Hier soll der Buchstabe  $\vartheta$  rechter Hand den Nullwerth des einzelnen geraden Theta,  $\vartheta_{\alpha\beta}$  den Nullwerth des nach  $v_\alpha^2, v_\beta$  genommenen zweiten Differentialquotienten desselben Theta bedeuten; die Summation geht über sämtliche gerade Theta. Ich habe in § 5 der genannten Abhandlung über hyperelliptische Sigmafunctionen den entsprechenden Ausdruck für  $p = 2$  in charakteristischer Weise umgerechnet, indem ich die Discriminante des hyperelliptischen Gebildes in denselben einführte. Genau so können wir hier verfahren, sofern wir Formel (118) zu Grunde legen. Indem wir die Riemann'schen Differentialgleichungen heranziehen:

\*) Vergl. z. B. Hrn. Wiltheiss' Untersuchungen über hyperelliptische Functionen in den Bänden 29, 31, 33 der mathemat. Annalen.

$$4i\pi \frac{\partial \vartheta(v, \tau)}{\partial \tau_{11}} = \frac{\partial^2 \vartheta(v, \tau)}{\partial v_1^2}, \quad 2i\pi \frac{\partial \vartheta(v, \tau)}{\partial \tau_{12}} = \frac{\partial^2 \vartheta(v, \tau)}{\partial v_1 \partial v_2}, \quad \dots$$

erhalten wir aus (124) zunächst:

$$\sum a_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta = -\frac{i\pi}{18} \left( \sum_1^{36} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{11}} \cdot v_1^2 + \sum_1^{36} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{12}} \cdot v_1 v_2 + \dots \right).$$

Hier werden wir jetzt

$$\sum_1^{36} \frac{\partial \vartheta}{\partial \tau_{ik}}$$

durch

$$\frac{\partial \log \prod_1^{36} (\vartheta)}{\partial \tau_{ik}}$$

ersetzen und dann für das Product der Thetanullwerthe dessen Werth aus (118) einführen. Solcherweise kommt

$$(125) \quad \sum a_{\alpha\beta} v_\alpha v_\beta = \\ = -\frac{i\pi}{9} \left( \frac{\partial \log (p_{123}^9 \text{ Discr.})}{\partial \tau_{11}} \cdot v_1^2 + \frac{\partial \log (p_{123}^9 \text{ Discr.})}{\partial \tau_{12}} \cdot v_1 v_2 + \dots \right).$$

Wir könnten diesen Ausdruck vermöge der zwischen den verschiedenen dreigliedrigen Periodendeterminanten  $p_{ikl}$  bestehenden Relationen noch symmetrischer gestalten (vergl. immer die Entwicklungen in Bd. 27), doch mag es hier bei Formel (125) sein Bewenden haben.

Um die Fundamenteigenschaft der durch (122), (125) definirten Th, die durch (123) ausgedrückt wird, von der Grundformel (114) der linearen Transformation der Theta aus zu verificiren, hat man nur zu beachten, dass bei beliebiger linearer Transformation jedesmal

$$\frac{\partial}{\partial \tau'_{11}} \cdot v_1'^2 + \frac{\partial}{\partial \tau'_{12}} \cdot v_1' v_2' + \dots = \frac{\partial}{\partial \tau_{11}} \cdot v_1^2 + \frac{\partial}{\partial \tau_{12}} \cdot v_1 v_2 + \dots$$

wird (so dass man also den Operator

$$\frac{\partial}{\partial \tau_{11}} \cdot v_1^2 + \frac{\partial}{\partial \tau_{12}} \cdot v_1 v_2 + \dots$$

als eine Invariante der linearen Transformation bezeichnen könnte). Wir erkennen daraus, dass es noch unendlich viele andere Functionen giebt, die sich bei linearer Periodentransformation wie die Th nach Formel (123) umsetzen. Sei nämlich  $J$  irgend eine rationale (und also bei linearer Periodentransformation unveränderliche) Invariante unserer  $C_4$ ; ihr Grad in den Coefficienten sei  $\nu$ . Wir schreiben dann in (125) für das Product  $(p_{123}^9 \cdot \text{Discr.})$  allgemeiner  $(p_{123}^{\nu/3} \cdot J)$ , für  $\frac{i\pi}{9}$   $\frac{3i\pi}{\nu}$ .

