Über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen.

Von

A. Hurwitz in Zürich.

In meiner Dissertation*) habe ich im Anschluß an die Arbeiten von R. Dedekind**) und F. Klein***) die Grundlagen einer Theorie der elliptischen Modulfunktionen entwickelt. Meine Darstellung läßt sich aber, wie ich seither gefunden habe, in einigen Punkten noch wesentlich vereinfachen. Ich möchte deshalb in der vorliegenden Arbeit auf den in meiner Dissertation behandelten Gegenstand nochmals zurückkommen. Dabei beschränke ich mich, um nicht zu weitläufig zu werden, auf die ersten Elemente der Theorie. Diese jedoch werde ich in aller Ausführlichkeit behandeln, um einerseits einen vollständigen Überblick über die Hilfsmittel, welche ich zur Begründung der Theorie verwende, zu ermöglichen und um andererseits die gegenwärtige Arbeit so zu gestalten, daß sie ohne Zuhilfenahme anderer Abhandlungen verständlich ist. Daß die hier mitgeteilten Betrachtungen, wenn man sie in geeigneter Weise verallgemeinert, auch in der Theorie der automorphen Funktionen Anwendung finden können, wird dem kundigen Leser nicht entgehen.

§ 1.

Äquivalente Größen.

Derjenige Teil der komplexen Zahlenebene, welcher die Zahlen mit positiv-imaginärem Bestandteil repräsentiert, soll als *„positive Halbebene“*,

---

*) Grundlagen einer independenten Theorie der elliptischen Modulfunktionen und Theorie der Multiplikatorgleichungen erster Stufe. (Diese Annalen, Bd. 18, S. 528.)

**) Schreiben an Herrn Borchardt über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen. (Crelles Journal, Bd. 83, S. 265)

***) Über die Transformation der elliptischen Funktionen und die Auflösung der Gleichungen fünften Grades. (Diese Annalen, Bd. 14, S. 111.) Eine umfassende Darstellung der Theorie gaben F. Klein und R. Fricke in dem Werke: „Vorlesungen über die Theorie der elliptischen Modulfunktionen“. (Bd. I, Leipzig 1890; Bd. II, Leipzig 1892.)

derjenige Teil, welcher die Zahlen mit negativ-imaginärem Bestandteil repräsentiert, als *„negative Halbebene“* bezeichnet werden. Die gemeinsame Begrenzung dieser Halbebenen wird durch die Achse der reellen Zahlen gebildet.

Ist nun

$$\omega = x + iy, \qquad (y > 0) \tag{1}$$

ein Punkt der positiven Halbebene, so möge

$$H(\omega) = \frac{x^2 + y^2 + 1}{y} \tag{2}$$

die „Höhe“ des Punktes ω heißen*). Die Höhe $H(\omega)$ hat stets einen positiven, endlichen Wert. Sie läßt sich ferner durch ω und die zu ω konjugierte Größe

$$\overline{\omega} = x - iy$$

in der Gestalt

$$H(\omega) = 2i \cdot \frac{\omega\overline{\omega} + 1}{\omega - \overline{\omega}} \tag{3}$$

ausdrücken.

Wenn nun weiter zwischen den beiden Größen ω und ω' eine Gleichung der Form

$$\omega' = \frac{\alpha\omega + \beta}{\gamma\omega + \delta} \tag{4}$$

besteht, in welcher $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ bedeuten, so nennen wir die Größen ω und ω' „äquivalent“, eine Bezeichnung, die wir auch auf die die Größen darstellenden Punkte der komplexen Zahlenebene übertragen.

Die aus (4) folgende Gleichung

$$\frac{1}{2i}(\omega' - \overline{\omega}') = \frac{1}{2i}(\omega - \overline{\omega}) \cdot \frac{1}{(\gamma\omega + \delta)(\gamma\overline{\omega} + \delta)} \tag{5}$$

lehrt, daß die imaginären Komponenten von ω und ω' das nämliche Vorzeichen haben. Wenn also ω in der positiven Halbebene liegt, so gilt dasselbe von jedem zu ω äquivalenten Punkte ω'.

Da zwei Größen, die einer dritten äquivalent sind, auch einander äquivalent sind (eine Tatsache, welche die „Gruppeneigenschaft“ der Substitutionen (4) zum Ausdruck bringt), so lassen sich die Punkte der positiven Halbebene in Systeme derart anordnen, daß zwei Punkte, die demselben Systeme angehören, einander äquivalent, zwei Punkte, die verschiedenen Systemen angehören, nicht äquivalent sind. Ist ω irgend ein Punkt

*) Die Einführung des Begriffes der Höhe rechtfertigt sich durch die weiter folgenden Betrachtungen. Doch möchte ich hier bemerken, daß ich durch sehr allgemeine Untersuchungen über automorphe Funktionen von einer und mehreren Variabeln zu diesem Begriffe geführt worden bin.

eines solchen Systems, so ergibt die Gleichung (4) die sämtlichen Punkte ω' dieses Systems, wenn α, β, γ, δ alle möglichen ganzen Zahlen der Determinante $\alpha\delta - \beta\gamma = 1$ durchlaufen.

Die Höhe des durch die Gleichung (4) definierten Punktes ω' drückt sich nun nach (3) und (5) in der Form aus:

$$(6) \qquad H(\omega') = 2i\,\frac{(\alpha\omega+\beta)(\alpha\overline{\omega}+\beta)+(\gamma\omega+\delta)(\gamma\overline{\omega}+\delta)}{\omega-\overline{\omega}}.$$

Hieraus ziehen wir zwei wichtige Folgerungen.

Einerseits ergibt nämlich die besondere Annahme $\alpha=\delta=0$, $\beta=-1$, $\gamma=1$, daß

$$(7) \qquad H\left(-\frac{1}{\omega}\right) = H(\omega)$$

ist. Die beiden Punkte ω und $-\frac{1}{\omega}$ haben also stets die nämliche Höhe.

