

den hintereinanderliegenden Elementen eines selben Stroms; 2) die Reaction der materiellen Theilchen, die von dem Strom zur Bildung des kleinen Volta'schen Funkenstroms fortgerissen werden; 3) die Ausdehnung des umgebenden Gases.

Man kann diese Trennkraft des Volta'schen Funkens experimentel nachweisen, wenn man ihn am Ende eines kleinen metallenen Hebels erregt, der horizontal um eine durch seine Mitte gehende Verticale beweglich ist. Im Moment, wo der Funke entsteht, sieht man dies Ende lebhaft abgestoßen. Der Effect ist beträchtlich stärker, wenn er zwischen zwei etwas grofsen Flächen stattfindet, und auch, wenn sich zwischen ihnen ein Körper in geringer Menge befindet, der durch seine Verflüchtigung im Stande ist, das Volumen und die Dauer des Funkens zu vergrößern, z. B. ein Tröpfchen Quecksilber. Ich beabsichtige übrigens diesen Versuch im Vacuo und in verschiedenen Mitteln zu wiederholen.

*XV. Ueber ein Instrument zur Erleichterung der
numerischen Anwendung der Methode der kleinsten
Quadrate und zur Controlirung der nach dieser
Methode erhaltenen Resultate;
von V. Buniakowsky.*

(*Bull. phys. math. de l'acad. de St. Petersb. XVII, 289.*)

Die Rechner wissen aus Erfahrung, wie mühsam und beschwerlich die numerische Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate in den meisten Fällen ist. Um von den Bedingungsgleichungen zu den Endgleichungen des Problems zu gelangen, muß man die Quadrate und Producte verschiedener Zahlengruppen bilden und sie darauf summieren, was im Allgemeinen zu sehr weitläufigen Rechnungen

Anlaß giebt. Und das ist noch nicht Alles: Nachdem man das gesuchte Zahlenresultat gefunden hat, schwebt man meistens in der Besorgniß irgend einen Fehler begangen zu haben, welcher zu groß ist, um vernachlässigt werden zu können.

Diese Betrachtungen haben mich veranlaßt zu suchen, ob es nicht möglich sey, mittelst eines Instruments von einfacher Construction die beiden numerischen Hauptaufgaben der Methode der kleinsten Quadrate *graphisch* zu lösen, nämlich: 1) *die Bildung der Quadrate einer Reihe von Zahlen und die Summirung dieser Quadrate*; 2) *die Bildung der Producte zweier Factoren und die Summirung einer Reihe dieser Producte*. Das Instrument, welches ich die Ehre habe der Akademie vorzulegen, entspricht bis zu einem gewissen Punkt dem Zweck, welchen ich mir vorgesetzt hatte. Es löst mit Schnelligkeit und hinreichender Genauigkeit die zwei erwähnten Probleme, wenigstens zur Controle der directen Rechnungen. Wenn dieser Theil der Arbeit, welcher am meisten zu Fehlern Anlaß giebt, mit Hülfe des Instruments controlirt ist, setzt man die Rechnungen mit größerem Vertrauen fort, um die Endgleichungen aufzulösen, um den Werth des Gewichts des Resultates und die übrigen Elemente herzuleiten, welche man bei Anwendung der Methode der kleinsten Quadrate auf die Berechnung von Beobachtungen in Betracht zieht.

Die Grund-Idee des besagten Instruments ist ungemein einfach. Die Beschreibung desselben und die Anweisung zu seiner Gebrauchsweise, welche wir sogleich geben wollen, wird zeigen, daß es bloß auf dem Pythagoräischen Lehrsatz begründet ist.

Fig. 15, Taf. IV stellt das Instrument vor ¹⁾, welches man, wegen seiner Gestalt und Bestimmung *summirendes Winkelmaafs* (*équerre sommatrice*) nennen könnte. Seine Hauptstücke sind zwei kupferne Lineale *ab* und *cd*, das erstere ist ungefähr 10 Zoll engl. lang, das letztere 8. Das

1) Die linearen Dimensionen dieser Figur sind ein Drittel von denen des Instruments.

