Über partielle und totale Differenzierbarkeit von Funktionen mehrerer Variabeln. II.[1])

Von

Hans Rademacher in Berlin.

IV. Tangentenebenen und Inhaltsmaß krummer Flächen.

10. Dem allen unseren weiteren Überlegungen zugrunde liegenden Satz I kann man noch eine wichtige geometrische Deutung geben. Es sei $f(x, y)$ eine im Gebiete G den Bedingungen jenes Satzes genügende Funktion. Durch die Gleichung

$$z = f(x, y)$$

wird eine über G sich hinstreckende krumme Fläche S dargestellt. Ist ferner (x_0, y_0) ein Punkt totaler Differenzierbarkeit von f und sind $x(s)$ und $y(s)$ zwei differenzierbare Funktionen des Parameters s, die für $s = s_0$ die Werte $x_0 = x(s_0)$, $y_0 = y(s_0)$ annehmen (wie in § 5), so wird durch

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad z = f(x(s), y(s))$$

eine auf S liegende durch den Flächenpunkt $(x_0, y_0, f(x_0, y_0))$ gehende Kurve C dargestellt. Nach (32) ist dann

$$z'(s_0) = \frac{d f(x(s), y(s))}{ds}\bigg|_{s=s_0} = x'(s_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + y'(s_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y}.$$

Das bedeutet aber geometrisch, daß die an C in (x_0, y_0, z_0) gezogene Tangente:

$$(x - x_0) : x'(s_0) = (y - y_0) : y'(s_0) = (z - z_0) : z'(s_0)$$

für alle beliebigen C (d. h. für alle Zahlenpaare $x'(s_0)$, $y'(s_0)$) stets in der Ebene

$$z - z_0 = (x - x_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial f(x_0, y_0)}{\partial y},$$

[1]) Der erste Teil der Arbeit ist in diesen Annalen 79 (1919), S. 340—359 erschienen. Im einzelnen sind Verweisungen auf jene Abhandlung unterlassen worden, da Sätze, Formeln, Paragraphen weiternumeriert und die Bezeichnungen beibehalten sind.

der *Tangentenebene* von S in (x_0, y_0), liegt, deren Existenz damit festgestellt ist. Da (x_0, y_0) beliebig in E^* gewählt werden darf, so gilt der

Satz VII. *Eine den Bedingungen des Satzes* I *genügende, a fortiori also eine der Lipschitzschen Bedingung*

$$(43) \qquad \left|\frac{f(x_1, y) - f(x_2, y)}{x_1 - x_2}\right| < M, \quad \left|\frac{f(x, y_1) - f(x, y_2)}{y_1 - y_2}\right| < M$$

genügende Raumfläche

$$z = f(x, y)$$

besitzt in einem maßgleichen Kern ihres Definitionsgebietes G eine Tangentenebene.

Dieser Satz ist die mehrdimensionale Verallgemeinerung des grundlegenden Lebesgueschen Satzes, daß jede der Lipschitzschen Bedingung genügende ebene Kurve $z = f(x)$ in einem maßgleichen Kern ihres Definitionsintervalls eine Tangente besitzt.

11. Dieses Ergebnis erlaubt es nun, die elementare Definition des Flächeninhaltes, wie man sie für Flächen mit *stetig* sich drehender Tangentenebene gibt, auch auf Flächen auszudehnen, die nur (43) genügen. Wir definieren:

Der Inhalt einer über dem Quadrat Q sich hinstreckenden[2]) Fläche $z = f(x, y)$, die der Lipschitzschen Bedingung (43) genügt, ist der Limes des Inhaltes einer Folge von Polyedern, die sich gleichfalls schlicht über Q hinstrecken, und die so beschaffen sind, daß ihre Ecken auf der Fläche liegen, daß die Polyederfolge gegen die Fläche konvergiert und daß die Neigungen der Polyederebenen gegen die Neigungen der Tangentenebenen der Fläche, wo diese existieren, konvergieren. Dabei sollen die Polyeder der Lipschitzschen Bedingung genügen, und zwar gleichmäßig, d. h. mit einer für alle geltenden Konstanten M'.