Andererseits bemerken wir, daß der Zähler des Ausdrucks (6) eine definite (quadratische) Form der Substitutionskoeffizienten α, β, γ, δ ist. Daraus folgt, daß unter allen ganzzahligen Systemen α, β, γ, δ $(\alpha\delta-\beta\gamma=1)$ sich eines oder mehrere befinden, für welche $H(\omega')$ möglichst klein ausfällt. In einem System äquivalenter Punkte gibt es also stets einen oder mehrere von minimaler Höhe.

Betrachten wir nun irgend ein System äquivalenter Punkte! In demselben sei ω derjenige (oder einer derjenigen) von minimaler Höhe.

Nach Gleichung (7) dürfen wir voraussetzen, daß

$$(8) \qquad |\omega| \geqq 1$$

ist, d. h. daß der absolute Betrag von ω nicht kleiner als 1 ist. Denn anderenfalls könnte man den Punkt ω durch den Punkt $-\frac{1}{\omega}$ ersetzen, dem die gleiche minimale Höhe zukommt.

Für jeden beliebigen Punkt

$$\omega' = \frac{\alpha\omega+\beta}{\gamma\omega+\delta}$$

des betrachteten Punktsystems ist

$$\frac{H(\omega')}{H(\omega)} = \frac{(\alpha\omega+\beta)(\alpha\overline{\omega}+\beta)+(\gamma\omega+\delta)(\gamma\overline{\omega}+\delta)}{\omega\overline{\omega}+1} \geqq 1.$$

Diese Ungleichung liefert für die besonderen Annahmen

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 1\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}1, & -1\\ 0, & 1\end{pmatrix},$$

$$(9) \qquad \omega+\overline{\omega} \geqq -1, \quad \omega+\overline{\omega} \leqq 1.$$

Ein Punkt ω, welcher den Ungleichungen (8) und (9) genügt, liegt nun im Innern oder auf dem Rande desjenigen ins Unendliche laufenden

Gebietes der positiven Halbebene, welches durch den Kreis mit dem Mittelpunkt 0 und dem Radius 1 und durch zwei zur Achse der rein imaginären Zahlen in den Abständen $+\frac{1}{2}$ bez. $-\frac{1}{2}$ parallel laufenden Geraden begrenzt wird. Dieses Gebiet soll in der Folge stets durch G bezeichnet werden.

Demnach gilt folgender Satz:

„In einem System äquivalenter Punkte gibt es stets einen, welcher im Innern oder auf dem Rande des Gebietes G liegt."

Es seien AC, $A'C'$ die geradlinigen Teile, ABA' der krummlinige Teil des Randes von G, wobei B die auf der Achse der imaginären Zahlen liegende Mitte des Kreisbogens ABA' bezeichnet. (Vgl. Fig. 1.) Durchläuft der Punkt ω die Linie AC, so beschreibt der äquivalente Punkt $\omega+1$ die Linie $A'C'$, und durchläuft der Punkt ω den Kreisbogen AB, so beschreibt der äquivalente Punkt $-\frac{1}{\omega}$ den Kreisbogen $A'B$. Hiernach sind die Randpunkte des Gebietes paarweise äquivalent und diese Tatsache veranlaßt uns zu folgender Festsetzung:

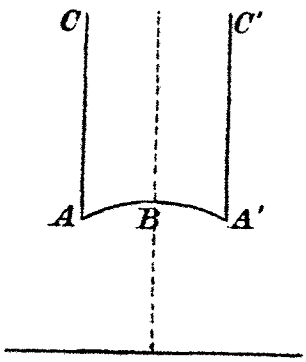

Fig. 1.

Von den Randpunkten des Gebietes G sollen nur die auf den Linien AC und AB befindlichen zu dem Gebiete G gerechnet werden; d. h., wenn gesagt wird, ein Punkt „liege im Gebiete G" oder „gehöre dem Gebiete G an", so soll darunter verstanden werden, daß der Punkt entweder im Innern von G oder auf einer der Randlinien AC und AB liegt.

Aus dem obigen Satze folgt nun unmittelbar:

In einem System äquivalenter Punkte gibt es stets einen, welcher dem Gebiete G angehört.

Es wäre nun leicht, zu zeigen, daß es auch stets nur einen einzigen solchen Punkt in einem System äquivalenter Punkte gibt*). Aber wir

*) Es folgt dies daraus, daß die Ungleichung

$$\frac{H(\omega')}{H(\omega)} = \frac{(\alpha\omega+\beta)(\alpha\bar{\omega}+\beta)+(\gamma\omega+\delta)(\gamma\bar{\omega}+\delta)}{\omega\bar{\omega}+1} > 1$$

stets erfüllt ist, wenn ω im Innern von G liegt, ausgenommen für

$$\begin{pmatrix}\alpha, & \beta\\ \gamma, & \delta\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1, & 0\\ 0, & 1\end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix}0, & -1\\ 1, & 0\end{pmatrix};$$

sowie, daß Analoges gilt, wenn ω auf dem Rande von G liegt.

brauchen uns bei dem Nachweise dieser Tatsache nicht aufzuhalten, weil sich dieselbe im weiteren Verlaufe unserer Untersuchungen ganz von selber ergeben wird.

§ 2.

Die Modulformen $G_n(\omega_1, \omega_2)$.

Es seien jetzt ω_1 und ω_2 zwei komplexe Veränderliche, welche zunächst nur der Einschränkung unterliegen sollen, daß ihr Quotient $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ einen endlichen, nicht reellen Wert besitzt.

Die Summe

$$G_n \equiv G_n(\omega_1, \omega_2) = \sum{}' \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^n}, \tag{10}$$

erstreckt über alle Paare ganzer Zahlen m_1, m_2, mit Ausschluß des einen Paares $m_1 = 0$, $m_2 = 0$, besitzt dann einen von der Anordnung der Summation unabhängigen stets endlichen Wert, sobald n größer als 2 ist.

