
SULLA DETERMINAZIONE DELLA PARTE ALGEBRICA NELL'INTEGRAZIONE
IN FUNZIONE FINITA ESPlicita.

N O T A

DI CARLO MARIA PIUMA. (*).



In questa nota io mi propongo di dare la dimostrazione del teorema seguente, riservandomi in seguito a fare degli studi sui casi d'eccezione, e pubblicarli qualora mi venisse dato di pervenire a qualche risultato, invocando sul mio lavoro tutta l'indulgenza di cui abbisogna: ecco il teorema

Quando l'integrale

$$(A) \quad \int \frac{f(x)}{F(x) \theta^{\frac{1}{m}}(x)} \frac{dx}{x}$$

non è possibile in funzione finita esplicita coi soli logaritmi, $f(x)$, $F(x)$ e $\theta(x)$ essendo polinomi interi, e $\theta(x)$ di grado superiore ad $m(m-1)$, dovranno verificarsi alcune equazioni di condizione fra i coefficienti di $f(x)$, $F(x)$, $\theta(x)$ perchè possa esserlo quando vi si aggiunga una parte algebrica, per cui detti polinomi, acciò (A) sia possibile in forma finita esplicita, non potranno avere la più grande generalità che compete al loro grado, e quindi l'integrale proposto, nella massima parte dei casi, non sarà possibile in funzione finita esplicita.

Tale teorema io desumo come corollario del metodo che il sig. Tchebichef ha dato, nel volume del 1853 del Giornale del sig. Liouville, per la determinazione della parte algebrica nella integrazione in forma finita esplicita di (A): metodo che in questa nota mi propongo dimostrare essere generale e dover ottenere il suo scopo, ignorando se sia stata fatta di pubblica ragione, prima d'ora, da altri dimostrazione alcuna di questo: per cui i teoremi dimostrati in questa nota, nei primi otto numeri, sono enunziati, senza dimostrazione, dal sig. Tchebichef in detto Giornale. Il teorema poi del N° 9 non so che sia stato per anco da altri avvertito.

1. Dalla Memoria del sig. Liouville: *Sui trascendenti ellittici di prima e di seconda specie considerati come funzioni dell'ampiezza* inserita nel cahier XXIII del Giornale della Scuola Politecnica risulta che

$$(1) \quad \int \frac{f(x)}{F(x) \theta^{\frac{1}{m}}(x)} \frac{dx}{x} = t + B_0 \log W_0 + B_1 \log W_1 + \dots + B_k \log W_k,$$

(*) Questa Nota di già pubblicata in Genova nel 1860 si riproduce di consenso dell'Autore ed alla quale fa seguito l'altra Memoria del medesimo pubblicata nel N° 1° di questo tomo. B. T.

la quale eguaglianza, ove t , W_0 , W_1 , ..., W_k sono funzioni razionali di x e del radicale $\theta^{\frac{1}{m}}(x)$ e B_0 , B_1 , ..., B_k sono costanti, dovrà essere verificata tutte volte che l'integrale del primo membro potrà essere espresso in funzione finita esplicita della x . La (1) evidentemente equivale a

$$\int \frac{f(x)}{F(x) \theta^{\frac{1}{m}}(x)} dx = t + \sum_{n=0}^{n=k} B_n \log W_n$$

$\sum_{n=0}^{n=k}$ indicando la somma di tutti i valori che prende $B_n \log W_n$ per $n=0, 1, \dots, k$.

Al valore di t , potremo dare la forma $\frac{P}{Q} \theta^{\frac{m-1}{m}}(x)$ ove P e Q sono funzioni intere della x .

Diffatti poichè t è funzione razionale della x e del radicale $\theta^{\frac{1}{m}}(x)$ è lecito supporre (Serret — Algebra Superiore 2.^a edizione pag. 294 e seguenti).

$$t = \frac{P_0 + P_1 \theta^{\frac{1}{m}}(x) + P_2 \theta^{\frac{2}{m}}(x) + \dots + P_{m-1} \theta^{\frac{m-1}{m}}(x)}{Q} = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{n=m-1} P_n \theta^{\frac{n}{m}}(x)$$

dove i P_n e Q sono polinomi interi nella x , per cui l'equazione (1) del sig. Liouville diverrà

$$(2) \quad \int \frac{f(x)}{F(x) \theta^{\frac{1}{m}}(x)} dx = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{n=m-1} P_n \theta^{\frac{n}{m}}(x) + \sum_{n=0}^{n=k} B_n \log W_n.$$

In questa eguaglianza che, per la dimostrazione del sig. Liouville, deve risultare identica a $\theta^{\frac{1}{m}}(x)$ si potranno, senza alterarla, sostituire successivamente $\alpha \theta^{\frac{1}{m}}(x)$, $\alpha^2 \theta^{\frac{1}{m}}(x)$; ..., $\alpha^{m-1} \theta^{\frac{1}{m}}(x)$, moltiplicando contemporaneamente i suoi due membri per α innalzata a quella potenza della quale è affetta nel coefficiente di $\theta^{\frac{1}{m}}(x)$ nella sostituzione che si è eseguita, cioè, se a $\theta^{\frac{1}{m}}(x)$ si è sostituito $\alpha^h \theta^{\frac{1}{m}}(x)$ allora si moltiplicheranno i due membri per α^h , α rappresentando una radice primitiva dell'equazione $x^m - 1 = 0$. Fatte queste operazioni ed addizionate membro a membro, colla (2), le altre $m-1$ eguaglianze così ottenute, si avrà pel primo membro una somma eguale a

$$m \int \frac{f(x)}{F(x) \theta^{\frac{1}{m}}(x)} dx;$$

nel secondo la parte logaritmica conserva la forma che aveva nella (2), ma la parte algebrica diviene

$$\frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{n=m-1} \left(1 + \alpha^{n+1} + \alpha^{2(n+1)} + \dots + \alpha^{(m-1)(n+1)} \right) P_n \theta^{\frac{n}{m}}(x) \\ = \frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{\alpha^{m(n+1)} - 1}{\alpha^{n+1} - 1} P_n \theta^{\frac{n}{m}}(x).$$