Wir zeigen, daß der so definierte Limes stets existiert, indem wir ihn berechnen. Es sei etwa

$$z = p_n(x, y)$$

die analytische Darstellung des n-ten Polyeders. Sein Flächeninhalt ist nach elementaren Überlegungen gegeben durch

$$J_n = \iint\limits_Q \sqrt{1 + \left(\frac{\partial p_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_n}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

wo $\frac{\partial p_n}{\partial x}$ und $\frac{\partial p_n}{\partial y}$ in jener Nullmenge der xy-Ebene (sie besteht aus der

[2]) Die folgenden Überlegungen ändern sich nicht, wenn statt Q ein *quadrierbares* Gebiet zugrunde gelegt wird.

Projektion der Kanten des Polyeders auf diese Ebene), wo die Ableitungen nicht existieren, die vorderen Derivierten bedeuten mögen. Die $p_n(x, y)$ sollen ferner der Lipschitzschen Bedingung

$$\left|\frac{p_n(x_1, y) - p_n(x_2, y)}{x_1 - x_2}\right| \leqq M', \qquad \left|\frac{p_n(x, y_1) - p_n(x, y_2)}{y_1 - y_2}\right| \leqq M'$$

oder, was auf dasselbe herauskommt,

$$\left|\frac{\partial p_n}{\partial x}\right| \leqq M', \quad \left|\frac{\partial p_n}{\partial y}\right| \leqq M' \tag{44}$$

genügen, wo M' eine von x, y und n unabhängige Zahl ist. In dem maßgleichen Kern E^* von Q soll gelten

$$\lim_{n=\infty} \frac{\partial p_n}{\partial x} = \frac{\partial f}{\partial x}, \quad \lim_{n=\infty} \frac{\partial p_n}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y}. \tag{45}$$

Nach einem Konvergenzsatze der Lebesgueschen Theorie ist dann, da die Integranden beschränkt bleiben:

$$\lim_{n=\infty} \iint\limits_Q \sqrt{1 + \left(\frac{\partial p_n}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_n}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy = \iint\limits_Q \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy.$$

Es existiert also der Inhalt J der Fläche

$$J = \lim_{n=\infty} J_n,$$

und zwar ist

$$J = \iint\limits_Q \sqrt{1 + \left(\frac{\partial f}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y}\right)^2}\, dx\, dy,$$

analog zu der für stetige partielle Ableitungen bekannten Formel.

12. Zu Flächen der in § 11 behandelten Art *existieren* nun stets Folgen von Polyedern mit den durch die Definition geforderten Eigenschaften, und zwar kann man solche auf besonders einfache Weise als Dreieckspolyeder konstruieren. Zu diesem Zwecke werde nämlich in Q eine Folge von Dreiecksnetzen angegeben, deren jedes aus endlich vielen Dreiecken besteht. Die Maximalseitenlänge soll in der Netzfolge gegen Null konvergieren. Ist ferner d der „Durchmesser", d. h. die größte Seite eines Dreiecks, und b seine „Breite", d. h. seine kleinste Höhe, so sollen alle Dreiecke aller Netze noch der Bedingung

$$\frac{d}{b} < \mu \tag{46}$$

unterworfen sein, wo μ eine feste, von n unabhängige Zahl bedeutet[3]).

[3]) Diese Beschränkung schließt, wie sich aus dem Folgenden mit ergibt, die Möglichkeit der Konstruktion jener Schwarzschen Folgen von Polyedern aus, die zwar gegen die Fläche konvergieren, deren Ebenenneigungen aber nicht gegen die Neigungen der Tangentenebenen der Fläche konvergieren.

Zu jedem Dreiecksnetz konstruiert man nun das zugehörige Polyeder, indem man in den Eckpunkten jedes Dreiecks die Ordinaten der Fläche errichtet und durch die Endpunkte dieser Ordinaten jene Dreiecke legt, deren Projektionen auf die xy-Ebene gerade die Dreiecke des Netzes sind. Ein solches Polyeder zieht sich schlicht über die xy-Ebene hin, d. h. es wird durch eine eindeutige Funktion $z = p_n(x, y)$ dargestellt. Die so entstandene Folge von Polyedern konvergiert gegen die Fläche wegen der Stetigkeit der Fläche und weil die Maximalseitenlänge der Polyeder gegen Null gehen soll. Es braucht also nur noch nachgewiesen zu werden, daß diese Polyederfolge auch (44) und (45) Genüge leistet, um die Anwendbarkeit unserer Definition sicherzustellen.