Hieraus folgt, daß für $n > 2$ $G_n(\omega_1, \omega_2)$ eine „Modulform" ist, womit wir nichts anderes besagen wollen, als daß $G_n(\omega_1, \omega_2)$ eine homogene Funktion von ω_1, ω_2 vorstellt, die ungeändert bleibt, wenn ω_1, ω_2 einer linearen ganzzahligen Substitution der Determinante 1 unterworfen werden.

D. h. es gilt die Gleichung

$$G_n(\omega_1', \omega_2') = G_n(\omega_1, \omega_2), \qquad (n > 2) \tag{11}$$

falls

$$\omega_1' = \alpha\omega_1 + \beta\omega_2, \quad \omega_2' = \gamma\omega_1 + \delta\omega_2 \qquad (\alpha\delta - \beta\gamma = 1) \tag{12}$$

ist, unter $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ ganze Zahlen verstanden.

Übrigens haben unter den Summen G_n nur diejenigen mit geradem Index n ein Interesse; denn für einen ungeraden Wert von n zerstören sich die den Zahlenpaaren (m_1, m_2) und $(-m_1, -m_2)$ entsprechenden Glieder in der Summe (10), sodaß dann G_n identisch Null ist.

Die den Indices $n = 1$, $n = 2$ entsprechenden Summen G_1 und G_2 sind, wie sich sogleich zeigen wird, nicht unabhängig von der Anordnung der Summation. Näheres über diese Summen ergeben die nachstehenden Betrachtungen.

Es möge m die Glieder eines gegebenen, übrigens beliebig beschaffenen Systems von untereinander verschiedenen ganzen Zahlen durchlaufen. Dann soll zur Vereinfachung der Schreibweise die Bedeutung des Zeichens

$$\sum_m \varphi(m) \tag{13}$$

wie folgt festgesetzt werden. Man verstehe unter

$$\sum_{-\lambda}^{+\lambda}{}' \varphi(m)$$

die Summe derjenigen Werte von $\varphi(m)$, welche den der Bedingung

$$-\lambda \leqq m \leqq +\lambda$$

genügenden Werten von m entsprechen. Dann definieren wir das Zeichen (13) durch die Gleichung

$$\sum_m{}' \varphi(m) = \lim_{\lambda=\infty} \sum_{-\lambda}^{+\lambda}{}' \varphi(m). \tag{14}$$

Durchläuft ferner das Zahlenpaar m_1, m_2 alle Glieder eines unendlichen Systems voneinander verschiedener Zahlenpaare, so soll das Zeichen

$$\sum_{m_1}{}' \sum_{m_2}{}' \varphi(m_1, m_2) \tag{15}$$

folgende Bedeutung haben: Wir bilden zunächst, für einen festen Wert von m_1,

$$\sum_{m_2}{}' \varphi(m_1, m_2) = \psi(m_1);$$

diese Summe ist eine Funktion von m_1 und als solche mit $\psi(m_1)$ bezeichnet worden. Nun definieren wir:

$$\sum_{m_1}{}' \sum_{m_2}{}' \varphi(m_1, m_2) = \sum_{m_1}{}' \psi(m_1). \tag{16}$$

Nach dieser Festsetzung hat man z. B. wohl zu unterscheiden zwischen den beiden Summen

$$\sum_{m_1}{}' \sum_{m_2}{}' \varphi(m_1, m_2) \quad \text{und} \quad \sum_{m_2}{}' \sum_{m_1}{}' \varphi(m_1, m_2).$$

Diese beiden Summen werden freilich im Falle absoluter Konvergenz denselben Wert repräsentieren; im Falle bedingter Konvergenz können sie dagegen verschiedene Werte besitzen.

Dies vorausgeschickt, betrachten wir die für jeden nicht ganzzahligen endlichen Wert a gültige Gleichung

$$\sum_m{}' \frac{1}{a+m} = \pi \cot(a\pi) = i\pi \frac{e^{ai\pi} + e^{-ai\pi}}{e^{ai\pi} - e^{-ai\pi}}, \tag{17}$$

in welcher m alle ganzzahligen Werte durchläuft.

Mit Hilfe dieser Gleichung leiten wir leicht den Wert der Summe

$$S = \sum_{m_1}{}' \sum_{m_2}{}' \frac{1}{(m_1 - n_1)\omega_1 + (m_2 - n_2)\omega_2} \tag{18}$$

ab, in welcher n_1 und n_2 irgend zwei bestimmte ganze Zahlen bedeuten und das Zahlenpaar m_1, m_2 alle Paare ganzer Zahlen mit Ausnahme des Paares $m_1 = n_1$, $m_2 = n_2$ durchlaufen soll. Setzen wir

$$\frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega,$$

so wird zunächst

$$\sum_{m_2} \frac{1}{(m_1 - n_1)\omega_1 + (m_2 - n_2)\omega_2} = \frac{1}{\omega_2} \sum_{m_2} \frac{1}{(m_1 - n_1)\omega - n_2 + m_2}$$

$$= \frac{\pi}{\omega_2} \cot \pi[(m_1 - n_1)\,\omega - n_2] = \frac{\pi}{\omega_2} \cot (m_1 - n_1)\,\omega\pi,$$

wenn m_1 von n_1 verschieden ist. Für $m_1 = n_1$ dagegen ist der Wert dieser Summe $\left(\sum\limits_{m_2} \frac{1}{(m_2 - n_2)\omega_2}\right)$, wie man leicht erkennt, gleich Null. Daher kommt

$$S = \frac{\pi}{\omega_2} \sum_{m_1} \cot (m_1 - n_1)\,\omega\pi, \tag{19}$$

wo m_1 alle von n_1 verschiedenen ganzen Zahlen durchläuft. Nun ist ferner

$$\sum_{-\lambda}^{+\lambda} \cot (m_1 - n_1)\,\omega\pi = \sum_{m=-\lambda-n_1}^{m=\lambda-n_1} \cot (m\omega\pi) = \sum_{-\lambda-n_1}^{+\lambda+n_1} \cot (m\omega\pi) - \sum_{m=\lambda-n_1+1}^{m=\lambda+n_1} \cot (m\omega\pi).$$

