Ueber die simultane Integration linearer partieller Differentialgleichungen.

(Von Herrn *A. Clebsch* zu Giessen.)

Die Aufgabe, die gemeinsamen Lösungen mehrerer linearen partiellen Differentialgleichungen zu finden, ist von *Jacobi* im 60sten Bande dieses Journals p. 23 ff. und ausführlicher in seinen demnächst zu publicirenden Vorlesungen über Dynamik, für einen besondern Fall behandelt worden. Dieser Fall besteht darin, dass, wenn eine Reihe von Gleichungen

$$(1.)\qquad A_1(f)=0,\quad A_2(f)=0,\quad \dots\quad A_\nu(f)=0$$

vorliegt, wo

$$(2.)\qquad A_i(f) = X_{i1}\frac{\partial f}{\partial x_1}+X_{i2}\frac{\partial f}{\partial x_2}+\cdots+X_{in}\frac{\partial f}{\partial x_n},$$

zwischen den Operationen A die für jeden Werth von i und $\varkappa$ gültige Identität stattfindet

$$(3.)\qquad A_i(A_\varkappa(f))-A_\varkappa(A_i(f)) = 0.$$

Jacobi hat gezeigt, dass in diesem Falle die Gleichungen (1.) $n-\nu$ gemeinsame Lösungen besitzen, und hat den Weg, sie zu finden, angegeben. Eine Modification seiner Methode habe ich im 61sten Bande dieses Journals p. 168 dargestellt.

Im Folgenden werde ich die Aufgabe ohne Voraussetzung der identischen Relation (3.) aufnehmen und zeigen, wie unter allen Umständen das Problem sich auf den von *Jacobi* behandelten Fall zurückführen lässt, wodurch dann die Frage nach der simultanen Integration linearer partieller Differentialgleichungen in allgemeinster Weise gelöst ist.

§. 1.

Begriff eines vollständigen Systems.

Ein System von Gleichungen

$$(4.)\qquad A_1(f)=0,\quad A_2(f)=0,\quad \dots\quad A_\mu(f)=0$$

sei vorgelegt; es kommt zunächst darauf an, zu entscheiden, ob dieselben gemeinsame Lösungen zulassen, und wie gross die Anzahl der von einander unabhängigen ist. Ich bilde zu diesem Zweck aus den Gleichungen (4.) die Combinationen

$$(5.)\qquad A_i(A_\varkappa(f))-A_\varkappa(A_i(f)) = 0,$$

welche wieder lineare partielle Differentialgleichungen ergeben. Entweder sind nun die Gleichungen (5.) lineare Combinationen der Gleichungen (4.), oder sie sind von diesen verschieden. Die unter den Gleichungen (5.), welche etwas neues ergeben, füge ich den Gleichungen (4.) hinzu, und bilde nun wieder sämmtliche Combinationen (5.). Indem man auf diese Weise fortfährt, gelangt man schliesslich zu einem Systeme, welches sich von (4.) durch eine Reihe hinzugefügter Gleichungen unterscheidet, und bei welchem endlich die Combinationen (5.) keine neuen Gleichungen mehr liefern. Das so entstandene System

$$(6.)\qquad A_1(f)=0,\quad A_2(f)=0,\quad \dots\quad A_\nu(f)=0$$

nenne ich das aus (4.) abgeleitete *vollständige System.*

Ein vollständiges System wird also durch die Eigenschaft definirt, dass sämmtliche Ausdrücke (5.) *lineare Combinationen des Systems selbst sind.*

Die grösste Anzahl von Gleichungen, welche ein vollständiges System enthalten kann, ist gleich n. Denn in diesem ungünstigsten Falle kann man die $\frac{\partial f}{\partial x_i}$ linear durch die $A_i(f)$ ausdrücken, und also auch jeden linearen Differentialausdruck überhaupt als lineare Function der $A_i(f)$ darstellen.

Wenn das vollständige System aus n Gleichungen besteht, so haben die Gleichungen keine simultane Lösung. Denn das System der Gleichungen (6.) führt dann auf die Gleichungen

$$\frac{\partial f}{\partial x_1}=0,\quad \frac{\partial f}{\partial x_2}=0,\quad \dots\quad \frac{\partial f}{\partial x_n}=0,$$

d. h. auf die evidente Lösung $f=\text{Const.}$

Es wird sich zeigen, dass wenn $\nu<n$, immer $n-\nu$ simultane Lösungen existiren.