Die dementsprechend aus (122) hervorgehenden Functionen

$$(126) \quad \frac{\vartheta \left| \frac{g}{h} \right| (v, \tau)}{\sqrt{p_{123}}} e^{-\frac{3i\pi}{v} \left( \frac{\partial \log(p_{123}^{v/3} J)}{\partial \tau_{11}} \cdot v_1^2 + \frac{\partial \log(p_{123}^{v/3} J)}{\partial \tau_{12}} \cdot v_1 v_2 + \dots \right)}$$

werden immer die Eigenschaft haben, sich bei linearer Periodentransformation der Formel (123) entsprechend zu verhalten.

Es ist wesentlich zu bemerken, wodurch sich unter den so gewonnenen Functionen (126) unsere durch (125) festgelegten Th insbesondere auszeichnen. Es liegt dies darin, dass sie, gleich den ursprünglichen  $\vartheta$ , bei allen Ausartungen der  $C_4$  endlich bleiben. Im allgemeinen wird die durch (126) eingeführte Function unendlich werden, sobald die Invariante  $J$  verschwindet. Unser Th dagegen bleibt endlich, auch wenn die Discriminante der Curve vierter Ordnung zu Null wird. Wir brauchen, um dies zu sehen, nur von (125) zu (124) zurückzugehen. Erhält die Curve vierter Ordnung einen Doppelpunkt, so bleiben nach den früheren Entwicklungen alle  $\vartheta \left| \frac{g}{h} \right| (v, \tau)$  von Null verschieden,

deren  $g_3$  gleich Null ist, die anderen verschwinden wie  $q_{33}^{1/4} \cdot \bar{\vartheta} \left| \frac{g}{h} \right| (v, \tau)$ .

Hierbei bleiben, wie man sieht, die sämtlichen in (124) auftretenden Quotienten  $\frac{\vartheta_{\alpha\beta}}{\vartheta}$  endlich. Wir haben bei dieser Ueberlegung allerdings die specielle Zerschneidung des § 20 zu Grunde gelegt. Allein Formel (123) belehrt uns darüber, dass das Resultat von der besonderen Art der zu Grunde gelegten Zerschneidung unabhängig ist.

## § 26.

### Excurs über Integrale dritter Gattung.

Aus Formel (126) werden wir jetzt eine Folgerung für die Theorie der Integrale dritter Gattung ziehen. Wir bemerkten bereits oben, in § 14, dass man jeder allgemeinen Thetafunction

$$\Theta = C \cdot e^{\sum a_{\alpha\beta} v_{\alpha} v_{\beta}} \cdot \vartheta(v, \tau)$$

genau so ein Integral dritter Gattung entsprechend setzen kann, wie dem  $\vartheta$  selbst das  $\Pi$ ; die Definition dieses Integrals dritter Gattung war in der Formel enthalten

$$\Pi_{\xi\eta}^{xy} = 2 \sum a_{\alpha\beta} v_{\alpha}^{xy} v_{\beta}^{\xi\eta}.$$

Wir schliessen, indem wir (126) herannehmen:

Jedes Integral dritter Gattung der folgenden Form:

$$(127) P_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{\xi\eta}^{xy} + \frac{3i\pi}{\nu} \left( 2 \frac{\partial \log \left( p_{123}^{\frac{\nu}{3}} J \right)}{\partial \tau_{11}} \cdot v_1^{xy} v_1^{\xi\eta} \right. \\ \left. + \frac{\partial \log \left( p_{123}^{\frac{\nu}{3}} J \right)}{\partial \tau_{12}} (v_1^{xy} v_2^{\xi\eta} + v_1^{\xi\eta} v_2^{xy}) + \dots \right)$$

hat die Eigenschaft, bei linearer Periodentransformation völlig ungeändert zu bleiben, also von den Coefficienten der  $C_4$  eindeutig abzuhängen.

