

---

**SUR LA LOI FONDAMENTALE DE L'ÉLECTROMAGNÉTISME ;**

PAR M. P. GARBE.

La formule

$$df = K \frac{\sin \omega \times ds}{r^2},$$

qui représente l'action électromagnétique exercée par un élément de courant  $ds$  incliné d'un angle  $\omega$  sur la distance  $r$  de cet élément au pôle, a été donnée par Biot et Savart, quelques mois après la découverte d'Oerstedt, comme étant le résultat de deux expériences.

La première, dans laquelle ils étudiaient l'action  $\Phi$  exercée par un conducteur rectiligne indéfini MN (*fig. 1*) placé à la distance CA = D d'un pôle magnétique, conduisit Biot à la relation

$$(1) \quad \Phi D = \text{const.} = K.$$

Laplace montra aussitôt que l'expression

$$df = K \frac{a ds}{r^2}$$

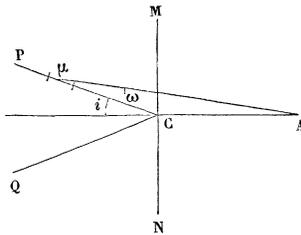
---

(<sup>1</sup>) FARADAY, *Ann. de Chim. et de Phys.*, 3<sup>e</sup> série, t. XV, p. 283; 1845. REGNAULT, *Mém. de l'Acad.*, t. XXVI, p. 535; 1862. CAILLETET, *Archives de Genève*, t. LXVI, p. 16; 1878.

est une loi des distances, compatible avec ce résultat expérimental,  $\alpha$  étant un coefficient qui peut dépendre de l'inclinaison de l'élément sur la droite qui le joint au pôle.

C'est en vue de déterminer ce coefficient et, par suite, la forme de l'action élémentaire, que Biot et Savart firent la seconde expérience. Un conducteur angulaire indéfini PCQ (*fig. 1*) d'ouverture  $2i$ , ayant pour sommet le pied C de la perpendiculaire AC et pour bissectrice AC, fut disposé dans le plan AMN.

Fig. 1.



Biot et Savart commencèrent par vérifier pour ce fil angulaire la loi précédente des distances, appliquée au sommet C (vérification inutile, comme on le verra plus loin); puis ils comparèrent, pour une même valeur de l'intensité du courant, l'action  $\varphi$  du conducteur angulaire à celle du fil rectiligne MN. L'expérience sembla indiquer la relation

$$\varphi = \Phi \times i,$$

$i$  étant exprimé en fractions de quadrant.

« Ce résultat, dit Biot, analysé par le calcul, m'a paru indiquer que l'action de chaque élément  $\mu$  du fil oblique est proportionnelle à  $\sin \omega$ . »

Deux ans après, Savary, soumettant au calcul les idées d'Amperé sur la constitution des aimants, retrouva la formule élémentaire précédente et montra que, d'après elle, le rapport  $\frac{\varphi}{\Phi}$  devait être égal, non à  $i$ , mais à  $\tan \frac{i}{2}$ .

Ampère ne manqua pas, à ce propos, de faire remarquer toute

l'obscurité qui entourait les déductions par lesquelles Biot avait obtenu sa formule.

« On ne peut douter, dit-il, qu'il n'y eût quelque erreur dans ce calcul ; mais il serait d'autant plus curieux de le connaître qu'il avait pour but de déterminer la valeur d'une différentielle par celle de l'intégrale définie qui en résulte entre des limites données, ce qu'aucun mathématicien ne me paraît, jusqu'à présent, avoir cru possible. »

Lorsqu'il eut connaissance du résultat de Savary, Biot, après vérification expérimentale, adopta la relation

$$(2) \quad \varphi = \Phi \operatorname{tang} \frac{i}{2},$$

mais n'indiqua pas davantage de quelle façon on pouvait aboutir au facteur d'inclinaison  $\sin \omega$ , qu'il continue d'accepter, d'ailleurs, comme compatible avec ce nouveau résultat.