Da die Kotangente eine ungerade Funktion ist, so zerstören sich in der vorletzten Summe je zwei Glieder, also ist

$$S = -\frac{\pi}{\omega_2} \cdot \lim_{\lambda=\infty} \sum_{m=\lambda-n_1+1}^{m=\lambda+n_1} \cot (m\omega\pi). \tag{20}$$

Jedes der $2n_1$ Glieder

$$\cot (m\omega\pi) \quad (m = \lambda - n_1 + 1,\ \lambda - n_1 + 2, \cdots \lambda + n_1)$$

der letzten Summe nähert sich mit unendlich wachsendem λ der Grenze $-i$ oder $+i$, je nachdem ω einen positiv- oder negativ-imaginären Bestandteil aufweist. Dies folgt unmittelbar aus der Gleichung

$$\cot (m\omega\pi) = i \cdot \frac{e^{im\omega\pi} + e^{-im\omega\pi}}{e^{im\omega\pi} - e^{-im\omega\pi}}.$$

Es ergibt sich also schließlich

$$S = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{1}{(m_1 - n_1)\omega_1 + (m_2 - n_2)\omega_2} = \pm \frac{2i\pi}{\omega_2} n_1, \tag{21}$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem ω in der positiven oder in der negativen Halbebene liegt. Die Gleichung (21) leistet offenbar die Wertbestimmung der Summe $G_1(\omega_1, \omega_2)$ bei einer bestimmten Anordnung der Glieder dieser Summe.*)

*) Bei dem obigen Beweise der Gleichung (21) wurde $n_1 \geqq 0$ vorausgesetzt. Ersetzt man aber m_1, m_2, n_2 bez. durch $-m_1$, $-m_2$, $-n_2$ und multipliziert sodann die Gleichung mit -1, so erkennt man, daß die letztere auch für $n_1 < 0$ gilt.

Die Summe $\sum\limits_{m_2}\sum\limits_{m_1}\frac{1}{(m_1-n_1)\omega_1+(m_2-n_2)\omega_2}$ führen wir durch Vertauschung von ω_1 mit ω_2 auf die soeben betrachtete Summe zurück. Da nun $\frac{\omega_2}{\omega_1}$ einen positiv- oder negativ-imaginären Teil besitzt, je nachdem $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ einen negativ- oder positiv-imaginären Teil aufweist, so liest man aus (21) sofort ab:

$$(22)\qquad \sum_{m_2}\sum_{m_1}\frac{1}{(m_1-n_1)\omega_1+(m_2-n_2)\omega_2}=\mp\frac{2i\pi}{\omega_1}n_2,$$

wobei wieder das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $\omega=\frac{\omega_1}{\omega_2}$ in der positiven oder negativen Halbebene liegt.

Die Gleichungen (21) und (22) setzen die bedingte Konvergenz der Summe $G_1(\omega_1,\omega_2)$ in Evidenz.

Was die Summe $G_2(\omega_1,\omega_2)$ betrifft, so genügt es für unsere Zwecke die beiden folgenden Anordnungen:

$$(23)\qquad G_2'=\sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2},\quad G_2''=\sum_{m_2}\sum_{m_1}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}$$

miteinander zu vergleichen.

Zu dem Ende bemerken wir, daß die Summe

$$(24)\qquad \begin{aligned} s&=\sum\left[\frac{1}{(m_1-1)\omega_1+(m_2-1)\omega_2}-\frac{1}{m_1\omega_1+m_2\omega_2}-\frac{\omega_1+\omega_2}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}\right]\\ &=(\omega_1+\omega_2)^2\sum\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2((m_1-1)\omega_1+(m_2-1)\omega_2)}\end{aligned}$$

absolut konvergiert. Die Summation soll sich hier auf alle Paare ganzer Zahlen m_1, m_2, mit Ausnahme der beiden Paare $m_1=1$, $m_2=1$ und $m_1=0$, $m_2=0$ erstrecken. Summiert man nun zuerst nach m_2 und dann nach m_1, so ergibt sich mit Hilfe von (21)

$$(25)\qquad s=\frac{3}{\omega_1+\omega_2}\pm\frac{2i\pi}{\omega_2}-(\omega_1+\omega_2)\sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}.$$

Summiert man dagegen zuerst nach m_1 und dann nach m_2, so kommt

$$(26)\qquad s=\frac{3}{\omega_1+\omega_2}\mp\frac{2i\pi}{\omega_1}-(\omega_1+\omega_2)\sum_{m_2}\sum_{m_1}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}.$$

Der Vergleich dieser beiden Darstellungen von s ergibt die Relation

$$(27)\qquad \sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}-\sum_{m_2}\sum_{m_1}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2}=\pm\frac{2i\pi}{\omega_1\omega_2},$$

wobei das obere oder untere Vorzeichen gilt, je nachdem $\frac{\omega_1}{\omega_2}$ in der positiven oder der negativen Halbebene liegt. Daß die hier betrachteten Summen (23) endliche Werte besitzen, ist aus den Gleichungen (25) und (26) ersichtlich.

§ 3.

Darstellung der Funktionen G_n durch Potenzreihen.

Wir setzen von jetzt ab voraus, daß

$$\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} = x + iy$$

einen positiv-imaginären Bestandteil besitzt.

Der absolute Betrag der Größe

$$h = e^{2i\pi\omega} = e^{2i\pi x} \cdot e^{-2\pi y} \tag{28}$$

ist dann kleiner als 1.