Wir denken uns jetzt dieses  $P$  nach Formel (61) des § 9 an der Curve vierter Ordnung als Doppelintegral hinerstreckt:

$$(128) P_{\xi\eta}^{xy} = \int_y^x \int_{\eta}^{\xi} d\omega_z \cdot d\omega_{\zeta} \cdot \frac{\Psi(z, \zeta; \alpha\beta)}{(\alpha_z \beta_{\zeta} - \beta_z \alpha_{\zeta})^2}.$$

Hier wird  $\Psi$  (weil  $P$  in den Coefficienten der  $C_4$  vom nullten Grade ist) selbst in den Coefficienten vom zweiten Grade sein. Es ist ferner klar, dass  $\Psi$  eine Covariante von  $f$  sein muss: denn  $P$  ist aus lauter Bestandtheilen aufgebaut, welche sich bei projectiven Umformungen der  $C_4$  nicht ändern. Wir ziehen endlich die in § 22 besprochene Schlussweise heran, und erfahren durch sie, dass  $\Psi$  nicht nur eindeutig, sondern *rational* von den Coefficienten von  $f$  abhängen muss.

Wir werden jetzt (um zu unseren Th zurückzukehren) das  $J$  in (127) insbesondere durch die Curvendiscriminante ersetzen. Dann belehren uns die Schlussbemerkungen des § 25 darüber, dass wir es mit einem Integral dritter Gattung zu thun haben, welches als Function der Curvencoefficienten überall endlich ist. Das im Sinne von (128) zugehörige  $\Psi$  muss also neben den sonstigen bereits angegebenen Eigenschaften auch noch die besitzen, eine *ganze* Function der Curvencoefficienten zu sein. *Hiermit ist nun, was die Curven vierter Ordnung angeht, der in § 10 nur erst in Aussicht genommene volle Anschluss an die von Herrn Pick für singularitätenfreie ebene Curven gegebene Normalform  $Q$  der Integrale dritter Gattung (§ 6) erreicht.* In der That war das Pick'sche  $Q$  gegenüber der allgemeinen in (128) enthaltenen Definition des  $P$  dadurch specialisirt, das wir für  $\Psi$  die unter (52) angegebene *rationale, ganze Covariante* eingeführt hatten:

$$(129) \Psi = \frac{\sum_1^n (\alpha\alpha\beta) a_z^{\nu-1} a_{\zeta}^{n-\nu} \cdot (\alpha\alpha\beta) a_z^{n-\nu} a_{\zeta}^{\nu-1} - \sum_1^{n-1} (\alpha\alpha\beta)^2 a_z^{\nu-1} a_{\zeta}^{n-\nu-1} \cdot a_z^{n-\nu} a_{\zeta}^{\nu}}{n};$$

es gab keine andere rationale, ganze Covariante, als die hiermit hingeschriebene, welche den sonst an  $\Psi$  zu stellenden Forderungen genügte. Wir haben also:

Zwecks Definition der Th sind die unter (81), (82) in § 13 für die  $\vartheta$  aufgestellten Formeln in der Weise zu modificiren, dass man in sie an Stelle des transcendent normirten Integrals dritter Gattung  $\Pi$  das Pick'sche  $Q$  einführt, so wie andererseits:

Von transcendenten Seite lässt sich das Integral  $Q$  durch die Formel definiren:

$$(130) \quad Q_{\xi\eta}^{xy} = \Pi_{\xi\eta}^{xy} + \frac{i\pi}{9} \left( 2 \frac{\partial \log (p_{123}^9 \text{ Discr})}{\partial \tau_{11}} \cdot v_1^{xy} v_1^{\xi\eta} + \frac{\partial \log (p_{123}^9 \text{ Discr})}{\partial \tau_{12}} (v_1^{xy} v_2^{\xi\eta} + v_2^{xy} v_1^{\xi\eta}) + \dots \right).$$

Uebrigens gilt letztere Formel, wie man leicht sieht, nicht nur für unsere Curven vierter Ordnung sondern mit geeigneter Modification überhaupt für singularitätenfreie ebene Curven  $n^{\text{ter}}$  Ordnung. Hiermit ist die Pick'sche Entwicklung in einem wesentlichen Punkte ergänzt. Bei Herrn Pick wird nämlich der unter (129) angegebene Ausdruck nur empirisch construirt: es wird gezeigt, dass er thatsächlich den sämtlichen an ihn zu stellenden Anforderungen genügt, es wird aber nicht a priori entwickelt, dass es einen derartigen Ausdruck geben *muss* (dass die zahlreichen an den Ausdruck zu stellenden Anforderungen überhaupt verträglich sind). Hier nun greift Formel (130) ergänzend ein. Indem wir dieselbe als Definition des  $Q$  betrachten, sind wir der *Existenz* des bei Herrn Pick gesuchten Ausdrucks von vornherein sicher.

Den vorstehenden Entwicklungen laufen andere parallel, die sich auf die hyperelliptischen Gebilde beziehen und vermöge deren wir bei ihnen von den  $\vartheta$ , bez. den Th aus zu dem von algebraischer Seite bekannten Normalintegrale  $Q$  kommen. Hierdurch findet dann die bez. Darstellung in Bd. 27 und 32 der Math. Annalen ihre Ergänzung. Ich verfolge das hier nicht weiter.

## § 27.

Die höheren Glieder in der Reihenentwicklung der  $\vartheta$ .

Die Sigmafunctionen.

Durch Formel (122) sind die  $\vartheta$  mit den Th in so einfacher Weise verknüpft, dass wir die nach Potenzen der  $v$ , resp. der  $w$  fortschreitenden Reihenentwicklungen der  $\vartheta$  als bekannt ansehen dürfen, sobald wir die Reihenentwicklungen der Th beherrschen: letztere aber werden, wie wir dies schon in Aussicht stellten, leichter aufzustellen sein, als die Entwicklungen der  $\vartheta$  selbst, weil sich die Th gegenüber linearer Periodentransformation einfacher verhalten als die  $\vartheta$  und also

von den Coefficienten der  $C_4$  ihrem Wesen nach einfacher abhängen als diese. Aber die Th selbst lassen sich in diesem Betracht noch durch einfachere Functionen ersetzen. Wir haben die Sätze, die wir in § 23 über das Verschwinden der  $\vartheta$  beim Entstehen eines Doppelpunktes aufgestellt haben, bis jetzt nur erst dahin ausgenutzt, dass wir vermöge derselben die Anfangsglieder in den Reihenentwickelungen der  $\vartheta$  festlegten. Aber sie liefern nicht minder einen Beitrag zur Kenntniss der höheren Glieder. Wenn nämlich bei entstehendem Doppelpunkte das Anfangsglied der Entwickelung einer Thetafunction verschwindet, so verschwindet nach den genannten Sätzen die zugehörige Thetafunction überhaupt, und zwar in demselben Grade, wie das Anfangsglied. *Wir schliessen, dass sämtliche Glieder der Reihenentwickelung der geraden  $\vartheta$  durch  $\sqrt[8]{S}$ , sämtliche Glieder der Reihenentwickelung der ungeraden  $\vartheta$  durch  $\sqrt[8]{\Sigma}$  theilbar sein müssen.* Von den  $\vartheta$  überträgt sich dieser Satz sofort auf die Th. *Statt der Th wollen wir also lieber diejenigen Functionen auf ihre Reihenentwickelung untersuchen, die sich aus den Th durch Division mit  $\sqrt[8]{S}$ , bez.  $\sqrt[8]{\Sigma}$  ergeben.*