Ueber die Gleichungen des vollständigen Systemes kann man nun folgenden Satz aufstellen:

Sind

$$M(f) = M_1A_1(f)+M_2A_2(f)+\dots+M_\nu A_\nu(f),$$
$$N(f) = N_1A_1(f)+N_2A_2(f)+\dots+N_\nu A_\nu(f)$$

irgend zwei lineare Combinationen der Ausdrücke (6.), *so ist auch immer*

$$M(N(f))-N(M(f))$$

eine solche.

In der That ist

$$M(N(f)) = \sum_{\varkappa} M(N_\varkappa).A_\varkappa(f)+\sum_i\sum_\varkappa N_\varkappa M_i A_i(A_\varkappa(f)),$$
$$N(M(f)) = \sum_i N(M_i).A_i(f)+\sum_i\sum_\varkappa N_\varkappa M_i A_\varkappa(A_i(f)).$$

Die ersten Theile der rechten Seite haben hier schon die verlangte Form; die Differenz der zweiten Theile

$$\sum_i\sum_\varkappa N_\varkappa M_i\{A_i(A_\varkappa(f))-A_\varkappa(A_i(f))\}$$

nimmt dieselbe Form an, weil der eingeklammerte Ausdruck der Voraussetzung nach sich in jene Gestalt bringen lässt, wenn die A ein vollständiges System bilden.

Hieraus geht sogleich hervor, *dass die Gleichungen eines vollständigen Systems, wenn man sie durch irgend welche lineare Combinationen ersetzt, immer auf ein vollständiges System führen.*

§. 2.

Reduction des vollständigen Systems auf ein *Jacobi*sches.

Unter einem *Jacobi*schen Systeme verstehe ich ein solches, bei welchem die Ausdrücke (5.) nicht lineare Combinationen der Gleichungen (6.) sondern identisch Null liefern. Dieses System hat *Jacobi* a. a. O. integriren gelehrt.

Ich werde jetzt zeigen, dass es immer unendlich viele Arten giebt, ein vollständiges System in ein *Jacobi*sehes zu verwandeln. *Nehmen wir ν willkürlich gewählte Functionen $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\nu$, und bestimmen die ν Gleichungen*

$$(7.) \qquad B_1(f)=0, \quad B_2(f)=0, \quad \dots \quad B_\nu(f)=0,$$

aus den identischen Relationen *):

$$(8.) \quad \begin{cases} A_1(f) = A_1(\varphi_1)B_1(f)+A_1(\varphi_2)B_2(f)+\dots+A_1(\varphi_\nu)B_\nu(f), \\ A_2(f) = A_2(\varphi_1)B_1(f)+A_2(\varphi_2)B_2(f)+\dots+A_2(\varphi_\nu)B_\nu(f), \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_\nu(f) = A_\nu(\varphi_1)B_1(f)+A_\nu(\varphi_2)B_2(f)+\dots+A_\nu(\varphi_\nu)B_\nu(f), \end{cases}$$

so bilden die Gleichungen (7.) *ein Jacobisches System, d. h. es ist identisch*

$$(9.) \qquad B_i(B_\varkappa(f))-B_\varkappa(B_i(f)) = 0.$$

Der Beweis für die Richtigkeit dieses Satzes ist sehr leicht zu führen. Setzt man in den Gleichungen (8.) für f der Reihe nach $\varphi_1, \varphi_2, \dots \varphi_\nu$, so

*) Dieses System findet sich schon in meiner Abhandlung über das *Pfaff*sche Problem im 61sten Bande dieses Journals.

ergiebt sich durch Auflösung des Systems linearer Gleichungen

$$(10.)\qquad B_i(\varphi_\varkappa) = 0,$$

so oft i von $\varkappa$ verschieden ist, und

$$(11.)\qquad B_i(\varphi_i) = 1.$$

Nun ist der Ausdruck auf der linken Seite der Gleichung (9.) nach dem am Ende von §. 1 bewiesenen Satze eine lineare Combination der Ausdrücke A, also auch, wenn man für die $A(f)$ aus (8.) ihre Ausdrücke in den $B(f)$ setzt, von der Form:

$$B_i(B_\varkappa(f)) - B_\varkappa(B_i(f)) = C_1 B_1(f) + C_2 B_2(f) + \cdots + C_\nu B_\nu(f).$$

Setzt man in dieser Gleichung für f der Reihe nach $\varphi_1, \varphi_2, \ldots \varphi_\nu$ und berücksichtigt die Gleichungen (10.), (11.), so erhält man hieraus der Reihe nach die Gleichungen

$$C_1 = 0, \quad C_2 = 0, \quad \ldots \quad C_\nu = 0,$$

d. h. der fragliche Ausdruck muss identisch verschwinden, was zu beweisen war.