Cependant, l'impossibilité signalée par Ampère n'existe pas dans le cas particulier qui nous occupe et l'on peut, au moyen des deux expériences de Biot et Savart, seulement, trouver l'action d'une portion de fil rectiligne sur le pôle A et, par conséquent, la loi élémentaire.

Remarquons, d'abord, que l'action d'un conducteur dont le plan passé par le pôle A ne change pas lorsqu'on fait tourner ce conducteur dans son plan autour de A comme centre.

Dans la deuxième expérience de Biot considérons seulement les portions MC, PC (*fig. 2*) des deux conducteurs situées au-dessus de AC. Le rapport de leurs actions, que nous désignerons toujours par  $\Phi$  et  $\varphi$ , est également  $\operatorname{tang} \frac{i}{2}$ . Soit AH la perpendiculaire abaissée du point A sur la direction du fil oblique et supposons ce fil prolongé jusqu'en H. Désignons par  $f$  l'action qu'exercerait la portion CH et F l'action du fil indéfini HP situé à la distance  $AH = d$  du pôle.

On a, d'après la relation (1) et la remarque qui précède,

$$\begin{aligned} \Phi \times D &= F \cdot d, \\ F &= \frac{D}{d} \Phi = \frac{\Phi}{\sin i}. \end{aligned}$$

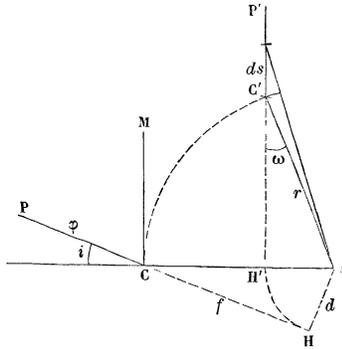
D'ailleurs, on a

$$\begin{aligned} F &= f - \varphi, \\ f &= F - \varphi, \\ \frac{f}{F} &= 1 - \frac{\varphi}{F} = 1 - \frac{\varphi}{\Phi} \sin \iota = 1 - \operatorname{tang} \frac{\iota}{2} \sin \iota = 1 - 2 \sin^2 \frac{\iota}{2}, \end{aligned}$$

d'où

$$(3) \quad f = F \cos \iota$$

Fig. 2.



Amenons par une rotation le fil HP en H'P' et désignons maintenant par  $\omega$  l'angle  $\iota$  précédent, la relation (3) qui devient alors

$$(4) \quad f = F \cos \omega$$

donne l'action de la portion  $s = H'C'$  du fil rectiligne sur le pôle.

On déduit de là

$$df = F \sin \omega \, d\omega,$$

or on a

$$ds \sin \omega = r \, d\omega, \quad F = \frac{K}{d} = \frac{K}{r \sin \omega},$$

et par suite

$$df = K \frac{\sin \omega \, ds}{r^2}.$$

On peut voir que la loi de la distance pour le fil oblique est une conséquence de la formule (3). En effet,

$$\varphi = F - f = F(1 - \cos \iota) = \frac{K}{d}(1 - \cos \iota) = \frac{K}{D} \frac{1 - \cos \iota}{\sin \iota}.$$

Lorsque le conducteur PC se déplace parallèlement à lui-même,  $i$  reste constant et, par suite,  $\varphi$  est en raison inverse de D.

On peut se demander à quelle forme élémentaire Biot aurait été conduit s'il eût réellement calculé le facteur d'inclinaison d'après la loi expérimentale

$$\frac{\varphi}{\Phi} = i.$$

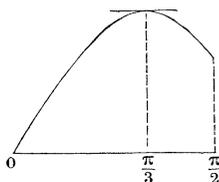
La méthode précédente donne, dans ce cas,

$$df = K \frac{\sin \omega + \omega \cos \omega}{r^2} ds.$$

L'inspection de la *fig.* 3 qui représente la variation de

$$\sin \omega + \omega \cos \omega$$

Fig. 3.



montre que l'action de l'élément passerait par un maximum sous une inclinaison de  $60^\circ$  environ.