Ueber die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten*).

Von

Sophus Lie in Christiania

und

Felix Klein in Leipzig.

Die Kummer'sche Fläche vierten Grades mit 16 Knotenpunkten ist bekanntlich**) für einfach unendlich viele Complexe des zweiten Grades Singularitätenfläche, d. h. diejenige Fläche, welche der geometrische Ort ist für solche Punkte, deren Complexkegel in zwei Ebenen zerfallen ist, oder, was auf dasselbe hinauskommt, die umhüllt wird von solchen Ebenen, deren Complexcurve sich in zwei Punkte aufgelöst hat. Die Betrachtung dieser Complexe zweiten Grades führt fast unmittelbar zu der Bestimmung der Haupttangentencurven der Fläche, wie im Nachstehenden gezeigt werden soll.

1. Aus der einfach unendlichen Zahl der zu der Fläche gehörigen Complexe zweiten Grades heben wir einen heraus.

Die demselben innerhalb einer Tangentialebene der Fläche entsprechende Complexcurve hat sich in zwei Punkte aufgelöst. Diese beiden Punkte sind diejenigen, in denen die in der Tangentialebene enthaltene Durchschnittscurve vierter Ordnung mit der Fläche von einer bestimmten, durch den Berührungspunkt gehenden Geraden, die dessen zugeordnete singuläre Linie genannt wird, noch ausser in diesem Berührungspunkte geschnitten wird.

Man kann nun nach denjenigen Punkten der Fläche fragen, deren zugeordnete singuläre Linie eine Haupttangente der Fläche ist. Die übrigen Tangenten der Fläche in einem solchen Punkte gehören offenbar

---

*) Der Berliner Academie am 15. December 1870 vorgelegt durch Herrn Kummer.

**) cf. Pluecker: Neue Geometrie des Raumes, gegründet auf die Betrachtung der geraden Linie als Raumelement. (B. G. Teubner 1868, 69.) n. 310 ff. Vergl. auch, hier und im Folgenden, Klein: Zur Theorie der Complexe des ersten und zweiten Grades. Math. Ann. II, 2.

auch dem Complexe an. Andererseits sind diese Complexgeraden die einzigen, welche die Fläche berühren, ohne zugleich singuläre Linien des Complexes zu sein. Betrachten wir nun in einer beliebigen Ebene den Complexkegelschnitt und die Durchschnittscurve vierter Ordnung mit der Fläche. Dieselben berühren sich in vier Punkten, und die Tangenten in diesen Punkten sind die in der Ebene gelegenen singulären Linien*). Ausser diesen doppelt zu zählenden Tangenten haben die beiden Curven, als bez. von der 2ten und 12ten Classe, noch 16 Tangenten gemein. Die Berührungspunkte derselben mit der Durchschnittscurve vierter Ordnung sind Punkte der gesuchten Beschaffenheit.

Die Punkte der Kummer'schen Fläche, deren zugeordnete singuläre Linien Haupttangenten der Fläche sind, bilden also eine Curve der 16*ten Ordnung.*

2. *Die so bestimmte Curve ist nun eine Haupttangentencurve der Fläche.*

Zum Beweise bemerken wir zunächst, dass zwischen den durch eine Complexlinie, — welche nur keine singuläre Linie sein darf, — hindurchgelegten Ebenen und den Berührungspunkten der in denselben enthaltenen Complexcurven mit der Linie projectivisches Entsprechen stattfindet. Hieraus schliesst man, dass einer unendlich kleinen Verschiebung des Punktes auf der Linie eine Drehung der Ebene entspricht, deren Grösse von derselben Ordnung des Unendlich-Kleinen ist.

Nun ist die Verbindungslinie zweier consecutiver Punkte der eben bestimmten Curve eine Complexlinie, ohne zugleich singuläre Linie desselben zu sein. Die beiden Tangentialebenen in den beiden Punkten enthalten dem Complexe angehörige Strahlbüschel, deren Scheitel diese Punkte sind. Die beiden Tangentialebenen sind also zwei Ebenen, deren Complexcurven die angenommene Tangente in zwei consecutiven Punkten berühren. Hieraus folgt, nach der vorstehenden Bemerkung, dass, wenn man auf der Curve fortschreitet, die Tangentialebene der Fläche sich um die Tangente der Curve dreht.

Das aber ist die charakteristische Eigenschaft der Haupttangentencurven einer Fläche; unsere Behauptung ist also erwiesen.

