



Dasselbe Konstruktionsverfahren wende man auf jede der vier neuen Strecken  $AC$ ,  $CD$ ,  $DE$ ,  $EB$  usw. an. Die positive Richtung sei  $ACDEB$ . Die Eckpunkte sämtlicher so entstandenen gleichseitigen Dreiecke und deren Häufungspunkte bildet die von Kochsche Kurve. Daß die Punkte der von Kochschen Kurve sich den Punkten einer geraden Linie eindeutig zuordnen lassen, daß ferner die von Kochsche Kurve keine Doppelpunkte besitzt, ist bereits von H. v. Koch<sup>1)</sup> auf mehr arithmetischem, von Knopp<sup>2)</sup> auf mehr geometrischem Wege bewiesen worden. Ich setze also als bewiesen voraus, daß die von Kochsche Kurve eine doppelpunktslose, Jordansche Kurve ist.

Man bezeichne nun die Eckpunkte  $A, C, D, E, B$  des durch die erste Operation entstandenen gebrochenen Linienzuges als „Eckpunkte erster Ordnung“, die Eckpunkte des durch die zweite Operation entstandenen gebrochenen Linienzuges  $A, F, G, H - C, J, K, L - D, M, N, O$  usw. als „Eckpunkte zweiter Ordnung“ usf., ferner das gleichschenklige Dreieck  $ADB$  als „gleichschenkliges Dreieck erster Ordnung“, die vier Dreiecke  $AGC$ ,  $CKD$ ,  $DNE$  und  $EQB$  als „gleichschenklige Dreiecke zweiter Ordnung“ usw.; dann liegen im „gleichschenkligen Dreieck erster Ordnung“  $ADB$  die vier „gleichschenkligen Dreiecke zweiter Ordnung“ und in diesen die 16 „gleichschenkligen Dreiecke dritter Ordnung“ usw. Es liegen somit die Eckpunkte aller Ordnungen und daher auch deren Häufungspunkte im Innern oder auf dem Rande des „gleichschenkligen Dreiecks erster Ordnung“. In gleicher Weise liegen alle zwischen den Eckpunkten erster Ordnung  $A$  und  $C$  gelegenen Kurvenpunkte im Innern oder auf dem Rande des „gleichschenkligen Dreiecks zweiter Ordnung“  $AGC$ . Allgemein liegen die zwischen zwei aufeinander folgenden Eckpunkten  $n$ -ter Ordnung gelegenen Kurvenpunkte im Innern oder auf dem Rande des zugehörigen „gleichschenkligen Dreiecks  $(n+1)$ -ter Ordnung“.

Es sei nunmehr  $X$  ein beliebiger Kurvenpunkt, er liege zwischen  $A$  und  $C$ , also im ersten der vier „gleichschenkligen Dreiecke zweiter Ordnung“; dann verbinde ich  $X$  mit den beiden auf ihn folgenden Eckpunkten erster Ordnung  $C$  und  $D$ . Der von den beiden Sekanten eingeschlossene Winkel ist dann  $\angle DXC \geq \angle DAC = 30^\circ$ , weil  $X$  im Innern oder auf dem Rande des Dreiecks  $ADC$  liegt. Liegt  $X$  im zweiten der „gleichschenkligen Dreiecke zweiter Ordnung“, so ziehe ich die Sekanten  $XD$  und  $XE$ . Der von ihnen eingeschlossene Winkel ist gleichfalls dann  $\angle DXE \geq \angle DAE = 30^\circ$ , weil  $X$  im Dreieck  $DAE$  liegt. Ebenfalls ist, falls  $X$  im dritten der

<sup>1)</sup> Sur une courbe continue sans tangente obtenue par une construction géométrique élémentaire. (Ark. f. Math. Astr. och Fys. 1, 1904, S. 681–702.)

<sup>2)</sup> Einheitliche Erzeugung und Darstellung der Kurven von Peano, Osgood und v. Koch, Arch. d. Math. u. Phys. (3) 26, 1918, S. 103–115.

„gleichschenkligen Dreiecke zweiter Ordnung“ liegt,  $\angle BXE \geq BDE = 30^\circ$ . Es lassen sich, abgesehen von dem Falle, daß  $X$  im vierten gleichschenkligen Dreieck liegt, stets zwei vorwärts genommene Sekanten angeben, deren Richtungen mindestens um  $30^\circ$  voneinander verschieden sind.

Da diese Betrachtungen sich in derselben Weise auf die Eckpunkte  $n$ -ter Ordnung übertragen lassen, so kann man sagen: Abgesehen von dem Falle, daß im Kurvenpunkt  $X$  von einer bestimmten Stelle ab immer nur im vierten „gleichschenkligen Dreieck  $n$ -ter Ordnung“ liegt, lassen sich in der Nachbarschaft von  $X$  stets geeignete vorwärts genommene Sekanten ziehen, die voneinander um mindestens  $30^\circ$  in ihrer Richtung abweichen. Die vorwärts genommenen Sekanten nähern sich also keiner Grenzlage, es ist keine vorwärts genommene Tangente möglich. Kommt aber  $X$  von einer gewissen Stelle ab immer nur in einem vierten „gleichschenkligen Dreieck  $n$ -ter Ordnung“ vor, dann ist  $X$  selbst Eckpunkt irgendeiner Ordnung und für ihn existiert ebenfalls keine vorwärts genommene Tangente. Da dieselbe Betrachtung in gleicher Weise auch für die rückwärts genommenen Sekanten gelten, so ist damit bewiesen, daß die von Kochsche Kurve weder vorwärts noch rückwärts in irgendeinem Punkte eine Tangente besitzen kann. Die von Kochsche Kurve ist also wirklich völlig tangentiallos.