Lineal cd ist fest und ruht auf einem Holzbrett LM ; dagegen ist ab frei verschiebbar längs einer prismatischen Leiste, nach der Rechten und der Linken, in winkelrechter Richtung auf cd ; man kann es aber auch mittelst einer Klemmschraube i fest stellen. Jedes dieser Lineale ist mit einer Scale versehen; das erstere ab ist in 165 gleiche Theile getheilt, das zweite in 110. Mittelst der beiden Verniere k und l , von denen der erste am oberen Ende des Lineals cd befestigt, und der andere in der Nuthe $\alpha\beta$ verschiebbar ist, wird jede der Abtheilungen in Zehntel getheilt. So kann man auf dem Maafsstab ab alle ganzen Zahlen von 1 bis 1650 nehmen, und auf cd alle nicht über 1100 gehenden Zahlen. Die beiden Mikrometerschrauben h und j , von denen die erstere sich mit dem Lineal ab , und die zweite mit dem Vernier l bewegt, sind dazu bestimmt, die kleinen Bewegungen mitzutheilen, welche die Verniere angeben. Die Klemmschraube i , welche zunächst zur Befestigung des Lineals ab bestimmt ist, dient zugleich als Stützpunkt für das Spiel der Mikrometerschraube h . Die Schraube m hat dieselbe Bestimmung in Bezug auf die zweite Mikrometerschraube j .

Aufser den beiden Linealen ab und cd , giebt es noch zwei andere ef und fg , jedes etwa 7 Zoll lang, die in f durch ein Gelenk miteinander verbunden sind. Das erstere dieser Lineale ef ist in e drehbar um eine Axe, die auf einer am Lineale ab befestigten Metallplatte winkelrecht ist und genau unter dem Nullpunkt der Scale ab liegt. Das Ende g des zweiten Lineals fg ist ebenso drehbar um eine am unteren Theile des Verniers l befestigten und dessen Nullpunkt entsprechenden Axe. Der Metallbogen $\gamma\delta$ endlich dient dazu, um nöthigenfalls den Winkel gfe mittelst der Klemmschraube n zu befestigen. Wenn der Bogen $\gamma\delta$ auf diese Weise befestigt ist, bleibt der Abstand eg unveränderlich, was eine nothwendige Bedingung zum Spiel des Instrumentes ist. Das System der beiden Lineale ef und fg ruht auf dem Brette LM , und das zweite

derselben, fg , verschiebt sich frei unter dem Lineale cd , während die Axe bei g in der Fuge $\alpha\beta$ sich dreht.

Das ist die einfache Construction des *summirenden Winkelmaafses*. Um eine Anwendung zu machen, sey angenommen, man wolle die Reihe der Quadrate

$$a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$$

summiren. Man beginnt damit, die beiden Klemmschrauben i und m zu lösen, und den Vernier der Scale cd auf Null zu stellen, wozu man sich des Knopfes p bedient. Dann verschiebt man mittelst des Knopfes q das Lineal ab bis der Nullpunkt des Verniers k die Zahl a_1 anzeigt; genauer gelangt man dahin, wenn man die Mikrometerschraube h gebraucht, für deren Spiel man die Schraube i anzuziehen hat. Diese Klemmschraube i muß jedenfalls angezogen werden, um die Lage des Lineals ab zu befestigen. Hierauf verschiebt man, mittelst des Knopfes p , den Vernier l in der Fuge $\alpha\beta$, so daß der Nullpunkt desselben die zweite Zahl a_2 angiebt, wozu man genauer mittelst der Mikrometerschraube j gelangt, die man wirken läßt, nachdem die Klemmschraube m angezogen ist. Es ist übrigens klar, daß die angezeigte Bewegung des Knopfes p kein Hinderniß erfährt, weil die beiden Lineale ef und fg vermöge der Einrichtung sich frei um die drei Axen bei e, f, g drehen können. Ist dieß geschehen, so befestigt man mittelst der Klemmschraube n den Winkel efg und löst die Klemmschraube i . Alsdann verschiebt man mittelst des Knopfes q und des Endes f den Knopf p längs der Fuge $\alpha\beta$ in die Höhe bis zum Nullpunkt der Scale und zieht die Klemmschraube i an, um ab zu befestigen. Der Vernier k giebt dann offenbar die Länge $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ an. Wenn man hierauf, nachdem die Schraube n gelöst worden, die Länge a_3 auf die Scale des Lineals cd aufträgt, und genau wie vorhin verfährt, so wird die zweite Angabe des oberen Vernier seyn $\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2}$, und sofort bis zur letzten, die gleich ist:

$$\sqrt{a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2}.$$

Quadrirt man die Zahl dieser letzten Angabe, so bekommt man die gesuchte Summe $a_1^2 + a_2^2 + a_3^2 + \dots + a_n^2$.