Da der Begriff der Haupttangentencurve, sowie der des Complexes, sich selbst dualistisch ist, folgt, dass die dualistisch entgegenstehenden Singularitäten der Curve einander gleich sind. Insbesondere *ist ihre Classe gleich ihrer Ordnung, also gleich* 16.

Da ferner die Curve sich selbst dualistisch in einziger Weise durch den Complex bestimmt ist, geht sie, wie dieser, durch ein System linearer, sowie reciproker Transformationen in sich über**). Man

---

*) Pluecker: Neue Geometrie. n. 318.

**) cf. die bereits citirte Abhandlung: Zur Theorie etc. n. 13.

schliesst hieraus eine Reihe von Eigenschaften derselben, die wir hier nicht weiter verfolgen können.

3. Auf die auseinandergesetzte Weise erhalten wir einem jeden der einfach unendlich vielen Complexe zweiten Grades, die zu derselben Kummer'schen Fläche gehören, entsprechend eine Haupttangentencurve. Hiermit hat man aber *alle* Haupttangentencurven, wofern nicht etwa Umhüllungscurven derselben existiren, da man für jeden Punkt der Fläche einen der Complexe angeben kann, der die eine oder die andere der beiden Haupttangenten in demselben zur singulären Linie hat.

Unter den zu der Fläche gehörigen Complexen zweiten Grades befinden sich sechs, doppelt zu zählende, lineare Complexe. Als die singulären Linien derselben sind die Doppeltangenten der Fläche anzusehen, so zwar, dass jedem der sechs Complexe eines der sechs von den Doppeltangenten gebildeten Systeme angehört. *Entsprechend diesen Complexen giebt es sechs ausgezeichnete Haupttangentencurven.* Dieselben sind, wie sich durch dieselben Betrachtungen ergiebt, durch die wir Ordnung und Classe der allgemeinen Curve bestimmt haben, nur noch von der 8ten Ordnung und der 8ten Classe.

3. Wir gehen jetzt dazu über, die Singularitäten der Haupttangentencurven zu bestimmen. Hierzu gelangen wir, indem wir der allgemeinen Theorie solcher Curven die folgenden Sätze entlehnen.

Die Haupttangentencurven einer beliebigen Fläche haben in den Knotenpunkten derselben Spitzen.

Ueberhaupt haben sie Spitzen in den Punkten der parabolischen Curve, vorausgesetzt, dass diese nicht selbst Haupttangentencurve ist. In dem letzteren Falle ist sie Umhüllungscurve für die übrigen Haupttangentencurven. Dies gilt besonders, wenn die parabolische Curve aus ebenen Berührungscurven besteht.

Ferner haben die Haupttangentencurven in den Durchschnittspunkten mit der Curve vierpunktiger Berührung stationäre Tangenten, wofern die Curve vierpunktiger Berührung nicht zugleich parabolische Curve ist, was eine besondere Betrachtung verschiedener Fälle verlangt, die wir hier nicht nöthig haben.

Endlich können die Haupttangentencurven ausser in den angegebenen Fällen keine Spitzen und keine stationären Tangenten haben.

In unserem Falle hat man 16 Knotenpunkte, in denen also die Haupttangentencurven Spitzen haben.

Die parabolische Curve, welche von der 32ten Ordnung sein muss, besteht aus den 16 Berührungskegelschnitten in den 16 Doppeltangentialebenen der Fläche. Sie ist also Umhüllungscurve der Haupttangentencurven. Die 16 Ebenen sind dabei stationäre Ebenen dieser Curven, wie dies überhaupt die Ebenen ebener Berührungscurven sind.

Man überzeugt sich nun leicht, dass die Hauptttangentencurven in jedem Knotenpunkte nur eine Spitze haben und nur je einmal die Doppeltangentialebenen stationär berühren. Die Curve kann nämlich mit der Doppeltangentialebene nur 16 Punkte gemein haben; 4 davon kommen auf die stationäre Berührung, und 12 auf die 6 Spitzen in den 6 in der Ebene liegenden Knotenpunkten.