## § 2.

Der zweite Beweis für die völlige Tangentenlosigkeit der von Kochschen Kurve beruht auf der Erweiterung eines Kriteriums, das sich auf das Fehlen eines endlichen einseitigen Differentialquotienten bezieht. Dieses Kriterium lautet:

„Eine Funktion hat im Punkte  $x_0$  keinen *einseitigen* endlichen Differentialquotienten, wenn sich *auf dieser Seite* eine Folge gegen  $x_0$  konvergierender Punktepaare  $(x'_n, x''_n)$  angeben läßt, für welche der *einseitige* Differenzenquotient sich keiner endlichen Grenze annähert, vorausgesetzt, daß  $|x''_n - x'_n|$  im Vergleich zu  $|x'_n - x_0|$  nicht unendlich klein wird.

Der Beweis wird indirekt geführt. Angenommen, die Funktion hätte an der Stelle  $x = x_0$  einen rechts genommenen Differentialquotienten  $f'(x_0 + 0) = D$ , dann müßten in hinreichender Nähe folgende Gleichungen gelten:

$$\begin{aligned} f(x''_n) - f(x_0) &= D(x''_n - x_0) + \varepsilon''_n(x''_n - x_0) \\ f(x'_n) - f(x_0) &= D(x'_n - x_0) + \varepsilon'_n(x'_n - x_0) \\ \hline f(x''_n) - f(x'_n) &= D(x''_n - x'_n) + \varepsilon''_n(x''_n - x_0) - \varepsilon'_n(x'_n - x_0). \end{aligned}$$

Dividiert man beide Seiten der Gleichung durch  $x''_n - x'_n$  und berücksichtigt, daß die Quotienten  $\left| \frac{x''_n - x_0}{x''_n - x'_n} \right|$  und  $\left| \frac{x'_n - x_0}{x''_n - x'_n} \right|$  unterhalb einer endlichen Grenze bleiben, die Werte von  $\varepsilon$  schließlich unendlich klein werden, so würde daraus folgen, daß auch der Differenzenquotient  $\frac{f(x''_n) - f(x'_n)}{x''_n - x'_n}$  sich dem Werte  $D$  annähern müßte. Das ist aber gegen die Voraussetzung.

Dieses Kriterium gestattet, aus dem Verhalten der *einseitigen* Differenzenquotienten einen Rückschluß zu ziehen auf die Existenz des *einseitigen* Differentialquotienten, während in der Literatur über die Theorie der nichtdifferentiierbaren Funktionen meistens nur das Fehlen eines *zweiseitigen* Differentialquotienten aus dem Verhalten des *zweiseitigen* Differenzenquotienten geschlossen wird. Zu betonen ist, daß die beschränkende Voraussetzung, daß  $|x''_n - x'_n|$  im Vergleich zu  $|x'_n - x_0|$  nicht unendlich klein wird, notwendig ist, wie man es an der Funktion  $x^2 \sin \frac{1}{x}$  für  $x = 0$  ansehen kann. Obwohl in der Nähe von  $x = 0$  der Differenzenquotient dauernd hin und her schwankt, gibt es doch einen bestimmten endlichen Differentialquotienten an der Stelle  $x = 0$ . Dagegen ist nicht notwendig, daß die Funktion eindeutig ist. Es gilt auch für Jordansche Kurven, die in der Form  $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$  ( $\varphi$  und  $\psi$  stetig) dargestellt werden. Nur muß man darauf achten, daß für das Fehlen einer einseitigen schrägen Tangente im Punkte  $P_0(x_0, y_0, t_0)$  nur eine Folge von solchen Punktepaaren  $P'_n, P''_n (t_0 < t'_n < t''_n)$  verwandt werden darf, für die nicht nur die Koordinaten  $x, y$  gegen  $x_0, y_0$ , sondern auch die Parameter  $t$  gegen  $t_0$  konvergieren; denn von der Eindeutigkeit ist bei der Beweisführung nirgends Gebrauch gemacht worden.

### § 3.

Bei der Verallgemeinerung dieses Kriteriums auf Jordansche Kurven [ $x = \varphi(t)$ ,  $y = \psi(t)$ ] tritt eine Änderung der Bedingungen insofern ein, daß anstatt der Projektionen der Sehnen auf die  $X$ -Achse diese Sehnen selbst treten.