13. Aus der Folge von Dreiecksnetzen greifen wir eines, etwa das n-te, heraus und betrachten in diesem Netz ein Dreieck mit den Ecken $P_1 = (x_1, y_1)$, $P_2 = (x_2, y_2)$, $P_3 = (x_3, y_3)$. Es sei d_n der größte Durchmesser der Dreiecke des n-ten Netzes und b' und d' seien Breite und Durchmesser des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$. Die Zahlen $x_1, x_2; x_3$ mögen sich anordnen lassen

$$x_1 \leqq x_2 \leqq x_3,$$

wo nicht beidemal das Gleichheitszeichen gelten kann, also jedenfalls

$$x_1 < x_3$$

ist. Durch den Punkt P_2 ziehe ich die Parallele zur y-Achse, die die Gegenseite $P_1 P_3$ im Punkte $P_4' = (x_4, y_4)$ trifft (der eventuell mit P_1 oder P_3 zusammenfallen kann). Es ist somit

$$x_4 = x_2$$

und

(47) $$y_4 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} y_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} y_3.$$

Im übrigen ist noch

(48) $$|y_2 - y_4| \geqq b'.$$

Es sei

$$z_1 = f(x_1, y_1), \quad z_2 = f(x_2, y_2), \quad z_3 = f(x_3, y_3),$$

und z_4 sei die Ordinate desjenigen Punktes $\overline{P}_4$ des Polyederdreieckes, dessen Projektion auf die xy-Ebene P_4' ist, also

(49) $$z_4 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} z_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} z_3.$$

In dem ausgewählten Dreieck $P_1 P_2 P_3$ ist nun

$$\frac{z_4 - z_2}{y_4 - y_2} = \frac{\partial p_n(x, y)}{\partial y},$$

wo $\frac{\partial p_n}{\partial y}$ auf dem Rande des Dreiecks die nach innen gerichtete Ableitung bedeute. Da nun

$$|z_4 - z_2| = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} z_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} z_3 - z_2\right| = \left|\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}(z_1 - z_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}(z_3 - z_2)\right|$$
$$\leqq |z_1 - z_2| + |z_3 - z_2| \leqq M(|y_1 - y_2| + |x_1 - x_2|)$$
$$+ M(|y_3 - y_2| + |x_3 - x_2|) < 4\,Md'$$

ist, folgt unter Heranziehung von (48) und (46)

$$(50) \qquad \left|\frac{\partial p_n}{\partial y}\right| = \left|\frac{z_4 - z_2}{y_4 - y_2}\right| < 4\,M\frac{d'}{b'} < 4\,M\mu.$$

Diese Abschätzung ist von n und von der Wahl des Dreiecks $P_1 P_2 P_3$ innerhalb des n-ten Netzes unabhängig, also ist (44) erfüllt. (Einem auf einem Dreiecksrande liegenden Punkt kommen ev. zwei in das Innere benachbarter Dreiecke gerichtete Ableitungen $\frac{\partial p_n}{\partial y}$ zu; da nun die Abschätzung (50) für beide gilt, so genügt jedenfalls die *vordere* Derivierte in jedem Punkte der Ungleichung (44), die ja für die vordere Derivierte aufgestellt war.) Was hier für $\frac{\partial p_n}{\partial y}$ bewiesen ist, könnte man, indem man die Rollen von x und y durchweg vertauschte, ebenso für $\frac{\partial p_n}{\partial x}$ beweisen.

14. Es sei nun $P_0 = (x_0, y_0)$ ein zu E^* gehörender Punkt, der im Innern oder auf dem Rande von $P_1 P_2 P_3$ liegt. Mit $\frac{\partial f_0}{\partial x}$ und $\frac{\partial f_0}{\partial y}$ bezeichnen wir kurz die partiellen Ableitungen von $f(x, y)$ im Punkte P_0. Zu zeigen ist noch, daß

$$\lim_{n=\infty} \frac{z_4 - z_2}{y_4 - y_2} = \frac{\partial f_0}{\partial y}$$

in der Folge jener Dreiecke $P_1 P_2 P_3$ aller Netze, in deren Innerem oder auf deren Rande P_0 liegt.