Die transformirten Gleichungen (7.) haben aber nicht allein die Eigenschaft, ein *Jacobi*sches System zu sein. Ebenso wichtig ist die zweite Eigenschaft, welche aus (10.) folgt. *Jede der transformirten Gleichungen besitzt nämlich $\nu-1$ bereits bekannte Lösungen,* denn jede wird durch diejenigen Functionen φ befriedigt, deren Index von dem der betreffenden Gleichung verschieden ist. So wird durch die Transformation (8.) ein doppelter Zweck gleichzeitig erreicht.

§. 3.

Integration des *Jacobi*schen Systems.

Ich muss des Folgenden wegen hier die Methode kurz wiederholen, welche zur Bestimmung einer gemeinsamen Lösung der Gleichungen (7.) führt. Sie besteht darin, dass man successive Lösungen sucht, welche die erste, die ersten beiden, die ersten drei etc. der Gleichungen (7.) befriedigen. Es handelt sich also nur um eine Darstellung des Weges, welcher von einer simultanen Lösung ψ_{i-1} der ersten $i-1$ Gleichungen (7.) zu einer simultanen Lösung ψ_i gelangen lässt, welche auch noch der i^{ten} Gleichung genügt. Man hat dann der Voraussetzung nach ψ_{i-1} so bestimmt, dass

$$B_1(\psi_{i-1}) = 0, \quad B_2(\psi_{i-1}) = 0, \quad \ldots \quad B_{i-1}(\psi_{i-1}) = 0.$$

Daraus folgt wegen der identischen Relationen

$$B_i(B_\varkappa(\psi_{i-1})) = B_\varkappa(B_i(\psi_{i-1})),$$

dass auch

$$\psi'_{i-1} = B_i(\psi_{i-1}), \quad \psi''_{i-1} = B_i(\psi'_{i-1}) \quad \text{etc.}$$

den ersten $i-1$ Gleichungen (7.) genügen. Ist nun $\psi_{i-1}^{(\mu)}$ die erste Function dieser Reihe, welche sich als Function von $\psi_{i-1}, \psi'_{i-1}, \dots \psi_{i-1}^{(\mu-1)}, \varphi_i, \varphi_{i+1}, \dots \varphi_\nu$ darstellen lässt, und betrachtet man ψ_i als Function eben dieser Ausdrücke, so hat man

$$0 = B_i(\psi_i) = B_i(\varphi_i)\frac{\partial\psi_i}{\partial\varphi_i} + B_i(\varphi_{i-1})\frac{\partial\psi_i}{\partial\varphi_{i+1}} + \dots + B_i(\varphi_\nu)\frac{\partial\psi_i}{\partial\varphi_\nu}$$
$$+ B_i(\psi_{i-1})\frac{\partial\psi_i}{\partial\psi_{i-1}} + B_i(\psi'_{i-1})\frac{\partial\psi_i}{\partial\psi'_{i-1}} + \dots + B_i(\psi_{i-1}^{(\mu-1)})\frac{\partial\psi_i}{\partial\psi_{i-1}^{(\mu-1)}}$$

oder

$$(12.) \qquad 0 = \frac{\partial\psi_i}{\partial\varphi_i} + \psi'_{i-1}\frac{\partial\psi_i}{\partial\psi_{i-1}} + \psi''_{i-2}\frac{\partial\psi_i}{\partial\psi'_{i-1}} + \dots + \psi_i^{(\mu)}\frac{\partial\psi_i}{\partial\psi_{i-1}^{(\mu-1)}}.$$

Jede Lösung ψ_i dieser partiellen Differentialgleichung mit $\mu+1$ unabhängigen Variabeln ist zugleich eine simultane Lösung der ersten i Gleichungen (7.).

