Ueber Multiplication bedingt convergenter Reihen.

Von

A. Voss in Dresden.

Im XXI. Bande dieser Annalen hat Herr Pringsheim eine Reihe von Untersuchungen über die Anwendungen der Cauchy'schen Multiplicationsregel auf bedingt convergente Reihen angestellt. Insbesondere wird p. 340 u. ff. ausführlicher der Fall erörtert, wo die eine Reihe Σu_i in der Form:

$$\frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}\sum_0^\infty (u_i + u_{i+1})$$

unbedingt convergirt, indem die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen zur Anwendung der Cauchy'schen Regel ermittelt, und zugleich hinreichende Criterien von genügend allgemeinem Charakter für das Erfülltsein dieser Bedingungen aufgestellt werden.

Es ist aber leicht, zu zeigen, dass auch der allgemeinere Fall, wo die Reihe:

$$A = \sum_0^\infty a_i$$

in der Form

$$(a_0 + a_1) + (a_2 + a_3) + \cdots$$

unbedingt convergirt, welcher den Ausgangspunkt bei Hrn. Pringsheim bildet, eine ähnliche Behandlung gestattet.

Die beiden Reihen

$$A = \sum_0^\infty a_i,$$

$$B = \sum_0^\infty b_i$$

seien bedingt convergent, so dass, wenn man mit G eine endliche (positive) Zahl, mit δ eine beliebig kleine bezeichnet, die Bedingungen

$$\left|\sum_0^m a_i\right| < G, \quad \left|\sum_{m+1}^n a_i\right| < \delta,$$
$$\left|\sum_0^m b_i\right| < G, \quad \left|\sum_{m+1}^n b_i\right| < \delta$$

für ein genügend grosses m und alle grösseren erfüllt sind; ferner möge die Reihe

$$\sum_0^\infty |a_{2i} + a_{2i+1}|$$

convergiren. Nach der Cauchy'schen Regel werde nun die neue Reihe:

$$C = \sum_0^\infty u_i$$

gebildet, wo

$$u_m = \sum_0^m a_h b_{m-h}.$$

Bezeichnet man mit C_{2n}, A_n, B_n die Summen der Terme der entsprechenden Reihen bis zu den betreffenden Indices, so ist

$$
\begin{aligned}
(1) \qquad C_{2n} - A_n B_n = \{ & a_0(b_{2n} + b_{2n-1} + \cdots + b_{n+1}) \\
& a_1(b_{2n-1} \qquad + \cdots + b_{n+1}) \\
& \cdots \\
& \cdots \\
& a_{n-1}(b_{n+1})\} \\
+ \{ & b_0(a_{2n} + a_{2n-1} + \cdots + a_{n+1}) \\
& b_1(a_{2n-1} \qquad + \cdots + a_{n+1}) \\
& \cdots \\
& \cdots \\
& b_{n-1}(a_{n+1})\}.
\end{aligned}
$$

Den ersten Theil des Ausdruckes rechts in (1) schreibe man in der Form:

$$
\begin{aligned}
& (a_0 + a_1)(b_{2n-1} + \cdots + b_{n+1}) + a_0 b_{2n} \\
+ & (a_2 + a_3)(b_{2n-3} + \cdots + b_{n+1}) + a_2 b_{2n-2} \\
+ & (a_4 + a_5)(b_{2n-5} + \cdots + b_{n+1}) + a_4 b_{2n-4} \\
+ & \cdots \qquad\qquad\qquad\qquad + \cdots
\end{aligned}
$$

Der Betrag der ersten Colonne ist selbst dann noch beliebig klein, wenn alle eingeklammerten Terme durch ihre Beträge ersetzt werden, da bei hinreichend grossem n die Beträge

$$|b_{2n-k} + \cdots + b_{n+1}|, \qquad k \lesseqgtr n - 1$$

es sind. Den zweiten Theil von (1) schreibe man in der Gestalt:

$$
\begin{aligned}
&(b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1})(a_{2n} + \cdots + a_{n+1}) \\
&- a_{2n} \quad (b_1 + \cdots + b_{n-1}) \\
&- a_{2n-1}(b_2 + \cdots + b_{n-1}) \\
&\quad \cdots \\
&\quad \cdots \\
&- a_{n+2}(b_{n-1}).
\end{aligned}
$$

Auch hier ist der erste Theil von beliebig kleinem Betrage, und der zweite kann in der Form:

$$
\begin{array}{lll}
- a_{2n} & (b_0 + b_1 + \cdots + b_{n-1}) & + a_{2n} b_0 \\
- (a_{2n-2} + a_{2n-1}) & (b_2 + \cdots + b_{n-1}) & + a_{2n-2} b_2 \\
- (a_{2n-4} + a_{2n-3}) & (b_4 + \cdots + b_{n-1}) & + a_{2n-4} b_4 \\
\quad \cdots & & \quad \cdots \\
\quad \cdots & & \quad \cdots
\end{array}
$$

geschrieben werden. Da nun alle Summen $|b_k + \cdots + b_{n-1}|$ endlich sind, so ist wiederum der Betrag der ersten Colonne beliebig klein.