Si osservi che nel secondo membro di quest'ultima identità, pei valori di n diversi da $n = m - 1$, il coefficiente $\frac{\alpha^{m(n+1)} - 1}{\alpha^{n+1} - 1}$ è zero, poichè essendo $\alpha^m = 1$ è pure $\alpha^{m(n+1)} = 1$ per cui il numeratore $\alpha^{m(n+1)} - 1 = 0$, mentre il denominatore è da zero differente, α essendo per ipotesi radice primitiva dell'equazione $x^m - 1 = 0$, ed $n + 1 < m$. Per $n = m - 1$ il denominatore è pure zero e la frazione che prende la forma $\frac{0}{0}$, ha per vero valore m ; quindi sarà

$$\frac{1}{Q} \sum_{n=0}^{n=m-1} \frac{\alpha^{m(n+1)} - 1}{\alpha^{n+1} - 1} P_n \theta^{\frac{n}{m}}(x) = m \frac{P_{m-1}}{Q} \theta^{\frac{m-1}{m}}(x) = m \frac{P}{Q} \theta^{\frac{m-1}{m}}(x)$$

ponendo P al luogo di P_{m-1} per comodo nella scrittura delle formole.

E così finalmente la (2) prenderà la forma richiesta dal teorema enunciato dal sig. Tchebichef, che è

$$(3) \quad \int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\theta^{\frac{1}{m}}(x)} = \frac{P}{Q} \theta^{\frac{m-1}{m}}(x) + \sum_{n=0}^{n=g} A_n \log V_n;$$

P e Q essendo funzioni intere nella x , i V_n funzioni razionali della x e del radicale $\theta^{\frac{1}{m}}(x)$ e le A_n costanti.

La formola (3) ne contiene, come caso particolare, quando si supponga $m=2$, una data dal sig. Liouville a pagina 64 del cahier XXIII del Giornale della Scuola Politecnica.

2. Dalla (3) si deduce immediatamente la seguente

$$(4) \quad \int \left(\frac{f(x)}{F(x)} + \frac{Q^1 P \theta(x) - P^1 Q \theta(x) - \frac{m-1}{m} \theta^1(x) PQ}{Q^2} \right) \frac{dx}{\theta^{\frac{1}{m}}(x)} = \sum_{n=0}^{n=g} A_n \log V_n,$$

eguaglianza che deve risultare essa pure identicamente soddisfatta.

Se si riduca a minimi termini la frazione coefficiente di $\frac{dx}{\theta^{\frac{1}{m}}(x)}$ sotto il segno d'

integrazione, e si rappresenti con $\frac{V}{U}$ il sig. Tchebichef dimostrò, a pag. 93 del precitato volume del Giornale del sig. Liouville: 1° che U e $\theta(x)$ sono primi fra loro, 2° che U non ammette fattori multipli. Dietro ciò passiamo alla ricerca della espressione la più generale che possa convenire a Q . Per ipotesi si ha

$$(5) \quad \frac{f(x)}{F(x)} + \frac{Q^1 P \theta(x) - P^1 Q \theta(x) - \frac{m-1}{m} \theta^1(x) PQ}{Q^2} = \frac{V}{U}.$$

Suppongo che la frazione $\frac{f(x)}{F(x)}$ sia ridotta a minimi termini e che $\theta(x)$ non ammetta fattori della forma $(x-b)^t$, essendo $t > m-1$, se questa seconda ipotesi non fosse verificata a t si potrebbe dare la forma $m n + t^1$ essendo $t^1 < m-1$ o tutto al più $t^1 = m-1$, e quindi

$$\theta(x) = (x-b)^{mn}. (x-b)^{t^1} \theta_1(x) = (x-b)^{mn} \theta_2(x)$$

e $\theta_2(x)$ soddisferebbe a questa condizione; si avrebbe d'altronde

$$F(x) \theta^{\frac{1}{m}}(x) = F(x) (x-b)^n \theta_2^{\frac{1}{m}}(x) = F_1(x) \theta_2^{\frac{1}{m}}(x)$$

quindi le due ipotesi fatte possono suppersi verificate perchè si può sempre ridurre un differenziale qualunque, di quelli che consideriamo senza alterarlo minimamente a soddisfarle.

Sia ora $x-a$ un fattore di Q e Q_1 un polinomio intero nella x , non divisibile per $x-a$ tale che si abbia

$$Q = (x-a)^p Q_1$$

p sarà un intero positivo, e siano del pari F_1 e θ_1 due polinomi interi nella x non divisibili per $x-a$, k e q due numeri interi positivi od anche nulli, ma non mai negativi tali che si abbia

$$F(x) = F_1(x-a)^k, \quad \theta(x) = \theta_1(x-a)^q$$

Il polinomio U potrà essere divisibile per $x-a$, solo quando sia $q=0$, ma in ogni caso non potrà esserlo che una volta soltanto, onde porremo prendendo a seconda dei casi il segno superiore od il segno inferiore

$$U = U_1 (x-a)^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}}$$

U_1 non potendo essere mai divisibile per $x-a$.