Die Anzahl von Lösungen, welche $i-1$ Gleichungen mit n Variabeln gemein haben, kann nie grösser als $n-(i-1)$ sein; daher kann auch die Anzahl der Functionen

$$\psi_{i-1}, \quad \psi'_{i-1}, \quad \dots \quad \psi_{i-1}^{(\mu-1)}, \quad \varphi_i, \quad \varphi_{i+1}, \quad \dots \quad \varphi_\nu$$

diese Zahl nicht übersteigen, oder es kann μ höchstens gleich $n-\nu$ werden. Die Gleichung (12.) ist also eine lineare partielle Differentialgleichung mit höchstens $n-\nu+1$ Variabeln; und die Bestimmung einer gemeinsamen Lösung aller ν Gleichungen erfordert also die Kenntniss je einer Lösung von ν Gleichungen mit $n-\nu+1$ unabhängigen Variabeln, oder was dasselbe ist, die Kenntniss je eines Integrals von ν Systemen von je $n-\nu$ simultanen Differentialgleichungen erster Ordnung.

Um *alle* verschiedenen simultanen Lösungen des Systems aufzufinden, muss man zunächst die letzte der ν verschiedenen Gleichungen (12.) *vollständig* integriren. Ist in derselben $\mu = n-\nu$, so hat man sofort alle gemeinsamen Lösungen gefunden. Ist aber μ kleiner, so findet man hierdurch nur einen gewissen Cyclus dieser gemeinsamen Lösungen, und man muss weitere Lösungen der vorhergehenden Gleichungen (12.) aufsuchen.

Wenn der erste Fall eintritt, so findet man $n-\nu$ gemeinsame Lösungen, und es existiren also wirklich so viele Lösungen. Im anderen Falle kann man einen Beweis dafür fordern, dass wirklich so viel Lösungen vorhanden sind. Diesen Beweis kann man leicht in folgender Art führen. Seien $\varkappa$ gemeinsame Lösungen der Gleichungen (7.) bekannt. Führen wir diese in das System (7.) als Variable ein, neben $n-\varkappa$ anderen Variabeln, so verschwinden in allen Gleichungen die Glieder, in welchen nach der ersten Art von Variabeln differentiirt wird. Man hat also dann ein System von ν Gleichungen mit nur $n-\varkappa$ Variabeln vor sich, in welchem die gefundenen $\varkappa$ Lösungen die Rolle von Constanten spielen. Dieses neue System ist noch ein *Jacobi*sches, und hat demnach wenigstens *eine* von den früheren verschiedene Lösung, sobald nur $n-\varkappa > \nu$. Es giebt also immer noch weitere Lösungen bis zu $\varkappa = n-\nu$, d. h. das System hat $n-\nu$ gemeinsame Lösungen.

§. 4.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen.

Die Integration der partiellen Differentialgleichungen mit n unabhängigen Variabeln führt bekanntlich nach *Jacobi* auf die Aufgabe, successive eine simultane Lösung für je ein System von 1, 2, 3, ... $n-1$ linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung zu suchen.

Bedienen wir uns des von *Jacobi* eingeführten Symbols

$$(\varphi, \psi) = \sum_{i=1}^{i=n} \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x_i} \frac{\partial \psi}{\partial p_i} - \frac{\partial \psi}{\partial x_i} \frac{\partial \varphi}{\partial p_i} \right),$$

wo die p die Differentialquotienten der unbekannten Function nach den x bedeuten; ist $f = c$ die gegebene Gleichung, und sind

$$f_1 = c_1, \quad f_2 = c_2, \quad \ldots \quad f_{n-1} = c_{n-1}$$

die Gleichungen, welche mit $f = c$ zusammen diese als Functionen der x und und der willkürlichen Constanten c bestimmen, so erhält man

f_1 als Lösung von $(f_1, \ f) = 0$,

f_2 als Lösung von $(f_2, \ f) = 0$, $(f_2, \ f_1) = 0$,

. . . .

f_{n-1} als Lösung von $(f_{n-1}, f) = 0$, $(f_{n-1}, f_1) = 0$, ... $(f_{n-1}, f_{n-2}) = 0$.

Jedes dieser Systeme ist bereits ein *Jacobi*sches; aber diese Eigenschaft kommt bei der Anwendung des in §. 3 entwickelten Verfahrens nur in sofern in Betracht, als dasselbe ein *vollständiges* ist.