Die Summe der Producte zweier Factoren, wie:

$$a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 + \dots + a_n h_n$$

kann mittelst desselben Instruments auf folgende Weise erhalten werden. Gesetzt man habe:

$$a_1 > h_1, a_2 > h_2, a_3 > h_3 \dots a_n > h_n,$$

so berechnet man zunächst die Halbsummen und Halbdifferenzen

$$\frac{a_1 + h_1}{2}, \quad \frac{a_2 + h_2}{2} \dots \frac{a_n + h_n}{2}$$

$$\frac{a_1 - h_1}{2}, \quad \frac{a_2 - h_2}{2} \dots \frac{a_n - h_n}{2}$$

Erwägt man nun, daß

$$a_1 h_1 = \left(\frac{a_1 + h_1}{2} \right)^2 - \left(\frac{a_1 - h_1}{2} \right)^2$$

$$a_2 h_2 = \left(\frac{a_2 + h_2}{2} \right)^2 - \left(\frac{a_2 - h_2}{2} \right)^2$$

$$\dots \dots \dots$$

$$(a_n h_n) = \left(\frac{a_n + h_n}{2} \right)^2 - \left(\frac{a_n - h_n}{2} \right)^2$$

und summirt diese Gleichungen, so hat man:

$$S(a, h) = S \left(\frac{a + h}{2} \right)^2 - S \left(\frac{a - h}{2} \right)^2$$

Jede der beiden Summen

$$S \left(\frac{a + h}{2} \right)^2 \text{ und } S \left(\frac{a - h}{2} \right)^2$$

erhält man, wie gezeigt worden ist, mit Hülfe des Instruments und einer Erhebung ins Quadrat. Der Unterschied der beiden so erhaltenen Quadrate repräsentirt die gesuchte Summe $a_1 h_1 + a_2 h_2 + a_3 h_3 \dots a_n h_n$.

Aus dem Bisherigen ersieht man, wie nützlich das summirende Winkelmaafs bei der numerischen Berechnung der vortheilhaftesten Resultate seyn kann. Zwar kann das Instrument, so wie ich es von dem Mechanikus Hrn. Albrecht habe ausführen lassen, nur zur Summirung der Quadrate

von Zahlen von weniger als vier Ziffern dienen; allein in vielen Fällen ist diese Gränze genügend, und für die Zahlen, welche dieselben überschritten, würde das Instrument genährte Resultate geben, die wenigstens zur Controle der vorwiegendsten unter den durch directen Calcül erhaltenen Zahlen dienen könnten. Die Kenntniß der approximativen Resultate in diesem Fall wird sicher nicht erinangeln nützlich zu seyn. Noch ist zu bemerken, dafs man, wenn man die Ordnung der Addition der Quadrate ändert, mittelst des summirenden Winkelmaafses mehr Werthe der gesuchten Summe erhält, man also, wenn man daraus das arithmetische Mittel nimmt, dem richtigen Werth noch näher kommt. Soweit eignet sich das Instrument zu wiederholten Proben, was einen seiner Vorzüge ausmacht. Um eine Idee von dem Genauigkeitsgrade zu geben, den man durch wiederholte Proben erreichen kann, bringe ich hier folgendes Beispiel bei, wo ich die Operation nur drei Mal vollzogen habe.

Es handelte sich darum, die Quadratwurzel aus der Summe folgender zehn Quadrate zu ziehen:

$$123^2 + 175^2 + 210^2 + 253^2 + 300^2 \\ + 330^2 + 482^2 + 523^2 + 540^2 + 674^2$$

Die Operation, in dieser Ordnung vollzogen, gab für die gesuchte Wurzel die Zahl 1265.

Bei der zweiten Probe vertheilte ich die Zahlen folgendermaßen:

$$540^2 + 210^2 + 330^2 + 523^2 + 123^2 \\ + 253^2 + 300^2 + 674^2 + 482^2 + 175^2$$

und fand die Zahl 1266 für die gesuchte Wurzel.

Bei der dritten Probe endlich waren die Quadrate geordnet wie folgt:

$$674^2 + 253^2 + 540^2 + 330^2 + 210^2 \\ + 175^2 + 523^2 + 482^2 + 300^2 + 123^2$$

und ich erhielt zum Resultat 1264.