Facendo tutte queste sostituzioni nella (5) si avrà, moltiplicando per $(x-a)^k$,

$$\frac{f(x)}{F(x)} + \frac{(x-a)^{p+q+k}(Q_1^4 P \theta_1 - P^1 Q_1 \theta_1 - \frac{m-1}{m} \theta_1^4 P Q_1) + (x-a)^{p+q+k-1} P Q_1 \theta_1 (p - q \frac{m-1}{m})}{Q_1^2 (x-a)^{2p}} \\ = \frac{V(x-a)^k}{U_1 (x-a)^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}}}$$

Moltiplicando i due membri di questa eguaglianza per $F_1 U_1 Q_1^2$ si ottiene

$$f(x) U_1 Q_1^2 + F_1 U_1 \frac{(x-a)^{p+q+k}(Q_1^4 P \theta_1 - P^1 Q_1 \theta_1 - \frac{m-1}{m} \theta_1^4 P Q_1) + (x-a)^{p+q+k-1} P Q_1 \theta_1 (p - q \frac{m-1}{m})}{(x-a)^{2p}} \\ = \frac{V F_1 Q_1^2 (x-a)^k}{(x-a)^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}}}$$

Si osservi che se l'equazione precedente sussiste nel denominatore del secondo membro, quando $k = 0$, si dovrà prendere il segno inferiore, poichè o $\theta(x)$ ammetterà o non ammetterà $x-a$ come fattore, nel primo caso U non può essere divisibile per $x-a$, nel secondo Q non potrebbe avere $x-a$ per fattore, giacchè in questo caso k e q sarebbero per ipotesi eguali a zero, e moltiplicando i due membri della eguaglianza precedente per $(x-a)^p$ si otterrebbe, eseguendo le semplificazioni ed indicando con X una funzione intera della x ,

$$p \frac{F_1 \theta_1 Q_1 U_1 P}{x-a} = X$$

risultato assurdo, poichè nè F_1 , nè Q_1 , nè θ_1 , nè U_1 , nè P sono divisibili per $x-a$, (potendo sempre supporre la frazione $\frac{P}{Q}$ ridotta a minimi termini) e p è una costante. Dunque è assurdo il supporre che Q possa ammettere un fattore che non divida nè $F(x)$, nè $\theta(x)$, perciò quando $x-a$, può essere effettivamente fattore di Q al termine $\frac{V F_1 Q_1^2 (x-a)^k}{(x-a)^{\frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}}}$ si dovrà sempre sostituire una funzione intera della x che indicata con Y si avrà finalmente

$$f(x) Q_1^2 U_1 - Y + F_1 U_1 \frac{(x-a)^{p+q+k}(Q_1^4 P \theta_1 - P^1 Q_1 \theta_1 - \frac{m-1}{m} \theta_1^4 P Q_1) + (x-a)^{p+q+k-1} Q_1^4 P \theta_1 (p - q \frac{m-1}{m})}{(x-a)^{2p}} = 0$$

Ora devonsi distinguere due casi 1° $f(x) Q_1^2 U_1 - Y$ non è divisibile per $(x-a)$, 2° $f(x) Q_1^2 U_1 - Y$ è divisibile un certo numero di volte per $x-a$.

Nel 1° Caso, poichè $p - q \frac{m-1}{m}$ è diverso da zero, p , q , m essendo interi positivi e $q < m$ non si potrà avere

nè
 $p + q + k - 1 < 2p$ ossia $q + k - 1 < p$

per cui dovrà essere
 $p + q + k - 1 > 2p$ ossia $q + k - 1 > p$

$$p = q + k - 1.$$

Diffatti se fosse $p + q + k - 1 < 2p$ si avrebbe $2p = p + q + k - 1 + b$, b essendo un intero positivo da cui si desumerebbe

$$f(x)Q_1^2U_1 - Y + \frac{(x-a)(Q_1^4P\theta_1 - P^1Q_1\theta_1 - \frac{m-1}{m}\theta_1^4PQ_1) + \theta_1PQ_1(p - q\frac{m-1}{m})}{(x-a)^b} F_1U_1 = 0,$$

e moltiplicandone i due membri per $(x-a)^{b-1}$ si avrebbe

$$(f(x)Q_1^2U_1 - Y)(x-a)^{b-1} + F_1U_1(Q_1^4P\theta_1 - P^1Q_1\theta_1 - \frac{m-1}{m}\theta_1^4PQ_1) = (q\frac{m-1}{m} - p)\frac{F_1U_1PQ_1\theta_1}{x-a}$$

risultato assurdo; il primo membro è un polinomio intero ed il secondo una frazione.