Mit r_{ij} möge die Entfernung $\sqrt{(x_i - x_j)^2 + (y_i - y_j)^2}$ bezeichnet werden für $i, j = 0, 1, 2, 3, 4$. Dann ist zunächst für $i = 1, 2, 3$, da P_0 in E^* liegt,

$$(51) \quad z_i = f(x_i, y_i) = f(x_0, y_0) + \frac{\partial f_0}{\partial x}(x_i - x_0) + \frac{\partial f_0}{\partial y}(y_i - y_0) + r_{i0} R_i,$$

wo $R_i \to 0$ mit $r_{i0} \to 0$, also mit $d_n \to 0$ oder $n \to \infty$. Wegen (49) ist

$$z_4 - z_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}(z_1 - z_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}(z_3 - z_2),$$

woraus durch Anwendung von (51) entsteht:

$$z_4 - z_2 = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x}(x_1 - x_2) + \frac{\partial f_0}{\partial y}(y_1 - y_2)\right\} + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}\left\{\frac{\partial f_0}{\partial x}(x_3 - x_2) + \frac{\partial f_0}{\partial y}(y_3 - y_2)\right\}$$
$$+ \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}(r_{10} R_1 - r_{20} R_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}(r_{30} R_3 - r_{20} R_2)$$

oder

$$z_4 - z_2 = \frac{\partial f_0}{\partial y}\left\{\frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1}(y_1 - y_2) + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1}(y_3 - y_2)\right\} + R,$$

wo unter R die Summe der beiden letzten Glieder der rechten Seite der vorigen Gleichung verstanden ist. Durch (47) erhält man hieraus

$$z_4 - z_2 = \frac{\partial f_0}{\partial y}(y_4 - y_2) + R.$$

Nun ist

$$R = \frac{x_3 - x_2}{x_3 - x_1} r_{10} R_1 + \frac{x_2 - x_1}{x_3 - x_1} r_{30} R_3 - r_{20} R_2,$$

folglich

$$|R| \leqq r_{10}|R_1| + r_{30}|R_3| + r_{20}|R_2| \leqq d'\{|R_1| + |R_2| + |R_3|\} = d' \cdot R^*,$$

worin also auch $R^* \to 0$ mit $n \to \infty$. Da ferner

$$\mu |y_4 - y_2| \geqq \mu b' > d'$$

ist, so haben wir

$$|R| < |y_4 - y_2| \mu R^*,$$

daher

$$\frac{z_4 - z_2}{y_4 - y_2} = \frac{\partial f_0}{\partial y} + \vartheta \mu R^*, \qquad |\vartheta| < 1.$$

Das heißt aber, es ist in P_0 und ebenso in allen Punkten von E^*

$$\lim_{n=\infty} \frac{\partial p_n}{\partial y} = \frac{\partial f}{\partial y},$$

und eine entsprechende Gleichung gilt für $\frac{\partial f}{\partial x}$ in E^*. Die in § 12 konstruierten Polyederfolgen genügen also der Definition von § 11: die Flächeninhalte der Polyeder konvergieren somit gegen eine Zahl, die wir den Flächeninhalt der Raumfläche genannt haben.

15. Diese Untersuchungen lassen sich auf Flächen ausdehnen, die in der *Gaußschen Parameterdarstellung*

(52) $$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

gegeben sind, wo (u, v) in einem Quadrat Q variieren möge und die φ, ψ, χ der Lipschitzschen Bedingung genügen[4]). Ist (u_0, v_0) ein Punkt totaler Differenzierbarkeit von φ, ψ und χ gemeinsam und benennen wir

$$x_0 = \varphi(u_0, v_0), \quad y_0 = \psi(u_0, v_0), \quad z_0 = \chi(u_0, v_0);$$

---

[4]) Nach Herrn Lebesgue [Thèse, Annali di Mat. (3) 7 (1902), S. 315] ist die angegebene Beschaffenheit der Parameterfunktionen notwendig und hinreichend da-

so liegen (nach Überlegungen analog zu § 10) die Tangenten aller durch (x_0, y_0, z_0) gehenden differenzierbaren Kurven der Fläche in dem Gebilde

$$(x-x_0)\begin{vmatrix}\psi_u & \psi_v\\ \chi_u & \chi_v\end{vmatrix} + (y-y_0)\begin{vmatrix}\chi_u & \chi_v\\ \varphi_u & \varphi_v\end{vmatrix} + (z-z_0)\begin{vmatrix}\varphi_u & \varphi_v\\ \psi_u & \psi_v\end{vmatrix} = 0.$$