Das arithmetische Mittel aus diesen drei, unter sich sehr wenig verschiedenen Werthen, ist 1265, welches von dem richtigen Resultat (1266,6...) nur in der vierten Ziffer ab-

weicht. Mithin hatte bei diesem, ganz nach Zufall gewählten Beispiele der Fehler nicht mehr als etwa $\frac{1}{300}$ des richtigen Resultats betragen. Ich muß noch hinzufügen, daß ich die drei partiellen Resultate ohne den Gebrauch der Mikrometerschrauben gefunden habe.

Zu bemerken ist, daß wenn es unter den Zahlen, deren Quadratsumme bestimmt werden soll, einige zu kleine giebt, die z. B. die Gränze 100 nicht überschreiten, es bequemer wäre bei ihnen eine Scale anzuwenden, die ein Vielfaches von der des Instruments wäre, z. B. ein *Doppeltes*, *Dreifaches* ... *Zehnfaches*; in diesem letzteren Falle müßte man nehmen 100 Theile für 10, 200 für 20, 300 für 30 u. s. w. Auf diese Weise würde sich die totale Operation aus zwei partiellen zusammensetzen, aus einer für die kleinen Zahlen, und einer für die größeren. Man vereinigt beide so erhaltenen Resultate, indem man die eine der Wurzeln auf die Scale des Lineals ab und die andere auf die des Lineals cd bringt. Verfährt man dann, wie oben gezeigt, so gelangt man zum Endresultat. Uebrigens wird der Gebrauch des Instruments selbst, über das man verfügen kann, sehr bald lehren, was dazu beitrage die Operationen mit demselben abzukürzen und zu erleichtern.

Wenn die Anzahl der zu summirenden Quadrate zu groß wäre, so daß die Scale des Lineals ab nicht ausreichte, um die Quadratwurzel ihrer Summe anzugeben, so würde man diese Zahlen in Gruppen zu theilen, und mit jeder besonders zu verfahren haben. Die partiellen Resultate könnten dann mittelst des summirenden Winkelmaafses vereinigt werden, indem man eine *reducirte* oder *submultiple* Scale anwendete, z. B. eine *sub-doppelte*, *sub-dreifache* u. s. w.

Wir schliessen diesen Aufsatz mit der approximativen Berechnung der Fehlergränze, die aus der Unvollkommenheit des Instruments entspringen kann. Gesetzt dieses sey absolut genau und man suche den Werth der Wurzel $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. Man wird $a_1 = pc$ (Fig. 16, Taf. IV) auf die Scale des Lineals ab auftragen und $a_2 = cq$ auf die

Scale des Lineals cd ; wir nehmen an, daß der Winkel acd genau ein rechter sey, und pc und cq genau die Zahlen a_1 und a_2 repräsentiren. In dieser Hypothese wird die Angabe des Instruments, welches die Länge pq mittelst des Systems der beiden Lineale ef und fg auf die Scale von ab überträgt, ganz genau seyn und die gesuchte Wurzel $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ vorstellen. Allein die Unvollkommenheit des Instruments giebt nothwendig zu Fehlern Anlaß, welche wir auf drei reduciren können. Bemerken wir zuvörderst, daß wir statt des wahren rechtwinklichen Dreiecks cpq ein anderes schiefwinkliches erhalten; sey $cp'q'$ dieses fehlerhafte Dreieck. Die drei Fehler werfen sich: 1) auf den Winkel bei c , welcher, statt strenge ein rechter zu seyn, von ihm abweicht um eine gewisse Größe $\delta = qcq'$, und folglich gleich ist $90^\circ + \delta$; 2) statt der wahren Länge $pc = a_1$ haben wir eine andere $cp' = a_1 + \varepsilon_1$ und 3) statt der wahren Länge $cq = a_2$ eine falsche $cq' = a_2 + \varepsilon_2$. Der Fehler δ beim Winkel entspringt zunächst daraus, daß das Lineal ab sich nicht ganz winkelrecht gegen cd verschiebt, dann daraus, daß die Punkte p' und q' nicht genau entsprechen, der erstere dem Nullpunkte der Scale ab , und der zweite dem Nullpunkte des Verniers des Lineals cd . Diese letztere Ursache, nebst den kleinen und unvermeidlichen Ungleichheiten in der Theilung der Scalen und den Fehlern in der Beobachtung selbst, wird auch die Fehler ε_1 und ε_2 erzeugen.