Se poi fosse $2p < p + q + k - 1$ si avrebbe $2p + c = p + q + k - 1$, c intero positivo, da cui

$$Y - f(x)Q_1^2U_1 = (x-a)^{c+1}F_1U_1(Q_1^4P\theta_1 - P^1Q_1\theta_1 - \frac{m-1}{m}\theta_1^4PQ_1) + (x-a)^cF_1U_1PQ_1\theta_1(p - q\frac{m-1}{m})$$

risultato assurdo perchè in questa uguaglianza che dovrebbe essere identica, il secondo membro è divisibile per $x-a$, mentre il primo non lo è. Dunque

$$p = q + k - 1.$$

Nel 2° sia X_1 un polinomio intero nella x non divisibile per $x-a$, tale che si abbia

$$f(x)Q_1^2U_1 - Y = X_1(x-a)^h$$

allora sarà

$$X_1(x-a)^h + F_1U_1 \frac{(x-a)^{p+q+k}(Q_1^4P\theta_1 - P^1Q_1\theta_1 - \frac{m-1}{m}\theta_1^4PQ_1) + (x-a)^{p+q+k-1}PQ_1\theta_1(p - q\frac{m-1}{m})}{(x-a)^{2p}} = 0$$

e dividendo i due membri per $(x-a)^h$ ne risulterà

$$X_1 + F_1U_1 \frac{(x-a)^{p+q+k}(Q_1^4P\theta_1 - P^1Q_1\theta_1 - \frac{m-1}{m}\theta_1^4PQ_1) + (x-a)^{p+q+k-1}PQ_1\theta_1(p - q\frac{m-1}{m})}{(x-a)^{2p+h}} = 0.$$

Con metodo identico a quello adoperato nel caso 1° si otterrà

$$p + h = q + k - 1$$

quindi il grado di $x-a$ nel denominatore Q , sarebbe inferiore di h unità nel secondo caso a quello che avrebbe se si verificasse il primo, e quindi anche Q

sarebbe d' un grado inferiore di h unità. Si vedrà in seguito che ad ogni unità che cresce il grado di Q cresce pure di una unità il grado di P e che così si ha più una costante in P che può determinarsi a piacere; ammesso questo, potremo prendere $x-a$ in Q coll'esponente $q+k-1$ e supporre nel tempo istesso che P sia divisibile h volte di seguito per $x-a$, lo che ci sarà fornito dal calcolo istesso a cui saremo condotti per la determinazione di P .

In ogni caso adunque, potremo, anzi dovremo prendere

$$p = q + k - 1$$

per il grado di $x-a$ in Q , perchè, ch'io sappia, non esiste una norma fissa per conoscere quando $f(x) Q_1^2 U_1 - Y$ debba essere divisibile per $x-a$.

Si osservi che nel prodotto $F(x) \cdot \theta(x)$, $x-a$ entra $q+k$ volte fattore, e nella sua derivata vi entra $q+k-1$ volta, dunque $x-a$, entra in Q nello stesso modo col quale entra nel massimo comun divisore fra il prodotto $F(x) \cdot \theta(x)$ e la sua derivata, e ciò che si è detto di $x-a$, potrà ripetersi di qualunque altro fattore di Q , per cui valendoci di un' annotazione addottata dal sig. Le-Besgue, ne' suoi Esercizi d' analisi numerica, per rappresentare il massimo comun divisore fra più numeri, si avrà

$$Q = D \left(F(x) \theta(x), \frac{d[F(x) \theta(x)]}{dx} \right).$$

3. Prima di passar oltre è conveniente esaminare quali condizioni debbano verificarsi perchè la funzione

$$Q^1 P \theta(x) - P^1 Q \theta(x) - \frac{m-1}{m} \theta^1(x) PQ$$

si riduca ad un grado inferiore a quello della funzione $PQ \theta^1(x)$.

A tal effetto siano $a x^\alpha$, $b x^\beta$, $c x^\nu$ i tre termini che contengono x alla potenza più elevata in $\theta(x)$, Q e P rispettivamente, dove α , β , e ν sono interi positivi che possono anche ridursi a zero; meno l' α , poichè se ciò non fosse si avrebbe a trattare l'integrale d'un differenziale razionale che si sa essere sempre possibile in funzione finita esplicita: a , b , c sono costanti qualunque. Il termine di grado più elevato nella funzione precedente sarà

$$a b c x^{\alpha+\beta+\nu-1} (\beta - \nu - \alpha \frac{m-1}{m})$$

termine di grado uguale a quello di $PQ \theta^1(x)$ se non è

$$\beta - \nu - \alpha \frac{m-1}{m} = 0$$

In questa espressione α , β , m hanno valori cogniti, d'incognito vi è solo ν del quale però si sa che deve essere un intero positivo od anche zero, ma non mai negativo, quindi

$$(6) \quad \nu = \beta - \alpha + \frac{\alpha}{m}$$

darà per prima condizione che α sia divisibile per m , ed inoltre, poichè ν è positivo, dovrà essere

$$\beta - \alpha + \frac{\alpha}{m} > \text{ovvero} = 0$$

queste sono le condizioni cercate.

4. Il grado del coefficiente di dx sotto il segno d'integrazione nella (4), perchè essa possa sussistere, non deve sorpassare -1 . (Per la dimostrazione si veda la citata Memoria del sig. Tchebichef a pag. 95).