In der Gleichung (17) werde nun a durch $m_1\omega$ ersetzt, unter m_1 eine positive ganze Zahl verstanden, und sodann die rechte Seite nach Potenzen von h entwickelt. Auf diese Weise kommt:

$$\sum_{m_2} \frac{1}{m_1\omega + m_2} = -i\pi - 2i\pi \sum_{r=1}^{\infty} h^{m_1 r}. \tag{29}$$

Eine $(n-1)$-malige Differentiation nach ω ergibt weiter

$$\sum_{m_2} \frac{1}{(m_1\omega + m_2)^n} = (-1)^n \cdot \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{n-1} h^{m_1 r}, \qquad (n \geqq 2.) \tag{30}$$

Summieren wir über alle positiven ganzen Zahlen m_1, so entsteht

$$\sum_{m_1=1}^{\infty} \sum_{m_2} \frac{1}{(m_1\omega + m_2)^n} = (-1)^n \cdot \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{n-1} \frac{h^r}{1-h^r}, \qquad (n \geqq 2.) \tag{31}$$

Indem wir hier, was offenbar erlaubt ist, m_2 durch $-m_2$ ersetzen und dann beide Seiten mit $(-1)^n$ multiplizieren, erhalten wir:

$$\sum_{m_1=-1}^{-\infty} \sum_{m_2} \frac{1}{(m_1\omega + m_2)^n} = \frac{(2i\pi)^n}{(n-1)!} \sum_{r=1}^{\infty} r^{n-1} \frac{h^r}{1-h^r}, \qquad (n \geqq 2.) \tag{31a}$$

Aus (31), (31a) und der bekannten Gleichung

$$\sum_{m_2} \frac{1}{m_2^{2n}} = \frac{(2\pi)^{2n}}{(2n)!} B_n, \qquad (n \geqq 1) \tag{32}$$

in welcher B_n die n^{te} Bernoullische Zahl bezeichnet, ergibt sich schließlich

$$(33)\quad \sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^{2n}} = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{2n}\cdot\frac{1}{(2n)!}\left[B_n+(-1)^n 4n\sum_{r=1}^{\infty} r^{2n-1}\frac{h^r}{1-h^r}\right],\quad (n\geqq 1.)$$

Hiermit sind die Modulformen G_n durch Potenzreihen dargestellt. Ordnet man die rechts auftretende Summe nach Potenzen von h an, so erhält sie die Gestalt

$$(34)\quad \sum_{r=1}^{\infty}\psi_{2n-1}(r)h^r = h+(1+2^{2n-1})h^2+(1+3^{2n-1})h^3 + (1+2^{2n-1}+4^{2n-1})h^4+\cdots,$$

wo $\psi_{2n-1}(r)$ die Summe der $(2n-1)^{\text{ten}}$ Potenzen der Teiler der Zahl r bezeichnet.

§ 4.

Die Modulform $\Delta(\omega_1, \omega_2)$.

Im Falle $n=1$ lautet die Gleichung (33)

$$(35)\quad \sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2\left[1-24\sum_{r=1}^{\infty} r\frac{h^r}{1-h^r}\right].$$

Ersetzt man hier ω_1 durch $-\omega_2$ und ω_2 durch ω_1, also

$$(36)\quad h=e^{2i\pi\omega}\quad\text{durch}\quad h'=e^{-\frac{2i\pi}{\omega}},$$

so kommt, wenn zugleich die Summationsbuchstaben m_1, m_2 durch $-m_2$ resp. m_1 ersetzt werden,

$$(37)\quad \sum_{m_2}\sum_{m_1}\frac{1}{(m_1\omega_1+m_2\omega_2)^2} = \frac{1}{3}\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\left[1-24\sum_{r=1}^{\infty} r\frac{h'^r}{1-h'^r}\right].$$

Die Gleichung (27) läßt sich demnach so darstellen:

$$\left(\frac{\pi}{\omega_2}\right)^2\left[1-24\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rh^r}{1-h^r}\right]-\left(\frac{\pi}{\omega_1}\right)^2\left[1-24\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rh'^r}{1-h'^r}\right]=\frac{6i\pi}{\omega_1\omega_2}$$

oder

$$(38)\quad \log h\left[1-24\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rh^r}{1-h^r}\right]+\log h'\left[1-24\sum_{r=1}^{\infty}\frac{rh'^r}{1-h'^r}\right]=-12.$$

Aus (36) folgt nun $\log h \cdot \log h' = 4\pi^2$ und hieraus

$$\frac{d \log h}{\log h} = -\frac{d \log h'}{\log h'}.$$

Multipliziert man (38) mit $\frac{d \log h}{\log h}$, so kann man daher das entstehende Resultat so schreiben:

$$\frac{dh}{h}\left[1 - 24\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r h^r}{1-h^r}\right] - \frac{dh'}{h'}\left[1 - 24\sum_{r=1}^{\infty}\frac{r h'^r}{1-h'^r}\right] = -12\,\frac{d \log h}{\log h}.$$

Integriert man diese Gleichung gliedweise und geht dann von den Logarithmen zu den Zahlen über, so entsteht

$$(\log h)^{12}\, h \prod_{r=1}^{\infty}(1-h^r)^{24} = C \cdot h' \prod_{r=1}^{\infty}(1-h'^r)^{24}$$

oder

(39) $$\left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} h \prod_{r=1}^{\infty}(1-h^r)^{24} = \left(\frac{2\pi}{\omega_1}\right)^{12} h' \prod_{r=1}^{\infty}(1-h'^r)^{24},$$

indem sich die Integrationskonstante C aus der Annahme $\omega = i$, für welche $h = h' = e^{-2\pi}$ wird, ergibt.

Die Gleichung (39) lehrt, daß die Funktion

(40) $$\Delta \equiv \Delta(\omega_1, \omega_2) = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^{12} h \prod_{r=1}^{\infty}(1-h^r)^{24}$$

ungeändert bleibt, wenn man ω_1, ω_2 durch $-\omega_2$ resp. ω_1 ersetzt. Offenbar bleibt aber Δ auch ungeändert, wenn man ω_1, ω_2 sei es durch $-\omega_1, -\omega_2$ resp., sei es durch $\omega_1 + \omega_2, \omega_2$ resp. ersetzt. Da nun aus den Substitutionen

$$\begin{aligned} \omega_1' &= -\omega_2, & \omega_2' &= \omega_1; \\ \omega_1' &= -\omega_1, & \omega_2' &= -\omega_2; \\ \omega_1' &= \omega_1 + \omega_2, & \omega_2' &= \omega_2 \end{aligned}$$

die sämtlichen homogenen ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1 zusammengesetzt werden können, so folgt schließlich:

Die Funktion $\Delta(\omega_1, \omega_2)$ bleibt ungeändert, wenn ω_1, ω_2 beliebigen linearen homogenen ganzzahligen Substitutionen der Determinante 1 unterworfen werden.