„Läßt sich in der Nähe eines Punktes  $P_0$  eine Folge von auf  $P_0$  folgenden Punktepaaren  $P'_n, P''_n$  angeben, für welche die Größe der Sehne  $\overline{P'_n P''_n}$  nicht unendlich klein wird im Vergleich zu  $\overline{P_0 P'_n}$ ,<sup>3)</sup> so existiert in  $P_0$  keine vorwärts gezogene Tangente, wenn diese Sekanten  $\overline{P'_n P''_n}$  sich keiner Grenzlage annähern“.

<sup>3)</sup> D. h.  $\overline{P'_n P''_n} > k \cdot \overline{P_0 P'_n}$ ,  $k$  fest.

Zunächst kann man sich darauf beschränken, das Fehlen einer schrägen Tangente nachzuweisen. Denn man kann ja das Koordinatensystem drehen, da ja die Größen, die einer beschränkenden Voraussetzung unterworfen sind, vom Koordinatensystem unabhängig sind. Ebenso kann ohne Beschränkung der Allgemeinheit vorausgesetzt werden, daß die Sekanten von der vertikalen Richtung eines geeignet gelegten Koordinatensystems in ihrer Richtung um einen Winkel abweichen, der größer ist als eine kleine aber feste Größe  $\delta$ .<sup>4)</sup> Bezeichnet man dann den Winkel, den  $\overline{P_0 P'_n}$  mit der  $X$ -Achse bildet, mit  $\alpha$  und den Winkel, den  $\overline{P'_n P''_n}$  mit der  $X$ -Achse bildet, mit  $\beta$ , dann ist:

$$(x''_n - x'_n) : (x'_n - x_0) = \overline{P'_n P''_n} \cos \beta : \overline{P_0 P'_n} \cos \alpha.$$

Ersetzt man  $\cos \beta$  durch die kleinere Größe  $\cos \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right)$  und  $\cos \alpha$  durch 1 in der vorangehenden Proportion, so ist

$$\frac{x''_n - x'_n}{x'_n - x_0} > \frac{P'_n P''_n}{P_0 P'_n} \cos \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right).$$

Da aber der Bruch  $\frac{P'_n P''_n}{P_0 P'_n}$  der Voraussetzung nach größer als  $k$  ist, so ist  $\frac{x''_n - x'_n}{x'_n - x_0}$  größer als  $k \cos \left( \frac{\pi}{2} - \delta \right) = k'$ .

Der weitere Beweis ist derselbe wie in § 2. Angenommen, es gäbe eine vorwärts genommene schräge Tangente mit dem Richtungsfaktor  $D$ , so müßten sich in hinreichender Nähe alle Kurvenpunkte, die auf  $P_0$  folgen, in einen beliebig schmalen Winkelraum einschließen lassen. Da nun  $x''_n - x'_n$  nicht unendlich klein wird im Vergleich zu  $x'_n - x_0$ , so folgt mit Hilfe derselben Gleichung wie in § 2, daß die Sekanten sich derselben Richtung annähern müßten, wie sie die Tangente besitzen würde. Das aber geht gegen die Voraussetzung. Der Unterschied des erweiterten Kriteriums von dem Kriterium in § 2 besteht darin, daß in § 2 noch eine einseitige vertikale Tangente möglich ist, hier aber auch diese ausgeschlossen ist, da man ja das Koordinatensystem drehen kann. In § 2 ist eine Drehung nicht möglich, weil die Voraussetzungen, unter denen das Kriterium gültig ist, vom Koordinatensystem nicht unabhängig sind.

<sup>4)</sup> Wählt man  $\delta$  hinreichend klein, so bleiben nach Weglassung der Sekanten, deren Abweichungen von der vertikalen Richtung geringer als  $\delta$  sind, immer noch unendlich viele Sekanten in beliebiger Nähe von  $P_0$  mit den verlangten Eigenschaften übrig.

## § 4.

Bei der Kochschen Kurve sind die Voraussetzungen des erweiterten Kriteriums ohne weiteres erfüllt. Versteht man unter der Sehne  $\overline{P'_n P''_n}$  die erste oder die zweite auf  $P_0$  folgende Sekante  $n$ -ter Ordnung, so ist

$\frac{\overline{P'_n P''_n}}{P_0 P'_n} > \frac{1}{3}$ . Diese Sekanten aber bilden einen Winkel von  $60^\circ$  miteinander.

Lasse ich  $n$  unendlich groß werden, so folgt daraus, daß die Kurve völlig tangentiallos ist. Im Anschluß an Helge von Koch hat Knopp Kurven konstruiert, die eine Verallgemeinerung der Kochschen Kurve darstellen. Statt eines gleichseitigen Dreiecks läßt Knopp auch ungleichseitige Dreiecke zu. Die Tangentiallosigkeit behauptet Knopp auch von seinen Kurven nur insofern, als die zweiseitigen Sekanten sich keiner Grenzlage annähern. Durch seinen Beweis sind Ecken und Spitzen nicht ausgeschlossen. Auch hier wird in den Fällen, in denen die Bedingungen des erweiterten Kriteriums zutreffen, die völlige Tangentiallosigkeit erreicht; und damit ist für Jordansche Kurven das Problem endgültig erledigt.

(Eingegangen am 15. Dezember 1920.)