Dieses stellt aber eine Ebene — die Tangentenebene — dar, wenn nicht alle drei Funktionaldeterminanten zugleich verschwinden. In der Menge der Punkte also, die zu solchen Parameterpunkten (u, v) gehören, in denen totale Differenzierbarkeit von φ, ψ und χ zugleich herrscht und in denen mindestens eine der Funktionaldeterminanten

$$\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}, \quad \frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)}$$

nicht verschwindet, besitzt die Fläche (52) eine Tangentenebene. Von den Ausnahmepunkten behaupten wir nun, daß sie auf die xy-, die yz- und die zx-Ebene in *Nullmengen* projiziert werden.

Um feste Vorstellungen zu haben, betrachten wir etwa die Projektion auf die xy-Ebene. Zunächst ist die Menge der (u, v), in der mindestens eine der drei Funktionen (52) nicht total differenzierbar ist, als Vereinigungsmenge dreier Nullmengen selbst eine Nullmenge. Einer solchen aber entspricht durch die Abbildung $x = \varphi(u, v)$, $y = \psi(u, v)$ von der uv-Ebene auf die xy-Ebene nach Hilfssatz 1, § 7, eine Nullmenge. Ferner ist die Teilmenge der Raumfläche, in der alle drei Funktionaldeterminanten verschwinden, enthalten in der Menge, in der nur $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$ verschwindet. Die Projektion dieser Menge auf die xy-Ebene ist das Bild jener Menge von Punkten (u, v), in denen $\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}$ verschwindet. Die letztere Menge ist meßbar wegen der Meßbarkeit der Funktionaldeterminante. Höchstens in einer Teilmenge vom Maße Null stellt in ihr die Funktionaldeterminante nicht das Vergrößerungsverhältnis dar; einer Nullmenge entspricht aber wieder eine Nullmenge der xy-Ebene. Es bleibt also noch die Menge T der (u, v) zu betrachten, in der das Vergrößerungsverhältnis für die Abbildung von der uv-Ebene auf die xy-Ebene Null ist. Dieser Menge T entspricht aber eine Nullmenge T^* als Bild in der xy-Ebene. Denn man kann bei beliebig vorgeschriebenem $\varepsilon > 0$ zu jedem Punkt P von T einen solchen Radius ϱ_P bestimmen, daß für jeden Kreis K_P um P mit kleinerem Radius als ϱ_P

$$\frac{m K_P^*}{m K_P} < \varepsilon$$

---

für, daß jeder ebenen rektifizierbaren Kurve in Q eine rektifizierbare Raumkurve auf der Raumfläche entspricht. Herr Lebesgue nennt daher solche Flächen gleichfalls „rektifizierbar", zeigt aber durch ein Beispiel, daß die Rektifizierbarkeit nicht der Fläche an sich zukommt, sondern auch von der Wahl der Parameter abhängt.

ist, wo K_P^* das Bild von K_P sei. Mit abzählbar vielen solcher Kreise K_{P_n}, deren Radius je kleiner als ϱ_{P_n} ist, kann man aber T so überdecken, daß

$$\sum_n m K_{P_n} < mT + \varepsilon$$

ist[5]), und da T^* ganz in der Vereinigungsmenge der Bilder $K_{P_n}^*$ der K_{P_n} liegt, so haben wir

$$mT^* \leqq \sum_n m K_{P_n}^* < \varepsilon \sum m K_{P_n} < \varepsilon(mT + \varepsilon),$$

also

$$mT^* = 0$$

wegen der Willkürlichkeit von ε. Wir haben also den

Satz VIII. *Jede durch die Gaußsche Parameterdarstellung*

$$x = \varphi(u, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

in einem Quadrat als Bereich der Parameter u, v gegebene Raumfläche, deren Parameterfunktionen φ, ψ, χ der Lipschitzschen Bedingung genügen, besitzt in jedem ihrer Punkte eine wohlbestimmte Tangentenebene außer höchstens in einer solchen Menge ihrer Punkte, deren Projektionen auf die Koordinatenebenen des xyz-Systems Mengen vom Maße Null ausmachen.