Die Haupttangentencurven haben hiernach 16 (*in die Knotenpunkte der Fläche fallende*) *Spitzen und* 16 (*mit den Doppeltangentialebenen derselben identische*) *stationäre Ebenen.*

Die Curve vierpunktiger Berührung besteht in unserem Falle einmal aus den 16 Berührungskegelschnitten, die hier nicht weiter in Betracht kommen, da sie schon erledigt sind. Andererseits besteht sie aus den sechs ausgezeichneten Haupttangentencurven 8ter Ordnung, die den 6 linearen Complexen angehören. Es geht dies daraus hervor, dass die singulären Linien dieser Complexe, wie schon angeführt, Doppeltangenten der Fläche sind. Weitere Curven umfasst die Curve vierpunktiger Berührung nicht, da die aufgezählten zusammen die richtige Ordnung, 80, besitzen.

Wir müssen jetzt die Zahl der Durchschnittspunkte einer Haupttangentencurve mit den 6 ausgezeichneten bestimmen.

Diese Durchschnittspunkte sind dadurch charakterisirt, dass die vierpunktig berührende Haupttangente eine Linie des Complexes zweiten Grades ist, dem die gegebene Haupttangentencurve zugehört. Die in den Punkten einer der 6 Curven vierpunktig berührenden Haupttangenten bilden aber eine Linienfläche von der 8ten Ordnung, da der vollständige Durchschnitt derselben mit der Kummer'schen Fläche aus der gewählten Curve besteht, welche vierfach zählt. Mit einer solchen Fläche hat aber der Complex zweiten Grades 16 Linien gemein. Man erhält also, jeder der 6 Curven entsprechend, 16 Durchschnittspunkte. Wir haben somit den Satz:

Die Haupttangentencurven haben 6 . 16 = 96 *stationäre Tangenten.*

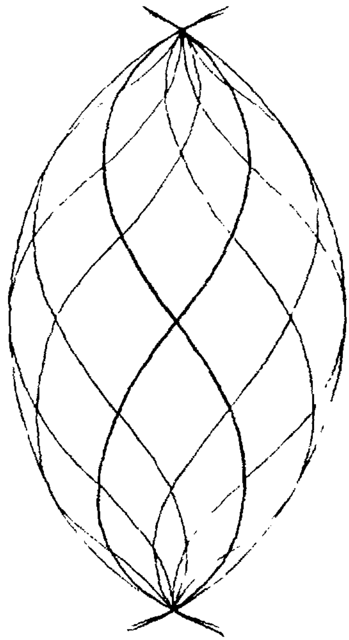
Fügen wir noch hinzu, dass die Haupttangentencurven keinen wirklichen Doppelpunkt und also auch keine wirkliche Doppel-Osculationsebene besitzen können, da in keinem Punkte der Kummer'schen Fläche, der nicht auf der parabolischen Curve liegt, die beiden Haupttangenten demselben Complexe als singuläre Linien angehören, so können wir die sämmtlichen Singularitäten derselben, von denen die dualistisch entgegenstehenden gleich sind, ohne Weiteres bestimmen. Insbesondere finden wir: den Rang = 48, die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte = 72, die Ordnung der Doppelcurve der Developpable = 952, das Geschlecht = 17.

5. Für die 6 ausgezeichneten Haupttangentencurven wird die Zahl der Spitzen und stationären Osculationsebenen gleich Null. Eine solche

Curve geht nämlich durch jeden der Doppelpunkte einfach hindurch und hat in ihm eine der 6 ihn enthaltenden Doppeltangentialebenen zur Osculationsebene. Man hat sich den stetigen Uebergang zwischen den *allgemeinen Curven und diesen besonderen so vorzustellen*, dass die letzteren doppelt zählen und aus der Vereinigung je zweier in einer Spitze zusammenstossender Zweige der übrigen entstanden sind. Darum sinkt Ordnung und Classe auf die Hälfte. Hiernach müsste auch der Rang halb so gross sein, wie der der anderen, also gleich 24. Das aber findet man auch, wenn man die Zahl der stationären Tangenten berechnet. Für dieselbe kommt nämlich jetzt 40, indem die Curve jede der anderen nicht mehr 16mal, sondern, weil sie 2mal zählt, nur 8mal schneidet, und das nicht 6mal, sondern nur 5mal geschieht.

Wir finden weiter: die Zahl der scheinbaren Doppelpunkte gleich 16, die Ordnung der Doppelcurve der Developpable gleich 200, das Geschlecht gleich 5.

6. Wie man sich die Aufeinanderfolge der Haupttangentencurven zu denken hat, ist in der nebenstehenden Zeichnung für den Fall, dass die 6 zugehörigen linearen Complexe reell sind, schematisch dargestellt.



