

## II. Ueber die Azimuthdifferenz doppeltgebrochener Strahlen. Beobachtungen am Calcit.

Von

A. Schrauf in Wien.

(Mit 2 Holzschnitten.)

---

Wenn von den zwei Strahlen die Rede ist, welche die Doppelbrechung der einaxigen Krystalle hervorruft, dann begnügt man sich meist mit der Angabe des Vibrationsazimuthes gegen die Hauptaxe. Der Sprachgebrauch gestattet selbst die Lizenz, von zwei zu einander senkrecht polarisirten Strahlen zu sprechen, und bei prismatischer Zerlegung wird nur in den seltensten Fällen deutlich durch Worte hervorgehoben, dass die Azimuthdifferenz, d. i. der Winkel zwischen den Vibrationsrichtungen des ordinären und extraordinären Strahles  $\cong 90^\circ$  sein kann — wie dies bekanntlich die Theorie verlangt. Beinahe für alle Punkte der optischen Disciplin einaxiger Körper sind bereits die experimentellen Beweise geführt, nur für die Auswerthung der Azimuthdifferenz und deren Abhängigkeit von Wellenlänge und Hauptaxe fehlen dieselben.

Vor mehreren Jahren habe ich zum Zwecke der Demonstration veränderlicher Schwingungsrichtungen bei prismatischer Doppelbrechung passende Calcitprismen schleifen lassen. Die mit denselben im Laufe der Zeit erhaltenen Beobachtungen gestalten sich nun zu einer Verification des oben erwähnten Gesetzes der Schwingungsrichtungen.

Bei diesen Untersuchungen wurden nebenher einzelne Resultate erhalten, welche  $\omega$ ,  $\varepsilon$ , — Ausdehnung — effectives Minimum der Deviation, beobachtet an Calcit, betreffen.

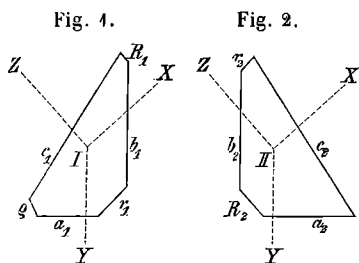
## § 1. Orientirung der verwendeten Prismen aus isländischem Doppelspath; deren Volumgewicht und mittlere lineare Ausdehnung.

Calcitprismen sind nur dann zur Demonstration veränderlicher Vibrationsrichtungen tauglich, wenn sie drei Bedingungen genügen. Einerseits müssen sie starke Doppelbrechung zeigen, andererseits eine solche Neigung der Hauptaxe gegen die Incidenzflächen haben, dass die Azimuthe der Vibrationen bei Aenderungen des Incidenzwinkels beträchtlich variiren, schliesslich soll die krystallographische Orientirung genau möglich sein. Im Wesentlichen genügt den Bedingungen eine solche Lage der brechenden Kanten, dass diese durch die Spaltflächen gerade abgestumpft werden. Um die Beobachtungen controliren zu können, wurden aus Material einer Sendung zwei Prismen hergestellt, und eine solche Anordnung des Schliffes getroffen, dass je drei der Flächen nahe gleiche krystallographische Orientirung besitzen und in dieselben morphologischen Ebenen fallen.

Die krystallographische Bestimmung aller Schliffflächen wurde auf die Spaltflächen basirt und nach den Principien des orthohexagonalen Systems durchgeführt.

Bei künstlichen Prismen muss ferner der Schliff controlirt werden in Beziehung auf Concavität oder Convexität der Schliffflächen. Dies ist nur möglich, wenn alle drei brechenden Flächen und die Basisfläche geschliffen, und die Neigungen letzterer gegen erstere ermittelt sind. Dieser Vorgang sollte bei allen Prismen eingehalten werden — auch bei den Glasprismen; die bisher geübte Methode des Schliffes — nur die zwei Seitenflächen an grösseren Prismen — ist deshalb ungenügend.

In den nachfolgenden Zeilen sind die Winkelverhältnisse der beiden Prismen I. und II. zusammengestellt. Die brechenden Seitenflächen sind



mit den Buchstaben  $a_1 b_1 c_1 — a_2 b_2 c_2$ , die oberen Endflächen derselben direct mit den Ziffern  $I, II$ , sowie die angespaltenen Rhomboëderflächen mit  $r R \varrho$  bezeichnet. Die Flächen  $r_1 r_2$  ebenso  $R_1 R_2$  liegen parallel; nur fallen die Normalen von  $r_1 R_1$  in negative, von  $r_2 R_2$  in positive Quadranten. Die orthohexagonalen Indices sind daher für

$$\begin{aligned} r_1 &= (11\bar{1}) \\ R_1 &= (\bar{1}\bar{1}1) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} r_2 &= (\bar{1}\bar{1}1) \\ \varrho_1 = R_2 &= (\bar{1}\bar{1}1) \end{aligned}$$

In den obenstehenden Figuren sind die analogen Flächen auch parallel gestellt, und die Lage der Hauptaxe  $Z$ , sowie die der orthohexagonalen Nebenaxen  $YX$  angedeutet.

Prisma I.			Prisma II.		
$t^0$ Cels.:		Beobachtet:	$t^0$ Cels.:		Beobachtet:
19,4	$a_1 \varrho_1 =$	55° 59' 13"	20,6	$a_2 R_2 =$	62° 3' 14"
19,2	$a_1 I =$	94 5 22	20,4	$a_2 II =$	89 5 27
20,4	$a_1 b_1 =$	94 24 54	20,2	$a_2 b_2 =$	94 54 14
19,4	$b_1 r_1 =$	42 17 52	20,4	$b_2 r_2 =$	42 29 20
18,7	$b_1 R_1 =$	33 7 15	19,8	$b_2 R_2 =$	33 22 1
18,6	$b_1 I =$	94 4 27	19,4	$b_2 II =$	90 44 50
20,4	$c_1 R_1 =$	144 32 9	20,4	$c_2 r_2 =$	105 13 54
18,5	$c_1 \varrho_1 =$	68 37 54			
20,4	$c_1 I =$	88 25 34	19,8	$c_2 II =$	94 44 2
18,7	$I r_1 =$	93 24 15	19,7	$II r_2 =$	86 39 12
18,8	$I R_1 =$	95 34 14	19,5	$II R_2 =$	84 30 22
19,4	$I \varrho_1 =$	84 28 18			

Hieraus folgt durch Rechnung:

$t^0 = 19,04$	$r_1 R_1 = 74^\circ 54' 48,4$	$t^0 = 19,99$	$r_2 R_2 = 74^\circ 54' 52,9$
	$Zr_1 = 44 36 26,6$		$Zr_2 = 44 36 29,5$
	$\angle Zbc = 79 26 59$		$\angle Zcb = 47 55 49$
	$\sqrt{3} : 4 : 0,8542374$		$\sqrt{3} : 4 : 0,8542614$

Aus diesen Daten ergeben sich alle für die optische Orientirung der Hauptschnitte nothwendigen Zahlen. Es folgen hier zunächst die Winkel der Schlißflächen zu den Coordinatenaxen und dann die Indices derselben. Für das Prisma I. gilt  $t = 19^\circ$  Cels., für II. hingegen  $t = 20^\circ$  Cels.