Man hat aber bei diesem System noch den weitern Vortheil, dass man für das erste System schon die Lösung f, für das zweite die Lösungen f und f_1, etc., für das letzte $f, f_1, \ldots f_{n-2}$ kennt. Die Ordnungen der Integrationen welche man bei den verschiedenen Systemen auszuführen hat, erniedrigen sich dadurch um weitere 1, 2, ... $n-1$ Einheiten, und man bedarf also zur Aufstellung sämmtlicher Functionen f je eines Integrals von

1	System	von	$2n-2$	Differentialgleichungen	erster	Ordnung
2	Systemen	-	$2n-4$	-	-	-
3	-	-	$2n-6$	-	-	-
$n-1$	-	-	2	-	-	- .

§. 5.

Darstellung der von Herrn *Weiler* gegebenen Vereinfachung von *Jacobis* Methode der Integration der partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung.

In *Schlömilchs* Zeitschrift für Mathematik, Jahrgang 1863 p. 264, hat Herr *Weiler* eine Untersuchung über das in Rede stehende Problem veröffentlicht, in welcher eine Vereinfachung der im vorigen §. auseinandergesetzten Integrationsmethode enthalten ist.

Diese Vereinfachung, welche die Anzahl der erforderlichen Integrationen verringert, und sich bei genauerer Prüfung als eine natürliche Fortentwickelung der *Jacobi*schen Methode erweist, besteht in folgendem.

Die Systeme, deren successive simultane Integration die Aufgabe erfordert:

$$1.\quad (f_1,\ f)=0,$$

$$2.\quad (f_2,\ f)=0,\quad (f_2,\ f_1)=0,$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$n-1.\quad (f_{n-1}, f)=0,\quad (f_{n-1}, f_1)=0,\quad \ldots\quad (f_{n-1}, f_{n-2})=0$$

sind nicht völlig unabhängig von einander; vielmehr unterscheidet sich jedes folgende System nur durch den Hinzutritt einer einzigen weitern Gleichung.

Um auf die vorliegenden Systeme die oben (§. 3) auseinandergesetzte Methode anwenden zu können, muss jedes System in ein System von der Form (7.) transformirt werden. Dabei kann jedesmal ein neues System von Functionen φ angewandt werden. Wir wollen aber hierüber nun folgendes festsetzen:

1. Bei jedem folgenden System sollen immer wieder dieselben Functionen φ benutzt werden, und nur eine einzige neue Function φ soll hinzutreten.

2. Die Function φ_i, welche bei dem i^{ten} System hinzugefügt werden muss, soll eine aus der Reihe der simultanen Lösungen sein, welche man

für die $i-2$ ersten transformirten Gleichungen des vorhergehenden Systems gefunden hat.

3. Statt der Gleichungen des i^{ten} Systems soll man, um dieselben auf die Form des Systems (7.) zu transformiren, die schon transformirten Gleichungen des $(i-1)^{\text{ten}}$ System benutzen, und nur die letzte Gleichung unverändert hinzufügen.

Die transformirten Gleichungen, welche aus dem obigen Systeme hervorgehen, bezeichne ich durch

$$\begin{array}{ll} 1. & B_1^{(1)}(f_1)=0, \\ 2. & B_1^{(2)}(f_2)=0, \quad B_2^{(2)}(f_2)=0, \\ \cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ n-1. & B_1^{(n-1)}(f_{n-1})=0, \quad B_2^{(n-1)}(f_{n-1})=0, \quad \ldots \quad B_{n-1}^{(n-1)}(f_{n-1})=0. \end{array}$$

Nach der Bestimmung No. 3 sollen nun

$$B_1^{(i)}(F), \quad B_2^{(i)}(F), \quad \ldots \quad B_i^{(i)}(F)$$

sich aus folgenden Gleichungen bestimmen:

$$(13.)\quad \begin{cases} B_1^{(i-1)}(F) = B_1^{(i-1)}(\varphi_1)B_1^{(i)}(F)+B_1^{(i-1)}(\varphi_2)B_2^{(i)}(F)+\cdots+B_1^{(i-1)}(\varphi_i)B_i^{(i)}(F), \\ B_2^{(i-1)}(F) = B_2^{(i-1)}(\varphi_1)B_1^{(i)}(F)+B_2^{(i-1)}(\varphi_2)B_2^{(i)}(F)+\cdots+B_2^{(i-1)}(\varphi_i)B_i^{(i)}(F), \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ B_{i-1}^{(i-1)}(F) = B_{i-1}^{(i-1)}(\varphi_1)B_1^{(i)}(F)+B_{i-1}^{(i-1)}(\varphi_2)B_2^{(i)}(F)+\cdots+B_{i-1}^{(i-1)}(\varphi_i)B_i^{(i)}(F), \\ (f_{i-1},F) = (f_{i-1},\varphi_1)B_1^{(i)}(F)+(f_{i-1},\varphi_2)B_2^{(i)}(F)+\cdots+(f_{i-1},\varphi_i)B_i^{(i)}(F). \end{cases}$$

Nun ist, weil bei der Bestimmung der $B^{(i-1)}$ die ersten $i-1$ Functionen φ bereits benutzt sein sollten:

$$B_h^{(i-1)}(\varphi_k)=0, \quad B_h^{(i-1)}(\varphi_h)=1,$$

wenn h und k kleiner als i. Ferner sollte φ_i eine simultane Lösung der Gleichungen

$$B_1^{(i-1)}(\varphi_i)=0, \quad B_2^{(i-1)}(\varphi_i)=0, \quad \ldots \quad B_{i-2}^{(i-1)}(\varphi_i)=0$$

sein, welche natürlich von f_{i-1} verschieden sein muss. Hierdurch reduciren sich die Gleichungen (13.) auf folgende:

$$(14.)\quad \begin{cases} B_1^{(i-1)}(F)=B_1^{(i)}(F), \\ B_2^{(i-1)}(F)=B_2^{(i)}(F), \\ \cdots\cdots \\ B_{i-2}^{(i-1)}(F)=B_{i-2}^{(i)}(F), \\ B_{i-1}^{(i-1)}(F)=B_{i-1}^{(i)}(F)+B_{i-1}^{(i-1)}(\varphi_i)B_i^{(i)}(F), \\ (f_{i-1},F) = (f_{i-1},\varphi_1)B_1^{(i)}(F)+(f_{i-1},\varphi_2)B_2^{(i)}(F)+\cdots+(f_{i-1},\varphi_i)B_i^{(i)}(F). \end{cases}$$

Man sieht also, *dass bei dieser Art der Bestimmung jedes folgende System eine Reihe von transformirten Gleichungen mit dem vorhergehenden gemein hat; nur die letzte Gleichung des vorhergehenden Systems kommt in dem folgenden nicht vor, und dafür treten in dem letztern zwei neue Gleichungen hinzu.*

Man kann sonach das ganze System der transformirten Gleichungen in folgendem Schema darstellen:

$$
(15.)\quad \left\{\begin{array}{rl}
1. & C_1(f_1)\ =0, \\
2. & D_1(f_2)\ =0,\ C_2(f_2)\ =0, \\
3. & D_1(f_3)\ =0,\ D_2(f_3)\ =0,\ C_3(f_3)\ =0, \\
 & \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\
n-2. & D_1(f_{n-2})=0,\ D_2(f_{n-2})=0,\ D_3(f_{n-2})=0,\ \dots\ C_{n-2}(f_{n-2})=0, \\
n-1. & D_1(f_{n-1})=0,\ D_2(f_{n-1})=0,\ D_3(f_{n-1})=0,\ \dots\ D_{n-2}(f_{n-1})=0,\ C_{n-1}(f_{n-1})=0,
\end{array}\right.
$$

wobei nach (14.) die hier durch C, D bestimmten Ausdrücke sich aus den identischen Relationen bestimmen:

$$
(16.)\quad \left\{\begin{array}{l}
C_{i-1}(F) = D_{i-1}(F) + C_{i-1}(\varphi_i)\,C_i(F) \\
(f_{i-1}, F) = (f_{i-1}, \varphi_1)D_1(F) + (f_{i-1}, \varphi_2)D_2(F) + \cdots + (f_{i-1}, \varphi_{i-1})D_{i-1}(F) \\
\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad + (f_{i-1}, \varphi_i)\,C_i(F).
\end{array}\right.
$$

Diese beiden Gleichungen dienen dazu um $D_{i-1}(F)$ und $C_i(F)$ durch die vorhergehenden Ausdrücke darzustellen.