Repräsentirt nun ϖ den bei Bestimmung der Länge

$$pq = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$$

begangenen Gesamtfehler, so wird derselbe offenbar gleich seyn dem Unterschiede $\pm (pq - p'q')$; allein das Dreieck $cp'q'$ giebt

$$p'q' = \sqrt{(a_1 + \varepsilon_1)^2 + (a_2 + \varepsilon_2)^2 + 2(a_1 + \varepsilon_1)(a_2 + \varepsilon_2)\sin\delta};$$

man hat also, wenn man nur die ersten Potenzen der Fehler berücksichtigt:

$$\varpi = \pm \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left(1 - \sqrt{1 + \frac{2(a_1\varepsilon_1 + a_2\varepsilon_2 + a_1a_2\delta)}{a_1^2 + a_2^2}} \right).$$

Entwickelt man die Wurzelgröße unter Beibehaltung bloß der ersten Potenzen von ε_1 , ε_2 und δ , wie eben zuvor, so hat man

$$\varpi = \frac{a_1 \varepsilon_1 + a_2 \varepsilon_2 + a_1 a_2 \delta}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

Das ist der sehr einfache Ausdruck für den gesuchten Fehler, abgesehen von seinem Zeichen. Sehen wir jetzt, was etwa seine Gränze seyn könnte. Zu dem Ende erwäge man, daß das Lineal ab längs einer am Lineale cd festsitzenden prismatischen Leiste verschiebbar ist, und daß überdiß die Axen bei e und g (Fig. 15, Taf. IV) vorher so angebracht sind, daß sie mit möglichster Genauigkeit den Nullpunkten entsprechen, die eine dem an der Scale ab , die andere dem am Vernier l . Auf diese Weise kann offenbar der Fehler δ des Winkels nur unmerklich seyn. Gesetzt sogar, er ginge bis zu einem Viertelgrad, so wird man beinahe haben:

$$\delta = \frac{3,141}{2 \times 360} = 0,0043 \dots$$

Anlangend die Fehler ε_1 und ε_2 , so wird man sicher die Unvollkommenheit des Instruments übertreiben, wenn man annimmt, daß dieser Fehler bis zum Fünftel einer unmittelbaren Abtheilung der Scalen beider Lineale gehen könne; allein dieses Fünftel entspricht zwei Ganzen d. h. zwei vom Vernier angezeigten Theilen. Man wird also $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 2$ nehmen und somit haben:

$$\varpi = \frac{2(a_1 + a_2) + a_1 a_2 \times 0,0043}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

wenn man den ungünstigsten Fall annimmt, nämlich den, wo alle Fehler in gleichem Sinne liegen.

Bei dem eben gefundenen Resultat haben wir abgesehen von dem fast unmerklichen Fehler, welcher aus der Uebertragung der Länge $p'q'$ auf das Lineal ab entspringen könnte.

Wenden wir unsere Formel auf den Fall an, wo man z. B. hätte.

$$a_1 = 300, a_2 = 400.$$

Der wahre Werth der Wurzel $\sqrt{a_1^2 + a_2^2}$ ist 500. Sehen wir, welcher Fehler ϖ bei Benutzung des Instruments zu fürchten wäre. Man hätte:

$$\varpi = \frac{2.700 + 120000 \times 0,0043}{500} = \frac{1916}{500} < 4.$$

In dieser Hypothese würde sich also der Fehler nur auf blofse Einheiten werfen. Durch Operiren mit dem Instrument kann man sich direct überzeugen, dafs, bei dem angeführten Beispiel, der Fehler ganz unmerklich ist, und nur einem fast unwahrnehmbaren Bruch der angenommenen Einheit gleich kommt.

Betrachtet man die Proben, welchen ich mein summirendes Winkelmaafs (das erste Exemplar, welches schon dadurch keine Vollkommenheit beanspruchen kann) unterworfen habe, so zweifle ich nicht, dafs es einem geschickten Mechanikus gelingen werde, diesem Instrumente, bei etwas vergrößerten Dimensionen, einen hohen Grad von Genauigkeit zu verleihen. Alsdann könnte es nicht allein zur Controlle schon gemachter directer Rechnungen dienen, sondern auch zur Ausführung des mühsamsten Theils dieser Rechnungen angewandt werden, wenigstens wenn die Coëfficienten der Elemente in den Bedingungsgleichungen eine gewisse Gränze nicht überschreiten.