	X	Y	Z
I	34° 53' 27"	88° 13' 29"	58° 10' 13,6
II	34 52 10,5	88 14 23,2	58 11 26,6
$a_1$	90 46 32,3	4 14 54,5	— 85 49 23
$a_2$	85 43 29,2	9 30 42	— 84 34 9,2
$b_1$	59 11 58,7	— 85 23 8,3	— 34 13 13,9
$b_2$	— 57 27 3	85 23 23,3	32 57 24,4
$c_1^a$	— 65 32 3	— 58 52 28,7	44 28 48,4
$c_1^b$	— 65 28 18,4	— 59 3 59,9	44 24 23,4
$c_2^a$	65 50 56,3	— 52 37 23,4	— 47 3 34,3
$c_2^b$	65 47 7,9	— 52 49 1,3	— 46 55 10,8

	$h$	$k$	$l$
I	47,470550	: 1	: 44,542620
II	47,887340	: 1	: 44,658920
$a_1$	— 0,0235114	: 1	: — 0,0623914
$a_2$	0,1309204	: 1	: — 0,1277406
$b_1$	11,024449	: — 1	: — 9,080865

	$h$	$k$	$l$
$b_2$	— 44,594035	: 4	: 8,9480895
$c_1^a$	— 4,387720	: — 4	: 4,238088
$c_1^b$	— 4,398844	: — 4	: 4,247376
$c_2^a$	4,4673677	: — 4	: — 0,9586529
$c_2^b$	4,4754649	: — 4	: — 0,9654480

Die grösseren Schliffflächen  $c_1 c_2$  sind etwas concav, wie aus den nachfolgenden Daten ersichtlich ist. Deshalb ist es nöthig, die an  $a$  oder  $b$  grenzenden Theile von  $c$ , welche die optisch wirksamen sind, als separate Flächensegmente  $c_1^a c_1^b$  —  $c_2^a c_2^b$  mit bestimmten Indices zu bezeichnen. Die Controle des Schliffes erfolgt — weil die Normalen der Flächen  $a$ ,  $b$ ,  $c$ , nicht in eine Zone fallen — mit Zuhülfenahme der Messungen von  $I : a$ ,  $I : b$  u. s. w., wodurch die um die Flächennormale  $I$ , eventuell  $II$  gebildeten Zonenwinkel erhalten werden. Diese sind an dem

Prisma I.	Prisma II.
$\angle c_1 I a_1 = 124^\circ 24' 0''$	$c_2 II a_2 = 117^\circ 52' 27,7''$
$c_1 I b_1 = 144 \ 24 \ 28$	$c_2 II b_2 = 147 \ 28 \ 46$
$a_1 I b_1 = 94 \ 26 \ 6,4$	$a_2 II b_2 = 94 \ 50 \ 34,4$
$\Sigma = 360^\circ + 0^\circ 44' 34,4''$	$\Sigma = 360^\circ + 0^\circ 44' 48,4''$

Die Summe der Körperwinkel beträgt also bei beiden Prismen  $179^\circ 48,5'$ , wodurch die Concavität des Schliffes bewiesen ist. Ich habe die Prismen in vorliegender Gestalt trotz dieses Mangels verwendet, weil ein vorübergehendes dreimaliges Neuschleifen, Poliren und Neuberechnen der Prismen mich von der Fruchtlosigkeit fernerer Bestrebungen, absolut ebene Flächen in der gewünschten Lage zu erhalten, überzeugt hatte\*).

Berücksichtigt man die oben angeführten Indices von  $c^a$ ,  $c^b$ , dann stimmen die aus den Indices und dem Axenverhältnisse berechneten »brechen-den Winkel« fast vollkommen mit den beobachteten Werthen überein.

$i^0$	Beobachtet:	Gerechnet:
$8^0$	$a_1 c_1 \ 124^\circ 24' 54''$	$124^\circ 24' 33,2''$
22	$a_1 c_1 \ 124 \ 22 \ 44$	$124 \ 24 \ 56,9$
6	$b_1 c_1 \ 144 \ 25 \ 6$	$144 \ 24 \ 44,6$
19	$b_1 c_1 \ 144 \ 24 \ 20$	$144 \ 24 \ 40,2$
9	$a_2 c_2 \ 117 \ 52 \ 44$	$117 \ 52 \ 40,9$
20	$a_2 c_2 \ 117 \ 53 \ 46$	$117 \ 53 \ 45,5$
4	$b_2 c_2 \ 147 \ 24 \ 4$	$147 \ 23 \ 58,4$
18	$b_2 c_2 \ 147 \ 23 \ 33$	$147 \ 23 \ 30,7$

\*) Aus diesen Daten und der absoluten Grösse der Prismen ergibt sich der Krümmungsradius zu 47 m. Es ist dies eine so geringe Krümmung, dass dieselbe wahrscheinlich nicht beim Schleifen, sondern erst beim Poliren des weichen Calcits hervorgerufen ward. Zum Vergleiche hebe ich hervor, dass Voigt (diese Zeitschr. 1884, 5, 421) den Krümmungsradius eines Prisma von Zinkblende sogar mit 3,7 m ermittelte.

Die Berechnung dieser Winkel für verschiedene Temperaturen basirt auf dem Axenverhältniss:

$$x : y : z = \sqrt{3} : 1 : (0,8537134 + 0,000027484 t),$$

in welcher Formel  $t$  die jeweilig geltende Temperatur in Celsiusgraden bedeutet.

Der hier verwendete Ausdehnungscoefficient der Hauptaxe wurde direct abgeleitet aus den Beobachtungen Mitscherlich's\*). Die Uebereinstimmung der beobachteten und gerechneten Winkelvariationen lässt denselben, wie nicht anders zu erwarten war, als vollkommen genau erscheinen.

Dass nach den Nebenaxen Contraction bei Temperaturerhöhung eintritt, folgt in Uebereinstimmung mit allen früheren Autoren auch aus meinen Bestimmungen des Volumgewichtes der verwendeten Prismen. Ich beobachtete\*\*):

Prisma I. Totalgewicht 5,08392 g.

$$\begin{array}{llll} t = 5^{\circ}24 & d = 2,71247 & t' = 23^{\circ}56 & d' = 2,71838 \\ & d_4^{5,2} = 2,712434 & & d_4^{23,56} = 2,711584 \end{array}$$

hieraus: linearer Ausdehnungscoefficient pro  $1^{\circ}$ .  $\alpha_I = 0,000005694$ .

Prisma II. Totalgewicht 4,99095 g.

$$\begin{array}{llll} t = 7^{\circ}92 & d = 2,71407 & t' = 22^{\circ}84 & d' = 2,71969 \\ & d_4^{7,92} = 2,713764 & & d_4^{22,81} = 2,713260 \end{array}$$

hieraus: linearer Ausdehnungscoefficient pro  $1^{\circ}$ .  $\alpha_{II} = 0,000004132$ . Aus der Combination  $\alpha_I + \alpha_{II}$  der mittlere\*\*\*) cubische Ausdehnungscoefficient  $3\alpha^{10} = 0,000044739$ , schliesslich der Contractionscoefficient nach den Nebenaxen zu  $\alpha_a = -0,00000637$ .

## § 2. Ueber die Azimuthdifferenz doppeltgebrochener Strahlen.

Den ersten directen Hinweis auf die gegenseitige Neigung von den Vibrationsrichtungen der doppeltgebrochenen Strahlen gab Biot: »Dans tout les expériences de double réfraction les deux rayons se sont toujours trouvés polarisés suivant deux directions rectangulaires.« Biot's Versuche über die Extinction der doppeltgebrochenen Strahlen beim Drehen der

\*) Mitscherlich, Pogg. Ann. **10**, 142.  $\angle(r'r')$  pro  $100^{\circ} = 8' 34''$ .

\*\*) Zur Reduction wurden die Volumgewichte des Wassers nach Volkmann (Wiedem. Ann. **14**, 260) benutzt. Der Unterschied des Volumgewichtes der beiden Prismen ist durch Fissuren im Innern des Prisma I erzeugt.

\*\*\*) Den mittleren cubischen Ausdehnungscoefficienten bestimmte Mitscherlich — Dulong (Pogg. Ann. **10**, 148) zu 0,00004964; Kopp (Pogg. Ann. **86**, 457) zu 0,000048; Fizeau (C. r. 1868, **66**, 1042) zu 0,00004521. Die Contraction nach den Nebenaxen bestimmt Fizeau zu  $\alpha' = -0,00000562$ .