5. Riduciamo allo stesso denominatore il coefficiente di dx sotto il segno d'integrazione nella (4) esso diverrà

$$(7) \quad \frac{f(x) Q^2 + F(x) Q^1 \theta(x) P - P^1 F(x) Q \theta(x) - \frac{m-1}{m} F(x) P Q \theta^1(x)}{Q^2 F(x) \theta^{\frac{1}{m}}(x)}$$

Se non si verificano le condizioni del N.º 3 il grado di questo coefficiente sarà quello di

$$\frac{f(x) Q^2}{Q^2 F(x) \theta^{\frac{1}{m}}(x)} \text{ ovvero quello di } \frac{F(x) P Q \theta^1(x)}{Q^2 F(x) \theta^{\frac{1}{m}}(x)}$$

secondochè si ha

$$\text{grado} \frac{f(x) Q^2}{Q^2 F(x) \theta^{\frac{1}{m}}(x)} > 0 < \text{grado} \frac{F(x) P Q \theta^1(x)}{Q^2 F(x) \theta^{\frac{1}{m}}(x)}$$

Suppongo dapprima che la seconda di queste due ineguaglianze sia quella che ha luogo. Perchè ciò sia dovrà aversi

$$\text{grado } f(x) Q^2 < \text{grado } F(x) P Q \theta^1(x)$$

ossia

$$\text{grado } F(x) \theta^1(x) + \text{grado } P + \text{grado } Q > \text{grado } f(x) Q + \text{grado } Q$$

e poichè

$$\text{grado } P > \text{ovvero} = 0$$

l'ineguaglianza precedente sarà necessariamente verificata se lo è la seguente:

$$\text{grado } F(x) \theta^1(x) > \text{grado } f(x) Q \text{ ossia } 0 > \text{grado } f(x) Q - \text{grado } F(x) \theta^1(x)$$

tolgo l'unità dai due membri, ed osservando che

$$1 + \text{grado } \theta^1(x) = \text{grado } \theta(x),$$

si ha

$$(8) \quad \text{grado } f(x)Q - \text{grado } F(x)\theta(x) = \text{grado } \frac{f(x)Q}{F(x)\theta(x)} < -1.$$

Se oltre la (8) si verificasse pure la seguente

$$(9) \quad \text{grado } \frac{\theta^1(x)}{Q \theta^{\frac{1}{m}}(x)} > -1$$

P dovrebbe essere eguale a zero, senza di che il coefficiente (7) sarebbe di grado superiore a -1 contrariamente alla proposizione del N° 4.

Diffatti da

$$\text{grado } \frac{\theta^1(x)}{Q \theta^{\frac{1}{m}}(x)} > -1$$

si deduce

$$\text{grado } \theta^1(x) - \text{grado } Q \theta^{\frac{1}{m}}(x) > -1$$

ovvero

$$\text{grado } F(x)Q \theta^1(x) - \text{grado } F(x)Q^2 \theta^{\frac{1}{m}}(x) > -1$$

ed a più forte ragione

$$\text{grado } P + \text{grado } F(x)Q \theta^1(x) - \text{grado } F(x)Q^3 \theta^{\frac{1}{m}}(x) > -1$$

poichè P non può essere di grado negativo.

La (9) può essere trasformata nel modo seguente

$$\text{grado } \frac{\theta^1(x)}{Q \theta^{\frac{1}{m}}(x)} = \text{grado } \theta^1(x) - \text{grado } Q - \frac{1}{m} \text{grado } \theta(x)$$

$$= \text{grado } \theta(x) - 1 - \text{grado } Q - \frac{1}{m} \text{grado } \theta(x) = \frac{m-1}{m} \text{grado } \theta(x) - 1 - \text{grado } Q$$

$$= \frac{m-1}{m} \text{grado } \theta(x) + 1 - \text{grado } Q - 2 = \text{grado } x \theta^{\frac{m-1}{m}}(x) - \text{grado } Q - 2 > -1$$

e cambiando i segni dei due membri

$$\text{grado } Q - \text{grado } x \theta^{\frac{m-1}{m}}(x) + 2 < 1$$

ovvero

$$(10) \quad \text{grado } \frac{Q}{x \theta^{\frac{m-1}{m}}(x)}$$

che è la forma sotto la quale fu presentata dal sig. Tchebichef.

Verificandosi la (10) non è possibile che abbiano luogo le due condizioni del N° 3. Difatti la (10) può essere scritta così, conservando le annotazioni di quel numero

$$\beta - 1 - \frac{m-1}{m} \alpha < -1 \text{ ovvero } \beta - \frac{m-1}{m} \alpha < 0$$

per cui ν dovrebbe essere negativo, il che è impossibile.

6. Il grado del coefficiente di dx sotto il segno d'integrazione, o che dipenderà da quello di $\frac{f(x)}{F(x)}$ o da quello della derivata di $\frac{P}{Q}$ se non hanno luogo le condizioni del N° 3; suppongo dapprima che il grado di detto coefficiente dipenda dalla derivata di $\frac{P}{Q}$, ossia che si abbia

$$\text{grado } f(x) Q^2 < \text{grado } F(x) P Q \theta^1(x)$$

il che ha sempre luogo quando si verifica la (8). In tal caso il grado del coefficiente in discorso non potendo essere superiore a -1 il suo *massimo* sarà dato dall'equazione

$$\text{grado } \frac{P \theta^1(x)}{Q \theta^{\frac{1}{m}}(x)} = -1$$

questa fornisce successivamente

$$\text{grado } P + \text{grado } \frac{\theta(x)}{x Q \theta^{\frac{1}{m}}(x)} = \text{grado } P - 1 - \text{grado } \frac{Q}{\theta^{\frac{m-1}{m}}(x)} = -1$$

ossia

$$(11) \quad \text{grado } P = \text{grado } \frac{Q}{\theta^{\frac{m-1}{m}}(x)}.$$

Si osservi che $\text{grado } P$ è un intero per cui se $\text{grado } \frac{Q}{\theta^{\frac{m-1}{m}}(x)}$ fosse frazionario

dovrebbe prendersi, per $\text{grado } P$, l'intero immediatamente inferiore, essendochè esso non può sorpassare quello che risulta dalla (11). Questo rinvia a dire che

$\text{grado } P$ deve essere l'intero immediatamente superiore a $\text{grado } \frac{Q}{x \theta^{\frac{m-1}{m}}(x)}$ come

nunziò il sig. Tchebichef.