Die neuen so entstehenden Functionen, deren Reihenentwickelungen wir jetzt des Näheren untersuchen werden, sind die *Sigmafunctionen*. In der That stimmen dieselben durchaus mit den im elliptischen und im hyperelliptischen Falle so benannten Functionen überein, sofern wir die Definition im Einzelnen noch so präcisiren, dass wir die numerischen Constanten  $\backslash c', c''$  eliminiren, welche in den Formeln (119), (120) auftreten. *Ich setze dementsprechend*

*bei gerader Charakteristik:*

$$(131) \quad \sigma_{\left| \frac{g}{h} \right|} (w_1 w_2 w_3) = \text{Th}_{\left| \frac{g}{h} \right|} (w) : c' \sqrt[8]{S_{\left| \frac{g}{h} \right|}},$$

*bei ungerader Charakteristik:*

$$(132) \quad \sigma_{\left| \frac{g}{h} \right|} (w_1 w_2 w_3) = \text{Th}_{\left| \frac{g}{h} \right|} (w) : c'' \sqrt[8]{\Sigma_{\left| \frac{g}{h} \right|}}.$$

Wir betrachten zunächst einen Augenblick die ersten Glieder in den Entwickelungen der  $\sigma$ . Nach (119) beginnt die Entwickelung des geraden  $\sigma$  mit 1, nach (120) die des ungeraden  $\sigma$  mit

$$D_1 w_1 + D_2 w_2 + D_3 w_3.$$

Wir schliessen daraus, dass sich die unter (123) für die Th aufgestellten Formeln der linearen Periodentransformation noch einmal vereinfachen, sobald wir von den Th zu den  $\sigma$  gehen. In der That ist aus den mitgetheilten Anfangsgliedern ersichtlich, dass beim Vergleich zweier Sigmafunctionen achte Einheitswurzeln unmöglich auftreten können. *Die Formeln der linearen Transformation heissen einfach:*

$$(133) \quad \sigma_{\left| \frac{g'}{h'} \right|} (w_1 w_2 w_3) = \sigma_{\left| \frac{g}{h} \right|} (w_1 w_2 w_3);$$

die  $\sigma$  permutiren sich also bei linearer Periodentransformation ohne irgend welche zutretende Factoren.

Aus dem hiermit gewonnenen Satze erkennen wir eine wesentliche Eigenschaft der nach Potenzen der  $w_1 w_2 w_3$  fortschreitenden Entwicklungen der  $\sigma$ . Es folgt nämlich, dass die Coefficienten sämtlicher in diesen Entwicklungen auftretenden Glieder jeweils innerhalb des durch die Charakteristik  $\left| \frac{g}{h} \right|$  festgelegten Rationalitätsbereichs *eindeutig* sein müssen. Die Coefficienten in der Entwicklung des einzelnen geraden  $\sigma$  sind also eindeutige Functionen der zugehörigen Moduln  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$  des § 18, die Coefficienten in der Entwicklung des einzelnen ungeraden  $\sigma$  eindeutige Functionen der bei den zugehörigen  $D, \Omega, \Phi$  des § 17 auftretenden Constanten. Aus den eindeutigen Functionen werden *ganze* Functionen, sobald wir berücksichtigen, dass die  $\Theta$  und also die  $\sigma$  als Functionen der Curvencoefficienten niemals unendlich werden. Endlich erweisen sich bei Fortsetzung der functionentheoretischen Betrachtung die eindeutigen Functionen als *rationale* Functionen.

Hiermit haben wir nun für unsere neuen Sigmafunctionen alle die grundlegenden Sätze, welche *mutatis mutandis* für die elliptischen und hyperelliptischen Sigmafunctionen bekannt sind. Ich führe noch an, wie sich diese Sätze ausgestalten, sofern man die Dimension der einzelnen in Betracht kommenden Terme in den verschiedenen Arten homogener Variabeln, die Invarianteneigenschaft dieser Terme etc. berücksichtigt.