Die *nothwendige* und *hinreichende* Bedingung für:

$$\lim |C_{2n} - A_n B_n| = 0$$

ist daher:

$$0 = \lim |a_0 b_{2n} + a_2 b_{2n-2} + \cdots + a_{2n-2} b_2 + a_{2n} b_0|$$

oder, wenn man den hierdurch eingeführten Ausdruck mit v_{2n} bezeichnet:

(2) $$\lim |v_{2n}| = 0.$$

Wird ferner:

$$w_{2n} = a_1 b_{2n-1} + a_3 b_{2n-3} + \cdots + a_{2n-1} b_1$$

gesetzt, so folgt aus der *nothwendigen* Bedingung

$$\lim |u_{2n}| = 0$$

wegen

$$w_{2n} = u_{2n} - v_{2n}, \quad |w_{2n}| \leqq |u_{2n}| + |v_{2n}|$$

(3) $$\lim |w_{2n}| = 0$$

und umgekehrt wird auch $|u_{2n}|$ mit $|v_{2n}|$ und $|w_{2n}|$ beliebig klein.

Endlich aber ist

$$
\begin{aligned}
u_{2n+1} = (a_0 + a_1)(b_{2n+1} + b_{2n}) - v_{2n} - w_{2n+2} \\
+ (a_2 + a_3)(b_{2n-1} + b_{2n-2}) \\
+ \cdots
\end{aligned}
$$

Demnach ist auch die Bedingung $\lim |u_{2n+1}| = 0$ erfüllt, sobald die Bedingungen (2) und (3) gelten, da die erste Colonne hier wieder beliebig klein ist. Und so hat man den Satz:

Die nothwendigen und hinreichenden Bedingungen für die Anwendbarkeit der Cauchy'schen Regel sind die Bedingungen (2) *und* (3).

Dieselben lassen sich, so lange keine weiteren Voraussetzungen eingeführt werden, weder auf einander zurückführen noch durch andere weniger allgemeine ersetzen; sie sagen aus, *dass in den beiden nach der Cauchy'schen Regel formal gebildeten Producten der Reihen:*

$$\sum a_{2n} \sum b_{2n} \quad \text{und} \quad \sum a_{2n+1} \sum b_{2n+1}$$

die Terme mit wachsendem Index gegen Null convergiren müssen. Ich erwähne noch einige specielle Folgerungen.

1) Wird vorausgesetzt, dass auch die Reihe

$$\sum_0^\infty | b_{2n} + b_{2n+1} |$$

convergirt, so setze man

$$\begin{aligned} w_{2n} = a_1(b_{2n-1} + b_{2n-2}) - (a_1 + a_0) b_{2n-2} + v_{2n-2} \\ + a_3(b_{2n-3} + b_{2n-4}) - (a_2 + a_3) b_{2n-4} \\ + \cdots \qquad\qquad - \cdots \end{aligned}$$

und aus dieser Zerlegung sieht man, dass nunmehr $|w_{2n}|$ und $|v_{2n-2}|$ gleichzeitig beliebig klein werden. *Daher ist die nur von den a und b mit geradem Index abhängende Bedingung* (2) *nothwendig und hinreichend.*

Obwohl nun $|u_{2n}|$ mit $|v_{2n}|$ allein schon gegen Null convergirt, so kann man doch nicht umgekehrt das Criterium in der Form

$$\lim |u_{2n}| = 0 \tag{4}$$

aussprechen. Denn es ist:

$$\begin{aligned} u_{2n} = v_{2n} + v_{2n-2} + a_1(b_{2n-1} + b_{2n-2}) - b_{2n-2}(a_1 + a_0) \\ + a_3(b_{2n-3} + b_{2n-4}) - b_{2n-4}(a_2 + a_3) \\ + \cdots \qquad\qquad - \cdots, \end{aligned}$$

so dass durch die Bedingung (4) hier nur ausgedrückt wird, dass

$$\lim | v_{2n} + v_{2n+2} | = 0.$$

Da man insbesondere $a_i = b_i$ setzen kann, so folgt noch:

Damit die Reihe A mit sich selbst nach der Cauchy'schen Regel multiplicirbar sei, muss

$$\lim |a_0 a_{2n} + a_2 a_{2n-2} + \cdots + a_{2n} a_0| = 0$$

sein. Als einfaches Beispiel diene die Reihe:

$$1 - \frac{1}{1 + c_1} + \frac{1}{2} - \frac{1}{2 + c_2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{3 + c_3} + \cdots$$

welche in der vorausgesetzten Form convergirt, sobald die Beträge der c unter einer endlichen Grenze liegen und keiner der Nenner verschwindet. Die soeben angegebene Bedingung ist hier zufolge bekannter Eigenschaften der harmonischen Reihe erfüllt.*)