Si vede che in questo caso non si potrebbe ottenere per P un grado maggiore del precedente, procurando di soddisfare, ammesso che ciò fosse possibile, alle condizioni del N° 3, perchè esse danno

$$\nu = \text{grado } P = \beta - \frac{m-1}{m} \alpha$$

che è appunto quello risultante dalla (1).

Se poi non si avesse

$$\text{grado } f(x) Q^2 > \text{grado } F(x) Q^{\theta^1(x)}$$

si potrebbe procurare di distruggere i termini del numeratore che sorpassassero in grado quello del denominatore diminuito dell'unità, riducendosi l'un l'altro i termini di grado massimo nel prodotto $f(x) Q^2$ con quelli provenienti dalle altre parti del numeratore di tale coefficiente di dx . Ma perchè ciò possa verificarsi è necessario che si abbia, supposte non verificate le condizioni del N° 3.

$$\text{grado } f(x) Q^2 = \text{grado } F(x) P Q^{\theta^1(x)}$$

da cui

$$\text{grado } P = \text{grado } f(x) Q - \text{grado } F(x) \theta(x) + 1 \text{ ovvero}$$

$$\text{grado } P = \text{grado } \frac{f(x) Q}{F(x) \theta(x)} + 1.$$

Quindi il grado di P non potrebbe essere maggiore di quello assegnatogli dalla (12) se questo è maggiore di quello che risulterebbe dalla (11), e viceversa. Si osservi qui, sia nella (11), sia nella (12) che dalla forma di grado P risulta evidente che ad ogni unità che aumenta grado Q esso aumenta pure di unità, come si era detto al N° 2.

Si osservi inoltre che quando α è divisibile per m , il grado assegnato a P dalla (11) soddisfa, esso solo, alle condizioni del N° 3, e quindi procurando di soddisfarle, non si perverrà ad ottenere per tale grado un valore maggiore di quello determinato nel modo precedentemente indicato.

7. P dovendo essere un polinomio intero la sua forma sarà

$$P = B_0 + B_1 x + \dots + B_n x^n$$

ed il suo grado n sarà determinato per mezzo delle formole del numero precedente. P dovrà verificare identicamente l'equazione

$$(13) \quad f(x) - \frac{F(x)\theta(x)}{Q} \frac{dP}{dx} - \left(\frac{m-1}{m} \frac{F(x)\theta^1(x)}{Q} - \frac{F(x)\theta(x)\frac{dQ}{dx}}{Q^2} \right) P = \frac{F(x)V}{U}$$

che si desume dalla (5) moltiplicandone per $F(x)$ i due membri. Il primo membro di questa equazione è un polinomio intero, ciò che si vede dalla semplice sua ispezione, avuto riguardo al modo col quale è formato Q per mezzo $F(x)$ e di $\theta(x)$: il secondo dovrà dunque essere del pari un polinomio intero. Esaminiamone la formazione. In esso U non contiene che fattori lineari ed è primo con V e con $\theta(x)$, dunque dovrà dividere $\frac{F(x)}{U}$. Il quoziente $F(x)$ conterrà tutti i fattori primi di Q provenienti dai fattori multipli che $F(x)$ non ha comuni con $\theta(x)$ affetti di un esponente non minore di quello col quale entrano in Q . Quanto a quelli che

$F(x)$ ha comuni con $\theta(x)$ vi entreranno collo stesso esponente che hanno in $F(x)$ perchè U è primo con $\theta(x)$. Non vi saranno in U fattori che non dividano $F(x)$.

Indicando con D il massimo comun divisore fra $\theta(x)$ e $\theta^1(x)$, nel quoziente $\frac{Q}{D}$ vi saranno tutti i fattori che $F(x)$ ha non comuni con $\theta(x)$ allo stesso modo come entrano in Q , e quelli poi che $F(x)$ ha comuni con $\theta(x)$ vi saranno ripetuti un numero di volte marcato da quello che entrano nella derivata del prodotto $F(x) \theta(x)$ diminuito di quello che entrano in $\theta^1(x)$ ossia nel modo istesso che esistono in $F(x)$, dunque il polinomio, intero nella x , $\frac{Q}{D}$ sarà fattore del secondo membro, e dividendo i due membri per $\frac{Q}{D}$ il secondo resterà intero, ciò dunque deve pure verificarsi per rapporto al primo.