Platte und constantem Azimuth des einfallenden Lichtes führten zu folgendem Satz \*): »Le rayon disparaîtra . . . au lieu de faire tourner l'axe de la lame . . . d'une quantité égal a  $-\alpha$  on pourrait le faire tourner de  $-(\alpha + 90^\circ) - (\alpha + 180^\circ) - (\alpha + 270^\circ)$ .« Diese Biot'sche Regel enthält also die Angabe, dass die beiden doppeltgebrochenen Strahlen wirklich senkrecht zu einander polarisirt wären. Neumann \*\*) hat bereits vor 50 Jahren auf die Unrichtigkeit dieser Biot'schen Angabe hingewiesen: »Die beiden Azimuthe  $\alpha' \alpha''$  stehen nicht auf einander senkrecht, wie man aus der von Biot gegebenen Regel hätte erwarten sollen. Diese Regel entfernt sich aber überhaupt für Einfallswinkel, die nicht sehr klein sind, sehr stark von der Wirklichkeit . . . Bei gegebenem Einfallswinkel  $\varphi$  und gegebenem Azimuth  $\omega$  der Einfallsebene kann man immer durch Wahl des Azimuthes der Polarisationssebene des einfallenden Strahles entweder den gewöhnlichen oder ungewöhnlichen Strahl verschwinden lassen.« Soll der ordentliche Strahl verschwinden, so hat man \*\*\*) für das Azimuth  $\alpha'$  der ursprünglichen Polarisationssebene

$$\tan \alpha' = \cos(\varphi - \varphi'') \frac{C \sin \varphi'' - A \cos \omega \cos \varphi''}{A \sin \omega} + \frac{\gamma'' \sin(\varphi' + \varphi'') \sin(\varphi' - \varphi'')}{A \sin \omega \sin(\varphi + \varphi'')},$$

soll der ungewöhnliche Strahl verschwinden, so ist das Azimuth  $\alpha''$

$$\tan \alpha'' = -\cos(\varphi - \varphi') \frac{A \sin \omega}{C \sin \varphi - A \cos \omega \cos \varphi'}.$$

Die Richtigkeit dieser zwei 1835 publicirten Gleichungen hat Neumann in seiner bekannten Abhandlung über die Intensität des ordentlichen und ausserordentlichen Strahles 1837 bewiesen, zu welchem Zwecke er ein combinirtes Goniometer benutzte. Seine Beobachtungen an Calcit beweisen mit einem Fehler von nur  $\pm 4'$  die Richtigkeit seiner Formeln. So erhält er beispielsweise für den Incidenzwinkel  $45^\circ$  die Werthe von

$$\begin{array}{lll} \alpha' = & 72^\circ 38' \text{ beobachtet} & 72^\circ 36' \text{ gerechnet} \\ \alpha'' = & -45^\circ 27,8 & -45^\circ 26 \end{array}$$

Da Neumann seine Versuche in anderer Absicht begann, so legt er auch auf die gegenseitige Neigung der Vibrationen  $\alpha' \alpha''$  kein Gewicht und bemerkt nur nebenher †): »dieses Azimuth  $\alpha''$  steht ungefähr senkrecht auf dem Azimuth  $\alpha'$ «. Obwohl also in dieser citirten Abhandlung Neumann nicht mit ausdrücklichen Worten darauf hinweist, dass die Azimutendifferenz der doppeltgebrochenen Strahlen von  $90^\circ$  verschieden ist, sind doch alle daselbst publicirten Zahlen Beweise für diese Thatsache. Die Summe

\*) Biot, *Traité de Physique*. Paris 1816, 4, 317.

\*\*) Neumann, *Abhandlungen der Berliner Akad.* pro 1835. Berlin 1837, S. 61.

\*\*\*) Diese Formeln sind in der von Neumann (*Pogg. Ann.* 42, 11) gegebenen Fassung.

†) Neumann, *Pogg. Ann.* 42, 1.

der oben citirten Zahlen  $72^{\circ} 38' + 15^{\circ} 27,8 = 88^{\circ} 5,8$  ist hierfür ein genügendes Beispiel.

Es scheint somit fast überflüssig zu sein, einen vor 50 Jahren bereits bewiesenen Satz nochmals begründen zu wollen. Ich habe auch lange gezögert, ehe ich mich entschloss, die gewonnenen Zahlenreihen zu veröffentlichen. Zu dieser Entscheidung haben mich einerseits einzelne nach Neumann's Arbeit erschienene Publicationen, andererseits auch die Erwägung gebracht, dass die von mir verwendete Art der Beobachtung und Rechnung von jener Neumann's vollkommen verschieden ist, und das erhaltene Resultat sich in Form eines einfachen Lehrsatzes zusammenfassen lässt.

Was die ersteren betrifft, so erinnere ich an Wild und Abria. Wild\*) schreibt: »Diese genaue Bestätigung der Theorie (durch Neumann) beschränkt sich nur auf den Eintritt des Lichtes . . . Die Formeln für den Austritt, respective den Durchgang des Lichtes durch durchsichtige Körper sind damit noch nicht geprüft.« Eine totale Ignorirung der maassgebenden Arbeiten von Neumann tritt uns in der Abhandlung von Abria\*\*) entgegen. Seine 1874 geschriebenen Worte: »J'ai eu l'occasion de m'assurer, qu'il y a souvent une grande différence entre les azimuths des plans de polarisation du rayon incident correspondant à l'extinction du rayon ordinaire ou extraordinaire réfracté suivant que l'incidence est normale ou oblique«, lassen erkennen, dass ihm die früheren Arbeiten unbekannt waren, sowie ihm auch trotz seiner Versuche die markante Eigenthümlichkeit der doppeltgebrochenen Strahlen: ihre wechselnde Azimuthdifferenz, unbekannt geblieben ist. Auch wird man heutzutage kaum seine approximativen Beobachtungen, die durchschnittlich vom berechneten Azimuth des extraordinären Strahles um zwei Grade differiren (z. B. beobachtet  $67^{\circ} 37'$ , gerechnet  $64^{\circ} 36'$ ) als das, was der Titel der Arbeit sagt, als »Vérification de la loi d'Huyghens« gelten lassen.

Der zweite mich bestimmende Grund ist die Verschiedenheit der Methode. Neumann und später Abria haben die Polarisationsverhältnisse des »einfallenden« Lichtes ermittelt, Beide haben überdies die Lage der Hauptaxe gegen die Incidenzfläche nur approximativ bestimmt. Die vorliegenden Versuche betreffen jedoch direct die Vibrationsrichtungen der Strahlen nach ihrem Austritt aus optisch vollkommen orientirten Prismen, so dass der Weg des Lichtes im doppeltbrechenden Medium und die Abhängigkeit der Vibrationsrichtung von diesem Wege sich genau angeben lässt.

Zur Beobachtung der Brechungs- und Vibrationsverhältnisse diente mir das Goniometer F u e s s Modell I, dessen Fernrohre mit exact gearbeite-

\*) Wild, 1863, Pogg. Ann. **118**, 495.

\*\*) Abria, Ann. d. chim. V. Ser. **1**, 314.

ten Nicolkreisen versehen sind. Deren Diameter  $0^\circ \dots 180^\circ$  entspricht der Höhenlinie und deshalb auch der verticalen Prismenkante. Die fast absolute Coincidenz beider Richtungen wurde sorgfältig controlirt\*); der etwa noch zu befürchtende Fehler afficirt aber die Zahlen für die Schwingungen von  $\omega$  und  $\epsilon$  im entgegengesetzten Sinne und wird daher durch die Summation dieser Zahlen eliminirt. Die Azimuthdifferenz ist also von diesem Fehler unabhängig.