Diese Funktion hat insofern einen besonders einfachen analytischen Charakter als das Produkt

$$h \prod_{r=1}^{\infty}(1-h^r)^{24}$$

eine in der positiven Halbebene reguläre und nirgends verschwindende Funktion von ω darstellt.

§ 5.

Die Modulfunktion $J(\omega)$.

Wir setzen nun zur Abkürzung

$$(41)\qquad g_2 \equiv g_2(\omega_1, \omega_2) = 60 \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4},$$

eine Funktion, die nach (33) und (34) die Darstellung

$$(42)\qquad g_2 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^4 \left[\frac{1}{12} + 20 \sum_{r=1}^{\infty} \psi_3(r) h^r\right]$$

zuläßt. Aus g_2 und Δ bilden wir sodann den Quotienten

$$(43)\qquad J(\omega) = \frac{g_2{}^3}{\Delta} = \frac{\left[\frac{1}{12} + 20 \sum\limits_{r=1}^{\infty} \psi_3(r) h^r\right]^3}{h \prod\limits_{r=1}^{\infty} (1-h^r)^{24}},$$

welcher nur noch von $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ abhängt.

Aus dieser Definitionsgleichung der Funktion $J(\omega)$ geht hervor, daß für die ganze positive Halbebene eine Entwickelung der Form

$$(44)\qquad J(\omega) = \frac{1}{12^3 h}\left[1 + c_1 h + c_2 h^2 + \cdots\right]$$

gültig ist.

Den Eigenschaften von g_2 und Δ entsprechend, genügt $J(\omega)$ ferner der Gleichung

$$(45)\qquad J(\omega') = J(\omega),$$

in welcher ω und ω' irgend zwei äquivalente Punkte der positiven Halbebene bezeichnen.

Wenn die Ordinate y von $\omega = x + iy$ über alle Grenzen wächst, so nähert sich

$$h = e^{2i\pi\omega} = e^{2i\pi x} \cdot e^{-2\pi y}$$

der Null. Nach Gleichung (44) wird dann also $J(\omega)$ unendlich groß. Diese Funktion besitzt daher den singulären Punkt

$$\omega = \infty.$$

Folglich sind auch die zum Punkte ∞ äquivalenten Punkte, d. h. die Repräsentanten der reellen rationalen Zahlen, singuläre Punkte von $J(\omega)$. Da letztere die Achse der reellen Zahlen überall dicht erfüllen, so ist die

Funktion $J(\omega)$ über die positive Halbebene hinaus nicht fortsetzbar. Innerhalb der positiven Halbebene ist $J(\omega)$ nach (44) überall regulär. —

Es soll sich jetzt darum handeln, festzustellen, wie oft die Funktion $J(\omega)$ einen gegebenen endlichen Wert a in dem Gebiete G annimmt.

Jedenfalls besitzt die Gleichung

$$J(\omega) = a \tag{46}$$

im Gebiete G nur endlich viele Lösungen ω. Denn unendlich viele Lösungen würden eine Häufungsstelle ergeben, die notwendig im Endlichen liegen müßte, weil mit unendlich anwachsender Ordinate von ω auch $|J(\omega)|$ über jede Grenze, also insbesondere über $|a|$ hinaus, wächst. Diese Häufungsstelle wäre aber eine singuläre Stelle von $J(\omega)$, während doch eine solche in der positiven Halbebene nicht existiert.

Um nun die Anzahl N der im Gebiete G liegenden Lösungen der Gleichung (46) zu bestimmen, schneiden wir zunächst von G durch eine Parallele CC' zur Achse der reellen Zahlen das endliche Gebiet

$$G' = CABA'C'$$

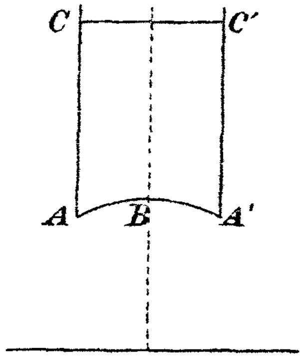

Fig. 2.

ab. (Vgl. Fig. 2.) Der Abstand der Parallelen CC' von der Achse der reellen Zahlen soll später ins Unendliche wachsen; er sei von vornherein so groß angenommen, daß die N Lösungen der Gleichung (46) im Gebiete G' liegen. Dann hat man bekanntlich

$$N = \frac{1}{2\pi i}\int d \log\,[J(\omega) - a], \tag{47}$$

das Integral in positivem Sinne durch die Berandung von G' erstreckt. (Dabei haben wir angenommen, daß keine der N Lösungen auf der Begrenzung von G liegt. Sollte letzteres der Fall sein, so hätte man bei der Integration die auf der Begrenzung liegenden Nullstellen von $J(\omega) - a$ durch infinitesimale Abweichungen zu umgehen).

Das Integral zerlegen wir nun nach folgendem Schema

$$\int\limits_A^B - \int\limits_{A'}^B + \int\limits_{A'}^{C'} - \int\limits_A^C + \int\limits_{C'}^C.$$

Die beiden ersten Integrale sind durch die Kreisbogen AB und $A'B$ resp. zu erstrecken, die übrigen Integrale sind geradlinig.

Substituiert man im ersten Integral $-\frac{1}{\omega}$ für ω, so geht dasselbe in das zweite Integral über; analog geht durch die Substitution $\omega + 1$ für ω das dritte Integral in das vierte über.

Diese Integrale heben sich also gegenseitig auf. D. h. es ist

(48) $$N = \frac{1}{2\pi i}\int_{C'}^{C} d \log [J(\omega) - a].$$

Wenn aber ω die Gerade $C'C$ durchläuft, so beschreibt

$$h = e^{2 i \pi \omega}$$

einen Kreis um den Nullpunkt, dessen Radius unbegrenzt abnimmt, falls die Entfernung der Geraden $C'C$ von der Achse der reellen Zahlen ins Unendliche wächst, und zwar beschreibt h diesen Kreis in negativem Sinne.