In diesem Falle haben nämlich die Theile der Fläche, für welche die Haupttangenten reell werden, die Gestalt eines von zwei *Kegelschnittstücken* begrenzten Segmentes, das sich von einem Knotenpunkte nach einem anderen hinzieht. Die beiden begrenzenden Curvenstücke gehören den Berührungskegelschnitten in denjenigen beiden Doppeltangentialebenen der Fläche an, welche beide Knotenpunkte zugleich enthalten.

Innerhalb eines solchen Segmentes verlaufen nun zunächst zwei der sechs ausgezeichneten Haupttangentencurven. Dieselben gehören denjenigen zwei der sechs linearen Complexe an, denen in den zwei Knotenpunkten, zwischen denen sich das Segment erstreckt, die beiden dasselbe begrenzenden Doppeltangentialebenen entsprechen. Die betreffenden Curven sind in der Figur stärker ausgezogen. Dieselben haben eine Sförmige Gestalt. Sie ziehen sich von dem einen Knotenpunkte zu dem anderen hin, indem sie in jedem eine der beiden Begrenzungscurven berühren. Ausser in den beiden Knotenpunkten schneiden sich dieselben in einem beiden gemeinsamen Wendepunkte, der den Mittelpunkt der Zeichnung bildet. — Uebrigens setzen sich diese Curven über die beiden Knotenpunkte hinaus auf weitere, ähnlich gestaltete Segmente der Fläche fort.

Von den übrigen Haupttangentencurven, deren drei gezeichnet sind, weiss man, dass sie in den Knotenpunkten eine Spitze haben, dass sie jeden der beiden begrenzenden Kegelschnitte einmal berühren, und dass sie dort, wo sie, ausser in den beiden Knotenpunkten, die beiden ausgezeichneten Curven treffen, einen Wendepunkt besitzen. Hiernach wird es leicht sein, ihrem Verlaufe in der Figur zu folgen*).

---

7. Die im Vorstehenden gegebene Bestimmung der Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche, welche wir an die Betrachtung der zugehörigen Complexe zweiten Grades geknüpft haben, kann noch unter einem anderen Gesichtspunkte gefasst werden, indem man von einem der sechs unter denselben befindlichen linearen Complexe ausgeht. Die Fläche ist nämlich Brennfläche eines diesem Complexe angehörigen Strahlensystems: des einen Systems ihrer Doppeltangenten. Wir wollen nun zeigen, *dass das Problem: die Haupttangentencurven auf der Brennfläche eines einem linearen Complexe angehörigen Strahlensystems zu bestimmen, identisch ist mit dem anderen: die Krümmungscurven einer gewissen Fläche zu finden.* In unserem Falle wird diese Fläche die Fläche vierter Ordnung, welche den unendlich weit entfernten imaginären Kreis doppelt enthält; und da man deren Krümmungscurven kennt, so erhält man eine Bestimmung der Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche, die natürlich mit der oben gegebenen übereinstimmt.

Man beziehe nämlich die Linien des gegebenen linearen Complexes eindeutig auf die Punkte des Raumes, indem man, vermöge der gegebenen linearen Gleichung und der zwischen den Liniencoordinaten bestehenden Identität zwei der sechs Liniencoordinaten, die sich auf zwei sich schneidende Kanten des Tetraëders beziehen, als Functionen

---

*) Man vergleiche hierzu die weitergehenden Untersuchungen von Hrn. Rohn im XVIII. Bande dieser Annalen (p. 99 ff.: die Gestalten der Kummer'schen Fläche, 1881), sowie auch den früheren Aufsatz desselben Verfassers im XV. Bande daselbst (p. 315 ff.: Transformation der hyperelliptischen Functionen $p = 2$ und ihre Bedeutung für die Kummer'sche Fläche, 1879). Die Haupttangentencurven haben, wie Hr. Rohn ausführlich zeigt, für die Darstellung der Kummer'schen Fläche durch hyperelliptische Functionen eine specifische Bedeutung.

[Januar 1884.]

der vier übrigen auffasst und diese letzten als *Punktcoordinaten* interpretirt*).