Da die Theilung der Nicolkreise von  $0^\circ \dots 360^\circ$  durchgeführt ist, so musste eine für die vorliegende Untersuchung passende Angabe der Winkel gewählt werden. Die Ablesungen in dem Quadranten  $0^\circ \dots 90^\circ$  sind mit +, jene in dem Quadranten  $270^\circ - 360^\circ$  mit minus bezeichnet, aber für letztere statt  $360^\circ - \alpha$  direct  $-\alpha$  angegeben worden. Dies stimmt im Wesentlichen mit dem Vorschlage von Neumann\*\*) überein. In unserem Falle sind die positiven Ablesungen im Sinne des Uhrzeigers von der mit  $0^\circ$  zusammenfallenden Kantenrichtung weggezählt. Die Nonien der Nicolkreise erlauben  $5'$  anzugeben, allein die Genauigkeit einer Einstellung auf das Intensitätsminimum ist immer geringer, als bei den anderen jetzt üblichen feineren staurososkopischen Methoden und der mittlere Fehler einer solchen Beobachtung mindestens  $1^\circ$ . Dieser reine Beobachtungsfehler ward jedoch durch zahlreiche Repetitionen (40—50 Mal, bei mehrmaliger Einstellung derselben Incidenz zu verschiedenen Zeiten) zu einem Minimum gemacht. Die so erhaltenen Mittelwerthe sind rechnungsgemäss auf  $\pm 10'$  genau. Hierdurch ist aber der Effect unvermeidlicher Störungen nicht ausgeschlossen, unter welchen die mehrfachen Reflexe eine grosse Rolle spielen. Auch verringert sich die Genauigkeit mit Zunahme der Deviation und Verbreiterung des Strahles. Die Beobachtungen wurden durchgeführt bei Natriumlicht, bei absolut genau bestimmter Incidenz und zwar diese von  $5^\circ$  zu  $5^\circ$  zunehmend, mit Benutzung jeder der beiden den brechenden Winkel einschliessenden Prismenflächen als Incidenzfläche und umfassen Polarisation und Deviation.

Die nachfolgenden Tabellen enthalten die Resultate der Beobachtung und Rechnung für die Prismen: I. mit den Flächen  $b_1 c_1$  — II. mit den Flächen  $b_2 c_2$ . Angegeben ist die jedesmalige Incidenzfläche  $F_i$  und der Incidenzwinkel  $i$  auf eben diese Fläche bezogen. Dann die Deviationen  $D_\omega D_\mu$  für den ordentlichen und ausserordentlichen Strahl, sowie  $r_\omega r_\mu$  die gerechneten inneren Brechungswinkel. Letztere wurden aber nicht auf die wechselnden Incidenzflächen, sondern bei jedem Prisma nur auf je eine dieser Flächen bezogen, damit sich diese Zahlen in eine fortlaufende Reihe ordnen lassen. Diese nach dem bekannten Satze  $A = r + r'$  reducirten

\*) Theilweise mit Benutzung der Methode von Laurent, C. r. 1878, 86, 662.

\*\*) Neumann, Pogg. Ann. 42, 8.



Werthe der Brechungswinkel beziehen sich bei I. alle auf die Fläche  $b$  und sind deshalb mit  $r^b$  bezeichnet, hingegen bei II. alle auf  $c$  und tragen deshalb die Bezeichnung  $r^c$ . Aus  $\omega$ ,  $\mu$  wurde der Hauptbrechungsexponent  $\varepsilon$  gerechnet. Das Vibrationsazimuth ist mit  $\alpha'$  für  $\omega$ , mit  $\alpha''$  für  $\mu$  bezeichnet und deren Differenz in der Columnne  $\alpha' - \alpha''$  angeführt. Die beobachteten Zahlen sind in Antiqua, die gerechneten in Cursiv gedruckt. Die Rechnungsoperationen werden im nächstfolgenden Paragraphen besprochen.

### § 3. Beobachtungen der Refractions- und Polarisationsverhältnisse.

Prisma I.  $b_1 c_1 = 35^\circ 35' 40''$ ,  $t^0 = 48^\circ - 24^\circ$  Cels.

#### a. Die Brechungsexponenten.

$F_i$	$i$	$D_\omega$	$\omega$	$D_\mu$	$\mu$	$\varepsilon$
$c$	$80^\circ 0' 0''$	$43^\circ 1' 40''$	1,658564	$40^\circ 47' 4''$	1,604987	1,486106
$c$	75	$39^\circ 21' 40''$	1,658456	$37^\circ 40' 55''$	1,605803	1,486749
$c$	70	$36^\circ 11' 56''$	1,658486	$34^\circ 4' 36''$	1,606461	1,486656
$b$	0	$39^\circ 16' 40''$	1,658545	$33^\circ 39' 20''$	1,606640	1,486892
$c$	65	$33^\circ 30' 5''$	1,658436	$31^\circ 26' 18''$	1,607058	1,486369
$c$	60	$31^\circ 14' 35''$	1,658509	$29^\circ 14' 0''$	1,607686	1,486435
$b$	5	$32^\circ 40' 25''$	1,658516	$29^\circ 7' 0''$	1,607685	1,486344
$c$	55	$29^\circ 22' 46''$	1,658412	$27^\circ 25' 4''$	1,608152	1,486653
$b$	10	$29^\circ 22' 5''$	1,658483	$26^\circ 32' 20''$	1,608294	1,486865
$c$	50	$27^\circ 53' 26''$	1,658389	$25^\circ 57' 0''$	1,608220	1,486741
$b$	15	$27^\circ 23' 56''$	1,658560	$24^\circ 54' 18''$	1,607972	1,486987
$c$	45	$26^\circ 45' 22''$	1,658530	$24^\circ 48' 10''$	1,607824	1,486688
$c$	40	$25^\circ 56' 58''$	1,658546	$23^\circ 56' 40''$	1,606800	1,486418
$b$	20	$26^\circ 12' 15''$	1,658595	$23^\circ 52' 15''$	1,606682	1,486465
$c$	35	$25^\circ 28' 2''$	1,658487	$23^\circ 22' 26''$	1,605239	1,485995
$b$	25	$25^\circ 33' 0''$	1,658540	$23^\circ 17' 32''$	1,604988	1,486826
$c$	30	$25^\circ 19' 18''$	1,658426	$23^\circ 5' 0''$	1,603026	1,486244
$b$	30	$25^\circ 19' 22''$	1,658449	$23^\circ 3' 52''$	1,602517	1,486759
$c$	25	$25^\circ 32' 48''$	1,658461	$23^\circ 5' 40''$	1,600235	1,486424
$b$	35	$25^\circ 27' 50''$	1,658404	$23^\circ 8' 40''$	1,599365	1,486320
$c$	20	$26^\circ 12' 0''$	1,658510	$23^\circ 25' 20''$	1,596505	1,485957
$b$	40	$25^\circ 56' 48''$	1,658478	$23^\circ 31' 46''$	1,596131	1,486785
$c$	15	$27^\circ 23' 40''$	1,658470	$24^\circ 8' 52''$	1,592157	1,485662
$b$	45	$26^\circ 45' 10''$	1,658443	$24^\circ 12' 10''$	1,592298	1,486435
$b$	50	$27^\circ 53' 34''$	1,658448	$25^\circ 11' 0''$	1,588426	1,486408
$c$	10	$29^\circ 22' 20''$	1,658552	$25^\circ 21' 56''$	1,587350	1,486198
$b$	55	$29^\circ 22' 54''$	1,658467	$26^\circ 29' 40''$	1,584595	1,486497
$c$	5	$32^\circ 40' 15''$	1,658470	$27^\circ 27' 42''$	1,582073	1,486079
$b$	60	$31^\circ 14' 28''$	1,658459	$28^\circ 9' 24''$	1,580657	1,486110
$b$	65	$33^\circ 30' 10''$	1,658471	$30^\circ 13' 20''$	1,577088	1,485925
$c$	0	$39^\circ 16' 30''$	1,658523	$30^\circ 58' 50''$	1,576480	1,486663
$b$	70	$36^\circ 12' 5''$	1,658548	$32^\circ 44' 55''$	1,574339	1,485469
$b$	75	$39^\circ 21' 46''$	1,658497	$35^\circ 44' 50''$	1,571694	1,486235
$b$	80	$43^\circ 1' 20''$	1,658430	$39^\circ 17' 20''$	1,569920	1,486402
Mittlerer Werth: $\omega_{Na} = 1,658487$						$\varepsilon_{Na} = 1,486435$

