Bemerkung zur Form algebraischer Integrale linearer Differentialgleichungen.

Von

LEO KÖNIGSBERGER in Wien.

Wenn eine lineare homogene Differentialgleichung

$$(1) \qquad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z = 0,$$

in welcher $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ algebraische Functionen bedeuten, ein algebraisches Integral z_1 besitzt, welches die Lösung einer mit Adjungirung der Grössen $Y_1, Y_2, \ldots, Y_m$ irreductiblen algebraischen Gleichung

$$(2) \quad z^\lambda + f_1(x, Y_1, \ldots, Y_m) z^{\lambda-1} + \cdots + f_\lambda(x, Y_1, \ldots, Y_m) = 0$$

sein mag, so werden bekanntlich alle Lösungen dieser Gleichung Integrale der gegebenen Differentialgleichung sein; nehmen wir daher an, es sei z_1 eine durch algebraische Irrationalitäten darstellbare Function der Coefficienten der Gleichung, welche sich somit nach Abel*) in eine solche Form setzen lässt, dass sich jeder ihrer Theile rational durch die Lösungen der Gleichung (2) ausdrücken lässt, so folgt, dass, wenn ein algebraisches Integral der homogenen Differentialgleichung (1) durch algebraische Irrationalitäten darstellbar ist, dasselbe stets in eine solche Form gebracht werden kann, dass *alle* algebraischen Functionen, aus denen dasselbe zusammengesetzt ist, sich als *rationale* Functionen algebraischer Integrale eben dieser Differentialgleichung ausdrücken lassen.

Ist die gegebene Differentialgleichung *nicht homogen*, also von der Form

$$(3) \qquad \frac{d^m z}{dx^m} + Y_1 \frac{d^{m-1} z}{dx^{m-1}} + \cdots + Y_m z = y,$$

worin y ebenfalls eine algebraische Function bedeutet, so hat

---

*) Démonstration de l'impossibilité etc. Oeuvres compl. I.

bekanntlich*) eine solche Differentialgleichung die Eigenschaft, dass, wenn sie überhaupt ein algebraisches Integral besitzt, ihr auch stets ein in den Coefficienten der Differentialgleichung rational ausdrückbares Integral zukommt; sei nun z_1 wieder ein algebraisches Integral der Differentialgleichung (3), welches eine Lösung der mit Adjungirung der Grössen $Y_1, \ldots, Y_m, y$ irreductiblen algebraischen Gleichung

$$(4)\quad z^\lambda + f_1(x, Y_1, \ldots Y_m, y) z^{\lambda-1} + \cdots + f_\lambda(x, Y_1, \ldots, Y_m, y) = 0$$

sein mag, und werde von dieser angenommen, dass auch sie wieder durch algebraische Irrationalitäten darstellbar sei, so wird, wenn ζ das in den Coefficienten rationale Integral jener Differentialgleichung darstellt, offenbar $z_1 - \zeta$ ein algebraisches, in Irrationalitäten ausdrückbares Integral der reducirten homogenen Differentialgleichung liefern, und da für die Theile dieses der oben ausgesprochene Satz gilt, so erhalten wir das folgende Theorem:

Wenn eine nicht homogene lineare Differentialgleichung mit algebraischen Coefficienten ein durch algebraische Irrationalitäten darstellbares Integral besitzt, so kann man diesem Integrale stets eine solche Form geben, dass sich alle algebraischen Functionen, aus welchen dasselbe zusammengesetzt ist, als rationale Functionen algebraischer Integrale der reducirten Differentialgleichung ausdrücken lassen, von einem durch die Coefficienten der Differentialgleichung rational ausdrückbaren Posten abgesehen, welcher ein rationales Integral der vorgelegten nicht homogenen Differentialgleichung darstellt.

Es mag noch bemerkt werden, dass man auch, ohne den Satz von der Existenz eines rationalen Integrales einer nicht homogenen linearen Differentialgleichung zu Hülfe zu nehmen, unmittelbar mit Hülfe der von Abel aufgestellten Form

$$z_1 = q_0 + p^{\frac{1}{\nu}} + q_2 p^{\frac{2}{\nu}} + \cdots + q_{\nu-1} p^{\frac{\nu-1}{\nu}}$$

leicht aus der bekannten Gestalt der sich für $q_0, p^{\frac{1}{\nu}}, q_2 p^{\frac{2}{\nu}}, \ldots, q_{\nu-1} p^{\frac{\nu-1}{\nu}}$ ergebenden, in den Grössen $z_1, z_2, \ldots, z_\nu$ linearen und mit aus ν^{ten} Einheitswurzeln zusammengesetzten Coefficienten versehenen Ausdrücke eben jenen Satz hätte folgern können, indem nur q_0, ebenso der erste Theil der aufs neue zerlegten Function q_0, u. s. w. Integrale der nicht homogenen Differentialgleichung bleiben, während alle anderen Theile der reducirten Differentialgleichung Genüge leisten, und hieraus geht wiederum der Satz von der Existenz des rationalen Integrales der Differentialgleichung hervor.

*) S. Seite 125 meiner „allg. Untersuchungen aus der Theorie der Differentialgleichungen“ Teubner 1882.

Der oben für *homogene* lineare Differentialgleichungen ausgesprochene Satz, welcher nur eine andere Ausdrucksweise für den Abel'schen Satz bildet, gilt offenbar für jede algebraische Differentialgleichung; denn sei

$$(5)\qquad F\left(x, Y_1, \ldots, Y_m, z, \frac{dz}{dx}, \ldots, \frac{d^m z}{dx^m}\right) = 0,$$

worin wieder $Y_1, \ldots, Y_m$ beliebige in der Differentialgleichung vorkommende algebraische Functionen bedeuten, so werden, wenn dieselbe ein algebraisches Integral z_1 besitzt, welches der irreductibeln Gleichung

$$(6)\qquad z^\lambda + f_1(x, Y_1, \ldots, Y_m) z^{\lambda-1} + \cdots + f_\lambda(x, Y_1, \ldots, Y_m) = 0$$

genügt, offenbar alle Lösungen dieser Gleichung die Differentialgleichung (5) befriedigen, da dieselbe durch Einsetzen von $\frac{dz_1}{dx}, \frac{d^2 z_1}{dx^2}, \ldots, \frac{d^m z_1}{dx^m}$ in eine algebraische Gleichung in z_1 übergeht, deren Coefficienten den Charakter derjenigen der Gleichung (6) besitzen; nehmen wir somit wieder an, dass z_1 durch algebraische Irrationalitäten darstellbar ist, so folgt, dass jeder Theil dieses algebraischen Integrales wieder rational durch die algebraischen Integrale eben dieser Differentialgleichung ausgedrückt werden kann.

Wien, im November 1882.

Berichtigung.

S. 322, Anm. Z. 2 v. u. lies ausgeführt statt angewandt.