Wir betrachten zunächst die *geraden*  $\sigma$  und erhalten das Folgende:

1) Die äussere Gestalt der Reihenentwicklung ist jedenfalls diese:

$$(134) \quad \sigma(w_1 w_2 w_3) = 1 + [w]_2 + [w_4] + \dots;$$

unter  $[w]_{2\nu}$  verstehen wir dabei das Aggregat sämtlicher Glieder, welche die  $w_1 w_2 w_3$  in der  $2\nu^{\text{ten}}$  Potenz enthalten.

2) Wir wissen bereits, dass diese Glieder rationale ganze Functionen der Moduln  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$  des zugehörigen Rationalitätsbereiches zweiter Stufe sind. Da die  $w$  vermöge (100) in den  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$  zusammengenommen von der  $(-4)^{\text{ten}}$  Dimension sind, werden die Coefficienten von  $[w]_{2\nu}$  die Gesamtdimension  $8\nu$  aufweisen müssen.

3) Bei linearer Coordinatentransformation verhalten sich die  $w_1 w_2 w_3$  den  $x_1 x_2 x_3$  *cogredient*, die einzelne  $\sigma$ -Function aber bleibt durchaus *ungeändert*. Wir schliessen, dass  $[w]_{2\nu}$  eine dem Rationalitätsbereiche der  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$  angehörige Covariante von  $f$  ist, deren Variabeln  $x_1 x_2 x_3$  man durch  $w_1 w_2 w_3$  ersetzt hat.

4) Indem wir auf § 18 zurückgreifen, werden wir uns zusammenfassend folgendermassen ausdrücken können:

$[w]_{2\nu}$  ist eine rationale ganze Covariante der gemischt ternär-quaternären Form:

$$w_1 \cdot \sum \alpha_{ik} z_i z_k + w_2 \cdot \sum \beta_{ik} z_i z_k + w_3 \cdot \sum \gamma_{ik} z_i z_k,$$

welche in den  $w_1 w_2 w_3$  den Grad  $2\nu$ , in den  $\alpha_{ik}, \beta_{ik}, \gamma_{ik}$  zusammengenommen den Grad  $8\nu$ , in den  $z_1 z_2 z_3 z_4$  den Grad Null besitzt.

Wir betrachten ferner die ungeraden  $\sigma$ , deren Reihenentwicklung wir durch die Formel andeuten

$$(135) \quad \sigma(w_1 w_2 w_3) = (D_1 w_1 + D_2 w_2 + D_3 w_3) + [w]_3 + [w]_5 + \dots$$

Hier sind die  $[w]_{2\nu+1}$  Aggregate rationaler ganzer Covarianten der drei zur ungeraden Charakteristik gehörigen ternären Formen  $D, \Omega, \Phi$ , in denen man die Coordinaten  $x_1 x_2 x_3$  durch  $w_1 w_2 w_3$  ersetzt hat. Multiplicirt man die Coefficienten von  $D, \Omega, \Phi$  mit einem gemeinsamen Factor  $\lambda$ , so erhält  $f$  den Factor  $\lambda^2$ , die  $w$  werden also in  $\frac{w}{\lambda^2}$  verwandelt. Mit Rücksicht auf das Anfangsglied unserer Reihenentwicklung schliessen wir hieraus, dass  $[w]_{2\nu+1}$  die Coefficienten von  $D, \Omega, \Phi$  zusammen homogen im Grade  $4\nu + 1$  enthalten muss. Andererseits ersetze man  $D, \Omega, \Phi$  beziehungsweise durch  $\lambda D, \Omega, \frac{\Phi}{\lambda}$ , wobei  $f$  und also die  $w$  ungeändert bleiben. Hierbei wird jedes  $[w]_{2\nu+1}$ , wie man wieder aus dem Anfangsgliede sieht, den Factor  $\lambda$  erhalten müssen\*). Der Term  $[w]_{2\nu+1}$  wird sich daher im Sinne der in § 19 gebrauchten Bezeichnung folgendermassen als Aggregat einzelner Glieder darstellen lassen, deren jedes in den Coefficienten von  $D$ , wie von  $\Omega$  und von  $\Phi$  homogen ist:

$$(136) \quad [w]_{2\nu+1} = \sum_{i=1}^{i=2\nu+1} \binom{i \quad 4\nu+2-2i \quad i-1 \quad 2\nu+1}{D, \quad \Omega, \quad \Phi; \quad w}.$$

Wir können endlich von diesem Aggregate noch aussagen, dass es bei denjenigen Operationen (94), die  $\lambda = 1$  entsprechen, d. h. den Substitutionen

$$\begin{aligned} D' &= D, \\ \Omega' &= \Omega + u_x \cdot D, \\ \Phi' &= \Phi + 2u_x \cdot \Omega + u_x^2 \cdot D, \end{aligned}$$

ungeändert bleiben muss.

---

\*) In der That ist  $\sigma$  und also auch das einzelne  $[w]_{2\nu+1}$  in dem genauen, oben festgehaltenen Sinne des Wortes, gar keine Function der Coefficienten von  $f$ ; erst  $\text{Th} = \sqrt[8]{\sum \sigma}$  ist eine solche Function. Vgl. die in § 19 an Formel (108) geknüpften Erläuterungen.

Hiermit ist die Untersuchung des allgemeinen Falles  $p = 3$  bis zu denselben Formeln geführt, die in Band 32 der Annalen für die hyperelliptischen Sigmafunctionen entwickelt wurden, und es ist also der Zielpunkt erreicht, den ich für die gegenwärtige Abhandlung von vornherein in Aussicht nahm. Ich darf nicht schliessen, ohne hinzuzufügen, dass die Herren Wiltheiss und Pascal die Frage der Reihenentwickelungen der  $\vartheta$  vom Geschlechte  $p = 3$  in neuester Zeit bereits weiter verfolgt haben. In den Göttinger Nachrichten vom Juni 1889 hat Herr Wiltheiss elegante Differentialgleichungen veröffentlicht, denen die  $\vartheta$ , beziehungsweise die  $\Theta$ , hinsichtlich der als variabel angesehenen Coefficienten der  $C_4$  genügen. Herr Pascal hat sodann in den Nachrichten vom Juli 1889 nähere Angaben über die Reihenentwickelung der ungeraden  $\sigma$  gemacht; er hat den Term  $[w]_3$  direct berechnet und aus ihm mit Hülfe der Wiltheiss'schen Differentialgleichungen recurrente Formeln zur Berechnung der allgemeinen Terme  $[w]_{2r+1}$  abgeleitet. Ausführlicher giebt Herr Pascal diese Rechnungen in dem neuesten Hefte der Annali di Matematica (ser. 2, t. XVII, 2: Sullo sviluppo delle funzioni  $\sigma$  abeliane dispari di genere 3)\*).

Göttingen, den 24. September 1889.

---

\*) Inzwischen erschien in den Annali di Matematica bereits eine Fortsetzung dieser Untersuchungen unter dem Titel: Sulle formole di ricorrenza per lo sviluppo delle  $\sigma$  abeliane dispari a tre argomenti. Herr Pascal hat überdies jetzt die Berechnung des Gliedes  $[w]_2$  der Reihentwickelung (134) der geraden Sigmafunctionen bewerkstelligt; ich habe eine bez. Mittheilung vor wenigen Tagen der Göttinger Societät der Wissenschaften vorgelegt; dieselbe wird im Decemberheft der Göttinger Nachrichten veröffentlicht werden. [14. Dec. 1889].

---