## b. Die Vibrationsrichtungen:

$F_i$	$i$	$r_\mu^b$	Beob. $\alpha''$ Gerechn. $\alpha''$	$r_\omega^b$	Beob. $\alpha'$ Gerechn. $\alpha''$	Beob. $\alpha' - \alpha''$ Gerechn. $\alpha' - \alpha''$
$c$	800	— 20 15' 18",9	140 25' 14 9 5"	— 00 49' 50",3	1020 40' 101 53 24"	880 15' 87 44 19"
$c$	75	— 1 23 4,3	12 54 12 46 40	— 0 1 36,5	101 40 100 35 59	88 46 87 48 59
$c$	70	— 0 12 17	10 45 10 52 56	1 4 52,3	99 12 98 47 7	88 27 87 54 11
$b$	0	0	— 10 42 — 10 33 1	0	— 100 28 — 100 33 1	89 46 90 0
$c$	65	1 15 53	8 45 8 29 5	2 28 6,1	96 40 96 29 54	87 55 88 0 21
$c$	60	3 0 2,7	5 10 5 36 20	4 6 59,2	94 5 93 43 25	88 55 88 7 5
$b$	5	3 6 27,5	5 5 5 25 38	3 0 49,3	— 95 20 — 95 35 2	90 15 90 9 24
$c$	55	4 58 20,2	1 55 2 17 53	5 59 41	91 0 ? 90 35 0	? 88 17 7
$b$	10	6 11 3,5	0 35 0 16 10	6 0 36,7	— 90 30 — 90 33 15	89 55 90 17 5
$c$	50	7 8 54,4	0 45 1 25 2	8 4 59,9	87 25 87 2 24	88 10 88 25 26
$b$	15	9 15 45,5	5 15 4 56 6	8 58 39,8	— 84 58 — 85 32 31	90 13 90 28 37
$c$	45	9 30 14	— 4 50 — 5 20 18	10 21 20,9	83 50 83 14 16	88 40 88 34 34
$c$	40	12 0 49,1	9 15 9 29 25	12 47 30	79 5 79 14 58	88 20 88 43 53
$b$	20	12 17 26,9	9 25 9 56 54	11 54 1,3	— 80 55 — 80 41 54	90 20 90 58 8
$c$	35	14 39 32,5	13 54 13 44 29	15 21 40,2	74 45 75 9 50	88 39 88 55 59
$b$	25	15 16 0,8	14 55 14 41 42	14 45 45,1	— 75 35 — 76 5 42	90 30 90 47 24
$c$	30	17 25 10,7	17 35 17 59 22	18 2 50,2	71 8 71 4 53	88 43 89 5 55
$b$	30	18 10 49,3	19 33 19 7 15	17 32 48,7	— 71 2 — 71 49 11	90 35 90 56 27
$c$	25	20 16 52	— 21 35 — 22 8 53	20 49 52,3	67 15 67 5 2	88 50 89 13 55
$b$	35	21 0 57,4	23 23 23 10 18	20 14 3,6	— 67 45 — 67 55 4	91 8 91 5 22
$c$	20	23 13 26,6	— 25 35 — 26 8 2	23 41 36,4	63 16 63 15 31	88 51 89 25 33
$b$	40	23 44 53,1	26 48 26 48 41	22 48 13,7	— 64 26 — 64 24 59	91 14 91 15 40
$c$	15	26 14 20,4	— 29 58 — 29 53 46	26 36 58,4	59 45 59 59 24	89 43 89 55 10
$b$	45	26 21 52,3	30 24 30 2 45	25 14 14,2	— 61 0 — 61 19 5	91 24 91 21 46
$b$	50	28 50 0,7	32 52 32 52 15	27 30 36,3	— 58 14 — 58 37 0	91 6 91 29 13
$c$	10	29 18 52,7	— 33 40 — 33 25 47	29 35 4,2	55 55 56 18 43	89 35 89 42 52
$b$	55	31 7 39,7	35 48 35 17 14	29 35 55,1	— 55 56 — 56 17 51	91 44 91 55 5
$c$	5	32 26 11,2	— 36 38 — 36 56 50	32 34 55,4	52 57 53 14 49	89 35 89 51 19

$F_i$	$i$	$r_\mu^b$	Beob. $\alpha''$ Gerechn. $\alpha''$	$r_\omega^b$	Beob. $\alpha'$ Gerechn. $\alpha'$	Beob. $\alpha' - \alpha''$ Gerechn. $\alpha' - \alpha''$
$b$	60°	320 13' 20",4	370 12' 37 22 7"	340 23' 44",6	— 54° 15' — 54 20 23"	940 27' 91 42 30"
$b$	65	35 4 35,9	39 24 39 4 38	33 7 34	— 52 35 — 52 43 26	94 56 91 48 4
$c$	0	35 35 40	— 39 40 — 39 32 7	35 35 40	— 50 27 53	— 90 0
$b$	70	36 38 48,6	40 5 40 26 26	34 40 42,4	— 51 20 — 51 16 49	94 25 91 43 15
$b$	75	37 35 16,4	41 47 41 29 33	35 37 12,9	— 49 58 — 50 26 32	94 45 91 56 5
$b$	90	38 54 3,8	42 0 42 13 50	36 25 42,7	— 50 8 — 49 44 41	92 8 91 58 54

Prisma II.  $b_2 c_2 = 32^\circ 36' 27''$   $t = 18^\circ - 24^\circ$ .

### a. Die Brechungsexponenten.

$F_i$	$i$	$D_\omega$	$\omega$	$D_\mu$	$\mu$	$\varepsilon$
$c$	0°	300 44' 15"	1,658485	240 34' 48"	1,559618	1,486251
$b$	55	27 23 15	1,658492	23 54 25	1,561636	1,486438
$c$	3 41'	28 24 30	1,658570	23 15 45	1,563688	1,486404
$b$	50	25 52 10	1,658544	22 35 35	1,565865	1,485912
$c$	8 44	25 59 0	1,658622	21 49 30	1,569450	1,483970
$b$	45	24 40 50	1,658579	21 36 35	1,570756	1,486161
$c$	13 44	24 27 10	1,658474	20 56 45	1,575090	1,485962
$b$	40	23 48 0	1,658587	20 54 5	1,575392	1,485870
$b$	35	23 13 5	1,658692	20 27 50	1,580043	1,483727
$c$	18 44	23 34 30	1,658592	20 27 30	1,580302	1,486054
$b$	30	22 55 15	1,658494	20 17 25	1,584585	1,485237
$c$	23 44	23 14 40	1,658546	20 17 55	1,588419	1,485587
$b$	25	22 56 20	1,658519	20 22 45	1,588697	1,485621
$c$	28 44	22 53 25	1,658497	20 23 5	1,588754	1,485409
$c$	33 44	23 4 20	1,658522	20 44 0	1,592086	1,485038
$b$	20	23 17 50	1,658552	20 45 55	1,592598	1,485997
$c$	38 44	23 33 5	1,658597	21 20 25	1,595158	1,485567
$b$	15	24 3 34	1,658570	21 28 30	1,595623	1,485609
$c$	43 44	24 19 30	1,658585	22 11 45	1,597527	1,485861
$b$	10	25 20 10	1,658394	22 36 45	1,598144	1,485430
$c$	48 44	25 24	1,658544	23 18 30	1,599016	1,485342
$b$	5	27 22 50	1,658444	24 20 40	1,599970	1,485405
$b$	0	30 44 35	1,658564	27 14 45	1,604163	1,485594