Das Integral (48) gibt daher an, von welcher Ordnung

$$J(\omega) - a = \frac{1}{12^3 h}[1 + (c_1 - 12^3 a)h + c_2 h^2 + \cdots],$$

angesehen als Funktion von h, an der Stelle $h = 0$ unendlich wird. D. h. es ist

$$N = 1.$$

Wir sind damit zu dem fundamentalen Satze gelangt:

Die Funktion $J(\omega)$ nimmt im Gebiete G jeden endlichen Wert a ein und nur ein Mal an.

Dasselbe gilt auch von dem Werte ∞, den $J(\omega)$ nur an der unendlich fernen Stelle des Gebietes G annimmt.

Aus diesem Satze ziehen wir nun eine Reihe von Folgerungen. Zunächst erchließen wir, daß in einem System äquivalenter Punkte der positiven Halbebene immer nur ein einziger vorhanden ist, der dem Gebiete G angehört.

Denn gäbe es zwei solche Stellen ω' und ω'', so würde die Funktion $J(\omega)$ den Wert

$$a = J(\omega') = J(\omega'')$$

an zwei Stellen (ω' und ω'') im Gebiete G annehmen.

Wir schließen ferner:

Wenn

$$J(\omega') = J(\omega)$$

ist, so sind ω' und ω äquivalente Punkte.

Denn ist ω_0 der zu ω äquivalente Punkt des Gebietes G, sowie ω_0' der zu ω' äquivalente Punkt des Gebietes G, so folgt aus

$$J(\omega_0') = J(\omega_0),$$

daß ω_0' mit ω_0 zusammenfällt. Folglich sind ω und ω' demselben Punkte ω_0 und also auch einander äquivalent.

Betrachten wir nun weiter zwei Punkte

$$\omega = x + iy, \qquad \omega^* = -x + iy,$$

welche Spiegelpunkte bezüglich der Achse der rein imaginären Zahlen sind!

Die entsprechenden Werte

$$h = e^{2i\pi\omega} = e^{2i\pi x - 2\pi y}, \qquad h^* = e^{2i\pi\omega^*} = e^{-2i\pi x - 2\pi y}$$

sind konjugiert. Nach der Definitionsgleichung (43) sind daher auch $J(\omega)$ und $J(\omega^*)$ konjugiert.

Soll nun für einen Punkt ω des Gebietes G der Wert von $J(\omega)$ reell sein, so muß

$$J(\omega) = J(\omega^*)$$

und folglich müssen die Punkte ω und ω^* einander äquivalent sein. Dieses ist aber offenbar nur dann der Fall, wenn ω auf dem Rande von G oder auf der Achse der rein-imaginären Zahlen liegt.

Also ergibt sich:

Die Funktion $J(\omega)$ nimmt alle reellen Werte (und jeden nur ein Mal) an, wenn ω die Ränder CA, AB von G und das in G liegende Stück der Achse der rein-imaginären Zahlen durchläuft.

Endlich bestimmen wir noch die Werte, welche $J(\omega)$ in den Randpunkten A und B des Gebietes G besitzt. Der Punkt A ist der Repräsentant der dritten Einheitswurzel

$$\omega = -\frac{1}{2} + \frac{i}{2}\sqrt{3}.$$

Wenn nun $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2}$ eine imaginäre dritte Einheitswurzel ist, so zerstören sich in der Summe

$$\frac{1}{60} g_2(\omega_1, \omega_2) = \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4} = \frac{1}{\omega_2{}^4} \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{1}{(m_1\omega + m_2)^4}$$

die Glieder zu je dreien; nämlich, es ist $\omega^2 + \omega + 1 = 0$ und daher

$$\frac{1}{(m_1\omega + m_2)^4} + \frac{1}{((m_2 - m_1)\omega - m_1)^4} + \frac{1}{(-m_2\omega + m_1 - m_2)^4}$$
$$= \frac{1}{(m_1\omega + m_2)^4}\left[1 + \frac{1}{\omega^4} + \frac{1}{\omega^8}\right] = 0.$$

Im Punkte A ist also

(49) $$J(\omega) = \frac{g_2{}^3(\omega_1, \omega_2)}{\Delta(\omega_1, \omega_2)} = 0.$$

Der Wert von $J(\omega)$ im Punkte B ergibt sich, zugleich mit einigen anderen bemerkenswerten Resultaten, auf folgendem Wege.

Wir setzen zur Abkürzung

(50) $$g_3 \equiv g_3(\omega_1, \omega_2) = 140 \sum_{m_1} \sum_{m_2} \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6}$$

und haben dann auch nach (33) und (34)

$$g_3 = \left(\frac{2\pi}{\omega_2}\right)^6 \left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3}\sum_{r=1}^{\infty} \psi_5(r) h^r\right]. \tag{51}$$

Nun gelten für die Funktion

$$J_1(\omega) = \frac{g_3^{\,2}}{\Delta} = \frac{\left[\frac{1}{126} - \frac{7}{3}\sum\limits_{r=1}^{\infty}\psi_5(r)h^r\right]^2}{h\prod\limits_{r=1}^{\infty}(1-h^r)^{24}} \tag{52}$$

dieselben Schlüsse, die wir oben auf die Funktion $J(\omega)$ angewandt haben. Insbesondere nimmt $J_1(\omega)$ für äquivalente Argumente stets denselben Wert an und im Gebiete G erhält $J_1(\omega)$ jeden Wert ein und nur ein Mal; im unendlich fernen Punkte von G hat $J_1(\omega)$ ebenso wie $J(\omega)$ den Wert ∞.

Aus diesen Tatsachen folgt, daß $J_1(\omega)$ und $J(\omega)$ lineare Funktionen von einander sind, daß also eine Gleichung der Gestalt

$$J(\omega) = aJ_1(\omega) + b = a\cdot\frac{g_3^{\,2}}{\Delta} + b \tag{53}$$

besteht, wo a und b Konstante bedeuten.