16. Auch für diese allgemeinere Darstellung der Raumfläche führen wir ihren Flächeninhalt als Limes der Flächeninhalte von Polyedern ein. Und zwar sollen diese Polyeder folgendermaßen beschaffen sein: sie sollen der Raumfläche einbeschrieben sein, d. h. ihre Ecken sollen auf der Fläche liegen, und sie sollen sich durch drei *eindeutige* Funktionen

$$x = \mathfrak{p}_n(u, v), \quad y = \mathfrak{q}_n(u, v), \quad z = \mathfrak{r}_n(u, v)$$

so darstellen lassen, daß

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{p}_n(u, v) = \varphi(u, v) \quad \text{usw.,} \tag{53}$$

und daß in einem maßgleichen Kern von Q

$$\lim_{n=\infty} \frac{\partial \mathfrak{p}_n}{\partial u} = \frac{\partial \varphi}{\partial u} \quad \text{usw.} \tag{54}$$

ist (wo an den Stellen, wo die Ableitungen der Polyederfunktionen nicht existieren, wieder die vorderen Derivierten unter $\frac{\partial \mathfrak{p}_n}{\partial u}$ usw. zu verstehen sind) und daß die $\mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_n, \mathfrak{r}_n$ gleichmäßig in n der Lipschitzschen Bedingung genügen. Eine Polyederfolge, die diesen Forderungen genügt, konvergiert

[5]) Vgl. z. B. Rademacher, Dissertation, S. 9, Satz II.

im xyz-Raum gegen die Raumfläche (52), und ihre Ebenenneigungen konvergieren gegen die Neigungen der Tangentenebenen, wo diese existieren.

Sind dann $\mathfrak{E}_n, \mathfrak{F}_n, \mathfrak{G}_n$ die zum n-ten Polyeder gehörenden Fundamentalgrößen 1. Ordnung und E, F, G die zur Fläche gehörenden, so ist in einem maßgleichen Kern von Q

$$\lim_{n=\infty} \mathfrak{E}_n = E, \quad \lim_{n=\infty} \mathfrak{F}_n = F, \quad \lim_{n=\infty} \mathfrak{G}_n = G, \tag{55}$$

wobei die $\mathfrak{E}_n, \mathfrak{F}_n, \mathfrak{G}_n$ als aufgebaut aus den gleichmäßig beschränkten Größen $\frac{\partial \mathfrak{p}_n}{\partial u}$ usw. selbst gleichmäßig beschränkt bleiben. Der Flächeninhalt des n-ten Polyeders ist aber bekanntlich gleich

$$J_n = \iint_Q \sqrt{\mathfrak{E}_n \mathfrak{G}_n - \mathfrak{F}_n^2}\, du\, dv,$$

und es existiert wegen (55) und wegen der gleichmäßigen Beschränktheit der Integranden

$$\lim_{n=\infty} J_n = \lim_{n=\infty} \iint_Q \sqrt{\mathfrak{E}_n \mathfrak{G}_n - \mathfrak{F}_n^2}\, du\, dv = \iint_Q \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

welche Zahl wir als den Inhalt der Raumfläche bezeichnen.

Daß nun überhaupt Polyeder *existieren*, die durch drei eindeutige Funktionen

$$x = \mathfrak{p}_n(u, v), \quad y = \mathfrak{q}_n(u, v), \quad z = \mathfrak{r}_n(u, v)$$

mit den Eigenschaften (53) und (54) dargestellt werden, sieht man, indem man die Konstruktionen von § 12 auch hier anwendet. Man gibt dazu in dem Quadrat Q der uv-Ebene wieder eine Folge von Dreiecksnetzen an, die der Beschränkung (46) unterworfen sind, und konstruiert zu jedem Netz die drei Polyederfunktionen $\mathfrak{p}_n, \mathfrak{q}_n, \mathfrak{r}_n$, die bzw. zu φ, ψ und χ ebenso gehören wie oben das p_n zu f. Es gelten dann zufolge der Überlegungen von § 13 und § 14 die Lipschitzsche Bedingung und die Gleichungen (53) und (54).