Mittlerer Werth von  $\omega_{Na} = 1,658533$

von  $\varepsilon_{Na} = 1,485793$

### b. Die Vibrationsrichtungen.

$F_i$	$i$	$r_\mu^c$	Beob. $\alpha''$ Gerechn. $\alpha''$	$r_\omega^c$	Beob. $\alpha'$ Gerechn. $\alpha'$	Beob. $\alpha' - \alpha''$ Gerechn. $\alpha' - \alpha''$
$c$	0°	0°	— 42° 15' — 42 4 11"	0°	48° 7' 47 55 49"	90° 22' 90 0
$b$	55	0 58' 41"	42 0 41 23 6	3 0' 33",6	— 50 10 — 50 7 50	92 10 91 30 6"
$c$	3 41'	2 2 6,6	— 40 40 — 40 36 23	1 55 7,3	49 40 49 18 25	90 20 89 54 48

$F_i$	$i$	$r_\mu^c$	Beob. $\alpha''$ Gerechn. $\alpha''$	$r_\omega^c$	Beob. $\alpha'$ Gerechn. $\alpha'$	Beob. $\alpha' - \alpha''$ Gerechn. $\alpha' - \alpha''$
$b$	500	30 49' 6,6	390 2' 39 37 50''	50 3' 57''	— 510 58' — 51 47' 42''	940 0' 91 25 32''
$c$	8 11'	5 12 12,9	— 38 5 — 38 7 8	4 55 23,2	52 6 51 39 0	90 11 89 46 8
$b$	45	5 51 10,5	37 26 37 34 34	7 22 20,8	— 54 6 — 53 44 32	91 32 91 18 7
$c$	13 11	8 19 31,8	— 35 15 — 35 24 4	7 54 15,0	54 36 54 12 54	89 51 89 36 58
$b$	40	8 32 37,9	35 42 35 12 2	9 48 19,8	— 55 23 — 54 59 7	91 5 91 11 9
$b$	35	11 19 19,7	32 25 32 31 35	12 22 37,6	— 58 33 — 58 32 59	90 58 91 4 34
$c$	18 11	11 23 20,1	— 32 26 — 32 27 34	10 50 40,7	56 44 56 59 50	89 10 89 27 24
$b$	30	14 12 50,7	29 21 29 29 42	15 3 39,9	— 61 34 — 61 26 33	90 55 90 56 15
$c$	23 11	14 22 49,0	— 29 0 — 29 18 45	13 43 51,1	60 30 59 58 51	89 30 89 17 56
$b$	25	17 10 48,7	26 30 26 6 57	17 50 41,2	— 64 30 — 64 40 44	91 0 90 47 41
$c$	28 11	17 17 38,1	— 26 8 — 25 58 50	16 32 42,9	63 11 63 8 18	89 19 89 7 8
$c$	33 11	20 6 25,4	— 22 5 — 22 30 55	19 16 8,6	67 0 66 25 49	89 5 88 56 4
$b$	20	20 12 22,6	22 7 22 22 44	20 42 24,5	— 68 35 — 68 15 14	90 42 90 37 58
$c$	38 11	22 48 4,4	— 18 45 — 18 58 56	21 53 27,3	70 18 69 48 15	89 3 88 46 51
$b$	15	23 16 21,2	18 35 18 20 14	23 37 47,4	— 72 30 — 72 9 7	91 5 90 29 21
$c$	43 11	25 21 51,3	— 15 25 — 15 25 39	24 22 6,2	73 35 73 10 4	89 0 88 55 42
$b$	10	26 22 10,3	14 30 13 59 28	26 35 49,6	— 75 53 — 76 20 12	90 28 90 19 40
$c$	48 11	27 46 50,4	— 10 53 — 11 56 16	26 42 9,5	77 25 76 35 12	88 18 88 29 28
$b$	5	29 29 5,5	9 10 9 24 24	29 35 42,2	— 81 5 — 80 45 32	90 15 90 9 56
$b$	0	32 36 27	5 7 4 59 52	32 36 27	— 83 10 — 85 20 28	90 17 90 0 0

#### § 4. Rechnungsformeln und Discussion der Resultate.

a) Zur Berechnung des Hauptbrechungs exponenten  $\varepsilon$  aus den beobachteten Werthen  $\omega$  und  $\mu$  wurde folgende Formel benutzt:

$$\varepsilon = \mu \frac{\sin \mathfrak{M}}{\sin \mathfrak{D}}, \quad \text{I}$$

worin

$$\mu \sin A \cos \mathfrak{M} = \omega \sin A \cos \mathfrak{D} = \cos \zeta_i \sin i' - \cos \zeta_a \sin i \quad \text{Ia}$$

und die Neigung der Hauptaxe zur Incidenzfläche mit  $\zeta_i$ , zur Austrittsfläche mit  $\zeta_a$  bezeichnet, der Incidenzwinkel  $i$  und  $A + D = i + i'$  ist.

Da mit Natriumlicht und breiter Spaltöffnung beobachtet ward, der

brechende Winkel überdies klein ist, ferner die Bestimmung der Brechungs-  
exponenten nur als Nebenoperation erschien, so war hier von vornherein  
eine absolute Genauigkeit von  $\epsilon$  weder zu erwarten, noch anzustreben.  
Genauere Bestimmungen von  $\epsilon$  wurden mit anderen Flächencombinationen  
derselben Prismen durchgeführt und sind im ersten Anhang zusammen-  
gestellt. Die Mittelwerthe von  $\omega$  und  $\epsilon$ , welche aus den vorstehenden  
Tabellen resultiren, sind aber so nahe den von Rudberg, Mascart,  
Willigen, Sarasin . . . erhaltenen Zahlen, dass sie als genügende Be-  
weise für die Richtigkeit des ermittelten Weges der Lichtstrahlen im  
Medium gelten müssen. Man kann daher behaupten, die Beobachtungen  
sind fast absolut genau gegen die Hauptaxe orientirt. Dies ist aber jene  
Bedingung, von deren Erfüllung das Vorausberechnen der Polarisation des  
Strahles abhängt.

b) Die beobachteten Vibrationsrichtungen zeigen eine gesetz-  
mässige Abhängigkeit von der Fortpflanzungsrichtung des Lichtes im Kry-  
stall und sind für idente Richtungen — trotz wechselnder Incidenzfläche  
und Incidenzwinkel — gleich. Ueberblickt man den Gesamtverlauf der  
Reihen, dann erkennt man die vollkommene Concordanz zwischen Rech-  
nung und Beobachtung.

Bezeichnet man mit dem Ausdrucke Transversalebene jene auf  
die Fortpflanzungsrichtung senkrechte Ebene ( $Tr_i = 90^\circ$ ), in welcher die  
Lichtschwingungen erfolgen, dann kann man die Resultate der Unter-  
suchung durch den Satz ausdrücken:

»Die Vibrationen erfolgen für  $\mu$  parallel, für  $\omega$  senk-  
recht zu jener Linie in der Transversalebene, welche der  
Projection der Hauptaxe auf die jeweilige — für  $\omega$  und  $\mu$   
wechselnde — Transversalebene entspricht.

