

Ueber Relationen zwischen Classenzahlen binärer quadratischer Formen von negativer Determinante.

(Erste Note)*).

Von

J. GIERSTER in Bamberg.

Die acht Formeln, welche Herr Kronecker**) zwischen den Classenzahlen der quadratischen Formen von negativer Determinante aufgestellt hat, sind dadurch hergeleitet worden, dass man in den Modulargleichungen, welche zwischen $u = \frac{1}{k}$, $v = \frac{1}{l}$, resp. zwischen Potenzen von diesen Grössen bestehen, die beiden Moduli einander gleichsetzte***). Auf ganz demselben Wege kann man aus den von Herrn F. Klein eingeführten Modulargleichungen der regulären Körper†) analoge Relationen herleiten, welche in Bezug auf den einfachen arithmetischen Aufbau mit den Formeln Kronecker's auf gleicher Stufe stehen. Ich erlaube mir insbesondere die Resultate mitzutheilen, welche aus den Ikosaeder-Modulargleichungen folgen.

Zu diesem Zwecke seien folgende Festsetzungen getroffen:

Es seien d , a ganze Zahlen, welche der Bedingung $d \cdot a = n$ genügen, und zwar sei immer $d > \sqrt{n}$, also $a < \sqrt{n}$. Es sei ferner δ irgend ein Theiler von n .

Dann bedeute:

$$\Psi_{+1}(n) = \Sigma \left[d + \left(\frac{a}{5} \right) a \right],$$

$$\Psi_{-1}(n) = \Sigma \left[d - \left(\frac{a}{5} \right) a \right],$$

*) Abgedruckt aus den Göttinger Nachrichten vom 4. Juni 1879.

**) Die erste ausführliche Mittheilung siehe Crelle, J. Bd. 57, pag. 248 ff.

***) Siehe insbesondere: Stephen Smith: Report of the British Association 1865 vol. 35. Kronecker: Monatsberichte d. Kgl. Akademie der Wissenschaften zu Berlin. 19. April 1875, Seite 235.

†) F. Klein: „Ueber die Transformation der elliptischen Functionen und die Auflösung der Gleichung 5. Grades.“ Math. Annalen Bd. XIV, pag. 160 ff.

††) Die Functionen $\Phi(n)$, $\Psi(n)$, $H(n)$ sind von Hrn Kronecker in derselben Bedeutung verwendet.

$$\sigma(n) = \Sigma - \left[\binom{a}{5} + \binom{d}{5} \right] \cdot a,$$

$$\Phi(n) = \Sigma \delta,$$

$$\Psi(n) = \Sigma(d - a),$$

wo die Summen rechter Hand hinzuerstrecken sind über alle Theiler d, a, δ von n .

Ferner sei:

$H(n)$ die Anzahl aller nicht äquivalenten Classen ganzzahliger quadratischer Formen $Px^2 + 2Qxy + Ry^2$ von der Determinante $Q^2 - PR = -n$, deren äussere Coefficienten P und R beide gerade sind. Hiebei sind aber die Formenclassen $2\varrho x^2 + 2\varrho y^2$ und $2\varrho x^2 + 2\varrho xy + 2\varrho y^2$ als $\frac{1}{2}$, resp. $\frac{1}{3}$ zu zählen.

$H_1(n)$ bedeute diejenigen Formen von $H(n)$, durch welche quadratische Reste mod. (5) darstellbar sind,

$H_{-1}(n)$ jene, durch welche quadratische Nichtreste mod. (5) dargestellt werden können, so dass immer $H_1(n) = H_{-1}(n)$ ist.

Ausserdem sei $H_1(o) = H_{-1}(o) = 0$; $H(o) = -\frac{1}{4}$, und $H(l) = \Phi(l) = \Psi(l) = 0$, wenn l keine ganze Zahl bedeutet.