Somit können wir den Satz aussprechen:

Satz IX. *Jede in der Gaußschen Parameterdarstellung*

$$x = \varphi(x, v), \quad y = \psi(u, v), \quad z = \chi(u, v)$$

gegebene Fläche, deren Parameterfunktionen der Lipschitzschen Bedingung genügen (also jede „rektifizierbare" Raumfläche), läßt sich durch eingeschriebene Dreieckspolyeder so approximieren, daß die Neigungen der Polyederebenen gegen die der Tangentenebenen der Fläche konvergieren, wo diese existieren, und daß für die Flächeninhalte J_n der Polyeder

$$\lim_{n=\infty} J_n = \iint_Q \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$$

gilt [6]).

Zusatz: *Der so definierte Flächeninhalt der Raumfläche ist invariant gegenüber einer eineindeutigen Parametertransformation $u = u(s, t)$, $v = v(s, t)$, die selbst der Lipschitzschen Bedingung genügt.*

Der Beweis dieses Zusatzes ergibt sich sofort, wenn man sich des Determinantenausdrucks für $EG - F^2$ erinnert und Satz V und Satz VI heranzieht. Dabei ist noch zu beachten, daß eine der Lipschitzschen Bedingung genügende Funktion $\varphi(u, v)$ durch eine der gleichen Bedingung genügende Transformation wieder in eine Funktion von der gleichen Eigenschaft übergeht, wie in § 8 bewiesen ist.

17. Anstatt den Inhalt der ganzen zu Q gehörenden Fläche anzugeben, kann man natürlich genau so den Inhalt einer ihrer Teilmengen $\bar{R}$ definieren und berechnen, wenn $\bar{R}$ Bild eines in Q liegenden *Intervalles* R ist:

$$J(\bar{R}) = \iint_R \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

Ebenso wie man nun den Inhalt einer ebenen Menge definiert als die untere Grenze der Inhaltssumme solcher Intervallmengen, die jene Menge überdecken, so definieren wir den Inhalt $J(\bar{U})$ einer auf der Raumfläche gelegenen Punktmenge $\bar{U}$, die Bild der Menge U in Q ist, als

$$(56)\quad J(\bar{U}) = \text{untere Grenze} \sum_j J(\bar{R}_j) = \text{untere Grenze} \sum_j \iint_{R_j} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

[6]) Herr Lebesgue (l. c. S. 314) weist nur darauf hin, daß für alle der Fläche eingeschriebenen Polyederfolgen Lim inf $J_n \leqq \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ ist. — Neuerdings hat Herr W. H. Young [Lond. R. S. Proc. (A) 96 (1919), S. 71–81] als Formel für den Flächeninhalt „rektifizierbarer" Flächen gleichfalls $J = \iint \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv$ bewiesen. Doch gelangt Herr Young dahin nur durch eine besondere neue Definition des Flächeninhaltes, die einen *doppelten* Grenzübergang involviert. Durch Rechtecksteilung von Q parallel zum u, v-System erhält man auf der Raumfläche eine gewisse Mascheneinteilung. Jeder Masche wird nun eine Zahl zugeordnet, die selbst als *Limes* auftritt. Die Summe dieser Zahlen liefert im Grenzübergang für unbegrenzt feiner werdende Rechtecksteilungen den Inhalt der Raumfläche. Unsere Überlegungen dagegen zeigen, daß ein *einfacher* Grenzübergang, zudem ein Grenzübergang an einer Folge von Polyedern, wie man sie zu stetig differenzierbaren Flächen schon immer konstruiert hat, genügt. Überdies ist für Herrn Youngs Definition die Teilung des uv-Gebietes in *achsenparallele Rechtecke* wesentlich, und die Invarianz gegenüber eineindeutiger Transformation der Parameter wird gar nicht erst untersucht. In der Tat bedürfte es dazu auch eines Hilfsmittels wie unseres Satzes I, der aus der Beschränktheit der partiellen Derivierten nach x und nach y einen Schluß auf die *totale* Differenzierbarkeit, d. h. auf das Verhalten der Fläche nach *allen* von dem Flächenpunkte ausgehenden Richtungen erlaubt. (Anmerkung bei der Korrektur, 24. Febr. 1920.)

wo die Intervalle R_j die Menge U völlig überdecken sollen. Ist nun U *meßbar*, so wollen wir auch $\overline{U}$ meßbar nennen. In diesem Falle ist nach der Definition zunächst:

$$J(\overline{U}) \geqq \iint_U \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv. \tag{57}$$