Die Vorausberechnung der Vibrationsrichtung erfolgt deshalb nach  
folgender Formel, zu deren Verständniss beifolgende  
sphärische Projection dienen mag. In letzterer ent-  
spricht der Punkt  $Z$  der Hauptaxe,  $K$  der brechenden  
Kante,  $F_i$  dem Einfallslothe, der Bogen  $F_i r_i$  dem Werthe  
des inneren Brechungswinkel  $r_i$  und deshalb ist der  
Winkel  $90^\circ - Zr_i F_i$  gleich dem Azimuth von der  
Projection der Hauptaxe auf die Transversalebene  $TT$ ,  
wenn dieses Azimuth von der Kante  $K$  weggezählt  
wird. Da die Neigung der Incidenzflächen zur Haupt-  
axe  $\angle F_i Z$  (früher schon mit  $\zeta_i$  bezeichnet), sowie der Winkel des Haupt-  
schnittes  $\varphi = \angle r_i F_i Z$ , aus den krystallographischen Angaben des § 1  
folgen, so erhält man

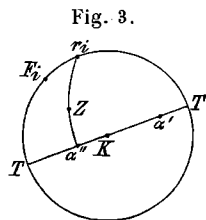


Fig. 3.

\*) Vergl. Schrauf, Phys. Min. 2, Formel 214.

für  $\mu$ 

$$\operatorname{tang} \alpha'' = \frac{\operatorname{cotang} \zeta \sin r_\mu - \cos r_\mu \cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad \text{II}$$

für  $\omega$ 

$$\operatorname{cotang} \alpha' = \frac{\operatorname{cotang} \zeta \sin r_\omega - \cos r_\omega \cos \varphi}{\sin \varphi}, \quad \text{III}$$

wodurch die Orientirung der Vibrationen gegen die brechende Kante erhalten wird. In Fig. 3 deuten die Punkte  $\alpha''$  und  $\alpha'$  dieselben an, und aus deren Lage — rechts, links von  $K$  — sind auch die Vorzeichen von  $\alpha'$  und  $\alpha''$  zu ersehen. Diese gerechneten Werthe von  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  sind in die vorhergehenden Tabellen mit Cursivschrift unter den entsprechenden Beobachtungen eingefügt.

Schliesslich hebe ich ausdrücklich hervor, dass die fraglichen Vibrationsrichtungen auch dadurch ermittelt werden können, wenn man nach dem Vorgange von Neumann jenes Azimuth des einfallenden Strahles aufsucht, für welches die Intensität von  $\omega$  oder  $\mu$  gleich Null ist. Wie ich mich vielfach überzeugt habe, erhält man in allen Fällen gleiche Werthe des Azimuthes und dieselbe Azimuthdifferenz, ob man den eintretenden ( $\alpha_i$ ) oder austretenden Strahl ( $\alpha$ ) analysirt. Nur sind die Vorzeichen vom Azimuth  $\alpha_i$  jenem von  $\alpha$  entgegengesetzt, weil die Nicolkreise am Collimator und Beobachtungsfernrohr entgegengesetzt — gegen die brechende Kante — orientirt sind.

c) Azimuthdifferenz. Die Betrachtung der obigen Formeln für  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  lehrt unmittelbar, dass die Differenz beider  $90^\circ$  ist, also die Vibrationen zu einander senkrecht sind, wenn  $r_\omega = r_\mu$  wird, gleichgültig wie die Incidenz-Fläche oder Winkel ist. Einen solchen Fall finden wir in der Tabelle vom Prisma I, wenn wir  $\alpha''$  von  $c$ ,  $i = 25^\circ$  mit  $\alpha'$  von  $b$ ,  $i = 35^\circ$  vergleichen.

Ferner entnimmt man den Formeln, dass mit Zunahme von  $r_i$  die Azimuthdifferenz  $\geq 90^\circ$  werden muss. Aus dem Differentiale der Functionen II und III:

$$\begin{aligned} d\alpha'' &= (1 - \sin^2 \alpha'') \Psi_\mu dr_\mu \\ -d\alpha' &= \sin^2 \alpha' \Psi_\omega dr_\omega, \end{aligned} \quad \text{IV}$$

worin

$$\Psi_{\omega, \mu} = (\operatorname{cotang} \zeta \sin \varphi^{-1} \cos r + \operatorname{cotang} \varphi \sin r)_r = r_\mu r_\omega$$

ist, wird ersichtlich, dass die Werthe von  $\alpha'$ ,  $\alpha''$  im entgegengesetzten Sinne (mit dem inneren Brechungswinkel  $r$ ) variiren. Dass dies thatsächlich zutrifft, zeigt ein Blick auf die Tabellen. Wenn ferner für  $i = 0^\circ$  die Relation  $\alpha' - \alpha'' = 90^\circ$  gilt, so wird bei Zunahme von  $i$  die Azimuthdifferenz nur wenig, soweit der Einfluss der obigen Factoren, die nahezu gleich sind, reicht, sich von  $90^\circ$  unterscheiden können.

Bildet man andererseits — mit Berücksichtigung der effectiven Vorzeichen — die Differenz  $(\alpha' - \alpha'')$  aus den Gleichungen II, III, und zwar dadurch, dass man in Annäherung statt der Functionen die Winkel, sowie für  $\cotang \zeta \cos \varphi$  die Constanten  $C'$  und  $C''$  einführt — so erhält man folgende Relation:

$$A = 90^\circ - (\alpha' - \alpha'') = (r_\omega - r_\mu) C' + C'' \dots \quad V$$

diese besagt: in erster Annäherung entspricht der Transgredient, d. i. der Unterschied der Azimuthdifferenz von  $90^\circ$ , dem Unterschiede der inneren Brechungswinkel für ordinäre und extraordinäre Strahlen.

Als Beispiele hierfür können die ganzen Tabellen der Vibrationsbestimmungen gelten. Nur einige Zahlen will ich hier wiederholen:

$$\begin{array}{lll} \text{Prisma II.} & c, i = 28^\circ & A = 52' 55'' & r_\omega - r_\mu = 44' 56'' \\ & c, i = 48 & A = 4^\circ 30' 32'' & r_\omega - r_\mu = 4^\circ 4' 41'' \end{array}$$

Dadurch hat man ein einfaches Mittel zur Verfügung, um den Minimalwerth des Transgredienten: also der Differenz der Extinctionsrichtungen zweier doppeltgebrochener Strahlen von  $90^\circ$  voraussagen zu können, weil die Factoren  $C'$ ,  $C''$  sich nur wenig von der Einheit unterscheiden.

Wenn bei stauroskopischen Untersuchungen nicht genau senkrechte Incidenz stattfindet, wird auch daselbst der Werth des Transgredienten zu berücksichtigen sein.

Die letztgewonnene Gleichung hat ihr Analogon in dem theoretischen Lehrsatz von von Lang\*), welchen Hollefreund\*\*) neuerdings reasumirt. Lang beweist: »der zur schnelleren Welle gehörige Strahl steht senkrecht auf der Schwingungsrichtung der langsameren und umgekehrt.«

## Anhang I.

Die Hauptbrechungsexponenten  $\omega$ ,  $\varepsilon$ , von Calcit. Die Flächencombinationen  $a_1 c_1 = 55^\circ 37' 46''$  und  $a_2 c_2 = 62^\circ 6' 44''$  der nach § 4 krystallographisch orientirten Prismen I, II erwiesen sich geeignet, um mit einiger Genauigkeit die Dispersionsverhältnisse von  $\omega$ ,  $\varepsilon$  zu revidiren. Die Beobachtungen wurden mit variabler Incidenz durchgeführt, und die nachfolgenden Zahlen stellen das Mittel von 49maliger Durchmusterung des ganzen Spectrum dar.  $\varepsilon$  wurde aus  $\mu$  mittelst Formel I berechnet. Für die Fraunhofer'schen Linien wurden die Wellenlängen

\*) von Lang, Sitzungsber. der Wiener Akad. 1864, 43, Formel 65.