Endlich bezeichnen wir mit:

k_0 alle Zahlen $0, \pm 5, \pm 10$, welche ihrem absoluten Werthe nach $\leq \sqrt{4n}$ sind;

k_{+1} alle Reste mod. (5), d. h. die Zahlen:

$1, 4, 6, 9 \dots$, welche $\leq \sqrt{4n}$ sind;

k_{-1} alle Nichtreste mod. (5), d. h. die Zahlen:

$2, 3, 7, 8 \dots$, welche $\leq \sqrt{4n}$ sind;

k alle Zahlen, $0, \pm 1, \pm 2, \pm 3 \dots$, welche ihrem absoluten Werthe nach $\leq \sqrt{4n}$ sind.

Dann bestehen folgende Relationen:

I. $n \equiv \pm 1$ mod. (5).

$$1) \quad 2 \cdot \Sigma H(4n - k_0^2) = \Phi(n) + 2 \cdot \Psi(n) - 2\Psi_{\mp 1}(n),$$

$$2) \quad 60 \cdot \Sigma H\left(\frac{4n - k_{\mp 1}^2}{25}\right) = 6\Psi_{\mp 1}(n) - 5\Phi(n),$$

$$3) \quad 5 \cdot \Sigma H_1(4n - k_{\mp 1}^2) = 5 \Sigma H_{-1}(4n - k_{\mp 1}^2) = \Psi_{\mp 1}(n),$$

$$4) \quad 3 \cdot \Sigma H(4n - k_{\pm 1}^2) = \Phi(n).$$

II. $n \equiv \pm 2$ mod. (5).

$$1) \quad 3 \cdot \Sigma H(4n - k_0^2) = \Phi(n),$$

$$2) \quad 2 \cdot \Sigma H(4n - k_{\mp 1}^2) = \Psi(n),$$

$$3) \quad 3 \cdot \Sigma H(4n - k_{\pm 1}^2) = \Phi(n).$$

$$\text{III. } n \equiv 0 \pmod{5}, \\ = 5^\mu \cdot m, \text{ wo } m \not\equiv 0 \pmod{5}.$$

$$1) \Sigma H_{+1}(4n - k_0^2) = \Phi(m) + 2\Phi\left(\frac{n}{25}\right) + 2\Psi\left(\frac{n}{25}\right), \\ 2) \frac{1}{2} \cdot \Sigma \left(\frac{k}{5}\right) H(4n - k^2) = \sigma(n).$$

Die Summation linker Hand erstreckt sich in allen diesen Formeln auf die oben mit k_0, k_{+1}, k_{-1}, k bezeichneten Zahlenreihen und in den Formeln I. und II. gehören die oberen, respective die unteren Vorzeichen zusammen. $\left(\frac{k}{5}\right)$ bedeutet das Legendre'sche Zeichen.

Zwischen diesen Formeln und den Kronecker'schen besteht, soviel ich sehen kann, nur die Abhängigkeit, dass es eine Combination giebt, welche sich auch aus den Kronecker'schen ableiten lässt. Diese Combination liefert die Formel:

$$A) \Sigma H(4n - k^2) = \Phi(n) + \Psi(n)$$

die sich auch direct aus den Modulargleichungen ergibt, welche zwischen den rationalen Invarianten J, J' des elliptischen Integrales erster Gattung bestehen. Bezeichnet man nämlich die Kronecker'schen Relationen, gebildet für die Zahl m der Reihe nach mit $I(m), \dots$ so findet man mit Hülfe der Fundamentalrelationen, welche zwischen den von Hrn. Kronecker gebrauchten Functionen $F(n), G(n)$ und der Function $H(n)$ bestehen, leicht, dass:

$$A = \begin{cases} I(n) - II(m) & \text{oder} \\ I(n) - \frac{2}{3}I(m) + \frac{1}{3}IV(m) - \frac{1}{3}V(m) \end{cases}$$

ist (wo $n = 2^\mu \cdot m$ und m ungerade ist), und zwar je nachdem μ ungerade oder gerade ist.