8. Alcuni dei fattori di $F(x)$, benchè diversi da quelli di $\theta(x)$, potrebbe (forse?) mancare in U , per cui indicando con φ il loro prodotto, si potrà scrivere

$$\varphi V \frac{Q}{D} = \frac{F(x)}{U} V$$

da cui

$$U = \frac{F(x) D}{\varphi Q}$$

ma il differenziale della parte logaritmica $\frac{V}{U \theta^{\frac{1}{m}}(x)}$ deve verificare la condizione

$$\text{grado } \frac{V}{U} \frac{1}{\theta^{\frac{1}{m}}(x)} = -1$$

dunque il *massimo valor di grado* V è dato dalla equazione

$$\text{grado } V - \text{grado } U \theta^{\frac{1}{m}}(x) = \text{grado } V - 1 - \text{grado } \frac{U}{x} \theta^{\frac{1}{m}}(x) = -1$$

ossia

$$\text{grado } V = \text{grado } \frac{U}{x} \theta^{\frac{1}{m}}(x)$$

e sostituendo ad U il suo valore

$$\text{grado } V = \text{grado } \frac{F(x) \theta^{\frac{1}{m}}(x) D}{x \varphi Q}$$

Il massimo di grado V corrisponderà al minimo di grado φ , quindi saremo certi che grado V non potrà sorpassare quello che gli viene assegnato dalla formola seguente

$$(14) \quad \text{grado } V = \text{grado } \frac{F(x) \theta^{\frac{1}{m}}(x) D}{x Q}.$$

Quindi V non potrà avere un grado maggiore, quando il secondo membro sia frazionario, dell'intero immediatamente inferiore a quello che gli sarebbe dato dalla (14) essendochè V è funzione razionale ed intera della x . Con queste condizioni si determineranno i B_0, B_1, \dots, B_n .

9. Esaminiamo se le costanti contenute in P sono sufficienti per soddisfare a tutte le condizioni sovraccennate.

Supponiamo dapprima che sia

$$\text{grado } \frac{Q}{x \theta^{\frac{m-1}{m}}(x)} < \text{grado } \frac{f(x) Q}{F(x) \theta(x)}$$

nel qual caso, il grado di P è dato dall'intero immediatamente superiore a

$$\text{grado } \frac{Q}{x \theta^{\frac{m-1}{m}}(x)}.$$

$\theta(x)$ sia del grado $n_1 = (m-1)k + r$. Le costanti in P saranno in numero eguale ad $n+1$, poichè sono i rapporti degli n coefficienti delle n potenze della x che vi entrano e del termine che ne è indipendente al coefficiente del primo termine di Q . Nella divisione per $\frac{Q}{D}$, del primo membro della (13), acciocchè il quo-

ziente sia intero si deve soddisfare un numero di condizioni eguale a $\text{grado } \frac{Q}{D}$, per cui risulterà determinato un egual numero di costanti. Vediamo dapprima di esprimere il grado di P in funzione dei dati, esso è eguale all'intero immediatamente superiore a

$$\begin{aligned} \text{grado } \frac{Q}{x \theta^{\frac{m-1}{m}}(x)} &= \text{grado } Q - \frac{m-1}{m} [(m-1)k + r] - 1 = \text{grado } Q - \frac{m^2 - 2m + 1}{m} k \\ &\quad - \frac{m r - r}{m} - 1 = \text{grado } Q - m k + 2k - r - 1 - \frac{k - r}{m}. \end{aligned}$$

Suppongo ora $k = m h + l$ allora sarà, essendo $l < m$ e $r < m$ ed entrambi interi e positivi,

$$\text{grado } P \leq \text{grado } Q - m k + 2k - r - h - \frac{l - r}{m}$$

e $\frac{l - r}{m} > 0$ ovvero < 0 , secondo che $l > r$ ovvero $< r$, nel primo caso dovrebbesi prendere,

poichè grado P è intero e positivo

$$\text{grado P} = \text{grado Q} - m k + 2 k - r - h - 1$$

e nel secondo

$$\text{grado P} = \text{grado Q} - m k + 2 k - r - h.$$

Ed il numero delle costanti a determinarsi contenute in P sarebbe, a seconda dei casi, eguale a

$$\text{grado P} + 1 = \text{grado Q} - m k + 2 k - r - h + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2}$$

delle quali ne è stato determinato un numero eguale a grado $\frac{Q}{D}$ per poter effettuare esattamente la divisione sopradetta; ne resta adunque a determinare un numero eguale a

$$\begin{aligned} & \text{grado Q} - m k + 2 k - r - h + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} - \text{grado } \frac{Q}{D} \\ & = \text{grado D} - m k + 2 k - r - h + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Il numero massimo di esse, per un grado di $\theta(x)$ dato, corrisponderà al *massimo di grado* D e questo dall'Algebra si sa che corrisponde al *minimo numero* delle radici differenti dell'equazione $\theta(x) = 0$. Poichè in $\theta(x)$ si è supposto, N° 2, che non possano esistere fattori ripetuti più di $m-1$ volta, risulterà che il minor numero possibile di radici differenti di $\theta(x) = 0$ sarà $k+1$, se $r > 0$, il che si può sempre supporre, perchè r può variare da 0 ad $m-1$ e se si avesse $r=0$, si potrebbe porre $k_1 = k-1$, e $r = m-1$, e l'Algebra elementare c'insegna pure che in questo caso grado D è uguale a quello di $\theta(x)$ diminuito di $k+1$ unità, dunque sarà eguale $(m-1)k + r - k - 1$, e perciò il numero delle costanti ancora a determinarsi sarà

$$\begin{aligned} & (m-1)k + r - k - 1 - m k + 2 k - r - h + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \\ & = -1 - h + \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} = -h - \frac{1}{2} \mp \frac{1}{2} \end{aligned}$$

dunque le costanti in P non saranno generalmente in numero sufficiente per soddisfare a tutte le condizioni se non nel caso di $h = 0$, e di $r > 1$, e di più che $\theta(x)$ non contenga che il minor numero possibile di fattori differenti.