Die simultane Integration der Systeme (15.) wird nun dadurch wesentlich erleichtert, dass man für das i^{te} System nicht mehr eine simultane Lösung seiner ersten $i-2$ Gleichungen successive aufzusuchen braucht, sondern dass diese schon bei der Behandlung des $i-1^{\text{ten}}$ Systemes gefunden ist. Man hat also in jedem System nur noch *zwei* Integrationen vorzunehmen; *und die Bestimmung sämmtlicher Functionen f bedarf also nur der Kenntniss je eines Integrals für ein System von $2n-2$ gewöhnlichen Differentialgleichungen, und für je zwei Systeme von $2n-4$, $2n-6$, ... 2 gewöhnlichen Differentialgleichungen.*

Aber nur dann sind die Integrationen immer von so geringer Zahl, wenn die Zahlen μ überall ihre höchsten Werthe erreichen. Wenn bei irgend einer Integration der Cyclus der daraus abgeleiteten simultanen Integrale sich früher schliesst, so kann man endlich zu einer Stelle gelangen, wo entweder keine Function φ_i mehr gegeben ist, welche von f_{i-1} verschieden, oder es wird doch nur eine Function dieser Art bekannt sein, so dass man keine gemeinsame Lösung der ersten $i-2$ Gleichungen des folgenden Systems zur Verfügung hat.

§. 6.

Das *Pfaff*sche Problem.

Die Aufgabe, den Differentialausdruck

$$X_1 dx_1 + X_2 dx_2 + \cdots + X_{2n} dx_{2n}$$

in die Form

$$F_1 df_1 + F_2 df_2 + \cdots + F_n df_n$$

überzuführen, habe ich im 60^{sten} und 61^{sten} Bande dieses Journals auf ein System von $\frac{n.n+1}{2}$ simultanen partiellen Differentialgleichungen zurückgeführt, welche die Functionen f definiren. Diese Differentialgleichungen habe ich durch

$$(f_i) = 0, \quad [f_i, f_k] = 0$$

bezeichnet; und zwar bestimmen sich die Functionen f als simultane Lösung folgender Systeme:

$$\begin{array}{llllll}
f_1 : & (f_1) = 0, & & & & \\
f_2 : & (f_2) = 0, & [f_2, f_1] = 0, & & & \\
f_3 : & (f_3) = 0, & [f_3, f_1] = 0, & [f_3, f_2] = 0, & & \\
\cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & & \\
f_n : & (f_n) = 0, & [f_n, f_1] = 0, & [f_n, f_2] = 0, & \ldots & [f_n, f_{n-1}] = 0.
\end{array}$$

Jedes dieser Systeme bildet nach den a. a. O. bewiesenen Relationen ein vollständiges System in dem oben festgestellten Sinne, aber nicht ein *Jacobi*sches System. Denn wenn $f_1, f_2, \ldots f_{i-1}$ den ersten $i-1$ Systemen genügen, so bestehen für das i^{te} System die Relationen $(k, h = 1, 2, \ldots i-1)$:

$$[(f_i), f_k] - ([f_i, f_k]) = [f_i, f_k], \quad [[f_i, f_h], f_k] - [[f_i, f_k], f_h] = 0.$$

Auf die obigen Systeme sind daher die Betrachtungen der §§. 2, 3 sofort anwendbar, und die Aufsuchung der Functionen f bedarf daher der Kenntniss von je einem Integral für

1 System	von	$2n-1$	gewöhnlichen	Differentialgleichungen
2 Systeme	-	$2n-3$	-	-
3 -	-	$2n-5$	-	-
. . .	. . .	. . .	. . .	. . .
n -	-	1	-	- .

Aber auch hier tritt der Umstand ein, dass jedes folgende System sich nur um *eine* hinzutretende Gleichung von dem vorhergehenden unterscheidet. Man kann daher auch die Methode des Herrn *Weiler* auf dieses Problem anwenden, *und es gelingt nach dieser im Allgemeinen die Auffindung der Functionen f durch Kenntniss je eines Integrals von einem System von* $2n-1$ *gewöhnlichen Differentialgleichungen, und von je zwei Systemen von* $2n-3$, $2n-5$, ... 1 *gewöhnlichen Differentialgleichungen.*

§. 7.

Die partiellen Differentialgleichungen der Invariantentheorie.