2) Wird dagegen vorausgesetzt, dass die Reihe B in der Form:

$$|b_0| + \sum |b_{2n+1} + b_{2n}|$$

unbedingt convergirt, so hat man:

$$\begin{aligned} u_{2n} &= a_0(b_{2n} + b_{2n-1}) - b_{2n-1}(a_0 + a_1) + 2w_{2n} \\ &+ a_2(b_{2n-2} + b_{2n-3}) - b_{2n-3}(a_2 + a_3) \\ &+ \cdots \qquad\qquad - \cdots \end{aligned}$$

In diesem Falle ist also die hinreichende und nothwendige Bedingung durch (4) *gegeben.*

3) Man hat allgemein

$$\begin{aligned} v_{2n} + w_{2n} = u_{2n} &= a_0(b_{2n} - b_{2n-1}) + (a_0 + a_1)b_{2n-1} \\ &+ a_2(b_{2n-2} - b_{2n-2}) + (a_2 + a_3)b_{2n-3} \\ &+ \cdots \qquad\qquad + \cdots \end{aligned}$$

mithin wird u_{2n} stets beliebig klein, wenn die Reihe

$$\sum |b_{2k} - b_{2k-1}|$$

convergirt. Auch hier erhält man als einzige Bedingung (2) oder (3). Diese Bemerkung, die insbesondere gültig ist, wenn $b_{2k-1} = b_{2k}$ ist, führt zu folgender Behauptung.

*Damit die convergente Reihe B sich in der Gestalt:***)

$$\frac{b_0}{2} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_1}{2} + \frac{b_2}{2} + \frac{b_2}{2} + \frac{b_3}{2} + \frac{b_3}{2} + \cdots$$

nach der Cauchy'schen Regel mit A multipliciren lasse, muss

$$\lim |b_0 a_{2n} + b_1 a_{2n-2} + b_2 a_{2n-4} + \cdots| = 0$$

sein.

4) Indem ich rücksichtlich der Ableitung von hinreichenden Bedingungen der Convergenz auf die Pringsheim'sche Arbeit verweise, will ich im Anschluss an die vorige Nr. nur den etwas allgemeineren Fall, wo die Reihe B so convergirt, dass die Reihe der b mit geradem Index (also auch die der b mit ungeradem) convergirt, anführen.

Zerlegt man nämlich:

$$\begin{aligned} v_{2n} &= a_0 b_{2n} + a_2 b_{2n-2} + a_4 b_{2n-4} + \cdots \\ &+ b_0 a_{2n} + b_2 a_{2n-2} + b_4 b_{2n-4} + \cdots \end{aligned}$$

in der hiermit angedeuteten Weise in zwei Theile

$$v_{2n} = v'_{2n} + v''_{2n}$$

---

*) Vgl. die Bemerkung von Hrn. Pringsheim über $(\log 2)^2$, a. a. O., S. 358.

**) Der Symmetrie wegen ist $\frac{1}{2} b_0$ an Stelle von b_0 gesetzt.

so dass im ersten die Indices der $a \leqq n$ sind, so folgt:

$$\begin{aligned} v'_{2n} = & a_0(b_{2n} + b_{2n-2} + b_{2n-4} + \cdots) \\ & + (a_2 - a_0)(b_{2n-2} + b_{2n-4} + \cdots) \\ & + (a_4 - a_2)(b_{2n-4} \qquad + \cdots). \end{aligned}$$

Dieser Theil wird beliebig klein, wenn

$$\sum |a_{2n} - a_{2n+2}| \tag{5}$$

convergirt. Dasselbe gilt dann auch für v''_{2n}.

Nach demselben Verfahren findet man als ausreichende Bedingung für $\lim |w_{2n}| = 0$ die der Convergenz der Reihe:

$$|a_1 - a_3| + |a_3 - a_5| + \cdots$$

Nun ist aber:

$$a_{2k-1} - a_{2k+1} = (a_{2k-1} + a_{2k-2}) - (a_{2k} + a_{2k+1}) + (a_{2k} - a_{2k-2}),$$

also

$$|a_{2k-1} - a_{2k+1}| \leqq |a_{2k-1} + a_{2k-2}| + |a_{2k} + a_{2k+1}| + |a_{2k} - a_{2k-2}|,$$

womit gezeigt ist, dass unter den genannten Bedingungen die unter (5) ausgesprochene Bedingung ein hinreichendes Criterium der Convergenz liefert.

Dresden, 8. December 1883.