Se poi si avesse

$$\text{grado } \frac{f(x) Q}{F(x)\theta(x)} > \text{grado } \frac{Q}{x \theta^{\frac{1}{m}}(x)}$$

allora essendo

$$\text{grado } P = \text{grado } \frac{f(x) Q}{F(x)\theta(x)} + 1$$

le costanti a determinarsi in P sarebbero in numero eguale a

$$\text{grado } P + 1 = \text{grado } \frac{f(x) Q}{F(x)\theta(x)} + 2$$

delle quali, quante unità sono in $\text{grado } \frac{Q}{D}$ sarebbero determinate per rendere il primo membro della (13) divisibile per $\frac{Q}{D}$. Il grado del primo membro della (13) diviso per $\frac{Q}{D}$ sarebbe eguale a $\text{grado } f(x) - \text{grado } \frac{Q}{D}$, e questo supera quello di V di tante unità quante ne sono in

$$\text{grado } f(x) - \text{grado } \frac{Q}{D} - \text{grado } V$$

e perciò sarà necessario un numero eguale di costanti per fare scomparire le potenze della x che in tal quoziente sorpassano il grado di V , onde per le due ragioni suddette ne è determinato un numero eguale a

$$\text{grado } \frac{Q}{D} + \text{grado } f(x) - \text{grado } \frac{Q}{D} - \text{grado } V = \text{grado } f(x) - \text{grado } V$$

ne restano dunque a determinare tante, quante unità sono in

$$\text{grado } \frac{f(x) Q}{F(x)\theta(x)} + 2 - \text{grado } f(x) - \text{grado } V.$$

Basta sostituirvi il massimo grado di V per avere il massimo numero delle costanti che restano ancora a determinare, ma questo non può sorpassare grado

$\frac{F(x)\theta^{\frac{1}{m}}(x)D}{xQ}$ ossia è eguale tutto al più all'intero immediatamente superiore a

$$\begin{aligned} \text{grado } \frac{F(x)\theta^{\frac{1}{m}}(x)D}{xQ} - 1 &= \text{grado } \frac{F(x)D}{xQ} + \text{grado } \theta^{\frac{1}{m}}(x) - 1 \\ &= \text{grado } \frac{F(x)D}{xQ} + \frac{1}{m} [(m-1)(mh+l)+r] - 1 \\ &= \text{grado } \frac{F(x)D}{xQ} + (m-1)h + l - \frac{l-r}{m} - 1 \end{aligned}$$

ossia prendendo il segno $+$ od il segno $-$, come precedentemente, sarà

$$\text{grado } V = \text{grado } \frac{F(x)D}{xQ} + (m-1)h + l - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$$

per cui il numero delle costanti a determinarsi residuerà finalmente a

$$\begin{aligned} \text{grado } \frac{f(x)Q}{F(x)\theta(x)} &= \text{grado } f(x) + \text{grado } D - 1 + \text{grado } \frac{F(x)}{Q} \\ &+ (m-1)h + l - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} + 2 = -\text{grado } \theta(x) \\ &+ \text{grado } D + m h + l - h - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} + 1. \end{aligned}$$

Ma è il massimo della differenza $\text{grado } D - \text{grado } \theta(x) = -k - 1$, come si desume dal detto precedentemente; osservando che $m h + l = k$, il massimo delle costanti a determinarsi sarà dato dall'espressione

$$-k - 1 + k + 1 - h - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2} = -h - \frac{1}{2} \pm \frac{1}{2}$$

come nel caso precedente.

Quindi ne mancherebbero h od $h + 1$, ossia si avrebbero più h od $h + 1$ equazioni a soddisfare che incognite disponibili (costanti a determinare) per cui eliminate queste resterebbero h od $h + 1$ equazioni di condizione fra i loro coefficienti che sono pure coefficienti dei polinomi $f(x)$, $F(x)$, $\theta(x)$, (poichè quelli di Q sono funzioni razionali di quelli di $F(x)$ e $\theta(x)$) le quali se non si verificano, non può sussistere parte algebrica, per cui in generale o l'integrale proposto è possibile con soli logaritmi, non è possibile in funzione finita esplicita, e così si vede chiaramente che se ai polinomi $f(x)$, $F(x)$, $\theta(x)$ si lasciasse la loro più grande generalità, queste equazioni non sarebbero soddisfatte, perchè esse stabiliscono fra coefficienti suddetti delle relazioni che equivalgono alla determinazione di h od $h + 1$ di essi, a seconda dei casi, in funzione degli altri, ossia gli rendono funzioni determinate degli altri, e quindi essi non sarebbero arbitrarii. Per cui risulta il teorema:

O che l'integrale $\int \frac{f(x)}{F(x)} \frac{dx}{\theta^{\frac{1}{m}}(x)}$ è possibile con soli logaritmi (pochi casi ec-

cettuati in confronto di quelli in cui ciò ha luogo), o non è nemmeno possibile in funzione finita esplicita aggiungendovi una funzione algebrica, quando sia grado

$$\theta(x) > m(m-1).$$

Quando grado

$$\frac{f(x)}{F(x)} \frac{1}{\theta^{\frac{1}{m}}(x)} > -1$$

l'integrale precedente non è possibile in funzione finita esplicita, N° 4, con soli logaritmi, dunque (pochi casi eccettuati) in generale se è $\text{grado } \theta(x) > m(m-1)$ tale integrale non sarà possibile in funzione finita esplicita.