Man findet, dass dann allen Linien des Complexes, welche durch einen Punkt hindurchgehen, die Punkte einer geraden Linie entsprechen, und dass diese gerade Linie einen festen Kegelschnitt schneidet, der für die Abbildung fundamental ist. Das Strahlensystem, welches dem linearen Complexe mit einem Complexe $n$ten Grades gemein ist, bildet sich ab als Fläche $2n$ten Grades, welche den Kegelschnitt $n$fach enthält. Insbesondere ist das Bild einer geraden Linie, d. h. der dieselbe schneidenden Complexlinien, eine Fläche zweiten Grades, die durch den Kegelschnitt geht.

Wir wollen fortan für den fundamentalen Kegelschnitt den unendlich weit entfernten imaginären Kreis wählen, so dass also das Bild einer geraden Linie eine Kugel wird.

Sei jetzt eine beliebige Fläche gegeben und auf derselben eine Krümmungscurve. Die Fläche ist das Bild eines dem linearen Complexe angehörigen Strahlensystems, die Curve das Bild einer in demselben enthaltenen geradlinigen Fläche. Wir behaupten, *dass diese geradlinige Fläche die Brennfläche des Strahlensystems nach einer Haupttangentencurve berührt.*

Zum Beweise bemerken wir zunächst, dass, rückwärts, das Bild dieser Brennfläche dasjenige Strahlensystem ist, dessen Linien gleichzeitig die gegebene Fläche berühren und den unendlich weit entfernten imaginären Kreis schneiden. Einer jeden geraden Linie, welche die Brennfläche berührt, entspricht hiernach eine die gegebene Fläche berührende Kugel. Insbesondere entspricht einer Haupttangente eine stationär berührende Kugel.

Eine der beiden in einem beliebigen Punkte der Krümmungscurve stationär berührenden Kugeln enthält aber drei consecutive Punkte der Krümmungscurve. Also schneidet eine der beiden Haupttangenten der Brennfläche in einem Berührungspunkte mit der umgeschriebenen Linienfläche drei consecutive Erzeugende derselben, mit anderen Worten ist eine Haupttangente auch der letzteren.

Man hat aber allgemein den Satz: Wenn zwei Flächen sich nach einer Curve berühren und in jedem Punkte dieser Curve ist ihnen eine Haupttangente gemeinsam, so ist die Curve eine Haupttangentencurve.

Damit ist unsere Behauptung erwiesen.

Wenn man nun insbesondere für die gegebene Fläche eine Fläche vierter Ordnung nimmt, die den unendlich weit entfernten imaginären

*) Dieses Abbildungsverfahren ist bereits gelegentlich von Hrn. Nöthe angegeben worden: Zur Theorie der algebraischen Functionen mehrerer complexer Veränderlichen. Gött. Nachrichten 1869.

Kreis doppelt enthält, — eine solche ist das Bild eines dem linearen Complexe angehörigen Strahlensystems zweiter Ordnung und Classe, — so erhält man auf diesem Wege die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche, welche die Brennfläche eines solchen Strahlensystems ist*).

Die in der letzten Nummer enthaltenen Betrachtungen sind es gewesen, durch die der Eine von uns (Lie)**) zuerst zu der Bemerkung geführt wurde, dass die Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche algebraische Curven der 16ten Ordnung sind; hierauf fand der Andere (Klein) die Beziehung dieser Curven zu den Complexen zweiten Grades, die zu der Kummer'schen Fläche gehören, und bestimmte, wie im Vorstehenden auseinandergesetzt ist, ihre Singularitäten.

---

*) Die hier im Texte angedeuteten Entwickelungen sind später von Hrn. Lie in dessen grosser Abhandlung in Bd. V der Annalen (p. 145 ff., 1871) ausführlich und im Zusammenhange mit allgemeineren Betrachtungen dargelegt worden. Uebrigens wolle man auch meine eigenen dort folgenden Abhandlungen vergleichen (Bd. V, p. 257 ff., p. 278 ff., 1871), insofern dieselben verschiedene auf die Integration der Haupttangentencurven der Kummer'schen Fläche bezügliche Bemerkungen enthalten (siehe insbesondere p. 277, 297). Ich gebe diese beiden Citate um so lieber, als die vorstehend in Nr. 2 und 7 des Textes entwickelten Beweise des Hauptsatzes, trotzdem sie materiell richtig sind, vielleicht in formaler Hinsicht unbefriedigend scheinen können.

[Januar 1884.]

**) Vergl. Lie: Ueber eine Classe geometrischer Transformationen, Berichte der Academie zu Christiania, 1870, oder auch: Sur une transformation géométrique, in den Comptes rendus de l'Académie des Sciences von demselben Jahre (t. 71).