Jede absolute Invariante einer Function von n Variabeln genügt bekanntlich einem System von n^2 linearen partiellen Differentialgleichungen erster Ordnung, und es muss eine besondere Eigenschaft dieser partiellen Differentialgleichungen sein, dass sie eine gewisse Anzahl simultaner Lösungen zulassen. Ist p die Ordnung der Function, und

$$(n,p) = \frac{n.n+1\ldots n+p-1}{1.2\ldots p},$$

so ist (n,p) die Anzahl der Coefficienten der Function, also (n,p) die Anzahl der Variabeln, nach denen in jenen Gleichungen differentiirt wird. Die höchste Anzahl gemeinsamer Lösungen, welche jene Gleichungen besitzen können, ist also $(n,p)-n^2$; und wenn jene Gleichungen bereits ein vollständiges System bilden, so besitzen sie in der That so viele gemeinsame Lösungen, d. h. es giebt $(n,p)-n^2$ von einander unabhängige simultane Invarianten. Dies ist der einfachste, und zugleich der strengste Weg, die Existenz von so viel Invarianten wirklich nachzuweisen, und der Nachweis, dass die betreffenden Gleichungen ein vollständiges System bilden, ergänzt also eine wesentliche Lücke der Invariantentheorie.

In der That ist jener Beweis durch wirkliche Bildungen sehr leicht auszuführen. Bezeichne man mit Herrn *Aronhold* (Bd. 62, p. 291 dieses Journals) die n^2 partiellen Differentialgleichungen durch

$$(1.)\qquad D_{\varrho\sigma}(\Pi) = 0,$$

wo ϱ, σ die Werthe 1, 2, ... n zu erhalten haben. Man findet dann wirklich, dass die Operationen

$$D_{\varrho\sigma}(D_{\varkappa\lambda}(\Pi))-D_{\varkappa\lambda}(D_{\varrho\sigma}(\Pi))$$

nur auf lineare Combinationen der Gleichungen (1.) führen, womit jenes

System als ein vollständiges charakterisirt ist. Man erhält nämlich, wie eine sehr einfache Rechnung lehrt, folgende identische Relationen:

$$(2.)\quad \begin{cases} D_{\varrho\varrho}(D_{\varrho\sigma}(\Pi))-D_{\varrho\sigma}(D_{\varrho\varrho}(\Pi)) = -D_{\varrho\sigma}(\Pi), \\ D_{\varrho\varrho}(D_{\sigma\varrho}(\Pi))-D_{\sigma\varrho}(D_{\varrho\varrho}(\Pi)) = D_{\sigma\varrho}(\Pi), \\ D_{\varrho\varrho}(D_{\sigma\sigma}(\Pi))-D_{\sigma\sigma}(D_{\varrho\varrho}(\Pi)) = 0, \\ D_{\varrho\sigma}(D_{\sigma\varrho}(\Pi))-D_{\sigma\varrho}(D_{\varrho\sigma}(\Pi)) = D_{\sigma\sigma}(\Pi)-D_{\varrho\varrho}(\Pi), \\ D_{\varrho\varrho}(D_{\sigma\tau}(\Pi))-D_{\sigma\tau}(D_{\varrho\varrho}(\Pi)) = 0, \\ D_{\varrho\sigma}(D_{\varrho\tau}(\Pi))-D_{\varrho\tau}(D_{\varrho\sigma}(\Pi)) = 0, \\ D_{\varrho\sigma}(D_{\tau\varrho}(\Pi))-D_{\tau\varrho}(D_{\varrho\sigma}(\Pi)) = D_{\tau\sigma}(\Pi), \\ D_{\sigma\varrho}(D_{\tau\varrho}(\Pi))-D_{\tau\varrho}(D_{\sigma\varrho}(\Pi)) = 0, \\ D_{\varrho\sigma}(D_{\tau\lambda}(\Pi))-D_{\tau\lambda}(D_{\varrho\sigma}(\Pi)) = 0. \end{cases}$$

In diesen Gleichungen bedeuten die in derselben Gleichung verschieden bezeichneten Indices auch wirklich von einander verschiedene Zahlen; die Gleichungen (2.) umfassen dann alle möglichen aus (1.) zu bildenden Combinationen.

Die Gleichungen (2.) gelten übrigens auch noch, wenn das System (1.) sich auf *simultane* Invarianten bezieht.

Giessen, den 5. Februar 1865.