Schreiben wir diese Gleichung in der Form

$$\left[\frac{1}{12} + 20\sum\psi_3(r)h^r\right]^3 = a\left[\frac{1}{216} - \frac{7}{3}\sum\psi_5(r)h^r\right]^2 + b\cdot h\prod(1-h^r)^{24}, \tag{54}$$

so ergibt der Vergleich der Koeffizienten von h^0 und h^1 auf beiden Seiten

$$a = 27, \qquad b = 1.$$

Die Gleichungen (53) und (54) lauten somit

$$J(\omega) = 27\cdot\frac{g_3^{\,2}}{\Delta} + 1 \tag{55}$$

resp.

$$g_2^{\,3} = 27 g_3^{\,2} + \Delta. \tag{56}$$

Der Punkt B ist der Repräsentant von $\omega = i$.

Wenn aber $\omega = \frac{\omega_1}{\omega_2} = i$ ist, so zerstören sich in der Summe (50), wie man leicht erkennt, die Glieder zu je vieren; daher ist dann $g_3 = 0$. Aus (55) folgt schließlich:

Im Punkte B ist

$$J(\omega) = 1. \tag{57}$$

Aus den hiermit bewiesenen Grundeigenschaften der Funktion $J(\omega)$ leitet man ohne Schwierigkeit noch die Tatsache ab, daß diese Funktion die Abbildung der positiven Halbebene auf eine unendlich-blättrige Riemannsche Fläche vermittelt, deren Blätter an den Stellen 0, 1 und ∞ zu je drei, bez. je zwei bez. unendlich vielen im Cyklus zusammenhängen.*)

§ 6.

Anwendung auf die Theorie der elliptischen Funktionen.

Die Weierstraßsche Funktion $\wp(u)$ mit den Perioden ω_1 und ω_2 wird bekanntlich durch die Gleichung

$$\wp(u) = \frac{1}{u^2} + \sum_{m_1}\sum_{m_2}\left[\frac{1}{(u - m_1\omega_1 - m_2\omega_2)^2} - \frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^2}\right] \tag{58}$$

definiert. Sie genügt, wie man von dieser Definition ausgehend leicht beweist, der Differentialgleichung

$$\wp'^2(u) = 4\wp^3(u) - g_2\wp(u) - g_3, \tag{59}$$

wobei

$$g_2 = 60\sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^4}, \quad g_3 = 140\sum_{m_1}\sum_{m_2}\frac{1}{(m_1\omega_1 + m_2\omega_2)^6} \tag{60}$$

gesetzt ist. Von den Werten dieser Größen g_2 und g_3 weiß man, daß die aus ihnen zusammengesetzte „Diskriminante“

$$\Delta = g_2^3 - 27g_3^2 \tag{61}$$

von Null verschieden ist.

Es ist nun eine für die Theorie der Funktion $\wp(u)$ fundamentale Frage, ob die Perioden ω_1 und ω_2 stets so gewählt werden können, daß g_2 und g_3 vorgeschriebene Werte erhalten, die nur der Bedingung genügen, daß die aus ihnen berechnete Diskriminante Δ nicht Null ist.

Statt nun diese Frage, wie es in den üblichen Darstellungen der Theorie der elliptischen Funktionen geschieht, durch die Diskussion der Differentialgleichung (59) zu behandeln, kann man sie in sehr kurzer und einfacher Weise auf Grund der oben entwickelten Theorie der Funktion $J(\omega)$ erledigen. In der Tat, es seien ω_1 und ω_2 aus den Gleichungen

$$g_2(\omega_1, \omega_2) = c_2, \qquad g_3(\omega_1, \omega_2) = c_3 \tag{62}$$

zu bestimmen, wo c_2 und c_3 gegebene Werte bezeichnen, für die

$$c_2^3 - 27c_3^2 = c \tag{63}$$

von Null verschieden ist. Die Gleichungen (62) sind dann und nur dann erfüllt, wenn die Gleichungen

$$\frac{g_2(\omega_1, \omega_2)}{g_3(\omega_1, \omega_2)} = \frac{c_2}{c_3}, \qquad \frac{g_2^3(\omega_1, \omega_2)}{g_3^2(\omega_1, \omega_2)} = \frac{c_2^3}{c_3^2} \tag{64}$$

*) F. Klein, a. a. O., S. 121.

bestehen, von welchen die zweite auch durch

$$(64') \qquad \frac{g_2^{\,3}(\omega_1, \omega_2)}{g_2^{\,3}(\omega_1, \omega_2) - 27\, g_3^{\,2}(\omega_1, \omega_2)} = \frac{c_2^{\,3}}{c}$$

ersetzt werden kann. Betrachten wir nun

$$\omega_2 \quad \text{und} \quad \frac{\omega_1}{\omega_2} = \omega$$

als zu bestimmende Größen, so schreiben sich die Gleichungen (64), (64′) so:

$$(65) \qquad \omega_2^{\,2} = \frac{c_2}{c_3} \cdot \frac{g_3(\omega, 1)}{g_2(\omega, 1)}, \qquad J(\omega) = \frac{c_2^{\,3}}{c}.$$

Nun weiß man, daß die letzte Gleichung stets Lösungen besitzt (von denen eine einzige im Gebiete G liegt). Hat man eine solche Lösung ω bestimmt, so ergibt sich ω_2 aus der ersten Gleichung (65) und schließlich ω_1 aus der Gleichung $\omega_1 = \omega \cdot \omega_2$. Die Größen ω_1, ω_2 können also wirklich immer den Gleichungen (62) gemäß bestimmt werden und man erkennt aus den Grundeigenschaften der Funktion $J(\omega)$ überdies leicht, daß ω_1 und ω_2 bis auf lineare homogene ganzzahlige Substitutionen der Determinante ± 1 durch die Gleichungen (62) vollkommen bestimmt sind.

Zürich, 28. September 1903.