\*\*) Hollefreund, Nova Act. Leopold. Halle 1883, 46, 20.

nach Ditscheiner, für Lithium und Thallium nach Thalén benutzt; überdies in der Dispersionsformel  $\lambda_D'' = 0,5891$  gesetzt.

Das totale Mittel aller Beobachtungen ist:

	Beobachtet:	Berechnet:		
$\omega_B$	1,6530492	1,6530434	$\omega_B$	Rudberg 1,65308
$\omega_{Li}$	1,6538494	1,6538023		Mascart 1,65296
$\omega_C$	1,6545370	1,6545419		Willigen I. 1,65302
$\omega_D$	1,6584945	1,6584639		Willigen III. 1,65299
		1,6585086		Sarasin I. 1,65285
$\omega_{Th}$	1,6628526	1,6628765	$\omega_F$	Sarasin II. 1,65283
$\omega_E$	1,6636197	1,6636412		
$\omega_b$	1,6645892	1,6646194		Rudberg 1,66802
$\omega_F$	1,6684234	1,6684607		Mascart 1,66793
$\omega_G$	1,6764235	1,6764077		Willigen I. 1,66794
$\omega_h$	1,6804515	1,6804438		Willigen III. 1,66792
$\omega_H$	1,6833770	1,6833608		Sarasin I. 1,66783
				Sarasin II. 1,66773
				Glazebrook 1,66779

Die Dispersionsformel, welche aus diesen beobachteten Werthen von  $\omega$  folgt, lautet:

$$\omega = 0,00024954 \lambda^2 + 1,637698 + 0,00720696 \lambda^2 - 0,0000054496 \lambda^{-4} + 0,0000005802 \lambda^{-8}.$$

Für den Hauptbrechungsexponenten  $\varepsilon$  erhielt ich durch Rechnung aus  $\omega$  und den jeweiligen  $\mu$  folgende Zahlen\*):

	Beobachtet:	Berechnet:		
$\varepsilon_B$	1,483780	1,483794	$\varepsilon_B$	Rudberg 1,48394
$\varepsilon_{Li}$	1,484179	1,484144		Mascart 1,48409
$\varepsilon_C$	1,484463	1,484446		Willigen III. 1,48399
$\varepsilon_D$	1,486252	1,486304		Sarasin I. 1,48394
				Sarasin II. 1,48384
$\varepsilon_{Th}$	1,488335	1,488303		
$\varepsilon_E$	1,488565	1,488653		
$\varepsilon_b$	1,489094	1,489102		
$\varepsilon_F$	1,490660	1,490723	$\varepsilon_F$	Rudberg 1,49075
$\varepsilon_G$	1,494584	1,494497		Mascart 1,49084
$\varepsilon_h$	1,496366	1,496342		Willigen III. 1,49076
				Sarasin I. 1,49079
$\varepsilon_H$	1,497704	1,497670		Sarasin II. 1,49069
			Glazebrook 1,49074	

\*) Mascart, Ann. sc. d. l'écol. norm. Paris 1864, 1, 237. Willigen, Arch. d. Mus. Teyler II—III, 1870, 64. Glazebrook, Phil. Transact. 1880, 171, 424. Sarasin, C. r. 1882, 95, 680. Diese Zeitschr. 9, 605.



Die gerechneten Zahlen für  $\varepsilon$  basiren auf der Dispersionsformel:

$$\varepsilon = 1,476851 + 0,0272305 \lambda^{-2}.$$

Die vorstehenden Beobachtungen gelten für die mittlere Temperatur  $t = 20,5$  Celsius, und beziehen sich auf  $CaCO_3$  mit dem mittleren Volumgewicht  $d \frac{20,5}{20,5} = 2,71712$  oder  $d \frac{20,5}{4} = 2,71253$ .

## Anhang II.

Effectives Minimum der Deviation des ausserordentlichen Strahles. Das theoretische Minimum der Deviation setzt voraus, dass  $r = r' = \frac{A}{2}$  sei. Mit diesem theoretischen Minimum fällt das beobachtete effective Minimum der Deviation bei dem ausserordentlichen Strahle nur dann zusammen, wenn die Halbirungslinie des brechenden Winkels in den optischen Hauptschnitt fällt. Den Beweis hierfür hat von Lang\*) gegeben.

Die Differenz der Ablesungen für die Deviationen bei effectivem und theoretischem Minimum ist eine Function der Wellenfläche des betreffenden Mediums. Für Körper mit schwacher Doppelbrechung ist dieser Winkelunterschied kaum bemerkbar, bei Substanzen mit starker Doppelbrechung, wie es Spath ist, beträgt er circa 1 Minute. Da es für manche Untersuchungen von Nutzen sein kann, genau über die Grösse des Fehlers orientirt zu sein, welchen man begeht, wenn man  $\mu$  des effectiven Minimum mit  $\mu'$  des theoretischen Minimum gleichsetzt, deshalb habe ich an meinen Calcitprismen einige diesbezügliche Beobachtungsreihen durchgeführt.

Prisma I.  $b_1 c_1 = 35^\circ 35' 40''$ .

Theoretisches Minimum: Incidenzfläche $b_1$			Incidenzfläche $c_1$		
$i$	$=$	$29^\circ 17' 0''$	$i$	$=$	$29^\circ 17' 25''$
$D$	$=$	$23 \quad 4 \quad 4$	$D$	$=$	$23 \quad 4 \quad 8$
$\mu'_{Na}$	$=$	$1,602675$	$\mu'_{Na}$	$=$	$1,602702$
Effectives Minimum:					
$i$	$=$	$34^\circ 33' 13''$	$i$	$=$	$27^\circ 13' 8''$
$D$	$=$	$23 \quad 3 \quad 10$	$D$	$=$	$23 \quad 3 \quad 9$
$r_b$	$=$	$19 \quad 4 \quad 19,5$	$r_e$	$=$	$16 \quad 35 \quad 38,8$
$\mu_{Na}$	$=$	$1,601483$	$\mu_{Na}$	$=$	$1,601566$

Zur Controle des effectiven Minimums kann man die Gleichung

$$\sin i \sin r' = \sin i' \sin r$$

benutzen, in welcher  $i, r$  und  $i', r'$  auf die beiden möglichen Incidenz-

\*) von Lang, Sitzungsber. der Akad. Wien 1858, **33**, 160.

flächen zu beziehen sind. Wie man aus den Zahlenwerthen für  $\mu$  entnimmt, beträgt der Fehler, den man begeht, wenn man theoretisches und effectives Minimum bei Calcit verwechselt, eine Einheit in der dritten Decimalstelle. Bei schwächer doppeltbrechenden Körpern wird daher die dritte Decimalstelle für beide Minimumstellungen noch ident sein. Uebrigens ist es selbstverständlich, dass das effective Minimum der Deviation nicht zugleich jenem wirklichen Minimum des ausserordentlichen Brechungsexponenten entspricht, welches dasselbe Prisma bei grösserem oder kleinerem Incidenzwinkel — je nach der Lage des Hauptschnittes — zu liefern vermag.

---

### Inhalt:

§ 1. Orientirung der verwendeten Prismen aus isländischem Doppelspath, deren Volumgewicht und mittlere lineare Ausdehnung.

§ 2. Ueber die Azimuthdifferenz doppeltgebrochener Strahlen.

§ 3. Beobachtungen der Refractions- und Polarisationsverhältnisse.

§ 4. Rechnungsformeln und Discussion der Resultate.

Anhang I. Die Hauptbrechungsexponenten  $\omega$ ,  $\varepsilon$  des Calcit.

Anhang II. Effectives Minimum der Deviation des ausserordentlichen Strahles.

---