Andererseits gibt es zufolge der Definition des Inhaltes einer ebenen Punktmenge gewiß eine Menge von Intervallen R_j, die U überdecken, so daß

$$\sum m R_j < m U + \varepsilon, \tag{58}$$

wenn $\varepsilon > 0$ beliebig vorgeschrieben ist. Wir setzen nun

$$\begin{array}{ll} A_1 = R_1 U & B_1 = R_1 - A_1 \\ A_2 = R_2 (U - A_1) & B_2 = R_2 - A_2 \\ A_3 = R_3 (U - A_1 - A_2) & B_3 = R_3 - A_3 \\ \dots\dots\dots\dots & \\ A_j = R_j (U - A_1 - A_2 - \dots - A_{j-1}) & B_j = R_j - A_j \\ \dots\dots\dots\dots & , \end{array}$$

so ist erstens der Durchschnitt $A_j A_k$ für alle Zahlen $j \neq k$ leer, und zweitens ist, da die R_j ganz U überdecken:

$$A_1 + A_2 + A_3 + \dots = U.$$

Somit haben wir

$$\sum \iint_{R_j} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv = \sum \left(\iint_{A_j} + \iint_{B_j} \right) = \sum \iint_{A_j} + \sum \iint_{B_j} = \iint_U + \sum \iint_{B_j}. \tag{59}$$

Nun ist aber die Lipschitzsche Bedingung

$$\left| \frac{\partial \varphi}{\partial u} \right| < M, \quad \left| \frac{\partial \varphi}{\partial v} \right| < M, \quad \left| \frac{\partial \psi}{\partial u} \right| < M \quad \text{usw.},$$

vorausgesetzt, woraus wegen der Definition der E, F, G folgt:

$$|E|, |F|, |G| < 3 M^2$$

und

$$\sqrt{EG - F^2} \leqq \sqrt{EG} < 3 M^2,$$

daher also

$$\sum \iint_{B_j} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv < 3 M^2 \sum m B_j = 3 M^2 \sum m (R_j - A_j)$$
$$= 3 M^2 \left(\sum m R_j - \sum m A_j \right) = 3 M^2 \left(\sum m R_j - m U \right).$$

Folglich ergeben (58) und (59):

$$\sum \iint_{R_j} \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv < \iint_U \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv + 3 M^2 \varepsilon,$$

woraus wegen der Willkürlichkeit von ε mit (56) zusammen folgt

$$J(\bar{U}) \leqq \iint_U \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv,$$

was mit (57) zusammen ergibt

$$J(\bar{U}) = \iint_U \sqrt{EG - F^2}\, du\, dv.$$

(Man hätte diese Inhaltsformel ja auch einfach durch Definition setzen können, doch zeigt unsere Ableitung, daß man zu ihr zwangläufig geführt wird, sobald man die Inhaltsformel kennt für die Flächenstücke, die Bilder von *Intervallen* der Parameterebene sind.)

Nun sind E, F, G in der Flächentheorie so definiert, daß

$$EG - F^2 = \left(\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)}\right)^2$$

ist. Es sei nun $\bar{Z}$ die Punktmenge auf der Fläche, wo keine Tangentenebene existiert, und sie sei Bild der Menge Z der Parameterebene. Es ist dann

$$J(\bar{Z}) = \iint_Z \sqrt{\left(\frac{D(\varphi, \psi)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(\psi, \chi)}{D(u, v)}\right)^2 + \left(\frac{D(\chi, \varphi)}{D(u, v)}\right)^2}\, du\, dv,$$

denn Z ist meßbar, da es erstens aus der Nullmenge besteht, in der φ oder ψ oder χ nicht total differenzierbar sind, ferner aus der meßbaren Menge, in der die drei Funktionaldeterminanten zugleich verschwinden. Daraus folgt zugleich

$$J(\bar{Z}) = 0$$

und somit der

Satz X. *Diejenige Punktmenge, in der eine in Parameterdarstellung gegebene Raumfläche, deren Parameterfunktionen der Lipschitzschen Bedingung genügen, keine Tangentenebene besitzt, hat auf der Fläche selbst gemessen den Inhalt Null.*

März 1919.

(Angenommen Juni 1919.)